КВАНТ
ЖУРНАЛ

1984

1 - 12

НОМЕР
1

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант **1** **1984**

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	**IN THIS ISSUE:**
2	*В. Л. Гинзбург.* О ключевых проблемах физики и астрофизики	*V. L. Ginzburg.* Key problems in physics and astrophysics
8	*А. А. Боровой.* Искуственная радиоактивность	*A. A. Borovoy.* Artificial radioactivity
14	*И. Х. Сабитов.* Так ли прост евклидов мир?	*I. Kh. Sabitov.* Is the Euclidean world so simple?
	Новости науки	**Science news**
7	Стабилизированный одноатомный водород	Stabilized monoatomic hydrogen
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
21	*И. А. Медков.* Удивительная жидкость	*I. A. Medkov.* A surprising liquid
	Математический кружок	**Mathematics circle**
24	*В. Л. Гутенмахер.* Системы линейных уравнений	*V. L. Gutenmacher.* Systems of linear equations
30	**Геометрическая страничка**	**Geometric page**
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
32	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school-children**
39	Задачи	Problems
40	*А. П. Савин.* В уме и на пальцах	*A. P. Savin.* In your head and on your fingers
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
42	Задачи М841—М845; Ф853—Ф857	Problems M841—M845; P853—P857
45	Решения задач М826—М830; Ф837—Ф841	Solutions M826—M830; P837—P841
	Информация	**Information**
53	Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу	Entrance requirements to the All-Union mathematics correspondence school
54	Заочная физико-техническая школа при МИСиСе	The MISIS physico-technological correspondence school
54	Новый прием на заочное отделение Малого мехмата	Entrance requirements to the correspondence "Maly mekhmat" school
56	**Варианты вступительных экзаменов**	**College entrance examination**
60	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь (*13*)	**Miscellaneous** (*13*)
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Рентген (*3-я с. обложки*)	X-raus (*3rd cover page*)

Фотография на первой странице обложки иллюстрирует свойство ферромагнитной жидкости «запоминать» нанесенный на ее поверхность рисунок. Об этой удивительной жидкости можно прочитать в статье И. А. Медкова

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1984

О ключевых проблемах физики и астрофизики

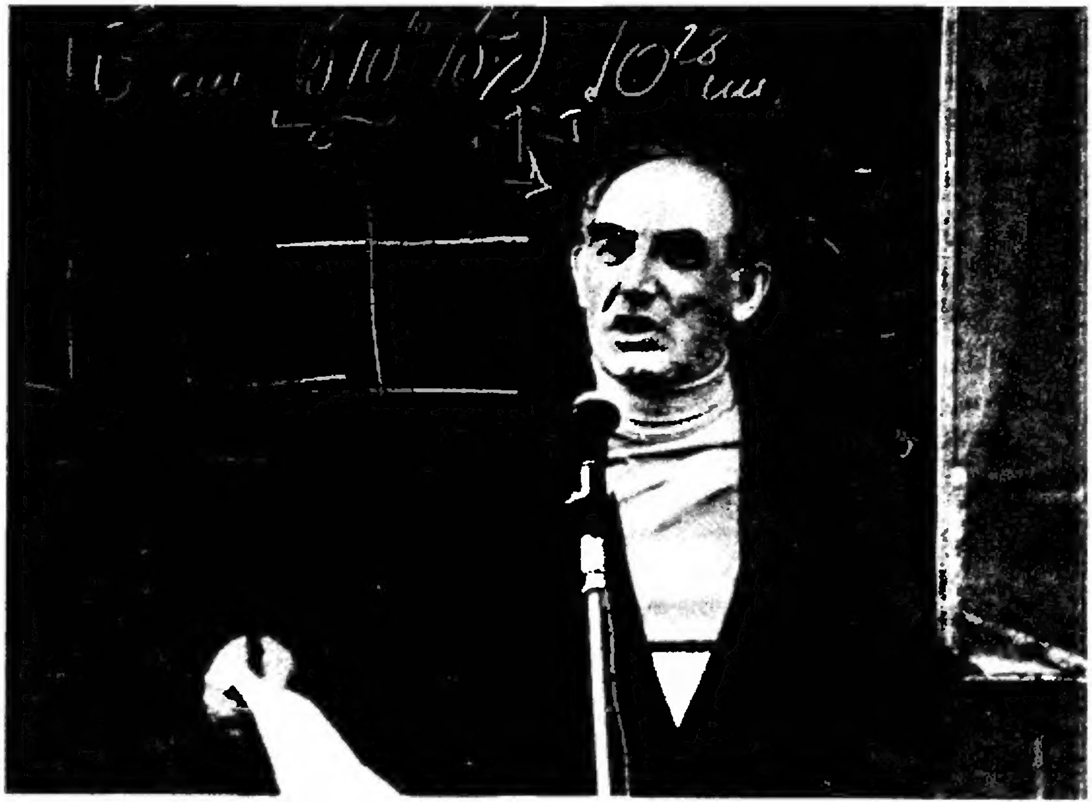
Академик В. Л. ГИНЗБУРГ

Если уподобить физику зданию, то это — огромное многоэтажное здание с мощным фундаментом, подвальными помещениями и эффектными башенками. Рядом подъездные пути, ведущие на заводы, в клиники, на полигоны. Многие тысячи людей, многочисленные лаборатории, сотни различных установок и приборов, большие библиотеки, сотни журналов... Здание все время достраивается, разрастается. Тысячи проблем и задач, многое взаимосвязано, с трудом отделяется от соседнего и выделяется из общего. С другой стороны, происходит дифференциация и разъединение, люди годами работают рядом, но остаются незнакомыми. Здание начинает напоминать Вавилонскую башню.

В то же время для физики характерно (быть может, правильнее сказать — все еще характерно) глубокое внутреннее единство идей и методов. Разрастание здания лишь ведет к тому, что становится все труднее выявить это единство, проследить и использовать его. Впрочем, на уровне преподавания основ физики, включая теоретическую физику, особых проблем не возникает, они появляются позже, приходят с узкой специализацией. Не раз приходилось сталкиваться с такой картиной: хороший, способный студент или уже научный работник, автор оригинальных статей, имеет весьма узкий кругозор. Скажем, он знаком с глубокими и трудными проблемами квантовой теории поля, но о нейтронных звездах, черных дырах, сегнетоэлектриках, сверхпроводниках, жидком гелии-три (^{3}He) и многом другом не имеет достаточного представления даже на качественном уровне. Между тем для успеха в работе очень важно видеть широкий горизонт и, во всяком случае, не замыкаться в пределах «своей темы». В целом, известная формулировка «все об одном и кое-что обо всем», пусть и не в буквальном смысле, но все же отражает цель, к которой нужно стремиться.

Конечно, для школьника такая цель — это еще довольно далекое будущее, но я совершенно убежден в том, что начинать можно и нужно уже в школе: не ограничиваться школьной программой и учебниками, знакомиться с широким кругом явлений, с последними научными достижениями и открытиями. Разумеется, речь здесь идет о понимании на качественном уровне, в известном отношении — о поверхностном ознакомлении. Но и это совсем не мало и во многом может облегчить дальнейший путь. Да, наконец, для интересующихся наукой узнавать, чем сегодня «живет и дышит» физика, астрономия, биология, просто очень интересно, не менее увлекательно, чем для любителей соответствующей литературы — читать о путешествиях и приключениях.

Естественно, для решения поставленной задачи нужна научно-популярная литература, доступная школьникам. Вот уже более 50 лет (!) прошло, а я с благодарностью помню, какую роль сыграла для меня в школьные годы книга О. Д. Хвольсона «Физика наших дней». К сожалению, назвать сегодня аналогичную по широте и глубине книгу я не могу, да и физика за это время так разрослась, что,



Рассказывает Виталий Лазаревич Гинзбург.

быть может, сегодня нужен уже несколько иной подход к ее популяризации. Об одном из возможных путей я как раз и хочу здесь рассказать.

Среди огромного числа проблем, задач и вопросов, изучением которых заняты физики и астрофизики, некоторые выделены в силу своей большой потенциальной важности для техники, существования каких-то трудно преодолимых препятствий при попытках решения, особой таинственности, глубины и т. п. Поэтому имеет известный смысл составление списка «особенно важных и интересных» или «ключевых» проблем физики и астрофизики. Конечно, такой список не может не носить несколько условный характер, и вообще, здесь необходимы некоторые пояснения и оговорки, о них еще пойдет речь ниже.

Так или иначе, более десяти лет назад я составил подобный список и написал для обзорного журнала «Успехи физических наук» статью «Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными?» (УФН, том 103, с. 87, 1971 год). При этом я рассматривал составление списка и комментариев к нему как некоторый педагогический прием, способ расширить кругозор молодых физиков. Но мнения молодежи я не знаю и до сих пор. Зато совершенно неожиданно статья навлекла на меня град упреков со стороны коллег-физиков среднего и старшего поколений. Некоторые из них считают, что вообще нельзя выделять «особенно интересные и важные проблемы», другие обижаются, если в списке таких проблем нет тех, которыми они сами занимаются, и т. д. и т. п. С такой критикой я не согласен и в ответ на нее превратил упомянутую статью в небольшую книжку, переведенную уже на многие языки*). Последнее свидетельствует по крайней мере о том, что обсуждение «ключевых вопросов» вызывает интерес. Недавно я опубликовал статью того же названия, что и в 1971 году, но с подзаголовком «десять лет спустя» (УФН, том 134, с. 469, 1981 год).

---

*) Книжка называется «О физике и астрофизике». Последнее (третье) издание выпущено издательством «Наука» в 1980 году.

Ее цель — не попытка соревноваться с Дюма, а желание проследить за развитием физики и астрофизики за десятилетие (1971—1981) на примере некоторого количества ключевых проблем *).

Но, как говорят англичане, "the proof of the pudding is in the eating" — для того чтобы оценить качества пудинга, нужно его съесть,— и пора, наконец, привести список, о котором идет речь.

Макрофизика

1. Управляемый термоядерный синтез.

2. Высокотемпературная сверхпроводимость.

3. Новые вещества (проблемы создания металлического водорода и некоторых других «необычных» веществ).

4. Металлическая экситонная (электронно-дырочная) жидкость в полупроводниках. Переходы металл — диэлектрик. Спиновые стекла.

5. Фазовые переходы второго рода и близкие к ним (критические явления).

6. Физика поверхности.

7 Поведение вещества в сверхсильных магнитных полях.

8. Изучение очень больших молекул. Жидкие кристаллы.

9. Разеры, гразеры и лазеры новых типов.

10. Солитоны. Странные аттракторы. Нелинейные явления.

11. Сверхтяжелые элементы (далекие трансураны). «Экзотические» ядра.

Микрофизика

12. Кварки и глюоны. Квантовая хромодинамика.

13. Единая теория слабого и электромагнитного взаимодействия. W-, Z-бозоны. Лептоны.

14. Великое объединение. Распад протона. Масса нейтрино. Суперобъединение.

15. Фундаментальная длина. Взаимодействие частиц при высоких и сверхвысоких энергиях.

16. Нарушение *CP*-инвариантности. Нелинейные явления в вакууме, в сверхсильных магнитных и электрических полях. Фазовые переходы в вакууме.

Астрофизика

17. Экспериментальная проверка и границы применимости общей теории относительности.

18. Гравитационные волны.

19. Космологическая проблема. Связь космологии с физикой высоких энергий.

20. Нейтронные звезды и пульсары. Физика черных дыр.

21. Квазары и ядра галактик. Образование галактик.

22. Происхождение космических лучей и космического гамма- и рентгеновского излучения.

23. Нейтринная астрономия.

Разделение всех этих проблем на макрофизику, микрофизику и астрофизику довольно условно. Выделение 23 тем, а не, скажем, 20 или 30 — тоже условно. Почти полное отсутствие вопросов, связанных с биологией, объясняется не недооценкой важности связей физики с биологией (напротив, я отношусь к биофизике с особым уважением и интересом), а стремлением все же как-то ограничить тематику и, кроме того, совсем недостаточной моей компетентностью в биологии. Наконец, главное: не может и не должно быть речи о том, чтобы заниматься только «ключевыми» проблемами. Последние как-то выделены и привлекают особое внимание в силу отмеченных выше черт. Однако, каким бы разумным образом ни определять понятие «ключевая проблема», вряд ли найдутся даже два физика, которые составят совершенно одинаковые списки таких проблем.

Каждой из перечисленных мною 23 проблем посвящена обширная литература, часто специальные монографии. Но в большинстве случаев рассказать об основах, пояснить на «школьном» уровне, в чем состоит проблема, вполне возможно в небольшой журнальной статье или даже на одной странице.

---

*) В этой статье, а также в книжке, о которой я упоминал, можно найти довольно многочисленные ссылки на литературу по всем затрагиваемым вопросам

Приведу два примера.

Чтобы понять, в чем состоит проблема управляемого термоядерного синтеза, необходимо, прежде всего, знать, что атомные ядра состоят из протонов (p) и нейтронов (n). Протон является вместе с тем ядром самого легкого изотопа водорода ($p \equiv {}^1H$). Но у водорода имеются два более тяжелых изотопа — дейтерий и тритий. Ядра дейтерия ($d \equiv {}^2H$) и трития ($t \equiv {}^3H$) — это, соответственно, протон + нейтрон и протон + два нейтрона. Атомные ядра заряжены — заряд ядра с порядковым номером Z в таблице Менделеева в Z раз больше заряда протона (дело, очевидно, просто в том, что в таком ядре находится Z протонов).

Одноименные заряды отталкиваются, и поэтому ядра могут приблизиться друг к другу на малое расстояние, лишь если до столкновения они обладали достаточно большой кинетической энергией. Такой энергией обладают, например, частицы горячей плазмы (плазмой называют ионизированный газ; при достаточно высокой температуре любой газ полностью ионизируется — становится полностью ионизированной плазмой; например, горячая водородная плазма состоит из электронов и ядер соответствующих изотопов водорода). На близких расстояниях между ядрами действуют не только электрические, но и ядерные силы. В результате их действия могут протекать ядерные реакции — превращения одних ядер в другие. Конкретно, при соударении ядер дейтерия идут реакции

$$d+d \to {}^3He+n+3{,}27\ \text{МэВ}, \quad (1)$$

$$d+d \to t+p+4{,}03\ \text{МэВ}. \quad (2)$$

Здесь ${}^3He$ — ядро легкого изотопа гелия (оно состоит из двух протонов и одного нейтрона), значения 3,27 МэВ и 4,03 МэВ — это энергии, которые выделяются (в форме кинетической энергии продуктов реакции) при соответствующих превращениях. Упомянем также реакции

$$d+t \to {}^4He+n+17{,}6\ \text{МэВ}, \quad (3)$$

$${}^6Li+n \to t+{}^4He+4{,}6\ \text{МэВ}. \quad (4)$$

Первая из них (реакция (3)) сопровождается особенно большим энерговыделением, и поэтому смесь дейтерия с тритием более «калорийна», чем чистый дейтерий. Реакция (4) позволяет регенерировать тритий, который радиоактивен и практически отсутствует в природе.

Реакции (1), (2), (3) и многие им подобные, при которых из более легких элементов получаются (синтезируются) более тяжелые, называются реакциями синтеза. Такие реакции происходят в звездах — именно они являются основным источником энергии в звездах. Сказанное, вероятно, большинству школьников и так известно, но пришлось об этом напомнить, чтобы сформулировать проблему управляемого термоядерного синтеза. Она состоит в том, чтобы использовать реакции (1), (2) или (3), а возможно и некоторые другие, для нужд энергетики.

Над этой задачей работают уже четвертое десятилетие, и сейчас нет сомнений в возможности создания термоядерных реакторов, в которых реакция (3), а затем и реакции (1), (2) будут протекать в таких масштабах, что не только обеспечат энергоснабжение, необходимое для работы самого реактора, но и будут производить энергию для промышленных нужд*). Существуют проекты и модели термоядерных реакторов разного типа. В реакторах с магнитным удержанием плазмы (токамаки и др.) очень горячая плазма удерживается в замкнутых сосудах (ловушках) магнитным полем. В реакторах инерциального типа крупинка (капелька) из дейтериево-тритиевой смеси очень быстро «обжимается» светом лазеров или пучками заряженных частиц. В результате должен происходить микровзрыв, энергию которого и предполагается использовать.

Недостаток места не позволяет здесь подробнее останавливаться на проблеме термоядерного синтеза. Я хотел лишь продемонстрировать, что понять основы вовсе не трудно. То же относится к большинству проблем, упомянутых в нашем списке. Например, легко объяснить, что такое нейтронная звезда. Такая звезда представляет собой как бы гигантское атомное ядро, состоящее в основном из нейтронов, но с примесью одинакового числа протонов и электронов. Плотность вещества в обычных атомных ядрах порядка $\varrho_я = 3 \cdot 10^{14}$ г/см^3 $= 3 \cdot 10^{17}$ кг/м^3. Средняя плотность вещества в нейтронных звездах, грубо говоря, такого же порядка (сама плотность в данной точке звезды зависит от массы звезды и расстояния до ее центра). Поэтому сразу же легко оценить, что звезда с массой Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг, превратившись в нейтронную звезду, будет иметь радиус

---

*) Следует заметить, что при практическом осуществлении термоядерного синтеза возникает много сложных инженерных проблем

$$r_н \sim \left(\frac{3M_\odot}{4\pi\varrho_я}\right)^{1/3} \sim 10^4 \text{ м} = 10 \text{ км}$$

(радиус фотосферы — видимой поверхности Солнца — $r_\odot = 7 \cdot 10^8$ м).

В 1967—68 годах были открыты так называемые пульсары — космические источники периодически повторяющихся импульсов радиоизлучения. Оказалось, что пульсары представляют собой быстро вращающиеся и сильно намагниченные нейтронные звезды (например, пульсар PSR 0531, находящийся в знаменитой Крабовидной туманности — остатке взрыва сверхновой звезды в 1054 году, делает 30 оборотов в секунду; магнитное поле на поверхности пульсара в тысячи миллиардов раз сильнее магнитного поля Земли).

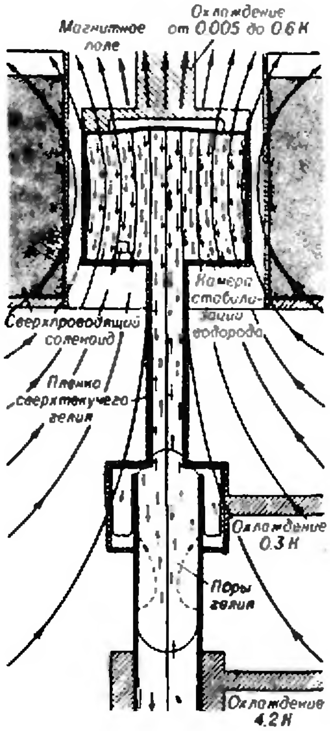
Почему и как «обычные» звезды превращаются в нейтронные звезды? Каково строение этих звезд на разных глубинах? Почему они быстро вращаются? На эти и многие подобные вопросы также можно дать качественные ответы. Например, быстрое вращение нейтронных звезд связано с законом сохранения момента количества движения — при сжатии вращающегося тела оно начинает вращаться быстрее (всем известно, как это обстоятельство используется в балете и при фигурном катании на льду).

Мне хотелось бы, чтобы читатель-школьник (и особенно такой уже почти взрослый человек, каким является 15—17-летний ученик 9 или 10 класса) сделал такие выводы. Во-первых, не нужно думать, что даже самые последние достижения физики, астрофизики и, скажем, биологии недоступны для понимания школьника. Напротив, в большинстве случаев качественное представление о сути дела, о характере открытий можно получить без большой затраты труда. Во-вторых, для человека, любящего науку, узнавать о новых явлениях и эффектах, знакомиться с научными новостями, чувствовать пульс научной мысли — огромное удовольствие, радость. Думаю, что эти чувства вполне сравнимы и сопоставимы с теми, которые посещают людей при «встрече» с произведениями искусства. В-третьих, нужно занимать активную позицию. К сожалению, как в школах, так и в институтах, не везде и не всегда заботятся о приобщении учащихся к научным новостям, достижениям современной науки. Не произойдет это приобщение и при игре на гитаре, и даже в процессе столь интеллектуальной игры как шахматы. (Очень прошу читателей не воспринимать это замечание как совет не играть на музыкальных инструментах или в шахматы. Я хотел лишь подчеркнуть, что это не должно мешать занятиям наукой.) Нужно самому искать ответы, читать научно-популярные книги и журналы. Быть может, приведенный список ключевых проблем физики и астрофизики, при всей его условности и ограниченности, также поможет понять, о чем можно и интересно было бы узнать.

Стабилизированный одноатомный водород

До сих пор считалось, что существует единственное вещество, в котором квантовые свойства проявляются не только в микроскопических, но и в макроскопических масштабах. Это жидкий гелий при низких температурах. Он не обладает вязкостью (сверхтекучесть) и при нормальном давлении не отвердевает при самом сильном охлаждении, вплоть до абсолютного нуля (при сжатии гелий замерзает).

Недавно сотрудниками Амстердамского университета получено еще одно квантовое вещество — одноатомный водород. По предсказаниям теории это вещество должно обладать еще более уникальными свойствами — атомарный водород останется газообразным даже при абсолютном нуле температур.


Магнитное поле
Охлаждение от 0,005 до 0,6 К
Камера стабилизации водорода
Сверхпроводящий соленоид
Пленка сверхтекучего гелия
Охлаждение 0,3 К
Пары гелия
Охлаждение 4,2 К

Как известно, водород в обычных условиях представляет собой газ, состоящий из двухатомных молекул H_2. Энергия взаимодействия атомов в этих молекулах равна $7{,}7 \times 10^{-19}$ Дж (4,8 эВ). Чтобы вызвать почти полную диссоциацию водорода на отдельные атомы, необходимо нагревание до температуры, превышающей 5000°С. Но при охлаждении газа происходит чрезвычайно быстрая рекомбинация молекул, сопровождающаяся выделением большого количества теплоты. Процесс носит взрывной характер.

Физикам из Амстердама удалось найти способ замедлить рекомбинацию и получить стабилизированный при низкой температуре одноатомный водород, живущий длительное время — порядка нескольких часов. С этой целью был применен очень изящный метод, основанный на использовании принципа Паули. Попробуем это пояснить.

В двухатомной молекуле H_2 оба электрона имеют наибольшую вероятность находиться между двумя атомными ядрами (электростатическое притяжение электронов и ядер как бы «цементирует» молекулу). Согласно принципу Паули, два электрона, входящие в одну физическую систему, не могут одновременно находиться в одном и том же состоянии. В квантовой механике состояние частицы определяется ее энергией, положением или импульсом и спином. В молекуле водорода, где энергия и импульс у двух электронов одинаковы, спины электронов должны иметь противоположные направления. Другими словами, сближение двух атомов водорода приводит к образованию устойчивой молекулы только в случае антипараллельных электронных спинов. Значит, если создать одноатомный водород, у атомов которого все электронные спины параллельны друг другу, то в таком газе не будет происходить образование молекул H_2.

Эта простая идея и лежала в основе опытов по стабилизации одноатомного водорода. Однако не следует думать, что реализация этой идеи также была простой. Прежде всего надо было ослабить вредное влияние межатомных столкновений, приводящих к хаотическим поворотам электронных спинов. Поэтому работа проводилась при температурах порядка десятых долей кельвина. Кроме того, надо бы устранить прилипание атомов к стенкам экспериментального сосуда, где они рекомбинируют в молекулы. Для этого применялась «смазка» сверхтекучим гелием, который притягивает атомы водорода очень слабо и поэтому может предотвратить их скопление у стенок.

На рисунке изображена центральная часть экспериментальной установки для получения стабилизированного атомарного водорода, созданной в Амстердамском университете. Сначала с помощью электрического разряда двухатомный водород диссоциировал на отдельные атомы.

(Окончание см. на с. 55)

Искусственная радиоактивность

(к 50-летию со дня открытия)

Кандидат физико-математических наук
А. А. БОРОВОЙ

В конце прошлого века известный шведский инженер-химик, изобретатель динамита и один из богатейших промышленников Альфред Нобель оставил завещание, согласно которому проценты от его капитала в 31 миллион крон идут на выплату премий за выдающиеся работы по физике, химии, физиологии или медицине, по литературе и за активную деятельность по укреплению мира.

Первую премию по физике в 1901 году получил немецкий ученый Вильгельм Конрад Рентген за открытие излучения, которое он назвал «*X*-лучами», а мы привыкли называть рентгеновскими.

Очень скоро Нобелевская премия по естественным наукам стала общепризнанной международной наградой. Ее вручают 10 декабря. Позднее нобелевские лауреаты выступают с традиционной лекцией в зале Стокгольмского университета.

Комитет, выбирающий лауреатов, считает обязательным, чтобы открытие прошло проверку временем. По тем или иным причинам, для многих ученых она затягивалась на десятилетия.

Однако Джеймс Чедвик, Ирен и Фредерик Жолио-Кюри, выступавшие перед шведскими и иностранными учеными 12 декабря 1935 года не могли пожаловаться на долгое время ожидания.*) Масштаб их открытий был оценен сразу, поскольку они вызвали настоящую революцию в физике.

Первым в тот вечер выступал Чедвик. Известный ученый, долгие годы работавший вместе со своим учителем Эрнестом Резерфордом, рассказывал об открытии нейтрона. Оно было сделано весной 1932 года.

Затем на трибуну по очереди поднимаются супруги Жолио-Кюри. В январе 1934 года французские физики сообщили об открытии ими нового явления — искусственной радиоактивности.

«Впервые стало возможным внешней причиной вызвать радиоактивность некоторых атомных ядер в течение определенного промежутка времени и в отсутствии вызвавшей ее причины».

Теперь они рассказывают об этом открытии, имевшем хотя и непродолжительную, но довольно драматическую предысторию, самым тесным образом связанную с обнаружением нейтрона.

Ирен и Фредерик Жолио-Кюри

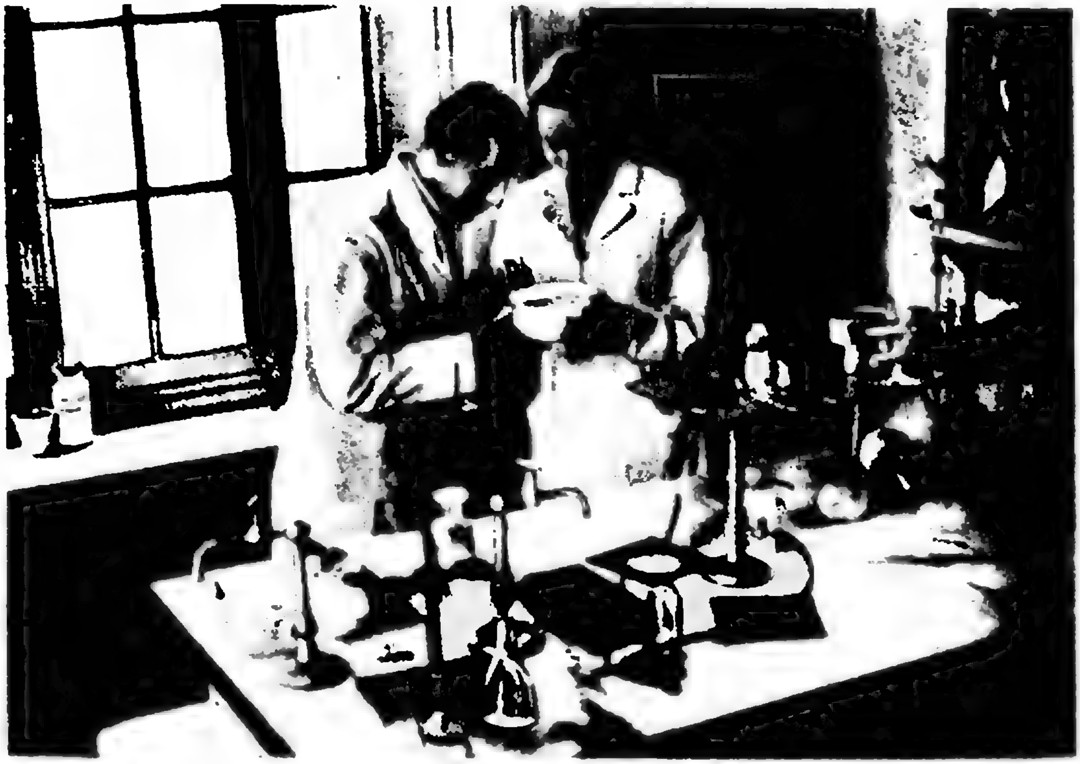
> «Для нас является великой честью и радостью, что Шведская Академия наук присудила нам премию... после того, как она удостоила Нобелевской премии Пьера и Марию Кюри в 1903 году и Марию Кюри в 1911 году за открытие радиоэлементов»,

— так начала свое выступление Ирен Кюри.

...А за десять лет до этого двадцатипятилетний инженер Фредерик Жолио впервые появился в Институте радия, возглавляемом Марией Кюри. Он пришел договориться о месте лаборанта, на которое его

---

*) Чедвик получил премию по физике «За открытие нейтрона». Ирен и Фредерик Жолио-Кюри — премию по химии «За открытие искусственной радиоактивности и синтез новых радиоактивных элементов»



Ирен и Фредерик Жолио-Кюри в лаборатории.

рекомендовал профессор Ланжевен. Формальности были сведены к нулю: «Вы можете начать работать с завтрашнего дня?» — спросила его маленькая седая женщина с живыми глазами.

На первых порах молодому исследователю пришлось достаточно трудно, поскольку он имел самые поверхностные представления о радиоактивности. А все вокруг только ей и занимались, и особенно успешно дочь Марии Кюри — Ирен, защищавшая в это время докторскую диссертацию.

Однако Фредерик удивительно быстро освоил и теорию, и эксперимент. «Мальчик — настоящий фейерверк»,— говорила о нем Мария Кюри. Процесс приобщения к радиоактивности привел к тому, что через год в мэрии четвертого округа Парижа был зарегистрирован брак Ирен Кюри и Федерика Жолио.

Что связывало этих людей в течение тридцати лет их счастливой и трудной жизни?

«Ирен... казалась прямой противоположностью Фредерику; она была настолько же спокойна и невозмутима, насколько он — вспыльчив и экспансивен... При спорах она не шла ни на малейшую уступку. С безжалостной прямолинейностью Ирен выдвигала свои положения, прямо бросая их в лицо собеседнику, даже если он занимал высокое общественное положение. Напротив, Фредерик Жолио, никогда не уступая по существу, умело использовал свои способности, чтобы психологически подготовить собеседника к принятию своей точки зрения» (*П. Бикар*)*).

Очевидно, для них как нельзя лучше подходила любимая фраза Нильса Бора: «Противоположности — это не противоречия, а дополнения!»

В 1930 году Фредерик защитил докторскую диссертацию, и супруги Жолио-Кюри продолжили свои работы по изучению радиоактивности. Они хотели сделать мощный источник излучения, для того чтобы бомбардировать α-частицами различные вещества. Изготовление такого источника было не простым и далеко не безопасным делом. Пройдут годы, и радиоактивный полоний самым страшным образом напомнит о себе.

---

*) П. Бикар — профессор физики. Друг Жолио-Кюри.

Но пока молодые физики стали обладателями десяти миллиардов α-распадов в секунду.

В том же 1930 году в лаборатории появились пока еще никем не узнанные нейтроны.

Нейтрон

Нобелевская лекция продолжается:

> «В течение последних лет были открыты разного рода искусственные превращения: одни вызываются α-лучами... другие нейтронами, то есть нейтральными частицами с массой 1, о которых говорил профессор Чедвик».

...Физики уже довольно долго — с 1896 года — занимались исследованиями естественной радиоактивности. Радий, торий, полоний, ... — всего около 30 веществ — испускали α-частицы (ядра гелия), β-частицы (электроны) и γ-лучи (электромагнитное излучение). В 1919 году Резерфорд быстрыми α-частицами расщепил ядро и обнаружил, что в состав ядер входят протоны — ядра водорода.

В 1930 году немецкие физики В. Боте и Г. Беккер, бомбардируя α-частицами мишени из легких элементов, обнаружили излучение необычайной проникающей способности. Они назвали его «бериллиевые лучи» (поскольку лучше всего эксперимент шел с бериллием) и решили, что это γ-лучи с огромной энергией. Около года их работа не привлекала внимания, пока ею не заинтересовались Жолио-Кюри. Они провели красивые опыты — ставили на пути бериллиевых лучей вещества, содержащие водород (например, парафин),— и обнаружили, что загадочные частицы выбивают из мишеней ядра водорода — протоны. Исследователи измерили скорость этих протонов и по ней оценили энергию бериллиевых лучей, считая, что это γ-кванты. Получилась огромная величина.

11 января 1932 года работа была доложена во Французской Академии наук. Жолио-Кюри продолжали опыты, все еще считая, что имеют дело с γ-лучами. Возможно, что им понадобилось бы совсем немного времени, еще несколько недель, чтобы отбросить эту гипотезу и найти правильное решение. Но тут их опередили.

Чедвик, уже 12 лет безуспешно искавший нейтрон (существование которого предсказал его учитель Резерфорд), сразу понял, с какими частицами имели дело французские физики. Его лабораторное оборудование было наготове, и понадобился всего месяц для доказательства того, что бериллиевые лучи — поток тяжелых нейтральных частиц — нейтронов. Ядерную реакцию взаимодействия α-частиц с бериллием надо было записать так:

$$^{9}_{4}\mathrm{Be}+^{4}_{2}\alpha \rightarrow ^{12}_{6}\mathrm{C}+^{1}_{0}n.$$

Можно представить себе разочарование французских физиков, которые так близко от финиша уступили победу.

Позитрон

Из Нобелевской лекции:

> «Мы наблюдали, что алюминий и бор испускают при облучении не только протоны и нейтроны, но также и положительные электроны».

Мы наблюдали...

Пришло время кратко рассказать о приборах, а точнее, об одном, самом любимом приборе Фредерико Жолио-Кюри — камере Вильсона, с помощью которой велись эти наблюдения. В этой камере капельки жидкости, образующиеся вдоль траектории заряженной частицы, делают ее след видимым и дают возможность сфотографировать его. Большинство приборов в лаборатории Жолио-Кюри было сделано руками самих экспериментаторов или, во всяком случае, ими сконструировано. И камера Вильсона была большой и весьма усовершенствованной, так что след частицы мог быть растянут почти в 80 раз по сравнению с обычным вариантом прибора. Кроме того, камера была помещена в магнитное поле, и следы положительных частиц в ней отклонялись в одну сторону, а отрицательных — в другую. По кривизне траектории можно было судить и об импульсе частицы.

...Жолио-Кюри продолжали работу, облучая α-частицами бор, фтор, натрий, и вскоре доказали, что в этих реакциях также появляются нейтроны (иногда и протоны). Тут они столкнулись с трудностями, которые и стали прологом к открытию. Трудности состояли в том, что при испускании нейтрона, например, алюминием, в результате реакции

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^{4}_{2}\alpha \rightarrow ^{30}_{15}\mathrm{P} + ^{1}_{0}n$$

должны образовываться ядра фосфора-30, которого никто в природе не встречал, тогда как ядра кремния-30 — $^{30}_{14}\mathrm{Si}$ — спокойно существовали.

Наверное, при облучении все же появляется кремний,— решили исследователи, и стали изобретать механизм, при котором ядро фосфора-30 с зарядом +15 могло бы потерять единицу заряда, не меняя массы.

Сначала предположили, что оно захватывает во время реакции один из атомных электронов и превращается в ядро кремния:

$$^{30}_{15}\mathrm{P} + e^{-} \rightarrow ^{30}_{14}\mathrm{Si}.$$

Если бы все знать наперед! Ведь переход $^{30}_{15}\mathrm{P} \rightarrow ^{30}_{14}\mathrm{Si}$ мог быть осуществлен и при испускании положительного электрона — позитрона. Более того, на фотографиях в камере Вильсона французские физики давно замечали следы, выходящие из мишени, по всем признакам электронные, но только поворачивающие в магнитном поле в сторону, соответствующую заряду e^{+}. Они объясняли их электронами, летящими назад — к мишени.

«Нильс Бор заинтересовался этими снимками, но мы сделали ошибку, не уделив должного внимания этим следам».

Прошло еще несколько месяцев, прежде чем в космических лучах Андерсон открыл существование позитрона. Все вроде бы встало на свои места, и Жолио-Кюри могли теперь записать реакцию взаимодействия ядер алюминия с α-частицами в виде

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^{4}_{2}\alpha \rightarrow ^{30}_{14}\mathrm{Si} + ^{1}_{0}n + e^{+}.$$

Второй раз они были так близки к обнаружению новой частицы и второй раз опоздали!

Искусственная радиоактивность

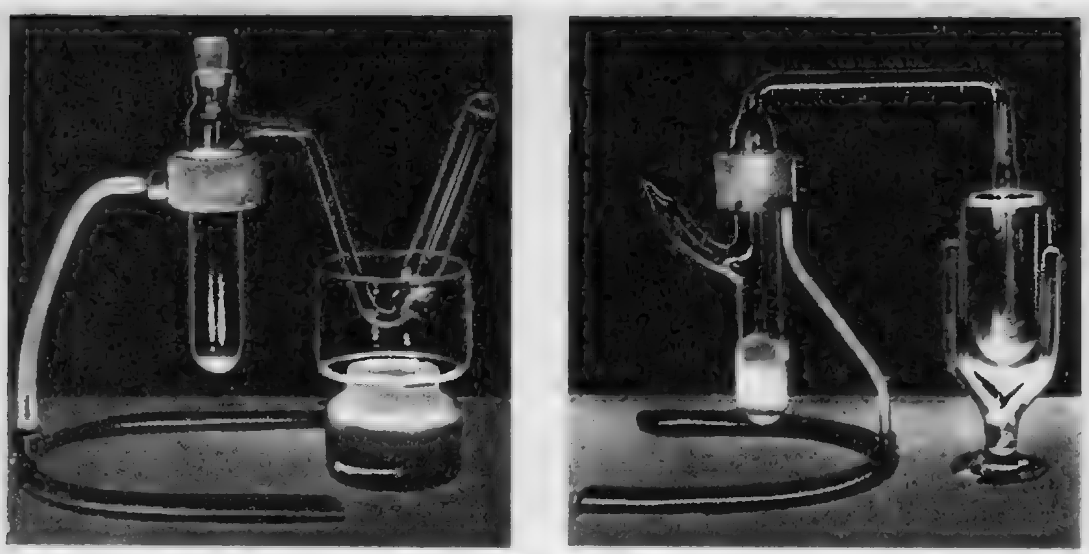
Теперь следует то, что можно было бы назвать формулой открытия:

> «Имеются два процесса, различно протекающие во времени. Сначала происходит захват α-частицы и мгновенное испускание нейтрона с образованием... фосфора-30... Затем этот неустойчивый, то есть новый радиоактивный элемент... распадается по экспоненциальному закону с временем полураспада в три минуты и образует кремний».

Но до этого объяснения оставались еще месяцы упорного труда. Осенью 1933 года на Сольвеевском конгрессе в присутствии крупнейших физиков супруги Жолио-Кюри рассказали о своих опытах, при которых под действием α-лучей из ядер алюминия, фтора, натрия вылетали нейтроны и позитроны. «Большинство из присутствующих на конгрессе физиков не поверило в правильность наших опытов. После заседания мы были очень огорчены, но в этот момент Нильс Бор отвел нас в сторону... и сказал, что придает большое значение полученным результатам. Вслед за этим и Паули поддержал нас своим одобрением» (*Ф. Ж-К.*).

Вернувшись с конгресса в Париж, Жолио-Кюри снова приступают к работе. И наконец пришел тот день, а точнее январский вечер 1934 года, когда **это** произошло. Неизвестно, насколько можно доверять легенде, которая бытует среди физиков, но согласно ей это произошло так. Ирен и Фредерик спешили закончить свои опыты, поскольку в тот вечер были приглашены в гости, спешили, и в результате кто-то из них опрокинул ампулу с полонием. Альфа-частицы перестали попадать на алюминиевую фольгу, а счетчик продолжал считать позитроны, правда, все медленнее и медленнее.

Дальше легенда уже подтверждается воспоминаниями П. Бикара: «Все стало ясным... При условии, что пощелкивание счетчиков вызвано новым излучением, а не поломкой самих приборов. Этот вопрос Жолио задал себе в 6 часов вечера. Но они уже не могли отказаться от приглашения в гости. К счастью, в лабора-



Приборы, с помощью которых Жолио-Кюри удалось выделить радиоактивные элементы.

тории работал молодой немецкий физик В. Гентнер, специалист по счетчикам. Жолио... попросил его проверить правильность их действия...

На следующее утро Фредерик и Ирен нашли на своем столе записку Гентнера, в которой он уверял, что счетчик в полном порядке».

Итак, когда уносили источник α-частиц, алюминиевая фольга продолжала излучать позитроны! Они испускались еще некоторое время, при этом число их уменьшалось вдвое каждые три минуты, строго следуя закону радиоактивного распада, который открыл Резерфорд для естественных радиоактивных изотопов.

Реакция взаимодействия α-частиц с алюминием представилась теперь с совершенно новой стороны —

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^{4}_{2}\alpha \rightarrow ^{30}_{15}\mathrm{P} + ^{1}_{0}n$$

$$^{30}_{15}\mathrm{P} \xrightarrow{T_{1/2} \sim 3\ \text{мин}} ^{30}_{14}\mathrm{Si} + e^{+}$$

— и впервые были произнесены слова «искусственная радиоактивность».

...На трибуну поднимается Фредерик Жолио-Кюри и продолжает рассказ Ирен:

> «Получив истолкование первых результатов при помощи выводов чисто физического характера, мы поставили своей целью подкрепить наши гипотезы с помощью... химических доказательств реальности вызванных превращений».

Физики на время превратились в химиков, чтобы выделить образовавшийся фосфор из алюминия. Сделать это было нелегко: ведь период полураспада фосфора мал — всего около трех минут. Кроме того, выделить несколько радиоактивных атомов вообще невозможно. Однако можно сначала подмешать к ним весомое количество неактивного фосфора-31, обладающего абсолютно теми же химическими свойствами, а затем проводить извлечение. Атомы фосфора-30 будут всюду следовать за своими стабильными «братьями» — атомами фосфора-31.

Облученную алюминиевую фольгу и кусочек красного фосфора помещали в пробирку с соляной кислотой. Из пробирки выделялся водород вместе с фосфористым водородом, которые и собирались в другую пробирку. Вся операция проделывалась за считанные минуты. Потом пробирка с газами подносилась к счетчику, и он начинал считать позитроны. Вот теперь можно было праздновать победу!

Открытие завоевывает мир

«Число известных в настоящее время искусственно полученных радиоизотопов уже превосходит число естественных радиоэлементов, которые находятся в земной коре»,

— говорил Ф. Жолио-Кюри.

Это было похоже на фейерверк: в начале 1934 года — три искусственных радиоизотопа, к концу — уже около пятидесяти. Их получали облучением элементов α-частицами, протонами и дейтронами на только что созданных ускорителях. В Италии группа Энрико Ферми использовала незаряженные снаряды — нейтроны, которые легко проникали в ядро. Уже начиналось применение искусственных радиоизотопов в химии, в медицине. Со временем к этому списку добавились биология, энергетика, металлургия, пищевая промышленность, криминалистика, сельское хозяйство и т. д., и т. п. Искусственных радиоактивных изотопов известно более тысячи (а стабильных изотопов — около 300), и число их «специальностей» перевалило за сотню.

Как случилось, что искусственую радиоактивность обнаружили именно Ирен и Фредерик Жолио-Кюри? Какие качества физиков-экспериментаторов позволили им совершить это открытие?

О двух главных качествах написал Б. Понтекорво*): могучей научной фантазии и способности признавать даже самый, казалось бы, невероятный и странный факт. Можно добавить к этому и третье — научное предвидение.

Снова вернемся к декабрьскому вечеру 1935 года, заснеженному Стокгольму и Нобелевской лекции, последние слова которой произносит Фредерик Жолио-Кюри, держа в руках несколько листков бумаги.

> «Если мы охватим взором прогресс науки, который происходит все более и более нарастающими темпами, мы получим право думать, что исследователи, которые создают или разрушают элементы по своему желанию, сумеют добиться превращений, имеющих характер взрыва, добиться настоящих цепных реакций.
>
> ЕСЛИ МЫ СМОЖЕМ ОСУЩЕСТВИТЬ ПОДОБНЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ, ТО УДАСТСЯ ВЫСВОБОДИТЬ ОГРОМНОЕ КОЛИЧЕСТВО ЭНЕРГИИ, КОТОРУЮ МОЖНО БУДЕТ ИСПОЛЬЗОВАТЬ».

И дальше звучат его слова об ответственности ученых перед человечеством.

Еще не было видно никаких практических путей высвобождения ядерной энергии, и подавляющее большинство ученых даже не задумывалось об этом. А между тем оставалось

семь лет до создания первого ядерного реактора,

десять — до атомных взрывов над Хиросимой и Нагасаки,

четырнадцать — до испытания водородной бомбы,

девятнадцать — до пуска первой атомной электростанции.

---

*)Б. Понтекорво — советский физик, академик. Несколько лет работал в лаборатории Жолио-Кюри.

Катастрофа на экваторе

В Москве сейчас зима, в Австралии — лето. А какое время года в столице Эквадора, городе Кито, расположенном на экваторе? На этот вопрос жители этого города отвечают шуткой: «Если солнечно, то лето, если дождь — зима». А если ответить серьезно?

Высота кульминации Солнца день ото дня меняется. У нас, в северном полушарии, день низшей кульминации Солнца наступает 22 декабря («зимнее солнцестояние»). В южном полушарии, как известно, этот день — 22 июня («летнее солнцестояние»). А теперь представим себе, что мы движемся к экватору; дата низшей кульминации остается неизменной. Но стоит перешагнуть через экватор — и эта величина меняется скачком, на целых 6 месяцев. Сделаем шаг назад — скачок на 6 месяцев обратно! Как объяснить этот парадокс?

На самом деле ничего удивительного здесь нет. Просто не все физические величины изменяются непрерывно — иногда бывают разрывы, скачки. Математическую теорию «неплавных» изменений называют *теорией особенностей* или (с легкой руки французского математика Р. Тома) *теорией катастроф*.

В описанном случае на экваторе происходит простейшая «катастрофа»: сколь угодно малое изменение одной величины (географической широты) приводит к значительному скачкообразному изменению другой (даты низшей кульминации)

(Окончание см на с. 23)

Так ли прост евклидов мир?

Кандидат физико-математических наук
И. Х. САБИТОВ

Геометрию, изучаемую в школе, называют *евклидовой* в честь древнегреческого ученого Евклида, сумевшего систематизировать эту науку на основе аксиоматического метода. Среди аксиом геометрии, предложенных Евклидом, наибольшую известность снискала пятая — *аксиома параллельных*. Эта аксиома (или «пятый постулат», как ее назвал Евклид в своих «Началах»), в сущности, утверждает, что *через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной*. Правда, в «Началах» Евклид формулировал это утверждение в другой (но эквивалентной) форме: «Если прямая пересекает две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении этих двух прямых они пересекутся с той стороны, где углы меньше двух прямых».

Но геометрия Евклида — не единственная логически возможная геометрия: существуют еще *неевклидовы геометрии*, в которых аксиома параллельных предстает совсем в другом облике. Аксиома — *через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести по крайней мере две прямые, параллельные данной*, — приводит к геометрии, носящей имя нашего великого соотечественника Н. И. Лобачевского*), а аксиома — *через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести ни одной прямой, параллельной данной* — приводит к римановой (или эллиптической) геометрии (рис. 1).

Какая из этих трех логически мыслимых геометрий — Евклида, Лобачевского или Римана — имеет место в нашем реальном физическом мире?

На этот вопрос ответить сразу не так-то просто — совсем не ясно, как экспериментально проверить аксиому параллельных. Ведь «неограниченно продолжать» прямую можно только в теории, на практике же даже самым мощным астрономическим приборам доступна лишь ограниченная часть Вселенной. Более того, как видно из рисунка 2, в ограниченной области имеется много прямых, лежащих на данной плоскости, проходящих через данную точку, но не пересекающих данную прямую в пределах доступной нам области (даже если евклидов пятый постулат на самом деле и верен).

---

*) О поучительной и драматической истории открытия неевклидовой геометрии, в которой, кроме Лобачевского, участвовали К. Ф. Гаусс и Я. Больяи, можно прочитать в статье академика А. Д. Александрова («Квант», 1982, №№ 11, 12).

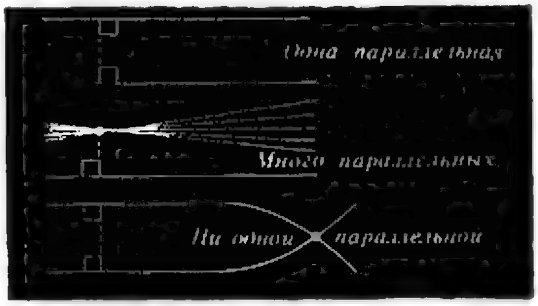


Рис. 1. В геометриях Евклида, Лобачевского и Римана — разные аксиомы параллельных.

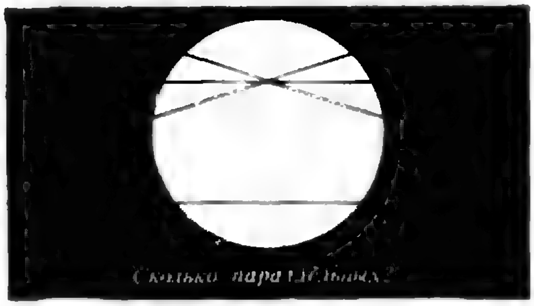


Рис. 2. В ограниченной части пространства непосредственно не видно, какая из аксиом параллельных имеет место.

Так как же осуществить экспериментальную проверку аксиомы параллельных?

Сумма углов треугольника — пробный камень геометрии мира?

Оказывается, это, в принципе, возможно. Дело в том, что аксиома Евклида о параллельных прямых равносильна утверждению, что сумма углов произвольного треугольника равна 180° [*], а в геометрии Лобачевского получается, что эта сумма меньше 180°. Поэтому Гаусс, используя геодезические измерения, решил вычислить сумму углов в треугольнике, образованном тремя высокими вершинами (Броккен, Хохенгаген и Инзельберг) в горном массиве Гарц, отстоящими друг от друга приблизительно на 100 км. Лобачевский выбрал для своих вычислений космические масштабы — он измерил сумму углов треугольника, вершинами которого были Земля, Солнце и самая яркая звезда северного полушария Сириус. Но в обоих экспериментах полученные отклонения от 180° были в пределах допустимой ошибки измерений, поэтому никакого вывода о геометрии реального мира они не дали.

Однако представим себе, что какому-нибудь наблюдателю удалось с безукоризненной точностью установить, что сумма углов некоторого треугольника равна 180°. Значит ли это, что наша геометрия — евклидова?

Ответ утвердительный, если мы считаем верной теорему Лежандра. Эта теорема, разумеется, доказывается с использованием других аксиом Евклида. Но выполняются ли остальные аксиомы в реальном мире? Например, почему можно быть уверенным в том, что две прямые, пересекающиеся на лежащем перед нами листе бумаги, больше нигде в реальном пространстве не пересекутся, как бы далеко мы их ни продолжали? Давайте поэтому относиться ко всем аксиомам Евклида с одинаковой требовательностью — ни про одну аксиому не будем заранее предполагать, что если она доступна проверке в ограниченной области, то она справедлива и во всем пространстве.

Тогда мы придем к такому вопросу: предположим, что всюду в реальном пространстве все аксиомы евклидовой геометрии выполнены «в малом», то есть в пределах досягаемости для наших измерительных приборов (где бы ни находился наблюдатель); верно ли тогда, что реальное пространство является евклидовым «в целом» (то есть все евклидово трехмерное пространство является правильной моделью всего физического пространства)? Этот важный (в сущности, космогонический) вопрос допускает чисто математическую формулировку, которая и будет интересовать нас здесь.

Постановка задачи

Пусть в окрестности каждой точки пространства (скажем, в некотором шаре с центром в этой точке) выполнены все положения евклидовой геометрии. (Разумеется, сформулированные так, чтобы они имели смысл в пределах шара; например, аксиома параллельных должна быть заменена на утверждение «Сумма углов треугольника равна 180°» и т. п.) Что тогда можно сказать о геометрии всего пространства?

Пространство со свойством евклидовости в окрестности каждой точки называется *локально евклидовым*.

Математически более точно определение локально евклидова пространства следующее. Два множества A и A', в каждом из которых определено расстояние между любой парой точек, называются *изометричными* (от греческих слов «изос» — одинаковый, равный и «метрон» — мера, длина), если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее расстояния (это значит, что расстояние $|ab|$ равно $|a'b'|$ для любых точек $a, b \in A$, если a', b' — соответствующие точки из A'). Так вот, пространство называется *локально евклидовым*, если в нем определено расстояние между любыми двумя его точками и если каждая его точка имеет окрестность, изометричную некоторому шару обыкновенного евклидова пространства.

---

[*] Более того, французский математик А. Лежандр доказал, что аксиома параллельных следует из существования хотя бы одного треугольника с суммой углов 180° (см. доказательство в книге *Энциклопедия элементарной математики*. М., «Наука», 1966, т. V, с. 399)

В данной статье мы не имеем возможности заниматься локально евклидовыми пространствами трех измерений, а ограничимся рассмотрением локально евклидовых пространств только двух измерений. Мы будем их называть *локально евклидовыми плоскостями.* Нашу задачу можно сформулировать так: как устроены локально евклидовы плоскости в целом?

Цилиндр и его развертка

Разумеется, простейший пример локально евклидовой плоскости — это сама евклидова плоскость. На ней мы останавливаться не будем — тут все ясно, — а начнем со следующего по простоте примера — *бесконечной цилиндрической поверхности* (или, кратко, — *цилиндра*). На рисунке 3 она представлена как множество всех точек на горизонтальных прямых (образующих), проходящих через всевозможные точки единичной окружности C_0 (направляющей), расположенной в вертикальной плоскости α.

Но пока у нас нет «геометрии» на цилиндре. Нам нужно определить расстояние между точками, выяснить, что понимать под «прямой» на цилиндре, и т. д. Чтобы это сделать, разрежем наш цилиндр $Ц$ по одной из образующих и развернем его на координатную плоскость Oxy в виде бесконечной полосы $П$, точки $(x;\ y)$ которой удовлетворяют неравенству $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$ (рис. 4). Мы будем считать, что плоская полоса $П$ со «склеенными краями» (то есть полоса, у которой все пары точек $(b;\ 0)$, $(b;\ 2\pi)$ считаются совпадающими) и задает «геометрию» на цилиндре. Как говорят математики, мы отождествляем пары точек вида $(b;\ 0)$ и $(b;\ 2\pi)$ для всех b и рассматриваем геометрию на полосе $П$, учитывая это отождествление.

Проверим локальную евклидовость такой геометрии на цилиндре. Для этого возьмем произвольную точку $A(x;\ y) \in П$. Если точка $A = A_1$ не лежит на краях полосы (см. рис. 4), то все очевидно: возьмем круг радиуса r, меньшего, чем расстояние от A до ближайшего края; этот круг целиком лежит в полосе $П$ и, разумеется, представляет собой обычный евклидов круг. Если же точка $A = A_2$ лежит на краю полосы (см. рис. 4), то ее координаты имеют вид $(b;\ 0) \equiv (b;\ 2\pi)$ и круговой окрестностью служит, например, объединение двух (склеенных!) полукругов единичного радиуса с центрами в точках $(b;\ 0)$ и $(b;\ 2\pi)$, а так как эти полукруги склеиваются по диаметрам $MN \equiv M'N'$, после склейки получается обычный единичный евклидов круг.

На цилиндре $Ц$, как на поверхности в пространстве, естественно задать расстояние между точками как длину кратчайшей линии, идущей по $Ц$ и соединяющей эти точки. На основании этого на цилиндре тоже можно развить некоторую геометрию. Вдумчивый читатель спросит: будет ли эта геометрия совпадать с геометрией на полосе $П$ с отождествленными краями? Оказывается, что будет. Однако обоснование этого факта (относящегося к так называемой *дифференциальной геометрии*) выходит за рамки нашей статьи.

Геометрия на цилиндре

Мы установили, что локально (в малом) геометрия цилиндра —

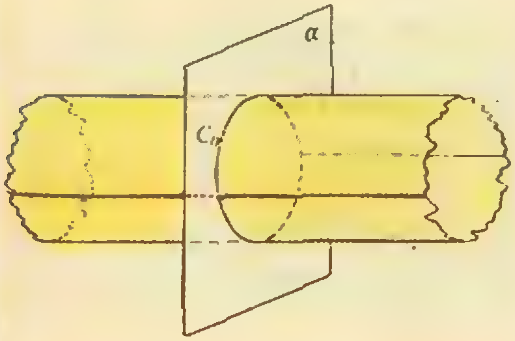


Рис. 3. Бесконечный цилиндр.

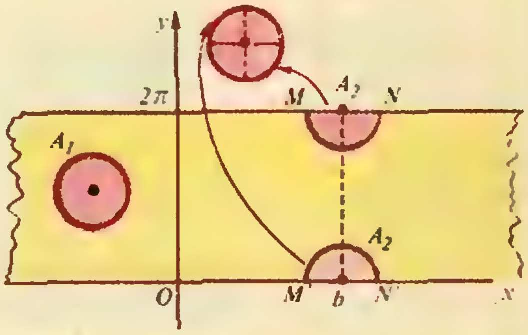


Рис. 4. Цилиндр (полоса со склеенными сторонами) — локально-евклидов.

евклидова. А как выглядит геометрия на цилиндре (то есть, на полосе Π с отождествленными краями) в целом? Как устроено «расстояние» на цилиндре? Какие на нем «прямые»? Какие аксиомы на нем выполняются?

Прежде чем ответить на эти вопросы, разберем один несколько необычный пример. Пусть в некоторой местности проходят две параллельные дороги, вдоль которых довольно часто расположены дорожные станции; из каждой станции идет одна линия телефонной связи — в симметричную станцию на другой дороге. Во внутренних пунктах местности телефонной связи нет, и сообщения передаются, скажем, бегунами. Примем за расстояние между двумя пунктами время, требующееся для передачи какого-либо сообщения. Тогда ясно, что для скорейшей передачи сообщения из пункта A в пункт B иногда гонцу лучше бежать не прямо из A в сторону B, а в противоположную сторону, к ближайшей телефонной станции.

Такого же рода необычное расстояние имеет место на нашей полосе со склеенными краями. Действительно, рассмотрим точки A, B, C в полосе Π. Для точек A и B (чьи координаты y_A и y_B отличаются меньше, чем на половину ширины полосы — π) расстояние обычное, то есть — длина отрезка AB. А вот для A и C (для которых $|y_A-y_C|>\pi$) расстояние равно $|AK'|+|KC|$, где A' получается из A сдвигом вверх на вектор $\overrightarrow{AA'}$ длины 2π, K — точка пересечения отрезка CA' с краем полосы и $\overrightarrow{KK'}=-\overrightarrow{AA'}$ (рис. 5). На языке «телефонного» примера выгоднее гонца послать из C в точку K, передать сообщение мгновенно по телефону в K' и доставить его в A со вторым гонцом по отрезку $K'A$.

Задача 1. Докажите, что расстояние от точки $A(x_A;\,y_A)$ до точки $B(x_B;\,y_B)$ на полосе Π со склеенными краями задается формулой

$$|AB|=\begin{cases}\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}\\ \quad\text{если } |y_A-y_B|<\pi,\\ \sqrt{(x_A-x_B)^2+(2\pi-|y_A-y_B|)^2},\\ \quad\text{если } |y_A-y_B|>\pi.\end{cases}$$

«Прямые», как и расстояния, в нашей геометрии необычны — они бывают трех типов (рис. 6, *а*). Во-первых, прямой будет любая обычная прямая, параллельная краям полосы. Во-вторых, «прямой» будет любой отрезок (со склеенными концами), соединяющий края и перпендикулярный им. И в-третьих, «прямой» будет совокупность периодически повторяющихся параллельных косых отрезков — таких, как на рисунке 6, *а*. На цилиндре в пространстве эти три типа прямых представляют собой, соответственно, образующие цилиндра, окружности, параллельные направляющей, и винтовые линии (рис. 6, *б*).

Что касается аксиом, заметим прежде всего, что аксиома параллельных выполняется «в целом» (на всей поверхности)!

Задача 2. Найдите (единственные) «прямые», параллельные «прямым» KL, MN и ST, проходящие через точку A на рисунках 6, *а* и 6, *б*.

Но теперь уже нарушаются другие аксиомы Евклида. Даже такая: *Через две точки проходит только одна прямая.* Например, красная

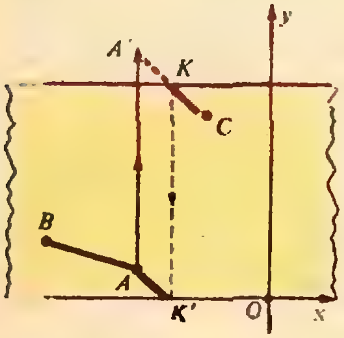


Рис. 5. Кратчайшее расстояние между точками A и C равно $|AK'|+|KC|$.

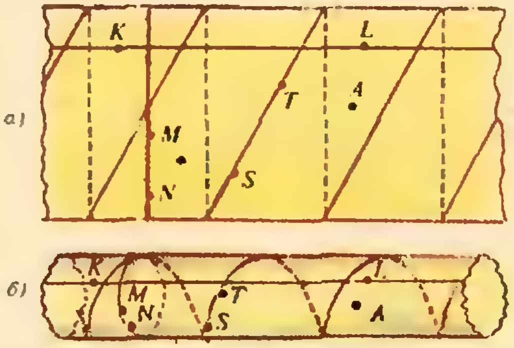


Рис. 6. Три типа «прямых» на цилиндре: винтовая линия ST, прямая KL, окружность MN.

(винтовая) «прямая» пересекается с черной (образующей)... бесконечное число раз (см. рис. 6)!

Задача 3. Опишите те пары точек на цилиндре, через которые проходит только одна прямая.

Этим курьезы цилиндрической геометрии не исчерпываются. Читатель заметил, наверное, что «прямые» на цилиндре, параллельные направляющей, ограничены: максимальное расстояние между точками на такой прямой... равно π.

Задача 4. Приведите примеры, показывающие, что отрезок «прямой» не всегда является кратчайшим путем между своими концевыми точками, наклонная иногда короче перпендикуляра, теорема Пифагора верна не всегда. Исследуйте, как выглядит «окружность» (то есть множество точек, равноудаленных от данной точки) при увеличении ее радиуса.

Таким образом, локальная выполнимость всех аксиом евклидовой геометрии, и даже выполнимость «в целом» аксиомы о параллельных, не гарантирует, что мир, в котором разворачивается такая геометрия, *обязательно будет неограниченной* плоскостью. Возможно и строение такого мира в виде бесконечного цилиндра, а также, как мы сейчас увидим, в виде других геометрических образований.

Плоский тор

Пусть на плоскости Oxy дан прямоугольник T с вершинами A, B, C, D (рис. 7). Отождествим сторону AB со стороной CD так, что A отождествляется с D, а B — с C; далее отождествим сторону BC — со стороной AD так, что B совпадает с A, а C — с D (при таком отождествлении окажется, что все вершины прямоугольника T сливаются в одну точку). Определим «расстояние» между двумя точками прямоугольника как длину кратчайшего пути между этими точками, учитывая при этом указанное выше соглашение об отождествлении.

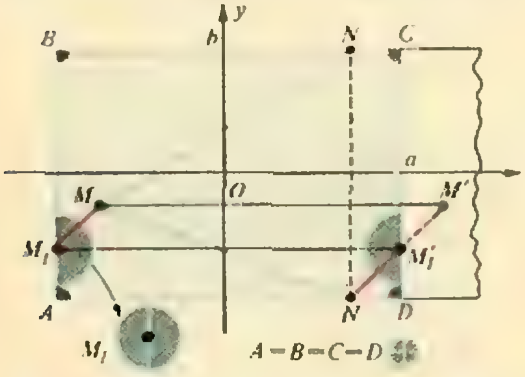


Рис. 7. Плоский тор — склееный прямоугольник. Кратчайшее расстояние между точками M и N равно $|MM_1|+|M_1'N|$.

Например, вычислим «расстояние» между точками $M\left(-\frac{3}{4}a;\ \frac{1}{4}b\right)$ и $N\left(\frac{3}{4}a;\ b\right)$ (см. рис. 7). Прежде всего замечаем, что отрезок MN', где $N'\left(\frac{3}{4}a;\ -b\right)$, короче отрезка MN; следовательно, кратчайший путь от M к N надо искать среди путей, соединяющих M с N' (так как N' и N — это одна и та же точка по условию отождествления). Правая окрестность стороны AD — это одновременно правая окрестность стороны BC; поэтому, «приставив» полоску $a\leqslant x<2a$, $-b\leqslant y\leqslant b$ к стороне BC (см. рис. 7), видим, что всякий другой путь из M в N', в том числе отрезок MN', длиннее, чем отрезок $M'N'$. Значит, самый короткий путь из M в N — это объединение отрезков MM_1 и $M_1'N'$ и «расстояние» между M и N равно $\sqrt{(a/2)^2+(3b/4)^2}$.

Задача 5. а) Укажите примеры пар точек прямоугольника T, «расстояние» между которыми равно $\sqrt{a^2+b^2}$; б) покажите, что «расстояние» между любыми двумя точками не больше, чем $\sqrt{a^2+b^2}$; в) покажите, что для любой данной точки найдется единственная точка, отстоящая от данной на расстояние $\sqrt{a^2+b^2}$.

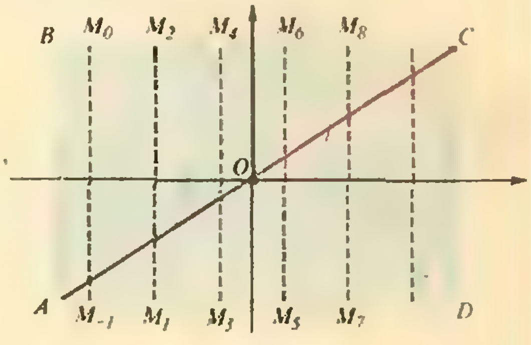


Рис. 8. Две «прямые» (красная и синяя) на торе.

Прямоугольник T с отождествленными парами противоположных сторон и указанным выше правилом вычисления «расстояний» называется *плоским тором.*

«Прямые» на плоском торе определяются как и в полосе $П$ — модели цилиндра. На рисунке 8 изображены две «прямые»: красная замкнутая «прямая» AC состоит из одного евклидова отрезка, синяя «прямая» — состоит из многих отрезков — $\ldots M_{-1}(=M_0)M_2(=M_1)M_4(=M_3)\ldots$ — и она, возможно, замкнется при дальнейшем ее продолжении.

Задача 6. Докажите, что «прямая» *на плоском торе будет замкнутой в том* и только в том случае, когда число $(a \operatorname{tg} \alpha)/b$ является рациональным, где $\operatorname{tg} \alpha$ — угловой коэффициент (относительно оси Ox) отрезков в T, составляющих эту прямую.

Мы утверждаем, что построенная таким образом геометрия на плоском торе — локально евклидова. Действительно, каждая внутренняя точка прямоугольника T имеет малую окрестность, где все введенные для плоского тора объекты и правила измерения — те же самые, что и в евклидовой геометрии. Для точки M_1 на границе доказательство усматривается из рисунка 7. Для вершины это видно из того же рисунка: все окрестности отождествляемых четырех вершин «снеслись» в одно место с учетом закона отождествления, и геометрия вокруг вершины тоже оказалась геометрией евклидова круга!

Итак, плоский тор представляет собой еще один пример локально евклидова мира. На нем, как и на цилиндре, пятый постулат справедлив «в целом», однако строение тора «в целом» отличается и от обычной плоскости, и от цилиндра.

Задача 7. Докажите, что на плоском торе нет сколь угодно больших расстояний, хотя есть сколь угодно длинные прямые. Исследуйте форму «окружности» на плоском торе при увеличении ее радиуса.

Есть еще одно важное отличие плоского тора от цилиндра: плоский тор нельзя с сохранением длин кривых представить в трехмерном пространстве в виде поверхности, на которой пары отождествляемых сторон — AB и CD, BC и AD — были бы действительно склеены вместе, как это происходит с краями полосы $П$ при свертывании ее в цилиндр. Но это отличие уже называют *внешним,* так как оно проявляется лишь при попытке связать геометрию полосы $П$ и прямоугольника T с геометрией некоторой поверхности во внешнем по отношению к ним пространстве. Если прямоугольник T считать сделанным из резины и допускать растяжения, то из него можно склеить тор; более подробно об этом см. статью А. Землякова («Квант», 1979, № 9, с. 2).

Бесконечный лист Мёбиуса

Снова рассмотрим бесконечную полосу $П: a \leqslant y \leqslant b$, $-\infty < x < +\infty$, но на этот раз проведем отождествление краев полосы П по следующему закону: точка $(x; a)$ отождествляется с точкой $(-x; b)$ (то есть прямая $y=b$ сначала отражается зеркально относительно оси Oy и лишь затем отождествляется с прямой $y=a$). Определения «расстояния» и «прямых» аналогичны случаям цилиндра и плоского тора. Полученная при этом локально евклидова плоскость называется *бесконечным листом Мё-*

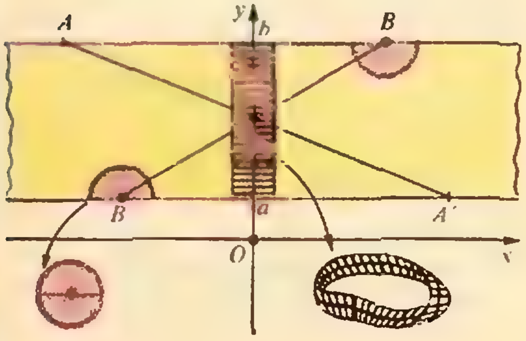


Рис. 9. Бесконечный лист Мёбиуса.

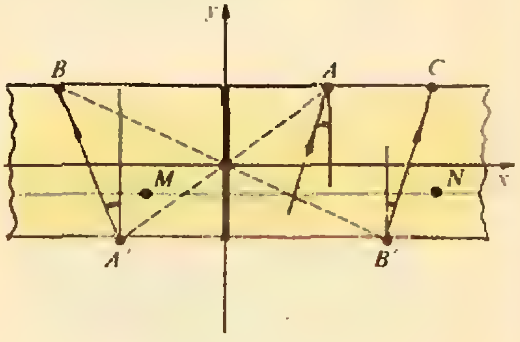


Рис. 10. Прямые на бесконечном листе Мёбиуса: черная (вертикальная), синяя (MN), красная ($A'B$).

биуса (обычный лист Мёбиуса является частью бесконечного, получаемый склейкой вертикальной полоски (рис. 9). На рисунке 10 нарисованы три «прямые»: черного цвета — замкнутая, синего цвета — параллельная краю полосы Π, красного цвета — наклонная, состоящая из бесконечного числа евклидовых отрезков. На примере точки B (см. рис. 9) показано, как закон отождествления порождает евклидову геометрию вблизи точки края полосы Π.

Задача 8. Исследуйте геометрию на бесконечном листе Мёбиуса. Покажите, что каждая наклонная прямая пересекает себя бесконечное число раз. Верен ли пятый постулат «в целом»? Как выглядят окружности?

Плоская бутылка Клейна

Обратимся снова к прямоугольнику на рисунке 7. Введем следующее правило отождествления: сторону AD отождествляем с BC с сохранением порядка следования точек, то есть точка $(-a, y) \in AD$ отождествляется с точкой $(a; y) \in BC$, а сторону AB отождествим со стороной CD с изменением порядка следования точек, то есть точка $(x; -b) \in AB$ отождествляется с точкой $(-x; b) \in CD$; в частности, все вершины будут считаться за одну точку. «Прямые» и правила измерения «расстояний» введем как и выше. Можно проверить, что снова в окрестности каждой точки геометрия получается евклидова (проведите эту проверку для окрестности вершины прямоугольника). Эта модель локально евклидовой геометрии называется *плоским односторонним тором* или *плоской бутылкой Клейна*.

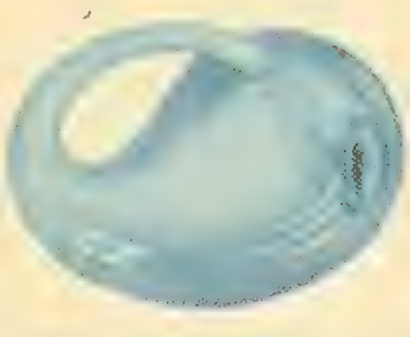


Рис. 11. Модель бутылки Клейна (с самопересечением).

Задача 9. Исследуйте геометрию на плоской бутылке Клейна.

Так же, как плоский тор, плоскую бутылку Клейна нельзя поместить в трехмерное пространство, не искажая расстояния на ней. Более того, ее можно поместить в пространство только с самопересечениями, даже если разрешать растяжения и сжатия (без разрывов). Модель бутылки Клейна с самопересечением показана на рисунке 11.

Заключение

Итак, принцип одинаковой требовательности ко всем аксиомам несомненно себя оправдал: мы обнаружили, что евклидова геометрия плоскости жива не единой аксиомой о параллельных, но что и другие аксиомы существенным образом определяют ее облик. Более того, оказалось, что даже евклидовость в окрестности каждой точки и выполнимость пятого постулата всюду не приводят еще к евклидовости в целом (пример: цилиндр и плоский тор). Значит, если даже во всех отдельно исследованных частях пространства геометрия окажется евклидовой, то в целом строение такого мира вовсе не обязано быть столь простым, как двумерная плоскость или трехмерное пространство.

В курсах высшей геометрии доказывается, что кроме перечисленных пяти примеров — плоскость, цилиндр, плоский тор, бесконечный лист Мёбиуса и плоская бутылка Клейна — других полных локально евклидовых «миров» нет. (*Полнота*, грубо говоря, означает, что можно неограниченно продолжить каждую «прямую», хотя бы и по самой себе.)

Что касается локально евклидовых пространств трех измерений, то их существует 18 типов. Из них мы упомянем лишь один пример: это слой пространства между двумя параллельными плоскостями, которые считаются отождествленными по точкам, симметричным относительно средней плоскости в слое.

Удивительная жидкость

И. А. МЕДКОВ

В этой статье будет рассказано о некоторых свойствах необычного вещества — ферромагнитной жидкости — и о простых экспериментах с ней.

Если с твердыми магнитами человечество знакомо с древнейших времен, то ферромагнитные жидкости, то есть коллоидные растворы твердых ферромагнетиков, были получены лишь в 60-х годах нашего века. Сейчас эти новые вещества уже достаточно изучены и даже находят некоторое практическое применение.

Давайте и мы «познакомимся» с ферромагнитной жидкостью и ее свойствами.

Как приготовить ферромагнитную жидкость

Прежде всего вам понадобятся касторовое масло (его можно купить в аптеке) и гидрат окиси железа $Fe_2O_3 \cdot nH_2O$ (он есть в школьном кабинете химии).

В фарфоровую ступку налейте 10—15 г масла и смешайте его с измельченным ферромагнетиком до образования жидкости, похожей на густую сметану. Приготовленную смесь растирайте в ступке в течение 10—15 минут.

То, что у вас получилось, не есть настоящий коллоидный раствор, так как частицы неоднородны и их размеры гораздо больше, чем 10^{-7}—10^{-9} м. (Для получения действительно коллоидных растворов необходимы сложные аппараты, например вибромельница для измельчения частиц и центрифуга для последующего разделения их по размерам.) Однако для изучения характерных свойств ферромагнитных жидкостей данная смесь вполне подойдет.

В наших опытах в качестве источника магнитного поля мы использовали школьный демонстрационный электромагнит с обмоткой из 2400 витков. Питался он от сети переменного тока с напряжением 220 В через диодный мост (годятся любые диоды с максимальным током, боль-

---

Автор этой статьи Илья Медков ученик 10 класса 204-й московской школы.

шим 0,5 А). Самое важное — выбор магнитопровода (сердечника электромагнита). Чтобы получить достаточно однородное магнитное поле, площадь сечения магнитопровода должна быть не меньше 8—10 см^2. Его можно изготовить самим, набрав из тонких, хорошо изолированных друг от друга пластин, или можно воспользоваться съемным сердечником школьного демонстрационного трансформатора.

Приготовив ферромагнитную жидкость и собрав электромагнит, можете приступать к экспериментам.

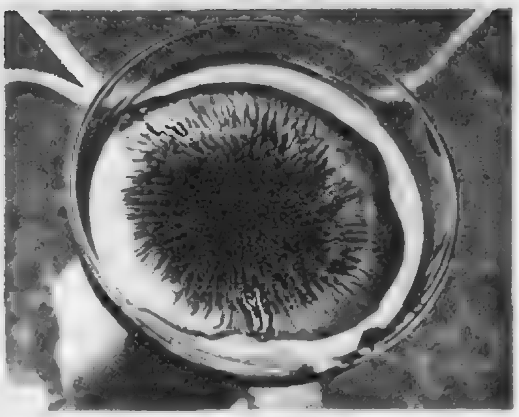


Рис. 1

Опыты и наблюдения

1. Поместите 30—40 г жидкости в мелкую чашку (обязательно из немагнитного материала!), поставьте чашку на торец магнитопровода и включите поле. Вы будете наблюдать поднятие жидкости в центре (в наших опытах оно составляло около 5 мм). Если смесь недостаточно хорошо перемешана или слишком велико содержание ферромагнитного порошка, получится «еж», такой, как на рисунке 1.

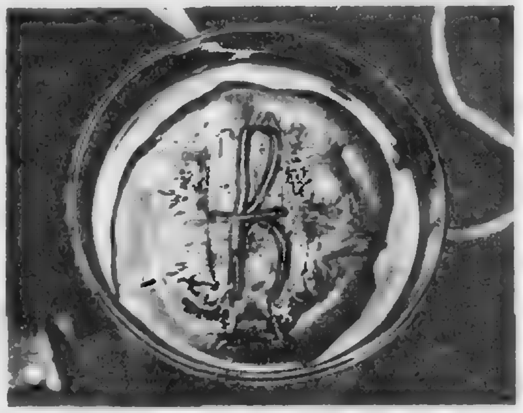


Рис. 2, а

2. Тщательно перемешайте жидкость после предыдущего опыта. Если у вас получился «еж», приготовьте новую порцию смеси, с бо́льшим содержанием масла. Снова поставьте чашку на торец магнитопровода, возьмите палочку из немагнитного материала и при включенном магнитном поле нарисуйте ею какой-нибудь узор на поверхности жидкости (рис. 2,*а*). Подождите несколько секунд и выключите поле. Поверхность жидкости разгладится, и на ней будет еле виден контур нанесенного вами рисунка (рис. 2,*б*). Затем повторно включите поле — рисунок появится снова (рис. 2,*в*). Опыт можно проделать несколько раз, включая и выключая магнитное поле.

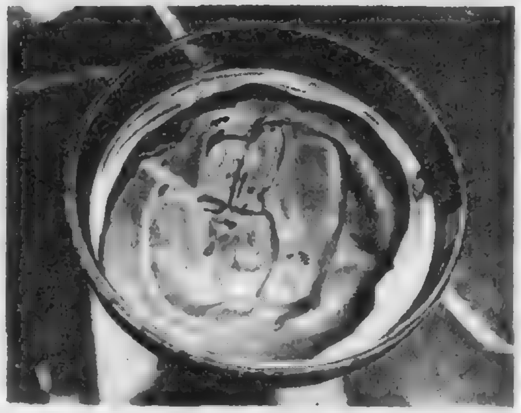


Рис. 2, б

На рисунке 2 изображены фотографии, полученные нами во время опыта. Одно и то же изображение нам удавалось «восстанавливать» 5—6 раз, при этом четкость рисунка практически не уменьшалась (хотя интервалы между включениями поля достигали 20 и более минут).

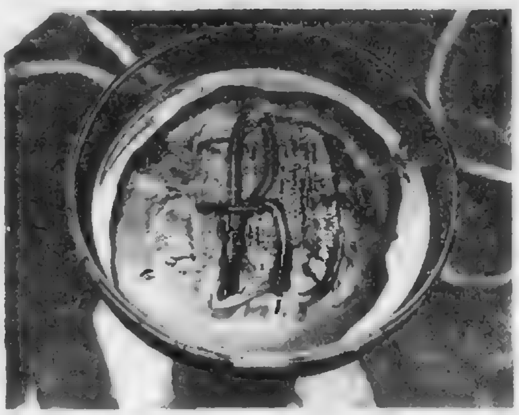


Рис. 2, в

3. Для этого опыта вам понадобится очень сильное магнитное поле. Можно воспользоваться тем же электромагнитом, но на торец магнитопровода поставить конус. Возле острия конуса магнитное поле будет наиболее сильным. Если капнуть на острие капельку жидкости и затем включить поле, жидкость мгновенно изменит цвет, став оранжевой или ярко-красной (в зависимости от ее состава).

Эксперименты закончены. Теперь подумаем, почему и как происходят эти удивительные явления.

В первом опыте мы видели, что жидкость поднимается в центре сечения магнитопровода. Этот эффект известен под названием магнитостатического и заключается в увеличении давления жидкости в области сильного поля.

Способность «запоминать» свойственна многим магнитным материалам. Так и магнитная жидкость, однажды приняв форму, при которой ее энергия минимальна, снова «вспоминает» свое состояние при включении поля.

Другие опыты и наблюдения постарайтесь объяснить сами.

Возможное практическое применение

Придумано много остроумных конструкций, использующих ферромагнитные жидкости. Вот некоторые из них.

В высококачественных громкоговорителях в зазор между катушкой электромагнита и его сердечником можно залить магнитную жидкость. Это позволит значительно улучшить характеристики динамиков.

На основе этой удивительной жидкости можно создать специальный насос. Он представляет собой трубку из гибкого материала, помещенную вместе с электромагнитом в камеру с жидкостью. При включении электромагнита жидкость пульсирует, возникает деформация эластичной трубки, и находящееся в ней вещество перекачивается в нужном направлении. Это несколько напоминает работу пищевода человека, отсюда и название: перистальтический насос. Такой насос можно использовать, например, для подачи топлива на космических кораблях.

Ферромагнитные жидкости можно применять также в магнитожидкостных уплотнителях подшипников турбин, в качестве теплоносителя в тепловых машинах и т. д.

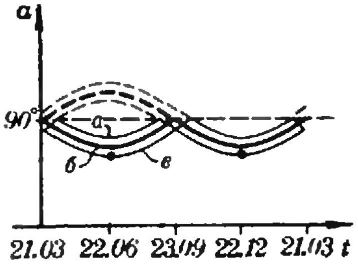
Заключение

Эксперименты с ферромагнитными жидкостями очень интересны. Если вам понравились наши опыты, вы сможете продолжить их или придумать новые. Так, в популярных книгах по химии можно найти рецепт приготовления пирофорного железа. Это настолько мелкий порошок, что он самопроизвольно загорается на воздухе (поэтому будьте с ним осторожны!). Ферромагнитные жидкости, содержащие пирофорное железо, обладают очень интересными свойствами.

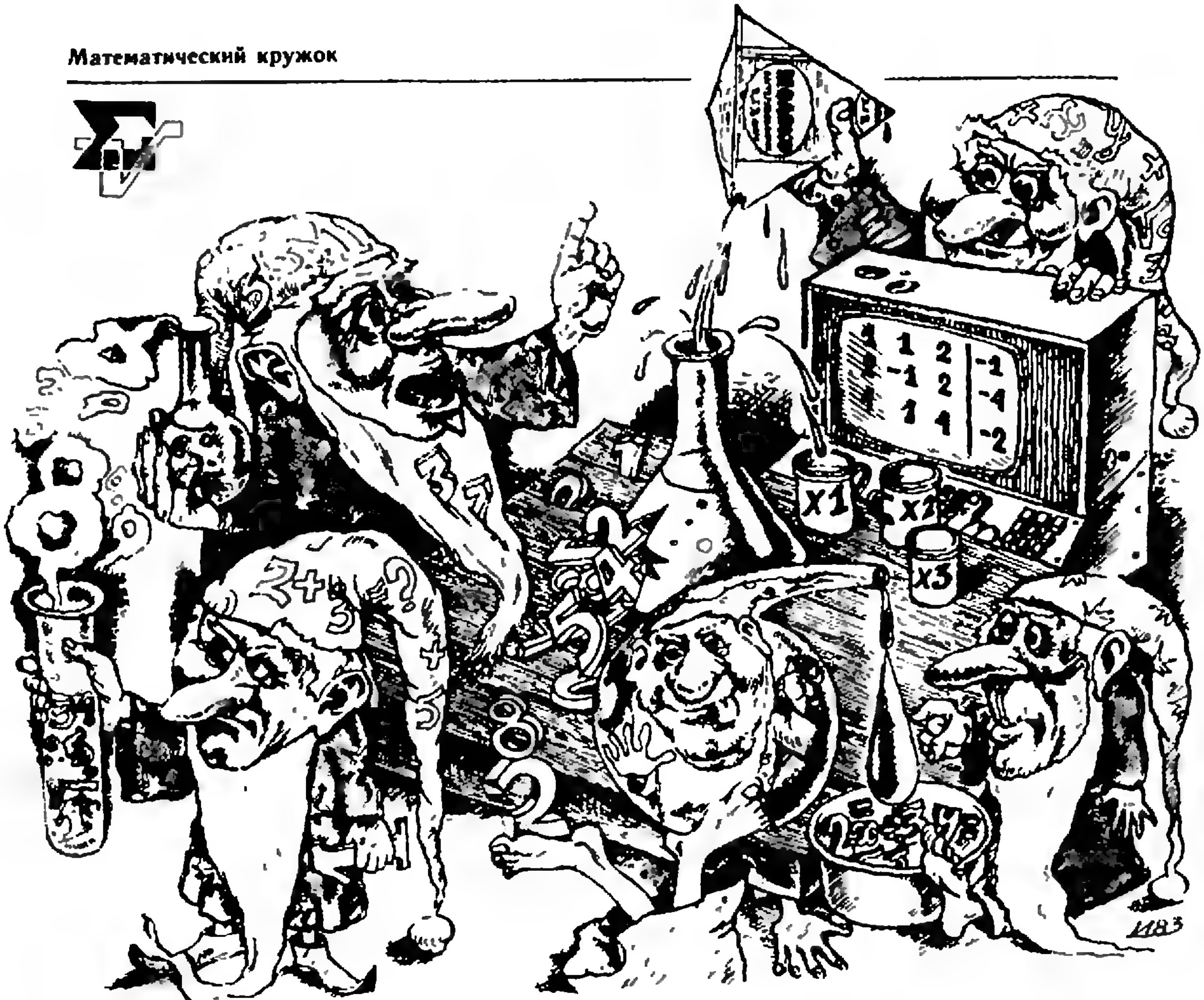
Катастрофа на экваторе

(Начало см. на с. 13)

Три графика на рисунке, выражающие высоту кульминации Солнца как функцию времени (даты) для трех точек около экватора, объясняют, в чем дело. Все три функции близки друг к другу и имеют два минимума (22 июня и 22 декабря), но лишь для одной из них (линия *б* — точка на экваторе) значения функции в этих точках одинаковы; для точки в южном полушарии (линия *в*) наименьшее значение достигается в первом минимуме (22 июня), для точки в северном (линия *а*) — во втором (22 декабря). Пунктирные линии показывают, что все три графика получены из обычных синусоидальных кривых отражением относительно прямой $a=90°$ той их части, которая лежит выше этой прямой (ведь по определению Солнце не может подняться выше точки зенита, для которой $a=90°$).



Н. Н. Михайленко



Системы линейных уравнений

Кандидат физико-математических наук
В. Л. ГУТЕНМАХЕР

Системы линейных уравнений часто встречаются в разных приложениях математики (например, к физике, химии, экономике). В статье рассказывается о простейших способах решения таких систем и об универсальном способе — методе Гаусса.

Исключение переменной

Понять метод лучше всего на примере. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 7x+5y=1. \end{cases}$$

Чтобы ее решить, исключим с помощью первого уравнения переменную x из второго уравнения. Подготовим для этого оба уравнения так, чтобы коэффициенты при x у них были одинаковы. Умножая первое уравнение на 7, а второе на 2, получаем

$$\begin{cases} 14x+21y=35 \\ 14x+10y=2. \end{cases}$$

Теперь оставим первое уравнение нетронутым, а второе заменим на разность между первым и вторым уравнениями:

$$\begin{cases} 14x+21y=35 \\ 11y=33. \end{cases}$$

Придадим теперь первому уравнению его первоначальный вид, а второе разделим на 11:

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ y=3. \end{cases}$$

Подставляя значение $y=3$ в первое уравнение, находим

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=3. \end{cases}$$

Ответ получен, система уравнений имеет единственное решение — пару чисел (—2; 3).

Задачи

1. Методом исключения переменной решите систему

а) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3}{4}x-\frac{5}{6}y=1 \\ \frac{5}{6}x-\frac{3}{4}y=2 \end{cases}$

2. Две точки движутся по числовой оси со скоростями $u=-12$ км/ч и $v=12$ м/с Вначале их абсциссы были $a=3$ км и $b=-500$ м Где и когда они встретятся?

Замена переменных

Одним из основных приемов алгебры является замена одних переменных другими. Этот прием позволяет сводить задачи к более простым. Пусть, например, нам нужно решить систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=5 \\ \frac{7}{x}+\frac{5}{y}=1 \end{cases}$$

Полагая $u=\frac{1}{x}$, $v=\frac{1}{y}$, мы получаем линейную систему с новыми переменными u, v:

$$\begin{cases} 2u+3v=5 \\ 7u+5v=1. \end{cases}$$

Решая ее, находим $u=-2$, $v=3$. Возвратимся теперь к старым переменным: $\frac{1}{x}=-2$, $\frac{1}{y}=3$, откуда $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$.

Задача 3. Методом замены переменных решите систему

а) $\begin{cases} \frac{1}{2x+3y-5}+\frac{7}{5x-8y+12}=1 \\ \frac{4}{2x+3y-5}-\frac{14}{5x-8y+12}=1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+xy=5 \\ 3x^2+5xy=23 \end{cases}$

в) $\frac{xy}{3x+2y}=\frac{1}{5}$, $\frac{xy}{5x+7y}=1$

Геометрический смысл линейного уравнения

Чтобы найти уравнение прямой $y=kx+b$, проходящей через точки с координатами (1; 2) и (3; 1), подставим в уравнение $y=kx+b$ вместо x и y координаты данных точек. Мы получим систему

$$\begin{cases} 2=k+b \\ 1=3k+b. \end{cases}$$

Решая ее, находим $k=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$.

Таким образом, искомое уравнение $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

Но может случиться и так, что соответствующая система уравнений не имеет решений. Пусть, например, данные точки имеют координаты (1; 2) и (1; 3). Подставляя эти значения в уравнение $y=kx+b$, получаем систему

$$\begin{cases} 2=k+b \\ 3=k+b, \end{cases}$$

не имеющую решений (ведь из уравнений системы следует $2=3$). На первый взгляд, это немного удивительно — ведь через две точки всегда проходит прямая. Оказывается, уравнение прямой, проходящей через точки (1; 2) и (1; 3), не записывается в виде $y=kx+b$ — ее уравнение $x=1$.

Таким образом, мы выяснили причину недоразумения — задача была неудачно сформулирована: в условии предполагалось, что уравнение прямой на координатной плоскости всегда имеет вид $y=kx+b$, однако для прямых, параллельных оси ординат, это не так. В связи с этим обстоятельством уравнение произвольной прямой записывают в виде $ax+by=c$. Такой вид позволяет охватить уже все прямые на координатной плоскости. Например, если положить $a=\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=\frac{5}{2}$, получится уравнение первой найденной нами прямой, а если взять $a=1$, $b=0$, $c=1$ — уравнение второй прямой.

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{cases} x+\sqrt{2}y=\sqrt{3} \\ \sqrt{2}x+2y=\sqrt{6}. \end{cases}$$

Решить ее — это на геометрическом языке значит найти общие точки прямых, заданных уравнениями $x+\sqrt{2}y=\sqrt{3}$, $\sqrt{2}x+2y=\sqrt{6}$. Решим эту систему методом исключения переменной: умножим первое уравнение на $\sqrt{2}$ и вычтем из второго:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x+2y=\sqrt{6} \\ \sqrt{2}x+2y=\sqrt{6} \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{2}x+2y=\sqrt{6} \\ 0=0. \end{cases}$$

В результате осталось только одно уравнение. Это означает, что система имеет бесконечное число решений и прямые совпадают. В процессе решения мы обнаружили, что второе уравнение — это первое, умноженное на $\sqrt{2}$, что сразу можно было не заметить.

В разобранных задачах мы столкнулись со всеми возможными ситуациями: система имеет единственное решение, не имеет решений, имеет бесконечное число решений. Так же обстоит дело и в общем случае. Система n линейных уравнений с n неизвестными, как правило, имеет единственное решение. Но когда одно из ее уравнений является «линейной комбинацией» остальных уравнений или противоречит им, она имеет бесконечное число решений или их вообще нет.

Задачи

4. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки а) (1; 5) и (2; 3); б) (6; 1) и (6; 5)

5. При каких k и b прямые $y-kx=2$ и $2y-6x=b$ а) совпадают? б) не пересекаются?

6. При каких a система

$$\begin{cases} 2x+(9a^2-2)y=3a \\ x+y=1 \end{cases}$$

не имеет решений?

7. Докажите, что система

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

тогда и только тогда имеет единственное решение, когда $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. (Число $a_1b_2-a_2b_1$ называется *определителем* системы.)

Ошибки при округлении

При решении задач на ЭВМ могут возникать удивительные ситуации. Классической иллюстрацией этого является решение системы

$$\begin{cases} x+\sqrt{2}y=\sqrt{3} \\ \sqrt{2}x+2y=\sqrt{6}. \end{cases} \qquad (1)$$

Эта система, как мы уже убедились, имеет бесконечное число решений. Однако, если решать ее на ЭВМ, она будет иметь... единственное решение! Это происходит потому, что ЭВМ не умеет оперировать с числами вида $\sqrt{2}$, — они заменяются в ней на десятичные (или двоичные) приближения.

Если, например, числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ заменить на их десятичные приближения с одной цифрой после запятой: $\sqrt{2}\approx 1{,}4$; $\sqrt{3}\approx 1{,}7$, $\sqrt{6}\approx 2{,}4$, система примет вид

$$\begin{cases} x+1{,}4y=1{,}7 \\ 1{,}4x+2y=2{,}4. \end{cases} \qquad (2)$$

Решив ее, мы получим одно решение: $x=1$; $y=0{,}5$.

Если же оставить четыре знака после запятой, получается система

$$\begin{cases} x+1{,}4142y=1{,}7320 \\ 1{,}4142x+2y=2{,}4494 \end{cases} \qquad (3)$$

имеющая тоже одно (но совсем другое) решение: $x=0{,}3178$; $y=1$.

Интересно, что, какими бы десятичными приближениями мы ни заменяли число $\sqrt{2}$, всегда будет получаться единственное решение.

Докажем это. Заменив в системе (1) $\sqrt{2}$ буквой a, получим

$$\begin{cases} x+ay=\sqrt{3} \\ ax+2y=\sqrt{6} \end{cases}$$

Покажем, что при $a^2\neq 2$ система имеет единственное решение. Если $a=0$, это очевидно. Пусть теперь $a\neq 0$. Умножая первое уравнение на a и вычитая из него второе, приводим систему к виду

$$\begin{cases} x+ay=\sqrt{3} \\ (a^2-2)y=a\sqrt{3}-\sqrt{6}. \end{cases}$$

Так как $a^2\neq 2$, y принимает единственное значение $\dfrac{a\sqrt{3}-\sqrt{6}}{a^2-2}$. Подставляя его в первое уравнение, находим единственное значение x. Таким образом, если в качестве a взять не само число $\sqrt{2}$, а его какое-нибудь приближение, то $a^2\neq 2$ — значит, система обладает единственным решением.

Остается напомнить («Алгебра 7», п. 28), что само число $\sqrt{2}$ не представляется в виде конечной десятичной дроби (и даже в виде любой дроби $\dfrac{p}{q}$, где p и q целые числа). Из-за этого мы и получили парадокс, связанный с решением системы (1) на ЭВМ.

Обратим внимание на то, что даже в случае, когда все коэффициенты данной системы — конечные десятичные дроби, при их округлении решение системы может сильно измениться. Так, система (2) получается округлением коэффициентов системы (3), и при этом их решения совсем разные. В системах с большим числом переменных ошибки, возникающие при округлении, тем более могут приводить к существенным изменениям решений.

Оценить ошибку и указать процедуру решения, гарантирующую наименьшую погрешность, — важная и далеко не простая задача. В начале прошлого века ее начал изучать великий математик Гаусс, а существенные дальнейшие продвижения в этом направлении были сделаны только в последние десятилетия. В связи с основополагающим вкладом Гаусса в эту область его именем назван простой и универсальный метод исключения переменных.

Метод Гаусса

Последовательное исключение переменных — наиболее удобный способ решения систем линейных уравнений на ЭВМ. Продемонстрируем его на примере системы трех уравнений с тремя переменными

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$$

Первый шаг состоит в том, что с помощью первого уравнения переменная x_1 исключается из остальных уравнений: первое уравнение оставляем неизменным; из второго уравнения вычитаем удвоенное первое; из третьего уравнения вычитаем учетверенное первое; получаем

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ -3x_2-2x_3=-2 \\ -3x_2-4x_3=2. \end{cases}$$

Второй шаг состоит в том, что с помощью нового второго уравнения переменная x_2 исключается из третьего уравнения: первые два уравнения оставляем неизменными; из третьего уравнения вычитаем второе; получаем

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ -3x_2-2x_3=-2 \\ -2x_3=4. \end{cases}$$

Теперь из последнего уравнения находим $x_3=-2$. Подставляя это значение в предыдущее уравнение, находим $x_2=2$. Подставляя $x_2=2$ и $x_3=-2$ в первое уравнение, находим $x_1=1$. Итак, у нас готов ответ: (1; 2; —2).

Аналогичным образом можно решать любые системы линейных уравнений. Грубо говоря, метод Гаусса заключается в следующем:

> С помощью первого уравнения переменная x_1 исключается из остальных уравнений. Затем с помощью нового второго уравнения переменная x_2 исключается из всех следующих уравнений. Потом с помощью нового третьего уравнения исключается переменная x_3. И так далее, пока мы не получим в последнем уравнении значение последней переменной. После этого находим переменные в обратном порядке, подставляя их известные значения в уравнения.

Мы видим, что это — почти готовая программа для ЭВМ. Но, чтобы этот метод срабатывал, нужно, чтобы на k-м шаге новое k-е уравнение содержало k-ю переменную (ведь с его помощью нам нужно исключать эту переменную из остальных уравнений). Если оказывается, что это не так, приходится переставлять (перенумеровывать) уравнения или переменные.

Может случиться также, что с некоторого места последние уравнения превратятся в числовые равенства вида $0=b$. Если хотя бы одно из этих равенств неверно ($b\neq0$), то система не имеет решений. Если же все эти равенства верны, то система имеет бесконечное число решений. (Все такие ситуации предусмотрены в реально используемых программах для ЭВМ.)

Отметим, что в ЭВМ вводятся не уравнения, а таблицы коэффициентов — так называемые *матрицы* системы. Например, системе, которую мы только что решали, сопоставляется матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right).$$

Два шага метода Гаусса, которые мы сделали при решении, можно изобразить так:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Кстати сказать, когда системы с тремя и большим числом переменных решаешь вручную, а не на ЭВМ, то тоже удобнее действовать с матрицами — меньше шансов ошибиться.

Задача 8. Решите систему, предлагавшуюся семиклассникам на 2-м туре XV Московской олимпиады:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5=1 \\ x_1+3x_2+4x_3+4x_4+4x_5=2 \\ x_1+3x_2+5x_3+6x_4+6x_5=3 \\ x_1+3x_2+5x_3+7x_4+8x_5=4 \\ x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=5 \end{cases}$$

Разные задачи

9. Математик вышел гулять — сначала он пошел по ровной дороге, затем поднялся в гору, повернул назад и пришел домой той же

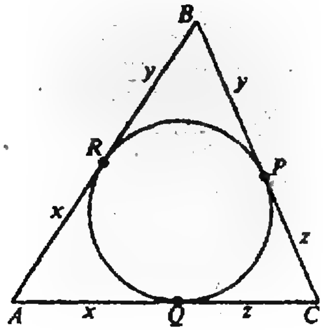


Рис. 1

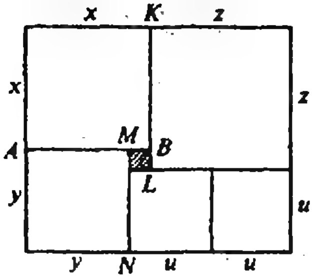


Рис. 2.

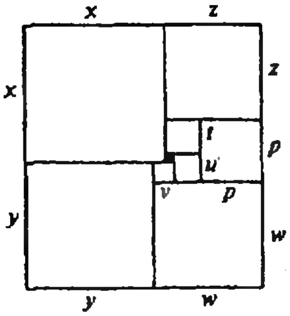


Рис. 3.

дорогой. Он знал, что гулял всего 5 ч, что его скорость по ровной дороге равна 4 км/ч, в гору — 3 км/ч и при спуске с горы — 6 км/ч. Сев за стол и составив одно уравнение с двумя переменными: x — пройденное в оба конца расстояние и y — длина наклонного участка, математик с удивлением обнаружил, что может найти x. Найдите x.

10. За круглым столом сидят 4 гнома. Перед каждым стоит кружка с молоком. Один из гномов переливает $\frac{1}{4}$ своего молока соседу справа. Затем сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и, наконец, четвертый гном $\frac{1}{4}$ оказавшегося у него молока наливает первому. Во всех кружках вместе молока 2 л. Сколько молока было первоначально в кружках, если

а) в конце у всех гномов оказалось молока поровну?

б) в конце у всех гномов оказалось молока столько, сколько было вначале?

11. Определите числа a, b и c так, чтобы функция $y=ax^2+bx+c$ имела таблицу значений

x	0	1	2
y	1	2	2

Решение. Подставляя последовательно данные значения x и y в формулу $y=ax^2+bx+c$, получаем $1=a\cdot 0+b\cdot 0+c$, $2=a\cdot 1+b\cdot 1+c$, $2=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c$. Решив эту систему уравнений, находим $c=1$, $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$. Следовательно, функция имеет вид

$$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1.$$

12. Определите числа a, b и c так, чтобы функция $y=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$ имела таблицу значений

x	0	1	2
y	1	2	2

13. Определите числа a, b, c и d так, чтобы равенство

$$(x-1)^2(ax+b)+(x^2+x-1)(cx+d)=1$$

выполнялось при всех значениях x.

Решение. Если равенство выполняется при всех значениях x, то оно выполняется, в частности, при $x=1$, при $x=0$, при $x=-1$ и при $x=2$. Подставляя их последовательно в это равенство получаем $c+d=1$, $b-d=1$, $-4a+4b+c-d=1$, $2a+b+10c+5d=1$. Решив эту систему уравнений относительно a, b, c, d, находим $a=3$, $b=5$, $c=-3$, $d=4$. Подставляя их в исходное равенство и раскрывая скобки, проверяем, что оно верно при всех значениях x.

Замечание. Мы подставили только четыре значения x, так как этого достаточно, чтобы определить четыре неизвестных. С другой стороны, последний шаг решения (проверка) тоже обязателен (рассмотрите равенство $(x-1)^2(ax+b)+(x^2+x-1)cx=1$ в точках $x=1$, $x=0$, $x=-1$).

14. Определите числа a, b и c так, чтобы равенство

$$(x^2-3x+2)a+(3x-1)(bx+c)=1$$

выполнялось при всех значениях x.

15. В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB в точках P, Q, R (рис. 1). Найдите *) $AQ=AR=x$, $BR=BP=y$ и $CP=CQ=z$, если $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. (Замечание. $AQ=AR$, $BR=BP$ и $CP=CQ$, так как касательные к окружности из одной точки равны.)

Решение. Из рисунка 1 получается система

---

*) Поскольку данная статья в первую очередь рассчитана на семиклассников, здесь и дальше используются обозначения из учебного пособия А. В. Погорелова «Геометрия 6—10».

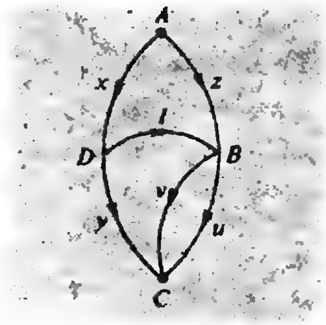


Рис. 4.

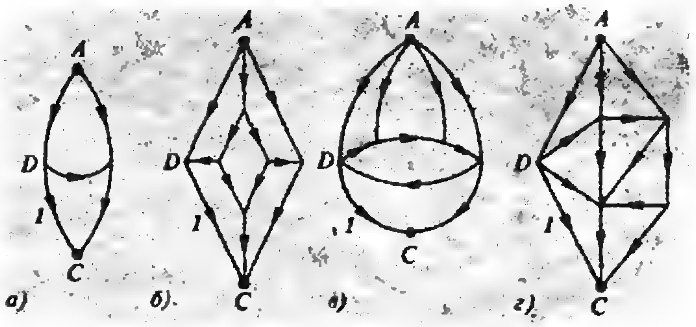


Рис. 5.

$$x+y=c,\ y+z=a,\ z+x=b.$$

Она, конечно, легко решается любым из вышеуказанных способов, но красивее и проще поступить иначе. Сложим все три уравнения. Получаем $2x+2y+2z=a+b+c$, откуда $x+y+z=\frac{a+b+c}{2}$. Вычитая из этого уравнения каждое из уравнений системы, находим $x=\frac{b+c-a}{2}$, $y=\frac{a+c-b}{2}$, $z=\frac{a+b-c}{2}$.

16. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка E. В треугольники ACE и ECB вписаны окружности, которые касаются отрезка CE в точках K и H соответственно. Найдите длину отрезка KH, если $AE=a$, $EB=b$.

17. (Предлагалась восьмиклассникам на XXIII Украинской олимпиаде в 1983 г.) Прямоугольник разбит на квадраты так, как показано на рисунке 2. Известно, что сторона заштрихованного квадрата равна 1. Найдите стороны остальных квадратов.

Решение. Обозначим искомые стороны через x, y, z, u (см. рис. 2). Тогда $MN=y=u+1$, $AB=x=y+1$, $KL=z=x+1$. Подставляя $y=u+1$ во второе соотношение, находим $x=u+2$. Подставляя $x=u+2$ в третье соотношение, находим $z=u+3$. Теперь запишем равенство противоположных сторон данного прямоугольника: $x+z=y+2u$; подставив сюда x, y и z, получаем $(u+2)+(u+3)=(u+1)+2u$, откуда $u=4$. Теперь находим $x=6$, $y=5$, $z=7$.

18. Прямоугольник разбит на квадраты так, как показано на рисунке 3. Известно, что сторона заштрихованного квадрата равна 2. Найдите стороны остальных квадратов.

В двух следующих задачах речь идет о разветвленных электрических цепях, составленных из проводников единичного сопротивления. Каждая цепь подключена к источнику в двух точках (*полюсах*). Токи подчиняются *правилам Кирхгофа*, которые для рассматриваемых цепей можно сформулировать так:

1) Сумма токов, входящих в любой узел, равна сумме токов, выходящих из него (полюс узлом не считается).

2) В любом замкнутом контуре сумма токов, идущих по часовой стрелке, равна сумме токов, идущих против часовой стрелки*).

19. На рисунке 4 изображена электрическая цепь с полюсами A, C и узлами B, D. Найдите токи во всех проводниках этой цепи, если известно, что ток в проводнике DB равен 1. (Стрелками обозначены направления токов.)

20. На рисунке 5 изображены электрические цепи с полюсами A и C. Найдите токи в их проводниках, если известно, что в каждой цепи ток в проводнике CD равен 1. Некоторые токи у вас получатся нулевыми и отрицательными, что это означает?

21. Двое играют в такую игру: в системе

$$\begin{cases} *x+*y=* \\ *x+*y=* \end{cases}$$

они поочередно вместо какой-нибудь звездочки ставят какое-нибудь число; первый хочет, чтобы полученная в конце система имела решение, а второй хочет, чтобы система решений не имела. Кто выиграет при правильной игре? А кто выиграет, если, наоборот, первый хочет, чтобы полученная система не имела решений, а второй — чтобы имела?

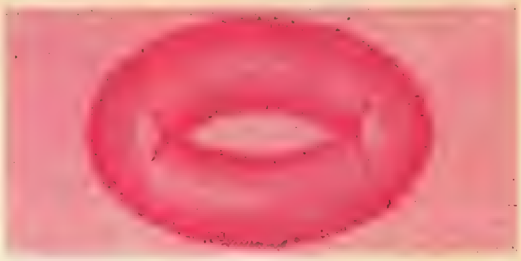
22. (Предлагалась в восьмом и десятом классах на XIII Всесоюзной олимпиаде и вошла в задачник «Кванта» под номером М578; решение см. в разделе «Ответы, указания, решения».) Решите систему (a и b — данные числа)

$$\frac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=a,\qquad \frac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=b.$$

---

*) Правильнее сказать, что одинаковы суммы падений напряжения, но, поскольку все проводники имеют единичные сопротивления, можно говорить и о токах.

Под редакцией Д. Б. Фукса



Видимые контуры

На верхнем рисунке воспроизведена фотография тора (поверхности бублика или спасательного круга), сделанного из тонкого стекла. Мы видим на этой «фотографии» темную линию замысловатой формы: она имеет две *точки самопересечения* и четыре *точки возврата* — так называются точки, в которых линия скачком меняет свое направление на 180°, образуя нечто вроде острого клюва. Что изображает эта линия, почему на ней присутствуют точки самопересечения и точки возврата и как выглядит отвечающая ей линия на самой поверхности? Чтобы ответить на эти вопросы, переведем их на привычный геометрический язык.

Луч света, вовсе не пересекающий поверхность или пересекающий ее под большим углом, не теряет или почти не теряет своей интенсивности. В то же время, луч, близкий к касательной к поверхности*), проходит через значительную толщу стекла (рис. 1) и соответствующее место на фотографии или на экране будет более темным. Таким образом, наши проблемы имеют следующую геометрическую переформулировку.

Лежащий в пространстве тор пронизывается пучком параллельных прямых (лучей света). Оставим в этом пучке только те прямые, которые касаются тора, и отметим на каждой из этих прямых точку касания и точку пересечения с заранее фиксированной плоскостью — «экраном». Отмеченные точки составляют линии на торе и на экране. Мы хотим разобраться в устройстве этих линий.

Оказывается, что если угол наклона прямых к плоскости осевой окружности тора не слишком велик, то линии будут выглядеть как показано на рисунке 2, в частности линия на торе не будет иметь никаких особенностей — ни точек самопересечения, ни точек возврата). Чтобы в этом убедиться, проведем через наши лучи вертикальные (параллельные оси вращения тора) плоскости. Эти плоскости будут пересекать тор по линиям, которые мы будем дальше называть *сечениями*. Изменение сечения при плавном движении вертикальной плоскости изображено на первой «кинограмме» (рис. 3). В каждой из наших вертикальных плоскостей лучи составляют семейство параллельных прямых. Мы отбираем те из них, которые касаются сечений, и отмечаем точки касания синим карандашом, а точки пересечения касательных с прямой — следом нашего экрана — красным карандашом (см. кинограмму). Вертикальным плоскостям, составляющим нашу кинограмму, отвечают параллельные прямые на экране. Нарисуем их и отметим на них найденные красные точки (см. рис. 3). Получившаяся картина позволяет проследить ход почти всей линии на экране, неясными остаются два отмеченных на рисунке места. В оставшихся двух местах (достаточно рассмотреть одно из них, поскольку они симметричны) мы применим метод «замедленной киносъемки», причем ограничимся лишь центральной частью кадра.

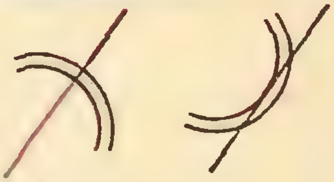


Рис. 1

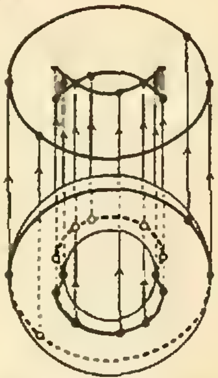


Рис. 2.

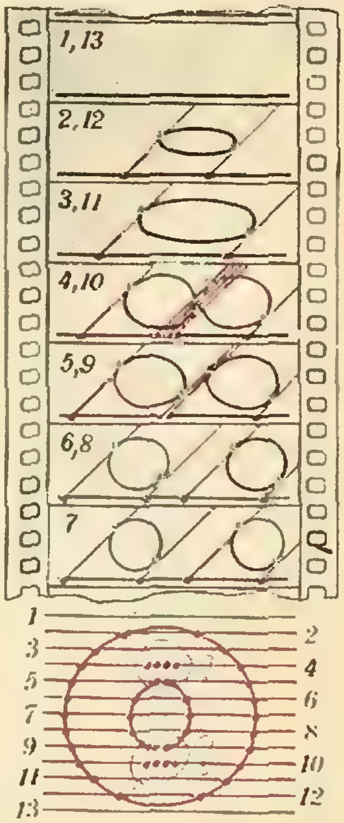


Рис. 3.

---

*) Касательная к поверхности есть, по определению, прямая, касающаяся некоторой линии, лежащей на этой поверхности.

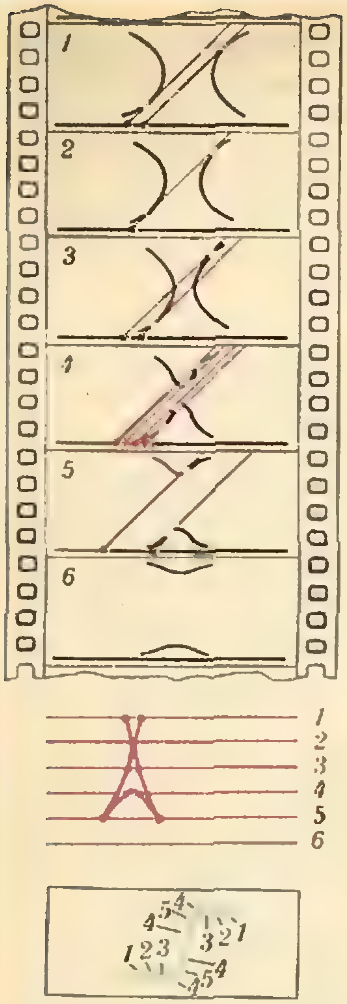


Рис. 1

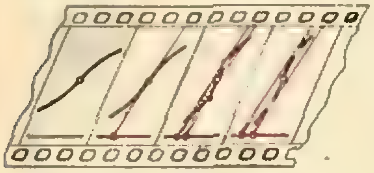


Рис. 5

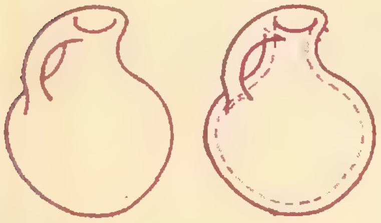


Рис. 6.

Задание к следующему выпуску геометрических страничек составляет задача М823 из Задачника «Кванта» (см. «Квант», 1983, № 9).

На рисунке 4 изображена получающаяся кинограмма, и под ней показаны соответствующие части красной и синей линий (синюю линию мы проектируем на вертикальную плоскость, она от этого существенно не меняется). На нашей кинограмме мы видим, что две касательные сначала движутся друг к другу и проходят друг сквозь друга. В этот момент (кадр № 2) на красной линии получается точка самопересечения, а на синей — нет (соответствующая касательная касается тора в двух точках! — впрочем, это происходит только если касательная достаточно полога). Затем в некоторый момент (в момент слияния двух кусков сечения в один — см. кадры №№ 9 и 10 первой кинограммы) в центре кадра возникают две новые касательные, которые быстро расходятся. Затем скорость, с которой они расходятся, уменьшается, но все равно они догоняют две старые касательные (кадр № 5 второй кинограммы). И тут же все касательные исчезают.

Последний момент мы рассмотрим еще внимательнее. Для этого на третьей кинограмме мы применим еще большее замедление, еще большее увеличение и — еще один кинотрюк — заставим время двигаться вспять. На попадающих в поле зрения кусках сечения имеется точка перегиба, причем касательная к сечению в точке перегиба с течением времени поворачивается против часовой стрелки. Пока она остается положе направления наших лучей, рассматриваемая часть кривой вообще не имеет касательных, параллельных лучам. Затем такая касательная появляется, причем в момент своего появления это — касательная в точке перегиба. Сразу после появления она раздваивается, причем точки касания двух касательных расходятся очень быстро, а сами касательные расходятся очень медленно (см. кинограмму на рисунке 5). Поэтому две ветви красной линии, прилегающие к основанию касательной в точке перегиба, очень близки друг к другу — мы имеем точку возврата; соответствующие же ветви синей линии расходятся в разные стороны, то есть синяя линия является вблизи рассматриваемой точки обыкновенной гладкой кривой.

Можно заметить, что в точках, отвечающих точке возврата красной линии, касательная к синей линии имеет направление наших лучей. Уже одного этого достаточно, чтобы убедиться в существовании у красной линии точек возврата. Действительно, красная линия получается в результате проектирования синей линии вдоль лучей. При проектировании же пространственной кривой на плоскость в направлении касательной к этой кривой в некоторой точке на проекции получается точка возврата. Чтобы это увидеть, возьмите изогнутую проволоку и посмотрите на нее одним глазом так, чтобы касательная в некоторой точке проволоки проходила через центр вашего зрачка. Вы увидите точку возврата.

В заключение заметим, что наша конструкция «красной и синей линии» применима не только к поверхности тора, но к любой поверхности, пронизываемой параллельными прямыми. При этом красная линия может иметь точки *пересечения и возврата, а синяя линия, как правило,* их не имеет.

Заметим, что художник, изображающий объемный предмет при помощи линий, изображает в действительности часть нашей красной линии, отвечающей поверхности предмета — часть, состоящую из оснований тех касательных, которые не пересекают предмета между точкой касания и экраном. Эта часть красной линии образует «видимый контур» предмета, такой, как на сосуде на рисунке 6 (справа к видимому контуру пунктиром пририсованы невидимые части красной линии — это не принято делать на рисунках, но принято делать на чертежах).

Впрочем, точки возврата на видимом контуре никогда не появятся: по крайней мере, одна из двух ветвей красной линии, входящих в точку возврата, будет невидима.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Вращение Земли и ускорение свободного падения» предназначена восьмиклассникам, заметка «Два вида электричества» — девятиклассникам и «Принцип Ферма» — десятиклассникам.

Материалы подготовил И. К. Белкин.

Вращение Земли и ускорение свободного падения

В учебнике «Физика 8» на странице 104 сказано: «Вращение Земли приводит к тому, что ускорение свободного падения, измеренное относительно какого-либо тела на поверхности Земли, на разных широтах различно». Выясним причины этого различия.

Относительность движения состоит, как известно, в том, что движение одного и того же тела, но относительно разных систем отсчета, движущихся друг относительно друга, выглядит по-разному. Различны траектории движения, скорости, ускорения.

Если одна из систем отсчета движется относительно другой с постоянной скоростью (без ускорения), то скорость $\vec{v}$ тела относительно одной из систем отсчета, условно принятой за неподвижную, равна $\vec{v}_1+\vec{v}_2$, где $\vec{v}_1$ — скорость тела относительно подвижной системы и $\vec{v}_2$ — скорость подвижной системы относительно неподвижной. Ускорение тела относительно обеих систем в таком случае одно и то же (оно, как говорят, абсолютно).

Иное дело, если одна из систем отсчета движется относительно другой с ускорением. Тогда не только скорость, но и ускорение тоже относительно: ускорение $\vec{a}$ тела относительно неподвижной системы отсчета равно сумме ускорений $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, где $\vec{a}_1$ — ускорение тела относительно подвижной системы и $\vec{a}_2$ — ускорение подвижной системы относительно неподвижной, то есть

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2. \qquad (1)$$

Одним из примеров именно такого случая служит свободное падение тел на Землю. Поскольку Земля вращается вокруг своей оси, система отсчета, связанная с любой точкой на ее поверхности, движется с ускорением. Поэтому ускорение падающего тела относительно неподвижной системы должно равняться сумме ускорения тела относительно подвижной системы и ускорения подвижной системы относительно неподвижной.

Неподвижная система отсчета может быть связана с каким-нибудь неземным телом, например с Солнцем. Но можно поступить и проще, не покидая Землю. Ведь и на поверхности Земли есть точки, не участвующие в ее вращении. Это — полюсы Земли, через которые проходит ось вращения. Следовательно, чтобы найти значение ускорения падающего тела относительно неподвижной системы отсчета, нужно измерить ускорение свободного падения на земном полюсе. Для этого на полюсе можно установить линейку с делениями (рис. 1) и, например, с помощью стробоскопического метода, *измерить ускорение падающего* вдоль линейки тела. Линейка и связанная с ней система координат и будут для нас неподвижной системой отсчета. Так как свободное

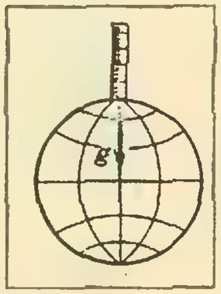


Рис. 1.

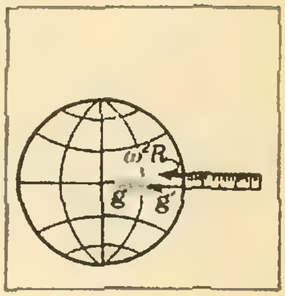


Рис. 2.

падение — движение прямолинейное, достаточно одной координатной оси, которую естественно направить вдоль линейки, то есть вдоль оси вращения Земли.

Результат такого измерения легко предсказать. Согласно второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения,

$$mg = G\frac{mM}{R^2},$$

где m — масса тела, g — ускорение падающего тела, G — гравитационная постоянная, M — масса Земли и R — ее радиус. Отсюда можно найти значение ускорения падающего тела относительно неподвижной системы отсчета:

$$g = G\frac{M}{R^2}.$$

Его мы и получим, если выполним описанный опыт.

Такой же опыт можно провести в любом другом месте на Земле. Для этого надо опять установить вертикальную линейку и с ней связать систему отсчета. Но теперь это будет система отсчета, движущаяся с ускорением относительно неподвижной системы.

Расположим, например, линейку на экваторе (рис. 2). Здесь наша система отсчета (линейка) движется вместе с Землей по окружности экватора с центростремительным ускорением, равным $\omega^2 R$, где ω — угловая скорость вращения Земли и R — ее радиус. Направлено это ускорение к центру Земли, как и ускорение g, сообщаемое телу силой притяжения *). Измеренное на экваторе ускорение g' будет несколько иным по сравнению с ускорением на полюсе. Согласно формуле (1), мы можем написать **)

$$g = g' + \omega^2 R. \qquad (2)$$

Эта формула и указывает на то, что ускорение падающего тела относительно неподвижной системы отсчета (g) равно сумме ускорений тела относительно подвижной системы (g') и подвижной системы относительно неподвижной ($\omega^2 R$). Из формулы (2) видно, что ускорение g' свободного падения тела на экваторе не равно значению ускорения g, измеренному на полюсе. Оно меньше g на величину $\omega^2 R$:

$$g' = g - \omega^2 R.$$

На сколько же численно отличается значение g' от g? Чтобы это узнать, нужно, очевидно, вычислить значение величины $\omega^2 R$. Угловую скорость ω вращения Земли можно найти, зная период вращения Земли $T = 24$ ч $= 86400$ с:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1}.$$

Радиус Земли на экваторе $R = 6378$ км $\approx 6{,}38 \cdot 10^6$ м. Значит,

$$\omega^2 R \approx (7{,}3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6{,}38 \cdot 10^6\ \text{м/с}^2 \approx 3{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{м/с}^2.$$

На столько и отличается измеренное ускорение свободного падения на экваторе от того ускорения, которое наблюдалось бы, если бы Земля не совершала суточного вращения и система отсчета, связанная с ней, не двигалась бы ускоренно.

В большинстве случаев этим небольшим различием в значениях ускорения свободного падения пренебрегают. Но обнаружить его можно сравнительно просто. Так, например, часы с маятником (период колебаний маятника зависит от ускорения свободного падения) на экваторе отстают от таких же часов на полюсе приблизительно на 3 минуты за сутки.

Заметим в заключение, что различие в значениях ускорения свободного падения не означает, что и сила притяжения тела к Земле различна в разных местах на Земле. Эта сила определяется законом всемирного тяготения

$$F = G\frac{mM}{R^2},$$

и на нее вращение Земли не оказывает никакого влияния.

Иначе обстоит дело с величиной, называемой весом тела. Вес тела — это сила, с которой тело вследствие притяжения к Земле действует на опору или подвес. Если опора или подвес покоятся относительно Земли или движутся относительно нее без ускорения, то вес численно равен силе тяжести. Но весы, при помощи которых измеряется вес тела, в любом месте Земли, кроме ее полюсов, движутся с ускорением. Поэтому везде, кроме полюсов, вес тела не равен силе тяжести. Наименьшим вес тела будет на экваторе. Впрочем, значения веса на экваторе и на полюсе различаются так же мало, как и значения ускорения свободного падения.

---

*) Мы пренебрегли различием в силе притяжения на экваторе и на полюсе, вызванным нестрогой сферичностью Земли.

**) Мы здесь не пользуемся векторными обозначениями, так как все три ускорения направлены вдоль координатной оси и их модули равны проекциям на эту ось.

Два вида электричества

(Из истории физики)

В прошлом году исполнилось 250 лет с того времени, когда впервые стало известно о существовании двух видов электричества. В 1733 году французский физик Шарль Франсуа Дюфе (1698—1739) опубликовал во французском и в английском журналах статьи, в которых описал результаты своих опытов по электризации различных тел.

Стеклянное и смоляное. Из многочисленных и остроумно поставленных экспериментов Дюфе сделал вывод, что существуют два вида электричества. Одно электричество возникает при натирании ко́пала (ископаемой смолы), янтаря (тоже ископаемой смолы), воска, шелка и многих других веществ. Другое появляется при натирании стекла, горного хрусталя, драгоценных камней, шерсти и др. Поэтому Дюфе назвал первое из них смоляным, а второе стеклянным электричеством. Тело, обладающее любым из двух видов электричества, притягивает к себе легкие тела (именно это свойство еще с античных времен обозначалось словом «электричество»). Различие же состоит, как выяснил Дюфе, в том, что тела, заряженные одним и тем же электричеством (стеклянным или смоляным), отталкивают друг друга, но если одно тело заряжено стеклянным, а другое смоляным электричеством, то они взаимно притягиваются.

Так были установлены фундаментальные для науки об электричестве факты: существование двух видов электричества и существование электрических сил притяжения и отталкивания. Естественно возник вопрос о том, как же появляется у наэлектризованных тел то или иное электричество. В то время об этом можно было только строить догадки.

Флюид Франклина. Одна такая догадка была высказана в 1750 году американским физиком (а также известным государственным и общественным деятелем, одним из руководителей борьбы американских колоний за независимость) Бенджамином Франклином (1706—1790).

По Франклину в каждом теле содержится особое электрическое вещество (флюид, как тогда говорили), что-то вроде электрической жидкости. Частицы этой электрической жидкости отталкиваются друг от друга, но сильно притягиваются частицами тела, так что всякое тело действует на электрическую жидкость подобно губке, втягивающей в себя воду (частицы электрической жидкости много меньше частиц самого тела, иначе они не могли бы проникать внутрь тела). Но присутствие электрической жидкости в теле не делает его наэлектризованным, если она содержится в теле в некотором, так сказать, нормальном количестве. При натирании же одного тела другим часть электрической жидкости перетекает из одного тела в другое, вот тогда-то оба тела и становятся наэлектризованными. То тело, в которое электрическая жидкость перетекла и в котором поэтому создается ее избыток по сравнению с нормальным количеством, становится обладателем стеклянного электричества. Второе тело, в котором электрической жидкости меньше нормального количества, заряжается смоляным электричеством. Однако Франклин дал этим двум видам электричества другие названия. Стеклянное электричество (им обладают тела с избытком электрической жидкости) Франклин назвал положительным, а смоляное (которым обладают тела с недостатком электрического флюида) — отрицательным. Эти названия, как известно, сохранились до наших дней, впрочем, как и другие термины, введенные в науку об электричестве Франклином: заряд, разряд, конденсатор, батарея, проводник и т. д.

Такое довольно странное толкование дал Франклин известным в его время электрическим явлениям. Странное потому, что оно не могло объяснить самый важный из известных тогда фактов — притяжение легких предметов к наэлектризованным телам.

Электричество и ...чулки. Другое объяснение было предложено в 1759 году англичанином Робертом Симмером. Поводом для этого послужили довольно занятные наблюдения, проведенные им.

Симмер имел обыкновение носить две пары чулок: черные шерстяные для тепла и белые шелковые для красоты. Снимая с ноги сразу оба чулка и выдергивая один из другого, Симмер видел, как оба чулка раздуваются, воспроизводят форму ноги и притягиваются друг к другу. Однако чулки одного цвета, как черные, так и белые, друг от друга отталкиваются. Если держать в одной руке два белых, а в другой два черных чулка, то при сближении рук взаимное отталкивание чулок одного цвета и притяжение разноцветных приводит к забавной возне между ними, чулки противоположных цветов как бы набрасываются друг на друга и сплетаются в один причудливый клубок.

Эти наблюдения и привели Симмера к заключению, что в каждом теле имеется не одна, а две электрические жидкости — положительная и отрицательная, содержащиеся в теле в одинаковых количествах. При натирании двух тел какая-то из них может перейти из одного тела в другое, тогда в одном теле окажется избыток одной из жидкостей, а в другом — ее недостаток. Оба тела станут наэлектризованными противоположными по знаку электричествами (зарядами).

Электрический конфликт. Так появились два представления об электричестве. Долгое время, почти полтора столетия, ни одна из них не получала всеобщего признания.

Когда в конце XVIII — начале XIX вв. появилась возможность получать и изучать постоянный электрический ток, возник спор о том, что именно «течет» в цепи, содержащей источник тока и проводники. Были сомнения и в том, одинаковы ли электричество, которое получают при натирании тел, и то, что течет в электрической цепи. Последнее получило даже специальное название — гальваническое электричество. Но все же многие считали, что в проводниках электрической цепи текут одновременно два симмеровских электричества, и называли электрический ток... электрическим конфликтом, поскольку эти электричества текут в противоположных направлениях. Так, например, когда в 1820 году Х. Эрстед издал брошюру, в которой описывалось открытое им действие тока на магнитную стрелку, он назвал ее так: «Опыты, относящиеся к действию электрического конфликта на магнитную стрелку». Тогда читателям было понятно это странное для нас название, и брошюра имела успех ввиду фундаментальной важности сделанного открытия.

Прав был Симмер. Окончательное разрешение старый спор двух теорий — Франклина и Симмера — получил лишь в конце XIX — начале XX вв.

Теперь мы знаем, что победителем в споре надо признать Симмера. «Электрические жидкости Симмера» — это отрицательно заряженные электроны и положительно заряженные протоны, которые в строго одинаковом числе содержатся в каждом нейтральном теле, в каждом атоме любого вещества.

Но кое-что оказалось верным и в теории Франклина: при натирании тел переходить с одного тела на другое может только один «флюид» — отрицательно заряженные электроны. Однако тело, на которое они переходят, становится отрицательно заряженным, в то время как Франклин считал его заряженным положительно. Это связано с тем, что Франклин счел нужным назвать положительным стеклянное электричество Дюфе. Отсюда, от этого выбора, сделанного Франклином, следует и то, что электрону мы приписываем отрицательный знак заряда, и то, что за направление электрического тока принимается направление движения положительных зарядов, хотя в металлических проводниках фактически движутся отрицательно заряженные частицы. В электролитах и газах электрический ток — это встречное движение и положительных, и отрицательных частиц. Но теперь никто это не считает электрическим конфликтом.

Принцип Ферма

Основу геометрической оптики, которая оперирует понятием «световой луч», составляют три закона — законы прямолинейного распространения, отражения и преломления света. В давние времена, когда были сформулированы эти законы, вопрос о природе света еще не стоял, и за понятием «луч» не скрывалось ничего физически реального.

В 20-х годах XIX в. было выяснено, что свет — это волна. Луч света стал просто прямой, перпендикулярной волновой поверхности и указывающей направление распространения световой волны. На основе волновых представлений можно легко получить законы отражения и преломления света. Так это и сделано в учебнике «Физика 10» (§§ 37 и 65). Однако в конце XIX — начале XX вв. стало ясно, что свет обладает не только волновыми, но и корпускулярными свойствами тоже. С точки зрения корпускулярной (квантовой) природы свет представляет собой поток элементарных световых частиц — фотонов. В однородной среде луч можно считать траекторией движения фотонов.

Но интересно, что задолго до этого был сформулирован удивительный принцип, из которого прямо следуют все основные законы распространения света. Принцип этот, найденный французским математиком Пьером Ферма (1601—1665) около 1660 года, гласит: *из всех возможных путей между двумя точками свет проходит по тому, по которому время прохождения наименьшее.*

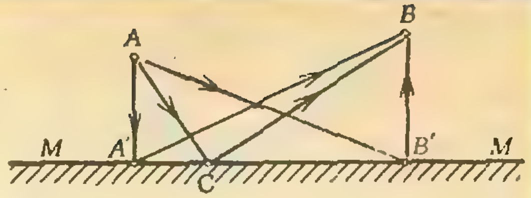


Рис. 1.

Из принципа Ферма (так его обычно называют) следует, что в однородной среде (в такой среде скорость света всюду одинакова) свет должен распространяться прямолинейно: прямая — кратчайшее расстояние между двумя точками, следовательно, и время распространения — наименьшее.

Покажем теперь, что закон отражения света — тоже прямое следствие принципа Ферма.

Закон отражения света. Пусть MM — плоское зеркало. В точке A находится источник света, и нас интересует, по какому пути свет, отразившись от зеркала, приходит из точки A в точку B (рис. 1). На рисунке 1 показаны некоторые из возможных путей — $AA'B$, ACB, $AB'B$. Таких «маршрутов» для света можно изобразить бесчисленное множество. Они различны по длине, так что на их прохождение требуется различное время. Оно зависит от того, в какую точку зеркала упадет луч и, отразившись, направится в B.

Из простых геометрических соображений легко выяснить, куда именно должен упасть луч, чтобы время его прохождения по «маршруту» точка A — зеркало — точка B было наименьшим. На рисунке 2 представлен один из возможных путей — ACB. Опустим из точки B перпендикуляр на зеркало MM и продолжим его по другую сторону зеркала до точки B', отстоящую от зеркала на расстоянии $|OB'| = |OB|$. Проведем линию CB'. Получившиеся треугольники COB и COB' равны друг другу, так как они прямоугольные, сторона OC у них общая и $|OB|=|OB'|$. Следовательно, $|CB|=|CB'|$, откуда следует, что длина пути луча ACB равна сумме длин от A до точки C падения луча на зеркало и от этой точки до токи B. Ясно, что эта сумма будет наименьшей, если точка C будет лежать *на прямой, соединяющей точки A и B'* (рис. 3). Тогда и сумма длин $|AC|$ и $|CB|$, то есть длина всего пути света, будет наименьшей, Наименьшим будет и время прохождения светом этого пути.

Из рисунка 3 видно, что $\widehat{BCO}=\widehat{B'CO}$ (треугольник BCB' равнобедренный, поэтому CO — биссектриса угла при вершине), а $\widehat{B'CO}=\widehat{ACM}$ (как вертикальные). Это значит, что углы наклона падающего и отраженного лучей к зеркалу равны друг другу. В этом и состоит закон отражения света. Принято, однако, отсчитывать углы не от плоскости зеркала, а от нормали к ней в точке падения. Но ясно, что если равны углы i и i', то равны и углы α и γ. Закон отражения обычно записывается в виде

$$\alpha=\gamma.$$

Закон этот, как мы видим, — следствие того, что свет как бы «выбирает» путь, который проходится за наименьшее время. Нетрудно видеть, что из принципа Ферма следует и утверждение, что луч падающий, луч отраженный и нормаль к зеркалу в точке падения лежат в одной плоскости. Если бы это было не так, то путь был бы длиннее и требовал бы большего времени.

Отметим еще одну важную особенность, связанную с отражением света от зеркала. Если в точке A (см. рис. 3) находится источник света, а в точке B — глаз, то глаз воспримет свет так, как будто бы источник света находится не в A, а в A', а зеркала вовсе нет. Если зеркало убрать, а источник перенести из A в A', то глаз не заметит такой замены.

Закон преломления света. Из принципа Ферма можно получить и закон преломления света (точнее — световых лучей). Здесь речь идет о переходе света из одной среды (среда I на рисунке 4) в другую (среда II) через границу раздела между ними. Различие сред состоит в том, что в них различны скорости распространения света.

Мы рассмотрим случай, когда среда I — это вакуум, в котором скорость света равна c, а вторая среда — какое-то прозрачное вещество (например, стекло, вода и т. д.), в котором скорость света v меньше, чем c: $c>v$.

Между точками A в среде I и B в среде II также мыслимы бесчисленное множество путей, но, согласно принципу Ферма, свет «выбирает» тот из них, для прохождения которого нужно наименьшее время. Ясно, например, что путь $AA'B$ не есть такой путь, потому что здесь свет проходит короткое (кратчайшее) расстояние в среде с большой скоростью и большое расстояние в среде с малой скоростью. Быть может, выгоднее путь $AB'B$? Здесь свет в среде с малой скоростью проходит минимальную часть пути, а наибольшая часть приходится на среду с большой скоростью. Но есть ли именно этот путь самый выгодный в смысле экономии времени? Может быть, выгоднее несколько удлинить путь в среде II с тем, чтобы сократить путь в среде I? Словом, нужно найти, в какой точке свету

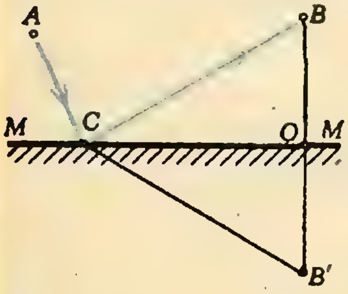


Рис. 2.

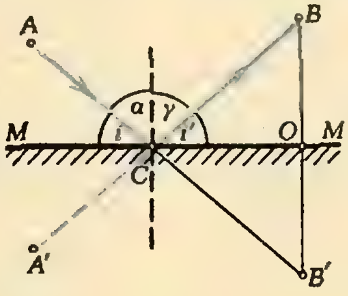


Рис. 3.

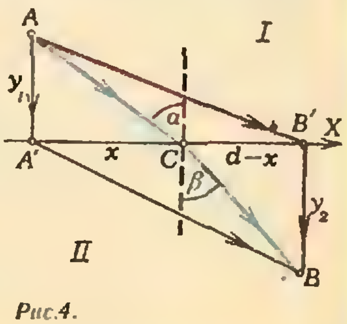


Рис.4.

(лучу) нужно пересечь границу раздела двух сред, чтобы время прохождения от A к B было наименьшим. Ясно, что эта точка лежит где-то между A' и B' (включая, возможно, и самую точку B').

Обозначим расстояние между A' и B' через d. Если нужная нам точка C пересечения границы раздела находится на расстоянии x от A', то от B' она отстоит на расстоянии $d-x$ (см. рис. 4). Путь AC, проходимый светом в среде I, равен $\sqrt{y_1^2+x^2}$, а время прохождения этого пути

$$t_1=\frac{\sqrt{y_1^2+x^2}}{c}.$$

Путь CB, проходимый светом в среде II, равен $\sqrt{y_2^2+(d-x)^2}$, а время, нужное для прохождения этого пути,

$$t_2=\frac{\sqrt{y_2^2+(d-x)^2}}{v}.$$

Общее время t определяется равенством

$$t=t_1+t_2=$$
$$=\frac{\sqrt{y_1^2+x^2}}{c}+\frac{\sqrt{y_2^2+(d-x)^2}}{v}. \qquad (1)$$

Время t зависит только от x — координаты точки падения луча, так как величины y_1, y_2, c, v и d — постоянные, то есть одинаковые при всех значениях x. Вот нам и нужно найти, при каком значении x время t будет наименьшим. Средствами обычной алгебры эту задачу решить нельзя. Чтобы ее решить, нужно воспользоваться тем, что при том значении x, при котором t минимально, производная функции, стоящей в правой части уравнения (1), равна нулю.*) Это приводит нас к такому условию для x:

$$\frac{x}{c\sqrt{y_1^2+x^2}}=\frac{d-x}{v\sqrt{y_2^2+(d-x)^2}}. \qquad (2)$$

Из рисунка 4 видно, что

$$\frac{x}{\sqrt{y_1^2+x^2}}=\sin\widehat{A'AC}=\sin\alpha;$$
$$\frac{d-x}{\sqrt{y_2^2+(d-x)^2}}=\sin\widehat{CBB'}=\sin\beta,$$

где α — угол между падающим лучом и нормалью к границе раздела в точке падения (угол падения) и β — угол между этой нормалью и преломленным лучом (угол преломления). Условие (2) принимает поэтому вид:

$$\frac{\sin\alpha}{c}=\frac{\sin\beta}{v}, \quad \text{или} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{c}{v}.$$

В этом и заключается закон преломления для нашего случая: отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению скоростей распространения света в вакууме и в среде, которая с ним граничит. Отношение c/v — величина постоянная, характерная для данной среды. Она называется показателем преломления вещества и обозначается буквой n, так что

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n.$$

В общем случае, когда свет переходит из произвольной среды, в которой скорость света равна v_1, в среду со скоростью света в ней v_2, закон преломления имеет вид

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}=n_{21},$$

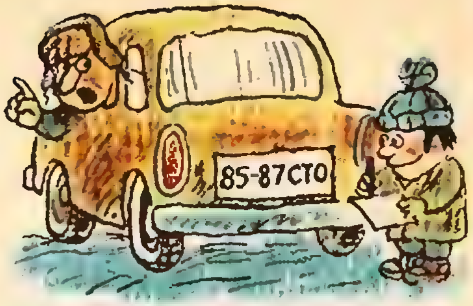
где n_{21} — относительный показатель преломления сред 2 и 1.

Принцип Ферма справедлив, конечно, не только для тех простейших примеров отражения и преломления света, которые мы здесь рассмотрели. С помощью этого принципа можно понять и точно рассчитать ход лучей и в призме, и в линзе и в любой самой сложной системе призм, линз, зеркал.

---

*) Производная функции $t=t(x)$ равна нулю еще в двух случаях — когда функция проходит через максимум и когда вовсе не зависит от x (то есть функция стационарна). Здесь нас интересует только случай минимума. Однако действительный путь света может быть и минимальным, и максимальным, и стационарным (равным всем остальным возможным путям). Стационарный и максимальный пути наблюдаются, например, при отражении света от изогнутых поверхностей. Таким образом, принципу Ферма можно дать более общую формулировку, чем это было сделано самим Ферма

Квант для младших школьников



Задачи

1. Саша обратил внимание на номер автомашины, подъехавшей к его дому. Интересно! Если прибавить к первому числу цифры второго: 85+8+7, то получится 100, и если прибавить ко второму числу цифры первого: 87+8+5, то тоже получится 100. А сколько всего таких номеров?

2. Поставьте в примере на умножение вместо звездочек недостающие цифры.

3. Расставьте числа от 1 до 12 в кружки так, чтобы суммы чисел на каждой из шести прямых, на каждой из трех окружностей и в вершинах каждого их трех ромбов были одинаковы.

4. У Вадика было орехов в 3 раза меньше, чем у Кости. Если Вадику дать еще столько же орехов, взяв их у Кости, то у обоих будет поровну. Сколько орехов было у Кости?

5. «— Огонь в полумиле от нас, и ветер несет его в нашу сторону со страшной быстротой...

— Что там огонь!... По-вашему, это огонь?... Ну, молодцы, за работу... Беритесь-ка за эту низкую, вялую траву и выдергивайте ее вон...

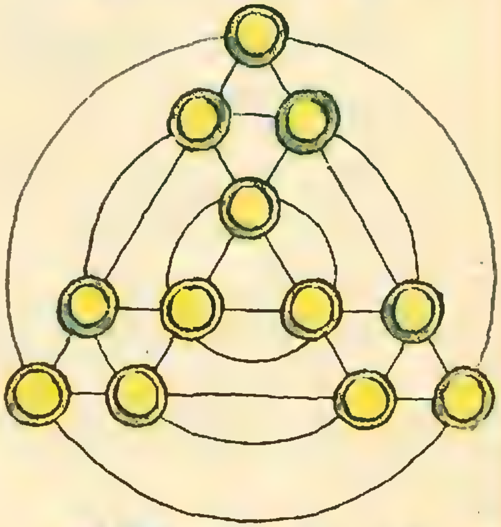
Старик прошел в противоположный край... и, выбрав пук самых сухих стеблей, положил их на полку своего ружья. Они мгновенно вспыхнули от искры...

— Теперь, — сказал старик,... — вы увидите, как огонь дерется с огнем!»

Так в романе Ф. Купера «Прерия» описывается один из способов борьбы со степным пожаром — поджигание степи с противоположной стороны. Попробуйте объяснить, в чем секрет этого способа.

Эти задачи нам предложили *Ю. А. Аленков, С. Н. Олехник, А. В. Сигрианский, А. В. Токарев, А. М. Чарных.*

```
     5**4
   × 5**7
 --------
    40***
   1*4**
  17***
 2***0
 --------
 *0**5*1*
```



В уме и на пальцах

(обзор писем)

Кандидат физико-математических наук
А. П. САВИН

В статье Р. Ш. Данелия «На пальцах и в уме», опубликованной в пятом номере «Кванта» за прошлый год, рассказывалось об умножении однозначных чисел с помощью пальцев и о быстром умножении в уме некоторых двузначных чисел (в частности, о возведении в квадрат двузначных чисел, оканчивающихся на 5). Статья заканчивалась словами: «Если вы придумаете другие приемы, сокращающие умножение, — напишите нам!»

Наши читатели живо откликнулись на этот призыв. Учительница математики из Донецка Ф. И. Венникова пишет:

«1. Чтобы возвести в квадрат число пятого десятка (41, 42,..., 49), надо к числу единиц прибавить число 15, а затем к полученной сумме приписать квадрат дополнения числа единиц до 10 (если этот квадрат — однозначное число, перед ним приписывается 0).

Например:

$$43^2=(15+3)\,100+7^2=1849,$$
$$48^2=(15+8)\,100+2^2=2304.$$

2. Еще проще возвести в квадрат число шестого десятка (51, 52, ..., 59). Для этого надо к числу единиц прибавить 25 и к этой сумме приписать квадрат числа единиц.

Например:

$$54^2=(25+4)\,100+4^2=2916,$$
$$57^2=(25+7)\,100+7^2=3249.$$

Доказательства:

1. $$(40+a)^2=1600+80a+a^2=1500+100+100a-20a+a^2=(1500+100a)+(100-20a+a^2)=(15+a)\,100+(10-a)^2.$$

2. $$(50+a)^2=2500+100a+a^2=(25+a)\,100+a^2».$$

* * *

Учитель из Харькова В. В. Хазанов предлагает следующий способ умножения двузначных чисел, оканчивающихся на 5: расположить числа в порядке возрастания, число десятков меньшего умножить на увеличенное на 1 число десятков большего, добавить к этому числу целую часть половины разности десятков, а к полученному числу приписать либо 25, если эта разность четна, либо 75, если она нечетна. Хотя приведенная нами словесная формулировка звучит сложно, предлагаемый способ очень прост, как видно из следующих примеров:

$$35\cdot75=\left(3\cdot8+\frac{7-3}{2}\right)100+25=2625,$$

$$25\cdot55=\left(2\cdot6+\left[\frac{5-2}{2}\right]\right)100+75=1375\,^{*)}$$

Доказательство того, что это правило справедливо, мы оставляем читателю в качестве упражнения.

* * *

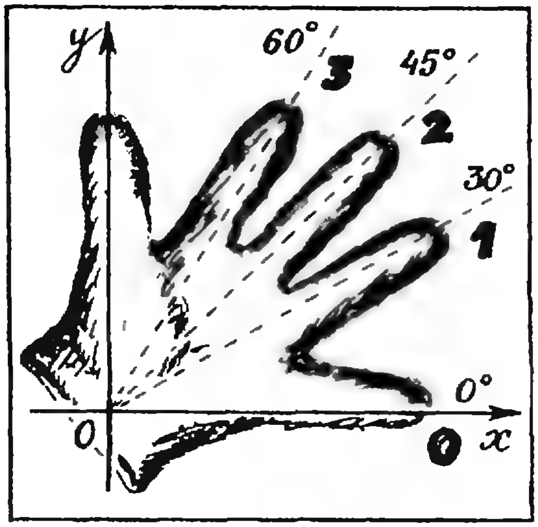
Манана Вансовская, ученица десятого класса Набакевской средней школы Самтредского района Грузинской ССР, предлагает способ возведения в квадрат трехзначных чисел, оканчивающихся на 25:

«Для получения квадрата трехзначного числа, которое оканчивается на 25, пишем в конце 625, затем число сотен умножаем на 5, у полученного числа последнюю цифру пишем впереди числа 625, а первую цифру запоминаем. Потом число сотен данного числа возводим в квадрат и прибавляем ту цифру, которую только что запомнили, полученный результат пишем впереди написанных нами чисел.»

Например, при возведении 325 в квадрат, находим $3\cdot5=15$, пред числом 625 пишем 5 и запоминаем 1:

$$(325)^2=10\,000(3^2+1)+1000\cdot5+625=105\,625.$$

Манана приводит также похожий прием для возведения в квадрат четырехзначных чисел, оканчивающихся на 125. А мы предлагаем нашим читателям обосновать изложенный Мананой способ возведения в квадрат трехзначного числа, оканчивающегося на 25, а также самостоятельно придумать ее «похожий прием» для четырехзначных чисел.



* * *

Любопытный способ использования пальцев руки для запоминания значений и знаков синуса и косинуса основных углов предложил семиклассник Миша Перваков из школы № 2 г. Егорьевска Московской области:

«Посмотрим на ладонь левой руки и пронумеруем пальцы так: мизинец — 0, безымянный — 1, средний — 2, указательный — 3, большой — 4. При широко расставленных пальцах они примерно соответствуют «основным» углам первого квадранта: 0°, 30°, 45°, 60°, 90° (рис. 1). Синусы этих углов будут равны половине квадратного корня из присвоенного пальцу номера.»

Например,

$$\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{\text{номер среднего пальца}}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Значение косинуса находится аналогично, только пальцы нужно пронумеровать в обратном порядке: большой — 0, .. , мизинец — 4

Эти значения можно свести в легко запоминающуюся таблицу, которую прислал в редакцию учитель Л Ф Белов (г Дубовка Волгоградской области)

α	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$
cos α	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{0}/2$

---

*) Квадратные скобки обозначают целую часть числа

задачник Кванта

Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги этого конкурса подводятся в декабре. Победители — школьники, приславшие наиболее интересные и полные решения, — получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Задачи

M841—M845; Ф853—Ф857

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 марта 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1—84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M841, M842» или «Ф853». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M841. Докажите, что произведение длин отрезков, на которые гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанной в него окружности, равно площади этого треугольника.

M842. а) Докажите, что если $\alpha+\beta+\gamma=0$, то

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

б) Величины $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ и $\widehat{C}$ углов треугольника удовлетворяют условию

$$\frac{\sin\widehat{A}+\sin\widehat{B}+\sin\widehat{C}}{\cos\widehat{A}+\cos\widehat{B}+\cos\widehat{C}}=\sqrt{3}.$$

Докажите, что хотя бы один из них равен 60°.

Л. Д. Курляндчик

M843. В вершинах треугольника ABC восставлены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 к его плоскости по одну сторону от неё, равные по длине соответствующим высотам треугольника. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки пересечения плоскостей ABC_1, BCA_1 и CAB_1 на плоскость ABC, попадает в центр вписанной в треугольник ABC окружности и равен по длине ее радиусу.

А. А. Ягубьянц

M844. а) Докажите, что любое натуральное число a можно единственным образом представить в виде

$$a=a_1\cdot 1!+a_2\cdot 2!+\ldots+a_n\cdot n!, \qquad (1)$$

где a_k — целые числа, $0\leqslant a_k\leqslant k$, $a_n\neq 0$. (По определению, $k!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$, $1!=1$.)

б) * Докажите, что любое рациональное число r, $0\leqslant r<1$, можно единственным образом представить в виде

$$r=\frac{b_1}{2!}+\frac{b_2}{3!}+\ldots+\frac{b_n}{(n+1)!}, \qquad (2)$$

где b_k — целые числа, $0 \leqslant b_k \leqslant k$, $b_n \neq 0$.

в) Представьте в виде (1) число $a = 1984$ и в виде (2) число $r = 19/84$.

В. Е. Колосов

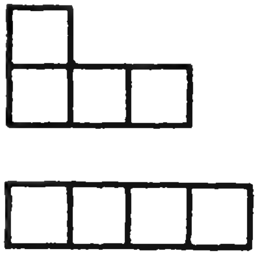


Рис. 1.

М845*. Для каких n из n уголков, состоящих из четырех клеток 1×1, и некоторого числа прямоугольников 4×1 (рис. 1) можно составить центрально-симметричную фигуру (многоугольник на клетчатой бумаге)?

В. Г. Белов

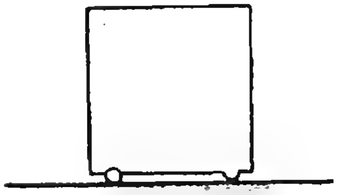


Рис. 2.

Ф853. Левые опоры контейнера, в отличие от правых, сделаны на роликах (рис. 2), обеспечивающих пренебрежимо малое трение (размеры опор малы). Чтобы сдвинуть контейнер влево, к центру его правой стенки перпендикулярно ей надо приложить силу F_1. Чтобы сдвинуть контейнер вправо, к центру его левой стенки перпендикулярно ей надо приложить силу F_2. Определить массу контейнера, считая его однородным кубом.

И. И. Воробьев

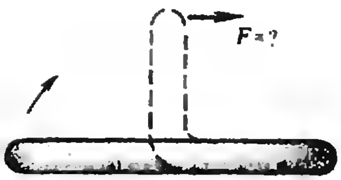


Рис. 3.

Ф854. Оценить среднее усилие, которое надо прилагать к краю надувного матраца, чтобы согнуть его посредине под прямым углом (рис. 3). Матрац не имеет поперечных перетяжек. Необходимые для решения величины и их достаточно реальные числовые значения задайте сами и получите численный результат.

Е. И. Пальчиков

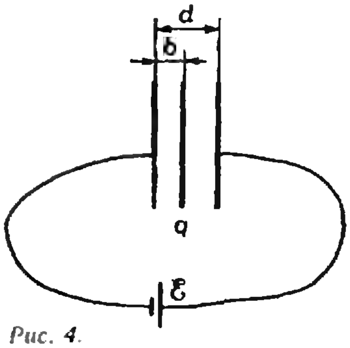


Рис. 4.

Ф855. В плоский конденсатор, присоединенный к полюсам батареи с ЭДС $\mathcal{E}$, полностью вдвинута параллельно его пластинам заряженная пластина на расстоянии b от одной из пластин конденсатора (рис. 4). Найти силу, действующую на вдвинутую пластину, если ее заряд равен q. Силой тяжести пренебречь. Площадь пластин конденсатора равна S, расстояние между ними — d.

В. П. Бородин, А. П. Ершов

Ф856. Через нагревательную спираль с постоянным сопротивлением пропускают постоянный ток. На сколько процентов изменится среднее количество тепла, выделяющегося в спирали за секунду, если через нее пропускать одновременно еще и переменный (синусоидальный) ток, амплитудное значение которого составляет 10% от величины постоянного тока?

В. Г. Дудников

Ф857. На блестящей банке имеется плоская вмятина, от которой отражается на экран пучок света. В банку наливают охлажденную жидкость. Отраженный сигнал заметно ослабляется. Объясните явление.

В. Г. Дудников

Problems

M841—M845; P853—P857

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than March 31 st, 1984, to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M841. Prove that the product of lengths of the two segments into which the hypotenuse of a right triangle is divided by the point where the incircle touches it is equal to the triangle's area.

M842. a) Prove that $\alpha+\beta+\gamma=0$ implies

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

b) The angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ of a triangle satisfy

$$\frac{\sin\widehat{A}+\sin\widehat{B}+\sin\widehat{C}}{\cos\widehat{A}+\cos\widehat{B}+\cos\widehat{C}}=\sqrt{3}.$$

Prove that at least one of them is 60°.

L. D. Kurliandchik

M843. Perpendicular segments AA_1, BB_1, CC_1 to the plane of triangle ABC of lengths equal to the corresponding altitudes of the triangle are drawn in the same direction. Prove that the segment constructed perpendicularly to the plane ABC from the intersection point of the planes ABC_1, BCA_1, CAB_1 meets the plane ABC at the centre of the incircle of triangle ABC and equals the incircle's radius in length.

A. A. Yagubiants

M844. a) Prove that any natural number a can be uniquely represented in the form

$$a=a_1\cdot 1!+a_2\cdot 2!+\ldots+a_n\cdot n! \qquad (1)$$

where the a_k are integers, $0\leqslant a_k\leqslant k$, $a_n\neq 0$. (By definition, $k!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$, $1!=1$.)

b) * Prove that any rational number r, $0\leqslant r<1$, can be uniquely represented in the form

$$r=\frac{b_1}{2!}+\frac{b_2}{3!}+\ldots+\frac{b_n}{(n+1)!}, \qquad (2)$$

where the b_k are integers, $0\leqslant b_k<k$, $b_n\neq 0$.

c) Represent the number $a=1984$ in the form (1) and the number $r=19/84$ in the form (2).

V. E. Kolosov

M845 *. For what n is it possible to put together a centrally symmetric figure (a polygon on square-lined paper) using n "corners" (consisting of four 1 by 1 squares) and a certain amount of 4 by 1 rectangles (see figure Рис. 1).

V. G. Belov

P853. A container stands on small supports, the ones one the left side (unlike the ones on the right) having little wheels ensuring negligible friction (see figure Рис. 2). To move the container to the left, one must apply a force F_1 to the centre of the container's right wall. To move it to the right, a force of F_2 at the centre of the left wall is required. Determine the container's mass, assuming it to be a homogeneous cube.

I. I. Vorobiev

P854. Estimate the mean force which must be applied to the edge of a blow-up matress in order to fold it at a right angle in the middle (figure Рис. 3). The matress has no lateral stitches. Choose the necessary physical parameters

and supply them with reasonable numerical values yourself and obtain a numerical answer.

E. I. Palchikov

P855. A charged plate is introduced all the way between the plates of a flat capacitor parallel to them at a distance b from one of the plates (see figure Рис. 4). The capacitor is connected to the poles of a battery of *EMF* $\mathcal{E}$. Find the force acting on the charged plate if its charge is q. The weight of the plate is negligible. The area of the plates is S, the distance between them is d.

V. P. Borodin, A. P. Ershov

P856. Direct current circulates through a heating spiral of constant resistance. What will be the percentage change in the mean amount of heat emitted by the spiral per second if an alternative (sinusoidal) current, whose amplitude is 10% of the direct current's value, is also sent through the spiral?

V. G. Dudnikov

P857. A shiny can has a dent which reflects light on a screen. A cooled liquid is poured into the can. The reflected signal noticeably weakens. Explain this phenomenon.

V. G. Dudnikov

Решения задач

М826—М830; Ф837—Ф841

М826. *На доске написали три числа. Затем одно из них стерли и вместо него написали сумму двух других чисел, уменьшенную на единицу. Эту операцию повторили несколько раз и в результате получили числа 17, 1967, 1983. Могли ли первоначально быть написаны числа а) 2, 2, 2; б) 3, 3, 3?*

Ответ: а) нет, б) да. Заметим сначала, что если исходными числами были 2, 2, 2 или 3, 3, 3, или вообще любые числа, большие 1, то и все последующие числа будут больше 1, причем наибольшее число в каждой новой тройке всегда на 1 меньше суммы двух других. Это соображение позволяет по последней тройке чисел восстановить все предыдущие, кроме самой первой.

Действительно, пусть в тройке a, b, c для определенности $a<b<c$. Тогда $c=a+b-1$ и предыдущая тройка имеет вид a, b, x. Наибольшим числом в ней можно считать b (если $x>b$, то $x=a+b-1=c$). Но тогда $b=a+x-1$. Следовательно, тройка a, b, c при $a<b<c$ получается из тройки $a, b, b-a+1$.

Пользуясь этим правилом, восстановим все записи на доске, начиная с конца:

(17, 1967, 1983) ← (17, 1967, 1951) ← (17, 1935, 1951) ← ← .. ← (17, 15, 31) ← (17, 15, 3) ← (13, 15, 3) ← ... ← (5, 7, 3) ← (5, 3, 3).

По нашему правилу тройке 5, 3, 3 должна бы предшествовать тройка 1, 3, 3, содержащая 1, что невозможно. Поэтому 5, 3, 3 — тройка, полученная на первом шаге. (Очевидно, что остальные тройки на первом шаге возникнуть не могут.) Ясно, что тройка 5, 3, 3 может получиться из 3, 3, 3 и не может из 2, 2, 2.

А. Берзиньш

◆

М827. *Известно, что четыре синих треугольника на рисунке 1 равновелики.*

а) Докажите, что три красных четырехугольника на этом рисунке также равновелики.

Нам понадобится следующая часто применяемая

Лемма. *Пусть P — точки на стороне KL треугольника KLM. Тогда отношение площадей треугольников MKP и MPL равно*

$$S_{MKP} : S_{MPL} = |KP| : |PL|.$$

(Для доказательства достаточно заметить, что тре-

б) Найдите площадь одного четырехугольника, если площадь одного синего треугольника равна 1.

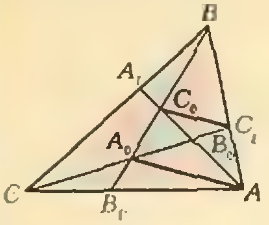


Рис. 1.

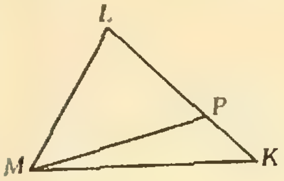


Рис. 2.

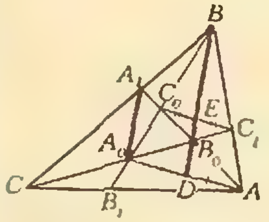


Рис. 3.

угольники MKP и MPL имеют общую высоту, проведенную из вершины M (рис. 2).).

а) Введем обозначения, как на рисунке 1. Заметим, что треугольники AA_0C_0 и AA_0C_1 равновелики (каждый из них составлен из треугольника AA_0B_0 и одного из синих треугольников). Эти треугольники имеют общее основание AA_0, поэтому их вершины C_0 и C_1 равноудалены от прямой AA_0, то есть *прямые AA_0 и C_1C_0 параллельны.* Аналогично, $BB_0 \| A_1A_0$ и $CC_0 \| B_1B_0$. Рассмотрим трапецию $AA_0C_0C_1$ (рис. 3).. Её диагонали пересекаются в точке B_0, а продолжения боковых сторон — в точке B. Эти точки лежат на прямой, соединяющей середины D и E ее оснований AA_0 и C_1C_0. (Действительно, B_0 — центр гомотетии треугольников B_0AA_0 и $B_0C_0C_1$, а B — центр гомотетии треугольников BAA_0 и BC_1C_0.) А поскольку эта прямая параллельна A_1A_0, точка B_0 — середина отрезка A_1A. По лемме отсюда вытекает, что $S_{AB_0C}=S_{B_0A_1C}$. Следовательно (см. рис. 1), площади четырехугольников $AB_0A_0B_1$ и $CA_0C_0A_1$ равны. Аналогично доказывается, что и третий красный четырехугольник $BC_0B_0C_1$ имеет такую же площадь.

Подумайте, останется ли верным утверждение этого пункта задачи, если потребовать равенства площадей только трех угловых синих треугольников.

б) Ответ: площадь красного четырехугольника $s=1+\sqrt{5}$. Чтобы составить уравнение для нахождения искомой площади s, выразим двумя способами отношение $|BC_1|:|C_1A|$ с помощью леммы:

$$|BC_1|:|C_1A|=S_{CBC_1}:S_{CC_1A}=(2s+2):(s+2)=$$
$$=S_{B_0BC_1}:S_{B_0C_1A}=(s/2):1.$$

(Пояснения здесь требует только равенство $S_{B_0BC_1}=s/2$. Как было показано выше, точка E — середина C_0C_1 (рис. 3). Отсюда, опять-таки пользуясь леммой, легко вывести, что треугольники B_0BC_1 и B_0BC_0 равновелики. А вместе они составляют четырехугольник $BC_0B_0C_1$ площади s). Итак, s удовлетворяет уравнению

$$s^2-2s-4=0,$$

откуда $s=1+\sqrt{5}$.

Б. И. Чиник, В. Н. Дубровский

◆

М828*. *Можно ли в клетках бесконечного листа клетчатой бумаги расставить целые числа так, чтобы сумма чисел в каждом прямоугольнике размера 4×6 клеток, стороны которого идут по линиям сетки, равнялась а) 10; б) 1?*

Ответ: а), б) можно. В обоих случаях искомую расстановку можно получить, комбинируя две более простые расстановки.

а) Поставим единицы на параллельных диагоналях сетки, удаленных друг от друга на 4 клетки (по горизонтали или вертикали), в остальные клетки поставим нули (рис. 1, *а*). Тогда сумма чисел в каждом прямоугольнике 4×6 будет равна 6. Это первая расстановка. Вторая устроена так же, но в ней расстояния между диагоналями с единицами — 6 клеток (рис. 1, *б*); для нее сумма чисел в любом прямоугольнике 4×6 равна 4. Теперь наложим одну расстановку на другую и сложим числа, попавшие в одну клетку; очевидно, для итоговой расстановки рассматриваемая сумма чисел всегда равна 10.

б) Возьмем те же расстановки, что и в пункте а), но на диагоналях вместо сплошных единиц поставим поочередно единицы и нули (рис. 2). Сумма чисел в любом прямоугольнике 4×6 будет теперь в одном случае равна 3 (рис. 2, *а*), а в другом — 2 (рис. 2, *б*). Накладывая одну расстановку на другую и вычитая из каждого числа первой расстановки попавшее в ту же клетку число второй, получим требуемую расстановку.

Предлагаем читателям, используя те же идеи, доказать такое общее утверждение: *в клетках бесконечной плоской решетки можно так расставить целые числа, что сумма чисел в любом прямоугольнике данных размеров принимает одно и то же заданное значение.* То же верно для

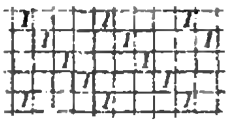


Рис. 1, а.

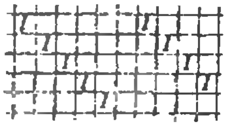


Рис. 1, б.

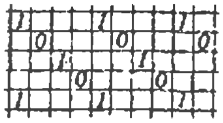


Рис. 2, а.

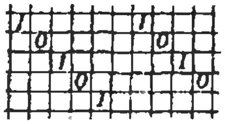


Рис. 2, б.

пространственной решетки и параллелепипедов. Подумайте, останется ли верным это утверждение, если ограничиться только неотрицательными числами.

Н. Ю. Нецветаев, А. Л. Смирнов

M829. *Докажите, что среди любых $2m+1$ различных целых чисел, по модулю не превосходящих $2m-1$, найдутся три числа, сумма которых равно 0*

◆

Докажем утверждение задачи индукцией по m.

При $m=1$ оно очевидно (единственная тройка чисел, удовлетворяющая условию, — это 0, 1 и -1).

Предположим, что оно доказано для $2m-1$ чисел и рассмотрим любое множество A из $2m+1$ чисел, по модулю не превосходящих $2m-1$. Если в нем найдется $2m-1$ чисел, по модулю не превосходящих $2m-3$, то утверждение следует из предположения индукции. В противном случае в множестве A есть хотя бы три из чисел $\pm(2m-2)$ и $\pm(2m-1)$. Сменив при необходимости знаки у всех чисел из A, можно добиться, чтобы это были числа $2m-1$, $2m-2$, а также $-2m+1$ (1-й случай) или $-2m+2$ (2-й случай).

1-й случай. Разобьем все числа от 1 до $2m-2$ на пары, дающие в сумме $2m-1$: $(1, 2m-2)$, $(2, 2m-4)$, ..., $(m-1, m)$, а числа от 0 до $-2m+1$ — на пары, дающие в сумме $-2m+1$: $(0, -2m+1)$, ..., $(-m+1, -m)$. Получится $2m-1$ пар, содержащих все $2m$ чисел множества A, кроме $2m-1$. Поэтому хотя бы одна пара входит в множество A и составляющие ее числа в сумме с $-2m+1$ или с $2m-1$ дадут 0.

2-й случай. Рассмотрим теперь $m-2$ пары $(1, 2m-3)$, $(2, 2m-4)$, ..., $(m-2, m)$ с суммой чисел $2m-2$ и m пар $(0, -2m+1)$, ..., $(-m+1, -m)$ с суммой чисел $-2m+1$. Эти $2m-2$ пары содержат все числа множества A, кроме $2m-1$, $2m-2$ и $m-1$, то есть $2m-1$ чисел из A. Следовательно, одна из них опять входит в множество A и дает нулевую сумму с $-2m+2$ или $2m-1$.

Н. В. Карташов

M830*. *Школьник упражняется в решении квадратных уравнений. Выписав какое-то уравнение $x^2+p_1x+q_1=0$, он решает его и, убедившись, что оно имеет два корня, составляет второе уравнение $x^2+p_2x+q_2=0$, в котором p_2 — это меньший, а q_2 — больший корень первого уравнения. По второму уравнению он составляет третье, если это возможно, и т. д.*

а) Докажите, что это упражнение не может продолжаться бесконечно долго.

б) Найдите наибольшую длину конечной последовательности квадратных трехчленов, удовлетворяющих указанному условию.

◆

а) Решение основано на изучении знаков коэффициентов уравнений. Пусть $f_n(x)=x^2+p_nx+q_n=0$ — -е уравнение в рассматриваемой последовательности. Докажем, такое утверждение:

если $n \geqslant 3$ и уравнение $f_n(x)=0$ не последнее, то числа p_n и q_n либо оба положительны, либо оба отрицательны.

Пользуясь теоремой Виета, выразим коэффициенты квадратного трехчлена $f_{n-1}(x)$ через p_n и q_n.

$$p_{n-1}=-(p_n+q_n),\ q_{n-1}=p_nq_n; \tag{1}$$

По условию $p_n<q_n$ и $p_{n-1}<q_{n-1}$, то есть $-(p_n+q_n)<p_nq_n$ или $q_n>-p_n(1+q_n)$. Присоединяя к этим неравенствам условие положительности дискриминанта трехчлена f_nx, получим систему

$$\begin{aligned} &q_n>p_n \\ &q_n>-p_n(1+q_n) &\quad (2)\\ &4q_n<p_n^2, &\quad (3)\end{aligned}$$

которая решена графически на полях. Из графика сразу следует наше утверждение. (Впрочем, его нетрудно доказать и алгебраически: случай $p_n \geqslant 0 \geqslant q_n$ невозможен $(q_n>p_n)$; если же $p_n \leqslant 0 \leqslant q_n$, то из (2) и (3) получим, что $q_n^2>p_n^2(1+q_n)^2>4q_n(1+q_n)^2$ или $4q_n^3+7q_n^2+4q_n<0$, что также невозможно при $q_n \geqslant 0$).

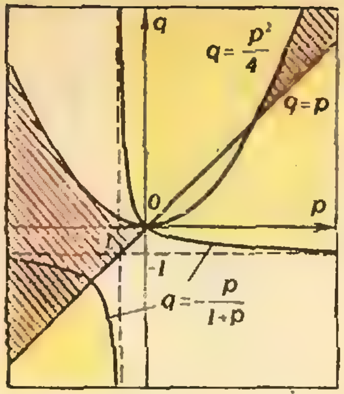
Теперь допустим, что число уравнений в последовательности не меньше пяти. Если уравнение $f_5(x) = 0$ не последнее, то из доказанного утверждения и соотношений (1) вытекает, что возможны только два случая: либо $0 < p_5 < q_5$ и тогда $p_4 < 0 < q_4$, либо $p_5 < q_5 < 0$ и тогда $0 < p_4 < q_4$, а $p_3 < 0 < q_3$. И то, и другое противоречит нашему утверждению. Следовательно, рассматриваемая последовательность уравнений всегда обрывается, причем не позднее пятого шага.

б) **Ответ**: наибольшая длина последовательности квадратных трехчленов равна 5.

Из решения задачи а) видно, что составить больше пяти уравнений по указанному закону нельзя. Следующий пример показывает, что последовательность длины 5 существует (она выписана с конца — в том порядке, в котором ее удобнее строить по формулам (1)): $f_5(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + 4$, $f_4(x) = x^2 - \frac{7}{2}x - 2$, $f_3(x) = x^2 + \frac{11}{2}x + 7$,

$$f_2(x) = x^2 - \frac{25}{2}x + \frac{77}{2}, \quad f_1(x) = x^2 - 26x - \frac{1925}{4}.$$

М. В. Сапир



Желтым цветом выделено множество точек плоскости (p, q), координаты которых удовлетворяют неравенству $q > -p(1+q)$; красной штриховкой — решения системы неравенств $q > p$ и $4q < p^2$. В желтых областях с красной штриховкой лежат точки, координаты (p, q) которых могут служить коэффициентами уравнения, не являющегося ни первым, ни вторым, ни последним в рассматриваемой последовательности.

Ф837. *Для измерения скоростей частиц используется лазерный анемометр, в котором движущиеся частицы освещаются двумя пересекающимися лазерными когерентными пучками света (рисунок 1). Отраженный частицами свет улавливается фотоэлементом Ф и преобразуется в электрический сигнал. Частицы движутся по перпендикуляру к биссектрисе угла $\alpha = 60°$ между пучками. С какой скоростью двигалась частица, если при длине волны лазерного излучения $\lambda = 0{,}63$ мкм был зарегистрирован периодический сигнал частотой $\nu = 320$ кГц?*

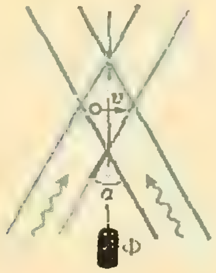


Рис. 1.

◆

Поскольку лазерные пучки когерентны, в области их пересечения они будут интерферировать.

Выберем систему координат XOY так, как это показано на рисунке 2, и для произвольной точки a с координатами x и y найдем разность фаз $\Delta\varphi$ для двух плоских волн, соответствующих нашим пучкам и приходящих в эту точку. Пусть фаза первой волны в точке с координатами $x = 0$ и $y = 0$ равна φ_0, то есть $\varphi_1(0, 0) = \varphi_0$. Фронт этой волны изображен на рисунке 2 прямой N_{10}, проходящей через точку (0; 0); фронт этой же волны, проходящий через точку $(x; y)$, изображен прямой N_1. Очевидно, что разность хода Δ_1 для лучей, соответствующих этой волне, приходящих в точки (0; 0) и $(x; y)$, равна расстоянию между прямыми N_{10} и N_1, то есть равна длине отрезка OB. Из простых геометрических соображений находим длину этого отрезка и, следовательно, Δ_1:

$$\Delta_1 = |OB| = x \sin\frac{\alpha}{2} + y \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, фаза волны в точке $(x; y)$ равна

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}\left(x \sin\frac{\alpha}{2} + y \cos\frac{\alpha}{2}\right),$$

где λ — длина волны.

Совершенно аналогично положим фазу волны, соответствующей второму пучку, в точке с координатами $(d; 0)$ равной Ψ_0, то есть $\varphi_2(d, 0) = \Psi'_0$ (здесь d — расстояние между точками O и O'). На рисунке 2 фронт второй волны, проходящий через точку $(d; 0)$, изображен прямой N_{20}, а фронт этой волны, проходящий через точку $(x; y)$, изображен прямой N_2. Разность хода Δ_2 равна длине отрезка $O'C$, то есть равна

$$\Delta_2 = |O'C| = (d - x) \sin\frac{\alpha}{2} + y \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, фаза второй волны в точке (x, y) равна

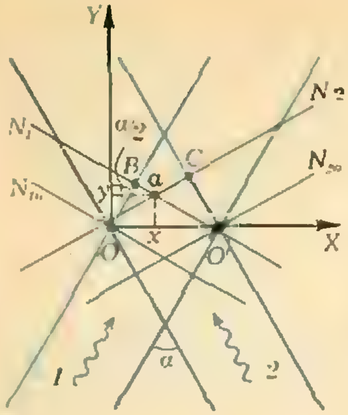


Рис. 2.

$$\varphi_2(x,\ y)=\Psi_0-\frac{2\pi}{\lambda}\left((d-x)\sin\frac{\alpha}{2}+y\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Разность фаз $\Delta\varphi(x,\ y)$ между волнами двух пучков в точке $(x;\ y)$ равна

$$\Delta\varphi(x,\ y)=\varphi_1(x,\ y)-\varphi_2(x,\ y)=\varphi_0-\Psi_0-$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(2x\sin\frac{\alpha}{2}-d\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Как видно из полученного выражения для $\Delta\varphi(x,\ y)$, сдвиг по фазе между волнами двух пучков света зависит только от координаты x. Пусть амплитуды волн обоих пучков равны друг другу и равны A. Распределение интенсивности света в области пересечения пучков будет иметь вид $I(x)=2A^2(1+\cos\Delta\varphi)=$

$$=2A^2\left(1+\cos\left(\varphi_0-\Psi_0-\frac{2\pi}{\lambda}\left(2x\sin\frac{\alpha}{2}-d\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right).$$

Эта периодическая функция имеет период Δx вдоль оси X, который находится из условия

$$\frac{2\pi}{\lambda}2\cdot\Delta x\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=2\pi\Rightarrow\Delta x=\frac{\lambda}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Если размер частицы меньше Δx и частица движется равномерно со скоростью v вдоль оси X, то интенсивность света, отраженного от частицы и улавливаемого фотоэлементом, будет периодически меняться со временем с периодом $T=\Delta x/v$ или с частотой $\nu=v/\Delta x$. Подставляя найденное выражение для Δx, из последнего равенства находим скорость частицы:

$$v=\frac{\lambda\nu}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{0{,}63\times10^{-6}\cdot320\cdot10^3}{2\cdot0{,}5}\ \text{м/с}\approx0{,}2\ \text{м/с}.$$

В. В. Можаев

◆

Ф838. *В 1844 году выдающийся математик и астроном Бессель обнаружил, что собственное (не связанное с движением земного наблюдателя) движение Сириуса происходит примерно по синусоиде (рис. 1). Максимальное угловое отклонение от прямолинейного пути $\alpha=2{,}3''$, период $T=50$ лет. Бессель предположил (через 18 лет это было подтверждено прямыми наблюдениями), что искривление пути Сириуса вызывается наличием спутника — более слабой звезды. Найти отношение массы m спутника (Сириуса B) к массе $M_С$ Солнца, если масса основной звезды (Сириуса A) $M=2{,}3M_С$. Известно, что радиус земной орбиты виден с Сириуса под углом $\beta=0{,}376''$. Считать, что орбиты звезд круговые, а плоскости*

Из условия задачи ясно, что α — угловой размер радиуса орбиты Сириуса A при наблюдении с Земли. Учитывая малость углов α и β, можем записать соотношение между радиусами орбит Сириуса A (R) и Земли (R_0) (см. рисунок 2):

$$\frac{R}{R_0}=\frac{\alpha}{\beta}.\qquad(1)$$

Компоненты системы Сириуса обращаются вокруг общего центра масс. Радиус r орбиты Сириуса B равен

$$r=\frac{M}{m}R.\qquad(2)$$

Расстояние между компонентами, таким образом, равно $R+r$.

Запишем уравнения движения (II закон Ньютона) для Сириуса A и для Земли (масса Земли m_0, земной год T_0):

$$M\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2R=G\frac{Mm}{(R+r)^2}.\qquad(3)$$

$$m_0\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2R_0=G\frac{M_Сm_0}{R_0^2}.\qquad(4)$$

Поделим уравнение (3) на уравнение (4):

орбит перпендикулярна направлению от Солнечной системы к Сириусу.

$$\left(\frac{T_0}{T}\right)^2\frac{R}{R_0}=\frac{m}{M_C}\,\frac{R_0^2}{(R+r)^2} \tag{5}$$

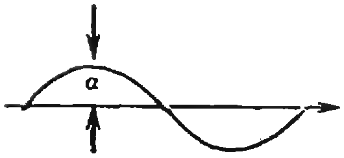


Рис. 1.

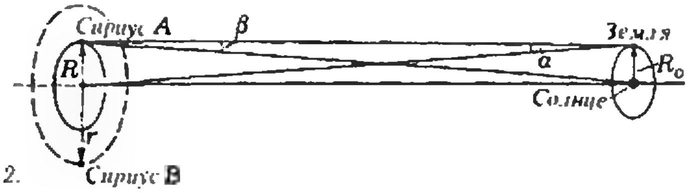


Рис. 2.

Удобно ввести безразмерные величины $\mu=\frac{m}{M_C}$, $\tau=\frac{T}{T_0}$, $\varrho=\frac{R}{R_0}$. Тогда уравнение (5) с учетом соотношений (2) преобразуется к виду

$$\frac{(\mu+M/M_C)^2}{\mu^3}=\frac{\tau^2}{\varrho^3}.$$

Но $M/M_C=2{,}3$, $\varrho=\alpha/\beta\approx 6{,}1$ (соотношение (1)), и $\tau=50$. Следовательно,

$$\frac{(\mu+2{,}3)^2}{\mu^3}=\frac{\tau^2}{(\alpha/\beta)^3}\approx 11.$$

Подбором находим:

$$\mu=m/M_C\approx 1.$$

В. Е. Белонучкин

◆

Ф839. *Если шестигранный карандаш положить на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтальной поверхностью, перпендикулярно ее образующей (линии пересечения плоскости с горизонтальной поверхностью), карандаш будет покоиться. Если его положить параллельно образующей, он будет скатываться вниз. При каких углах φ между осью карандаша и образующей наклонной плоскости (рис. 1) карандаш будет находиться в равновесии?*

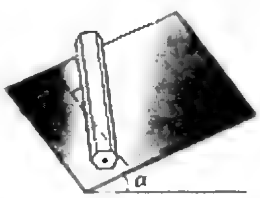


Рис. 1.

Из условия задачи следует, что коэффициент трения скольжения μ карандаша по наклонной плоскости удовлетворяет условию $\mu>\operatorname{tg}\alpha$. Действительно, карандаш, положенный перпендикулярно образующей, находится в равновесии, и это означает, что $mg\sin\alpha=F_{\text{тр}}$, где mg — сила тяжести, $F_{\text{тр}}$ — сила трения. Но $F_{\text{тр}}<\mu mg\cos\alpha$. Следовательно, $mg\sin\alpha<\mu mg\cos\alpha$, откуда $\mu>\operatorname{tg}\alpha$.

Это означает, что ни при каких значениях угла φ скольжения карандаша по наклонной плоскости не будет.

Скатывание карандаша может начаться при таком угле φ_0, когда вектор силы тяжести «выйдет» за пределы участка соприкосновения карандаша и наклонной плоскости (на рисунке 2 этот участок заштрихован). Для нахождения этого угла спроектируем на наклонную плоскость центр масс карандаша — точка A на рисунке 2 — и отметим точку пересечения вертикали, проходящей через центр масс, с наклонной плоскостью — точка B. Очевидно, при различной ориентации карандаша, если его центр масс остается на месте, точки A и B будут неподвижны, причем, если сторона шестиугольного поперечного сечения карандаша равна $2a$, то $|AB|=2a\sin\alpha$.

Пока точка B лежит в заштрихованной области, карандаш не будет перекатываться.

Запишем условие начала скатывания:

$$\frac{|AD|}{\cos\varphi_0}=|AB_0|, \qquad \text{или} \qquad \frac{a}{\cos\varphi_0}=\dot{a}\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha.$$

Отсюда

$$\varphi_0=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}.$$

Таким образом, если угол φ удовлетворяет условию

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}<\varphi<\frac{\pi}{2},$$

карандаш находится в равновесии. Очевидно, выражение для угла φ_0 имеет смысл при условии $\operatorname{tg}\alpha > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тот факт, что карандаш, положенный параллельно образующей скатывается, означает, что $\operatorname{tg}\alpha > \frac{1}{\sqrt{3}}$ (покажите это самостоятельно).

С С Кротов

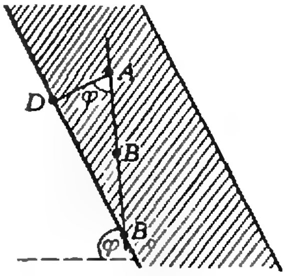


Рис. 2.

Ф840. *В горизонтально расположенной плоской коробке размером 10×10 см беспорядочно лежат $N=1000$ маленьких стальных шариков массы $m=0{,}5$ мг каждый. Коробку начинают двигать со скоростью $v_0=10$ м/с перпендикулярно одной из боковых стенок. Считая удары шариков о стенки коробки и друг о друга абсолютно упругими, определить: а) какие импульсы передадут шарики каждой из боковых стенок за первые 10 секунд; б) какие импульсы получают стенки за следующие 10 секунд после того, как коробку резко затормозили.*

◆

Когда коробка начнет двигаться и ударять шарики, они приобретут скорость $2\vec{v}_0$, и через время $\tau_1=a/v_0$ (a — сторона коробки) все шарики начнут двигаться (это время на самом деле несколько меньше, так как некоторые шарики могут из-за взаимных столкновений начать движение раньше, чем до них дойдет стенка). После множества соударений шариков друг с другом и со стенками скорости шариков будут иметь самые произвольные направления.

Дальнейшее удобнее рассматривать в системе отсчета, связанной с коробкой. В этой системе средняя скорость шарика (вектор) равна нулю, а так как скорость коробки по условию не меняется, то и суммарная энергия шариков остается постоянной, и в среднем каждый шарик будет иметь энергию $mv_0^2/2$. Это все очень похоже на поведение молекул газа, влетающих через малое отверстие в пустой сосуд и имеющих вначале одинаково направленные скорости, а через некоторое время уже движущихся совершенно хаотически.

Остается выяснить: достаточно ли большое время задано в условии задачи (10 секунд), чтобы движение шариков стало хаотическим. Для этого найдем приближенно среднее время между соударениями шариков. Будем считать, что за это время $\tau_{\text{ср}}$ шарик диаметра d двигался по прямой со скоростью v_0. Тогда он «заметает» площадь

$$S=2dv_0\tau_{\text{ср}},$$

в которую (в среднем) попадает центр только одного шарика из хаотически расположенных остальных. На эти остальные шарики приходится площадь a^2 (a — сторона коробки). Значит, условие единственности столкновения за время $\tau_{\text{ср}}$ выглядит так:

$$\frac{a^2}{N-1}=2dv_0\tau_{\text{ср}} \Rightarrow \tau_{\text{ср}}=\frac{a^2}{2dv_0(N-1)}.$$

Диаметр шарика найдем, зная его массу и плотность стали:

$$d=\sqrt[3]{\frac{6m}{\pi\varrho}}\approx 5\cdot 10^{-4}\text{ м}=0{,}5\text{ мм}.$$

Итак, среднее время между соударениями равно $\sim 1\cdot 10^{-3}$ с. Ясно, что с учетом времени $\tau_1=a/v_0=10^{-2}$ с время «хаотизации» не превышает 0,015—0,020 с, то есть составляет малую часть заданного интервала 10 с. Поэтому можно приближенно считать, что шарики все время движутся хаотически. Тогда число ударов в каждую из стенок одинаково. Для подсчета ударов существенно движение шарика перпендикулярно интересующей нас стенке. Обозначим скорость шарика в этом направлении v_x. Число ударов за малое время Δt равно

$$\Delta n=\frac{v_x\cdot\Delta t\cdot a}{a^2}\cdot\frac{1}{2}N=\frac{v_xN}{2a}\cdot\Delta t.$$

Значит, за время $T=10$ с число ударов равно

$$n=\frac{\Delta n}{\Delta t}T=\frac{v_xNT}{2a}.$$

При каждом ударе стенка получает импульс $p=2mv$, и полный импульс, получаемый стенками за время T —

$$P=pn=2mv_xn=\frac{mv_xNT}{a}.$$

Учитывая, что $v_0^2=v_x^2+v_y^2$ и, в среднем, $v_x^2=v_y^2$, получаем:

$$P=\frac{mv_0^2NT}{2a}=\frac{0{,}5\cdot10^{-6}\cdot10^2\cdot10^3\cdot10}{2\cdot0{,}1}\text{ кг}\cdot\text{м/с}=$$
$$=2{,}5\text{ кг}\cdot\text{м/с}.\qquad(*)$$

Суммарная энергия шариков складывается из энергии их поступательного движения с коробкой и энергии хаотического движения относительно коробки:

$$W=N\frac{mv_0^2}{2}+N\frac{mv_0^2}{2}=Nmv_0^2.$$

После остановки коробки эта энергия измениться не может. Следовательно, среднее значение квадрата скорости хаотического движения шариков после остановки коробки станет равным $2v_0^2$, и за следующие 10 секунд стенки получат импульс $2P=5$ кг·м/с каждая.

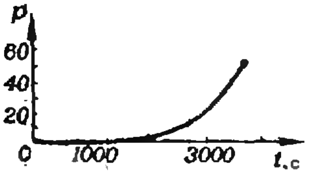
Все это очень похоже на поведение обычного идеального газа, только шарики летают в плоскости и имеют каждый по две степени свободы, а не по три, как молекулы газа. Поэтому коэффициент в формуле (*) отличается от привычного.

Подумайте, что будет с импульсами, получаемыми стенками, если еще раз привести коробку в движение, а потом остановить.

А. Р. Зильберман

◆

Ф841. *Спускаемый аппарат космического корабля приближается к поверхности некоторой планеты с постоянной скоростью, передавая на борт корабля данные о наружном давлении. График зависимости давления p (в условных единицах) от времени t приведен на рисунке. Опустившись на поверхность планеты, аппарат измерил и передал на борт данные о температуре и ускорении свободного падения: $T=700$ К, $g=10$ м/с^2. Определить скорость спуска аппарата, если известно, что атмосфера планеты состоит из углекислого газа (CO_2). Определить также температуру на высоте $h=15$ км над поверхностью планеты.*



Определим сначала скорость спускаемого аппарата.

Заметим, что изменение давления Δp с изменением высоты Δh связано соотношением

$$\Delta p=\rho g\cdot\Delta h,\qquad(1)$$

где ρ — плотность газа, которая, вообще говоря, с высотой меняется. Из закона Менделеева — Клапейрона следует, что

$$p=\frac{\rho}{\mu}RT\Rightarrow\rho=\frac{p\mu}{RT}$$

(здесь T — температура именно в той точке, где мы интересуемся изменением давления). Подставляя это выражение для ρ и учитывая, что $\Delta h=v\cdot\Delta t$ (v — скорость спуска аппарата), можем записать уравнение (1) в виде

$$\frac{(\Delta p/\Delta t)}{p}=\frac{\mu gv}{RT}.\qquad(2)$$

Зная отношение $\Delta p/\Delta t$, то есть тангенс угла наклона касательной в конечной точке графика, с помощью (2) найдем скорость v. (Отметим, что, поскольку в левой части (2) стоит отношение $\Delta p/p$, нам безразличен масштаб графика по оси p.)

Находя из графика $(\Delta p/\Delta t)/p$ и подставляя $\mu=44$ г/моль, получаем:

$$v=\frac{\Delta p}{p\cdot\Delta t}\,\frac{RT}{g\mu}=\frac{8{,}3\cdot7\cdot10^2}{10\cdot44\cdot10^{-3}\cdot1150}\text{ м/с}\approx11{,}5\text{ м/с}.$$

Перейдем теперь к решению второй части задачи. Поскольку аппарат спускался со скоростью 11,5 м/с, на высоте 15 км над поверхностью планеты он был за 1300 секунд до посадки. На графике зависимости $p(t)$ этому соответствует время $t=2350$ с. Определив значение $(\Delta p/\Delta t)/p$ для этой точки графика, из соотношения (2) найдем температуру T_h на высоте 15 км:

$$T_h=\left(\frac{p\cdot\Delta t}{\Delta p}\right)\frac{g\mu v}{R}\approx430\text{ К}.$$

А. И. Буздин

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при МГУ им. М. В. Ломоносова (ВЗМШ) принимаются учащиеся седьмых классов и учащиеся ПТУ, за исключением проживающих в Москве и Ленинграде.

Для поступления в школу нужно выполнить первое задание.

Задание 1. Изучить статью «Системы линейных уравнений» в этом номере журнала (см. с. 24) и решить следующие задачи из этой статьи: основные задачи — №№ 1—6, 8, 9, 12, 14, 16, 18, дополнительные задачи — №№ 7, 10, 20, 21.

Решения задач должны быть выполнены на русском языке в ученической тетради в клетку. Задачи должны идти в том порядке, в котором они даны в статье, сначала — условие, затем — решение. На обложку тетради надо наклеить листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область	*Московская*
Фамилия, имя	*Иванов Петр*
Год рождения	*1970*
Класс и школа	*7 класс «Б», с. ш. № 2*
Фамилия, и. о. учителя математики	*Никаноров Владимир Алексеевич*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 1,* *мать — медсестра*
Полный почтовый адрес	*123456, г. Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1.*

Срок отправки задания 1 — не позднее 5 мая 1984 г. (по почтовому штемпелю)

Для того чтобы задание было зачтено, нужно решить бо́льшую часть основных задач. Если Вы успешно выполните это задание, то начиная с сентября 1984 г. Вы будете получать все дальнейшие задания. Предполагается, что часть заданий будет даваться по журналу «Квант» (журнал «Квант» распространяется только по подписке, причем подписка принимается во всех отделениях связи с любого месяца).

Первое задание нужно выслать по адресу: «119899, Москва, МГУ, ВЗМШ. На прием» или по адресу соответствующего филиала. Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах Воронеж, Гомель, Донецк, Душанбе, Иваново, Ижевск, Казань, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Одесса, Ростов-на-Дону, Свердловск, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Орел, Павлодар, Славянск, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск; работают также филиал в г. Дубна при Объединенном институте ядерных исследований и отделение при Московском институте стали и сплавов.

Учащиеся, проживающие на Северо-западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской обл., Карельской АССР), в прибалтийских союзных республиках и в Белоруссии (кроме Витебской и Гомельской обл.), должны присылать задания по адресу: «193130, Ленинград, 8-я Советская ул., 3, ЗМШ. На прием».

Школьники, не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ, имеют возможность заниматься в группах «Коллективный ученик ВЗМШ». Каждая такая группа — это школьный математический кружок, работающий под руководством своего учителя по программе ВЗМШ. Прием в эти группы проводится по 20 сентября 1984 г. на два потока: для тех, кто с сентября 1984 г. начнет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе.

В группы «Коллективный ученик» — прием без конкурса. Для организации группы достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся. Заявление должно быть заверено директором школы и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ.

Заочная физико-техническая школа при МИСиСе

Филиал Всесоюзной заочной математической школы — Заочная физико-техническая школа при Московском ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени институте стали и сплавов — объявляет набор учащихся в восьмые и девятые классы на 1984/85 учебный год.

Цель работы школы — оказание помощи учащимся в углубленном изучении программного материала средней школы по физике и математике.

Программа обучения по математике полностью соответствует курсу ВЗМШ. Курс физики разработан преподавателями кафедры общей физики и кафедры теоретической физики Московского института стали и сплавов и соответствует уровню требований на вступительных экзаменах в вузы, прежде всего — в МИСиС.

Работа школы организована следующим образом. Четыре-пять раз в год учащимся рассылаются контрольные задания по физике и математике вместе с краткими сведениями по теории и примерами решения задач. Присланные учащимися контрольные работы проверяются и вместе с оценками и комментариями отправляются учащимся. В качестве годового задания учащимся десятых классов посылаются материалы вступительных экзаменов в МИСиС за прошлые годы.

Занятия в ЗФТШ (МИСиСа) начнутся с 1 октября 1984 года. Для зачисления в школу необходимо прислать заявление с указанием фамилии, имени, отчества, полного домашнего адреса, профессии и занимаемой должности родителей, а также приложить справку из школы с указанием класса и годовых оценок по физике и математике. Заявление и справку нужно выслать *не позднее 1 марта* по адресу: 117049, Москва, Ленинский проспект, 4, МИСиС, ЗФТШ.

О первом задании по математике написано в статье «Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу» (см. с. 53).

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием на заочное отделение учащихся седьмых классов общеобразовательных школ европейской части РСФСР и Белоруссии (за исключением школьников Москвы и Ленинграда).

Зачисление на Малый механико-математический факультет (сокращенно МММФ) производится по результатам решения задач вступительной работы, публикуемой ниже.

Основной задачей Малого мехмата является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия начнутся с 1 сентября 1984 года. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения три года. Учащиеся заочного отделения, особо успешно окончившие 8 и 9 классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат № 18 при МГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, получают удостоверение об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают студенты и аспиранты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический Совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 15 апреля 1984 года выслать в адрес МММФ решения по возможности большего числа задач вступительной работы. Работа должна быть выполнена в школьной тетради в клетку. На обложку тетради необходимо наклеить тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1. Республика, край, область	*РСФСР. Московская обл.*
2. Фамилия и имя учащегося	*Осипов Андрей*
3. Школа и класс (полное название)	*Раменская средняя школа № 27, класс 7 «В»*
4. Фамилия, имя и отчество учителя математики	*Бабенко Валентина Ивановна*
5. Полный домашний адрес	*140191, г. Раменское Московской обл., ул. Космонавтов, д. 3, кв. 36*

6. Сведения о родителях:	
Отец — фамилия, имя и отчество, где и кем работает	*Осипов Иван Матвеевич, слесарь завода МЭЗ*
Мать — фамилия, имя и отчество, где и кем работает	*Осипова Зинаида Андреевна, лаборант завода МЭЗ*
7. Результаты проверки	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

В работу вложить листок бумаги 14×6 см, на котором написать полный домашний адрес и фамилию учащегося, и прислать по адресу: 119899, Москва, МГУ, Малый мехмат

Примечания

1. Для школьников 7—10 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону 139-39-43.

2. Школьники Казахстана и Молдавии присылают вступительные работы в филиалы МММФ МГУ, действующие при математическом факультете Казахского государственного университета и при факультете математики и кибернетики Кишиневского государственного университета. Их адреса: 480012, г. Алма-Ата, ул. Кирова-Масанчи, 47/39, Каз. ГУ, математический факультет, филиал МММФ МГУ; 277003, г. Кишинев, ул. Садовая, 60, КГУ, факультет математики и кибернетики, филиал МММФ МГУ.

Задачи вступительной контрольной работы на Малый механико-математический факультет в 1984 году

1. В городе планируется построить метрополитен с 20 станциями так, чтобы от каждой из них можно было проехать до любой другой (возможно, с пересадками). Какое наименьшее количество линий надо для этого проложить, если линией называть участок пути с односторонним движением между двумя станциями?

2. У трех мальчиков имеются медные монеты на одинаковую сумму. У первого из них все монеты трехкопеечные и однокопеечные, причем однокопеечные не более двух (или совсем нет). У второго все монеты пятикопеечные и однокопеечные, причем однокопеечных не более четырех (или совсем нет). У третьего все монеты двухкопеечные и однокопеечные, причем однокопеечные одна или две. Доказать, что пятикопеечных и трехкопеечных монет вместе не меньше, чем двухкопеечных.

3. В зрительном зале клуба 320 мест, расположенных одинаковыми рядами. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили еще один ряд, в зрительном зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в зрительном зале?

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и L так, что периметры треугольников ABL, ALC, AKC и BKC равны. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

5. Доказать, что диагональ не может делить трапецию на два конгруэнтных треугольника.

6. Какое наибольшее количество острых углов может иметь выпуклый 100-угольник?

7. При каких значениях p оба корня квадратного уравнения

$$x^2+2(p+1)x+9p-5=0$$

отрицательны?

8. В автобусной кассе имеется 1001 билет. Все билеты занумерованы подряд идущими шестизначными числами. Доказать, что среди них найдется «счастливый» билет, то есть такой, у которого сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр.

9. Число 19 представить в виде разности кубов натуральных чисел. Показать, что такое представление единственно.

10. По кругу расположены 13 различных чисел. Доказать, что из них всегда можно выбрать три следующих друг за другом числа a, b и c так, что $ab>bc$.

Стабилизированный одноатомный водород

(Начало см. на с. 7)

Затем при помощи сильного неоднородного магнитного поля, создаваемого соленоидом со сверхпроводящей обмоткой, атомы с параллельными электронными спинами собирались в специальной ловушке.

Измерения показали, что концентрация атомов достигала 10^{23} м$^{-3}$ и оставалась на этом уровне в течение двух-трех часов. В дальнейшем авторы надеются повысить концентрацию, чтобы можно было наблюдать макроскопические свойства одноатомного водорода.

В. Ф.

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1983 году.

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите область определения функции

$$f(x)=\log_2 \sin x+\sqrt{9x-2x^2-4}.$$

2. На координатной плоскости дана точка $M\ (2;4)$. Рассматриваются треугольники, у которых две вершины симметричны относительно оси Oy и лежат на дуге параболы $y=3x^2$, выделяемой условием $-1<x<1$, а точка M является серединой одной из сторон. Среди этих треугольников выбран тот, который имеет наибольшую площадь. Найдите эту площадь.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ углы при основании AD равны 30°, диагональ AC является биссектрисой угла BAD. Биссектриса угла BCD пересекает основание AD в точке M, а отрезок BM пересекает диагональ AC в точке N. Найдите площадь треугольника ANM, если площадь трапеции $ABCD$ равна $(2+\sqrt{3})$ см^2.

4. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 5\sin x\cdot\sin y+\dfrac{5}{2}\cos x\cdot\cos y=2\\ \cos x\cdot\sin y-2\sin x\cdot\cos y=\dfrac{6}{5}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $0<x<\pi$, $0<y<\pi$.

5. На ребре SB пирамиды $SABC$ выбраны точки D и E так, что $|SD|=|DE|=1$, $|BE|=2$ Сечения пирамиды плоскостями, перпендикулярными ребру SB и проходящими через точки D и E, имеют площади 5 и 16 соответственно, причем первое из этих сечений — треугольник, одна из вершин которого делит ребро SA в отношении 2:1, считая от вершины S. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{x-2}<3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2^x.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{5}{4}-\sin^2 x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\cos x+\frac{1}{2}.$$

3. Из вершины B тупого угла ромба $ABCD$ проведены высоты BM и BN. В четырехугольник $BMDN$ вписана окружность радиуса 1 см. Найдите сторону ромба, если $\widehat{ABC}=2\operatorname{arctg}2$.

4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с углом $\widehat{A}=60°$, все ребра призмы имеют длину a. Точка K является ортогональной проекцией точки B_1 на плоскость DA_1C_1, а точка L — ортогональной проекцией точки K на плоскость DD_1C_1C. Найдите объем пирамиды $DCLK$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2z^2-xz+5xy^2=0\\ xz-z^2+3x^2y=9x^2y^3\\ z^2-2x^2-5y^2z=18x^2y. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$\log_2(x-2)+\log_2(8-x)=1+2\log_4\left(x-\frac{9}{2}\right).$$

2. Решите неравенство

$$2-3x<\sqrt{4+9x-9x^2}.$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{6}{25}\pi\cdot\cos^2 2x\right)=\operatorname{tg}(2\pi\cdot\cos^2 x).$$

4. В остроугольном треугольнике ABC высота AD, медиана BE и биссектриса CF пересекаются в точке O. Найдите $\widehat{C}$, если $|OE|=2|OC|$.

5. Сторона основания правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a, а боковое ребро — длину $\frac{9}{8}a$. Точка E — середина ребра AB, а точка M лежит на отрезке EC и $|EM|=\frac{1}{4}|EC|$. Вторая призма симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой MC_1. Найдите объем общей части этих призм.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Диск может вращаться вокруг вертикальной оси, перпендикулярной его плоскости (рис. 1). На диске на расстоянии R от оси лежит небольшой брусок массы M. На горизонтальной поверхности бруска находится шайба массы m, прикрепленная к оси нитью. Диск вместе с бруском и шайбой очень медленно увеличивает свою угловую скорость. Коэффициент трения скольжения между шайбой и бруском μ. Считая трение между бруском и диском пренебрежимо малым, определите, при какой угловой скорости ω брусок начнет выскальзывать из-под шайбы.

2. Во время профилактического ремонта дно лодки-плоскодонки оклеили слоем пластика толщиной $d=3$ см. После этого высота надводной части лодки уменьшилась на величину $h=1{,}8$ см. Определите плотность пластика ρ.

3. Напряженность однородного электрического поля слева от бесконечной заряженной плоской пластины равна $\vec{E}_1$, а справа $\vec{E}_2$ (рис. 2). Определите силу f, действующую на единицу площади пластины со стороны электрического поля.

4. С помощью тонкой линзы получено изображение трезубца $ABCEDG$, у которого $|AB|=|BC|$ (рис. 3). Основание трезубца

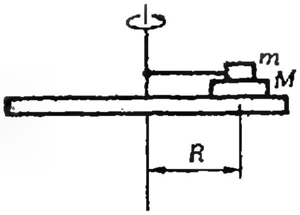


Рис. 1.

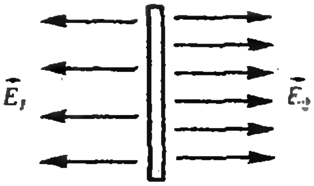


Рис. 2.

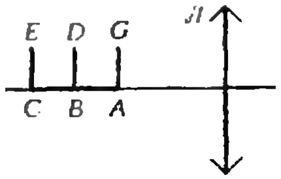


Рис. 3.

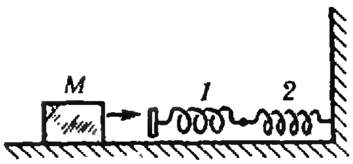


Рис. 4.

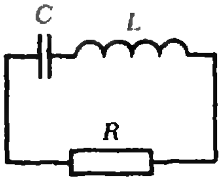


Рис. 5.

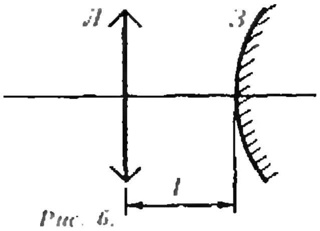


Рис. 6.

AC лежит на главной оптической оси линзы. Отрезок AB изображается с увеличением $\beta_1=6$, а отрезок BC — с увеличением $\beta_2=3$. Определите, с каким увеличением Γ_0 изображается отрезок BD.

Вариант 2

1. Тело массы M налетает на две последовательно соединенные пружины жесткости k_1 и k_2 (рис. 4). Максимальная энергия деформации пружины 2 оказалась равной E. Определите начальную скорость тела v.

2. При нагревании серебряного проводника сечения $S=5\cdot10^{-2}$ мм^2 его сопротивление возросло на $\Delta R=1{,}5\cdot10^{-2}$ Ом, а внутренняя энергия увеличилась на $\Delta U=1{,}6$ Дж. Найдите температурный коэффициент сопротивления серебра α. Плотность серебра $\rho=10{,}5\cdot10^3$ кг/м^3, удельная теплоемкость $c=235$ Дж/(кг · К), удельная проводимость $\sigma=0{,}62\cdot10^6$ Ом$^{-1}$ · см$^{-1}$.

3. В колебательном LCR-контуре (рис. 5) сопротивление невелико, так что колебания в нем затухают слабо. Для получения незатухающих колебаний поступают следующим образом: дважды за период в моменты, когда заряд конденсатора максимален, его пластины быстро раздвигают от расстояния d_1 до расстояния d_2, а в моменты, когда заряд равен нулю, их быстро сдвигают до прежнего расстояния (так называемый параметрический резонанс). При каком относительном изменении расстояния между обкладками $\Delta d/d$ колебания в контуре затухать не будут?

4. За положительной линзой Л с фокусным расстоянием $F=24$ см на расстоянии $l=4$ см расположено выпуклое сферическое зеркало З. Эта система линза+зеркало отражает лучи, параллельные оптической оси линзы, точно в обратном направлении. Определите радиус кривизны зеркала R (рис. 6).

Публикацию подготовили
С. П. Коновалов, А. В. Шелагин

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ (x+z)(y+z)=15 \\ (y-1)(x+z)=4. \end{cases}$$

2. При повороте координатной плоскости на угол α с центром в точке M точка $A(1;2)$ переходит в $A_1(6;5)$, а $B(1;4)$ в $B_1(4;5)$. Найдите образ точки $C(1;3)$. Найдите образ еще одной точки (по Вашему выбору). Найдите величину угла α и координаты точки M.

3. Какие из графиков функций $y=2x^3-x$, $y=x^3+6x^2-5$, $y=3x^2+2x$, $y=\cos x$, $y=\dfrac{1}{2^{x-1}-1}$ имеют центр симметрии?

4. При каких значениях a наименьшее значение функции

$$y=x^2+(a+4)x+2a+3$$

на отрезке $[0;2]$ равно -4?

5. При каких значениях a, b, c равенство

$$a\cdot\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+b\cdot\sin 2\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+c\cdot\sin(x+\pi)=0$$

выполняется при $x\in\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right\}$? При каких значениях a, b, c это равенство выполняется для всех $x\in\left[\frac{1}{8};\frac{1}{3}\right]$?

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-3y=-5 \\ \dfrac{x}{3y}-\dfrac{2y}{x}=-\dfrac{23}{6}. \end{cases}$$

2. Точки $A(1;1)$ и $B(5;1)$ являются вершинами острых углов равнобедренного прямо-

угольного треугольника ABC, имеющего общие точки с осью Ox. Треугольник $A_1B_1C_1$ является образом треугольника ABC при его симметрии относительно оси Ox. Найдите площадь общей части этих треугольников и укажите все перемещения, при которых треугольник $A_1B_1C_1$ переходит в треугольник ABC.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{1-\sqrt{3}\cos x}+\sqrt{10}\sin x=0.$$

4. Какие из следующих функций являются и какие не являются периодическими: $y=3-2x^2$, $y=-2x^3-3x+2$, $y=2+3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$, $y=2\cos\frac{3x}{2}-3\sin 2x$, $y=\cos x^2$, $y=\cos^2 x$? Для периодических функций укажите их наименьший положительный период.

5. При каких значениях a, b, c, d равенство

$$a\cdot\cos 2x=b\cdot\cos^2 x+c\cdot\cos x+d$$

является тождеством?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два груза, массы которых $m_1=0{,}3$ кг и $m_2=0{,}5$ кг, связаны невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через блок массой $m=0{,}2$ кг (рис. 1). Считая, что масса блока сосредоточена в его ободе, и пренебрегая сопротивлением движению, определите силы натяжения нити по обе стороны от блока. Проскальзывание между блоком и нитью отсутствует.

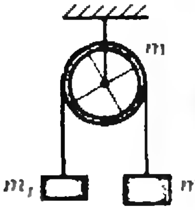


Рис. 1.

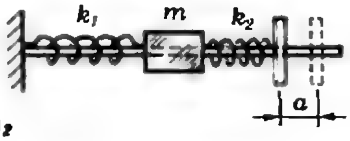


Рис. 2.

2. Груз массой $m=0{,}25$ кг прикреплен к двум невесомым пружинам с жесткостями $k_1=150$ Н/м и $k_2=250$ Н/м (рис. 2). Первоначально пружины находятся в ненапряженном состоянии. Затем в некоторый момент времени правый конец пружины с жесткостью k_2 очень быстро сдвигают влево на расстояние $a=0{,}04$ м и удерживают его в этом положении. Определите скорость, с которой груз проходит положение равновесия, и амплитуду колебаний груза.

3. Газ совершает круговой процесс, изображенный на рисунке 3. Какая работа может быть совершена за один цикл при таком процессе, если наименьшая температура газа $t_1=0$°C, а наибольшая $t_3=127$°C? Объем газа при температуре t_1 равен $V_1=5$ л, при t_3 — $V_3=6$ л, а при нормальных условиях данное количество газа занимает объем $V_0=10$ л.

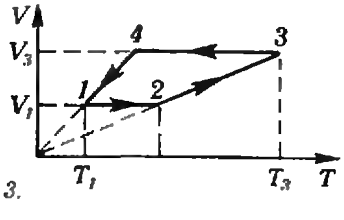


Рис. 3.

4. В закрытый сосуд объемом $V=10$ л помещают несколько капель воды общей массой $m=0{,}258$ г. Затем начинают увеличивать температуру сосуда, причем настолько медленно, что все время поддерживается равновесие между паром и жидкостью. При температуре $t=27$°C вода полностью испарилась. Определите давление насыщенных паров воды при этой температуре.

5. В сосуде имеются некоторое количество воды и такое же количество льда ($m_в=m_л$) в состоянии теплового равновесия. Через сосуд пропускают водяной пар при температуре $t_п=100$°C. Пренебрегая теплоемкостью сосуда и потерями тепла на нагревание окружающего воздуха, найдите установившуюся температуру воды в сосуде, если масса пропущенного пара равна первоначальной массе воды. Удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг, а удельная теплота парообразования воды $r=2{,}3\times10^6$ Дж/кг. Атмосферное давление нормальное.

6. Найдите напряжения на конденсаторах, емкости которых $C_1=2$ мкФ и $C_2=3$ мкФ, если ЭДС источников $\mathscr{E}_1=3$ В и $\mathscr{E}_2=8$ В (рис. 4).

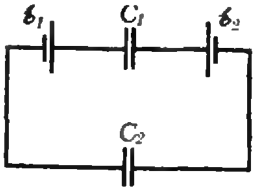


Рис. 4.

7. Две проводящие сферы, радиусы которых $r_1=1$ см и $r_2=0{,}5$ см, соединены через изолирующие прокладки пружиной с жесткостью $k=100$ Н/м и длиной $l_0=9{,}9$ см. Одной из сфер сообщают заряд q, а затем сферы соединяют тонким гибким проводом. При этом расстояние между сферами становится равным $l=10{,}5$ см. Найдите заряд q, если до его сообщения сила натяжения пружины была равна нулю.

8. При электролизе раствора медного купороса на катоде за некоторое время выделилось $m=2$ г меди при токе $I=0{,}25$ А. Расстояние между прямоугольными электродами было равно $l=30$ см, площадь каждого электрода $S=50$ см^2. Найдите изменение расхода электроэнергии, требуемой для получения того же количества меди при том же токе через ванну, если расстояние между электродами увеличилось вдвое, а глубина погружения электродов увеличилась в четыре раза. Удельное сопротивление раствора $\rho=0{,}33$ Ом · м, электрохимический эквивалент меди $k=3{,}3\cdot10^{-7}$ кг/ К.

9. Точечный источник света расположен на расстоянии $d=F$ справа от рассеивающей линзы на ее главной оптической оси (F — фокусное расстояние линзы). Слева от линзы на расстоянии $l=2F$ находится плоское зеркало, перпендикулярное главной оптической оси линзы. Сколько изображений источника формирует данная оптическая система? Являются ли эти изображения дейст-

вительными или мнимыми? Определите расстояния от этих изображений до линзы.

10. При лобовом столкновении атома водорода, двигавшегося со скоростью $v_0 = 7 \cdot 10^4$ м/с, с покоившимся атомом водорода был испущен световой квант с длиной волны $\lambda = 1220$ Å. Пренебрегая импульсом кванта, определите скорости атомов после столкновения (атомы движутся вдоль одной прямой). Масса атома водорода $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ кг, постоянная Планка $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ Дж · с.

Публикацию подготовили
Г. В. Ефашкин, В. А. Тонян

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Вычислите

$$\frac{\left(1\frac{11}{18}+1\frac{19}{24}\right)\cdot\frac{16}{49}}{37\frac{1}{3}:3{,}5-3\frac{5}{6}}.$$

2. Решите неравенство

$$(6{,}25)^{x+8}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+1}<1.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 2x=1.$$

4. Около шара описан конус, высота которого вдвое больше диаметра шара. Найдите отношение площадей полной поверхности конуса и поверхности шара.

5. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 30 см, длины высоты, проведенной к основанию, — 20 см. Определите длину высоты, проведенной к боковой стороне.

Вариант 2
(физический факультет)

1. Исследуйте функцию $y = x^3 - 12x$ и постройте ее график.

2. Решите уравнение

$$\log_2(5-x)+2\log_2\sqrt{3-x}=0.$$

3. Дан треугольник ABC: $A(-1; 4)$, $B(5; 1)$, $C(2; -2)$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный, найдите длину медианы AD.

4. Решите уравнение

$$\sin x+\cos x=\frac{1}{\sin x}.$$

5. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a и угол при основании β. Определите объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей ее оснований.

Вариант 3
(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$(\sin x-\cos x)^2+\lg x=2\sin^2 x.$$

2. Решите уравнение

$$2\lg(x+2)=2\lg 3.$$

3. Найдите объем правильного тетраэдра, если длина его ребра равна a.

4. Бригада рабочих должна была изготовить 8000 одинаковых деталей в определенный срок. Фактически эта работа была окончена на 8 дней раньше срока, так как бригада изготовляла ежедневно на 50 деталей больше, чем это было намечено по плану. В какой срок должна быть окончена работа?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Поезд длиной $l = 120$ м движется по мосту равномерно со скоростью $v = 18$ км/ч. За какое время поезд пройдет мост, если длина моста $L = 480$ м?

2. Свободно падающее тело в последнюю секунду своего движения проходит половину всего пути. Определите время падения и высоту, с которой тело падало без начальной скорости.

3. Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось в точку бросания через $t = 10$ с. Какова начальная скорость тела? На какую максимальную высоту оно поднималось?

4. Два груза с массами $m_1 = 9$ кг и $m_2 = 11$ кг висят на концах нити, переброшенной через легкий блок. С каким ускорением движутся грузы? Каково натяжение нити?

5. Сани массой $m = 60$ кг спускаются с горы длиной $l = 100$ м и высотой $h = 10$ м, преодолевая силу сопротивления $F_c = 20$ Н. Какой будет скорость саней в конце горы?

6. На какой угол надо отклонить нить с подвешенным к ней грузом, чтобы при прохождении положения равновесия натяжение нити было в 2 раза больше веса груза?

7. В запаянной с одного конца узкой стеклянной трубке, расположенной горизонтально, находится воздушный столбик длиной $l = 50$ см, запертый столбиком ртути длиной $h = 19$ см. Как изменится длина воздушного столбика, если трубку поставить вертикально открытым концом вверх? Атмосферное давление $p_a = 760$ мм рт. ст.

8. Аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом замкнут на резистор и выделяет в нем мощность $P = 9$ Вт. Определите разность потенциалов на клеммах аккумулятора.

9. Под каким углом следует направить луч на поверхность стекла, показатель преломления которого $n = 1{,}54$, чтобы угол преломления получился равным $\beta = 30°$?

10. С помощью фотоаппарата «Зенит», дающего снимки размером 24×36 см, фотографируют Останкинскую телевизионную башню, высота которой приблизительно равна $H = 530$ м. На каком наименьшем расстоянии следует встать фотографу, чтобы вся башня уместилась на снимке? Фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F = 5$ см.

Публикацию подготовили
В. С. Копылов, О. Ю. Овчинников,
О. С. Редкозубова

Системы линейных уравнений

22. $x=\frac{a+b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}$, $y=\frac{b+a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}$. Решение. Положив $\sqrt{x^2-y^2}=v$, перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} x-yv=a\sqrt{1-v^2} \\ -xv+y=b\sqrt{1-v^2}. \end{cases} \qquad (1)$$

Решив ее как линейную систему относительно x, y, получим

$$\begin{cases} x=\frac{a+bv}{\sqrt{1-v^2}} \\ y=\frac{b+av}{\sqrt{1-v^2}}. \end{cases}$$

Возведя уравнения системы (1) в квадрат и вычтя второе уравнение из первого, найдем, учитывая $v\neq 1$, $v=\sqrt{a^2-b^2}$, откуда и следует ответ. Поскольку мы воспользовались следствием из уравнений системы, надо бы сделать проверку; вместо этого можно заметить, что формулы в ответе — такие же, как в данной системе, если заменить x на a и $-y$ на b; поэтому ее уравнения следуют из формул ответа.

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. $\left[\frac{1}{2};\pi\right[$.

2. $3\frac{5}{9}$. Указание. Пусть точки $A(-x;3x^2)$ и $B(x;3x^2)$, где $0<x<1$, — вершины рассматриваемых треугольников. Третья вершина C определена неоднозначно, поскольку точка M может быть серединой как $[AC]$, так и $[BC]$, но в обоих случаях площадь треугольника получается одна и та же.

3. $\frac{3}{2}(\sqrt{3}-1)$ см^2. Указание. Воспользовавшись подобием треугольников ANM и BCN, найдите в $\triangle ANM$ высоту, опущенную из вершины N.

4. $\left\{\left(\arccos\frac{4}{5};\ \arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right);\ \left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right);\ \pi\right)\right\}$. Указание. Решите (линейную!) систему относительно $\sin y$ и $\cos y$, затем примените тождество $\sin^2 y+\cos^2 y=1$. Проще, однако, умножить первое уравнение системы на 2, второе — на 5, возвести их в квадрат и сложить.

5. 30. Решение. Обозначим через α_1 и α_2 плоскости сечений, проведенных через точки D и E. Пусть $M=[SA]\cap\alpha_1$, $N=(SC)\cap\alpha_1$, $F=(AB)\cap\alpha_2$, $T=(SA)\cap\alpha_2$. Так как по условию первое сечение является треугольником, $N\in[SC]$ (рис. 1). Из треугольника ASB видно,

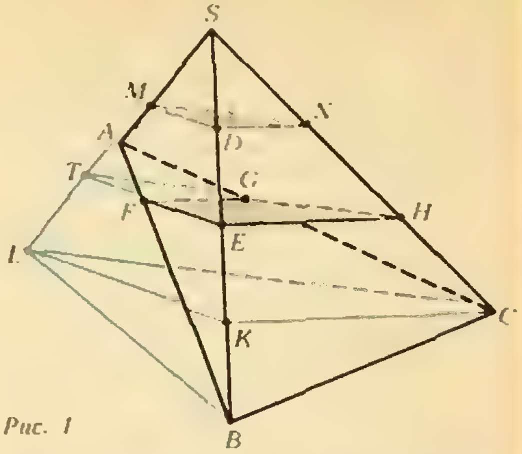


Рис. 1

что $F\in[AB]$, поскольку $|SD|=|DE|$, и $|SM|=2|MA|$. Проведя через точку A прямую, параллельную (MD), при помощи подобных треугольников найдем $|FE|=\frac{6}{5}|MD|$. Если бы плоскость α_2 пересекала отрезок BC в некоторой точке P, то вторым сечением был бы $\triangle FEP$, в котором $|EP|<2|DN|$ (действительно, если $(EP)\cap(SC)=Q$, то $|EP|<|EQ|$, а $|EQ|=2|DN|$, так как $|SD|=|DE|$); из $\widehat{MDN}=\widehat{FEP}$ тогда вытекало бы

$$S_{FEP}=\frac{|FE|\cdot|EP|}{|MD|\cdot|DN|}\cdot S_{MDN}<\frac{6}{5}\cdot 2\cdot 5=12,$$

что противоречит условию задачи. Следовательно, плоскость α_2 пересекает отрезок SC и второе сечение будет четырехугольником $EFGH$, где $G=[AC]\cap\alpha_2$, $H=[SC]\cap\alpha_2$. Коэффициент подобия треугольников ETH и DMN равен 2, поэтому $S_{FTG}=S_{ETH}-S_{EFGH}=4$. Но $|FT|=\frac{4}{5}|DM|$, $\widehat{FTG}=\widehat{DMN}$; следовательно, $\frac{|TG|}{|MN|}=\frac{S_{FTG}}{S_{DMN}}\cdot\frac{|DM|}{|FT|}=1$; значит, $|TG|=|GH|=|MN|$. Если O — середина $[NH]$, то $[AO]\parallel[GH]$, $|AO|=\frac{3}{2}|GH|$ и из подобия $\triangle AOC\sim\triangle GHC$ следует $|CH|=2|HO|$, то есть точки N и H делят $[SC]$ на три равные части. Поэтому, если мы проведем через точку C плоскость $\alpha_3\parallel\alpha_1$ и положим $K=[SB]\cap\alpha_3$ и $L=(SA)\cap\alpha_3$, то $|SA|=|AL|$. Отсюда следует, что точки S и L равноудалены от плоскости ABC и $V_{SABC}=V_{LABC}$. Значит,

$$V_{SABC}=\frac{1}{2}V_{SLBC}=\frac{1}{2}V_{SKLC}+\frac{1}{2}V_{BKLC}=\frac{1}{6}|BS|\cdot S_{KLC}=30,$$

так как $(BS)\perp(CKL)$, и $S_{KLC}=9S_{DMN}=45$. Замечание. Задача сознательно переопределена составителями для облегчения решения: условие «первое из этих сечений — треугольник» вытекает из остальных условий.

Вариант 2

1. $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

2. $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k\ (k\in Z)$.

3. $\frac{15}{4}$ см. Указание. Если O — центр окружности, а K — точка касания окружности с прямой DM, то $|KM|=1$.

4. $\frac{3\sqrt{3}}{50}a^3$. Указание. Если O — середина отрезка B_1D_1, то точка K является проекцией точки B_1 на прямую DO.

5. $\left\{(0;\ y;\ 0)\text{, где } y \text{ — любое, } \left(-\frac{1}{2};\ -1;\ 1\right)\right\}$.

Указание. Заметим, что при $x \neq 0$, разделив все уравнения на x^2, мы сможем через переменные y и $t=\frac{z}{x}$ выразить все слагаемые, за исключением двух — одного в первом и одного в третьем уравнениях. Сначала рассмотрите случай $x=0$. Затем при $x \neq 0$ сложите первое уравнение системы, умноженное на $\frac{z}{x^3}$, с третьим уравнением системы, умноженным на $\frac{1}{x^2}$; после сокращения на 2 получится $t^3-1=9y$. К этому уравнению прибавьте второе уравнение системы, умноженное на $\frac{3}{x^2}$; получится $(t-1)^3=27y^3$.

Вариант 3.

1. $\{7\}$.

2. $\left]0;\ \frac{4}{3}\right]$.

3. $x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $x_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)+\pi l\ (k,\ l \in \mathbf{Z})$. Указание. Уравнение $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$ равносильно системе

$$\begin{cases}\sin(\alpha-\beta)=0\\ \cos\alpha \neq 0\\ \cos\beta \neq 0.\end{cases}$$

Не забудьте, что $|\cos\gamma| \leqslant 1$.

4. $\arccos\frac{1}{7}$. Указание. Выразив $|CO|$ и $|CE|$ через $|DC|$ и $\widehat{C}$, примените к треугольнику COE теорему косинусов. Замечание. Задача сознательно переопределена составителями для облегчения решения: условие «$\triangle ABC$ — остроугольный» вытекает из остальных условий.

5. $\frac{5\sqrt{3}}{48}a^3$. Решение. Проведем через M прямую, параллельную (AB); обозначим через A_2 и B_2 точки ее пересечения с ребрами AC и BC (рис. 2). Тогда $(C_1CE) \perp (C_1A_2B_2)$, $(MC_1)=(C_1CE)\cap(C_1A_2B_2)$ и симметрия относительно прямой MC_1 есть композиция симметрий относительно плоскостей C_1CE и $C_1A_2B_2$. Но (C_1CE) — плоскость симметрии призмы $ABCA_1B_1C_1$; следовательно, общая часть призм будет симметрична относительно $(C_1A_2B_2)$. Поэтому достаточно взять точку O, симметричную C относительно (MC_1), и найти удвоенный объем общей части пирамиды $OA_2B_2C_1$ и призмы $ABCA_1B_1C_1$. Пусть E_1 — середина $[A_1B_1]$, $N=(OM)\cap[EE_1]$; из $\operatorname{tg}\widehat{C_1MC}=\frac{9}{8}a:\frac{3\sqrt{3}}{8}a=\sqrt{3}$ и $\widehat{C_1MO}=\widehat{C_1MC}$ следует $\widehat{OME}=60°$; отсюда $|MN|=\frac{1}{2}|EC|$, а так как $|MO|=|MC|=\frac{3}{4}|EC|$, O расположена вне призмы $ABCA_1B_1C_1$. Пусть $[OC_1]\cap[EE_1]=C_2$. Тогда $\widehat{E_1C_1C_2}=90°-2\widehat{MC_1C}=30°$, $|C_1C_2|=a$ и $|OC_2|=\frac{a}{8}$. Положим $A_3=[OA_2]\cap(AA_1B_1B)$, $B_3=[OB_2]\cap(AA_1B_1B)$. Если из пирамиды $OA_2B_2C_1$ удалить пирамиду $OA_3B_3C_2$, останется общая часть призмы $ABCA_1B_1C_1$ и пирамиды $OA_2B_2C_1$. Учитывая, что $(C_1O) \perp (OA_2B_2)$, а $|A_3B_3|=\frac{1}{3}|A_2B_2|=\frac{a}{4}$, вычислим объемы этих пирамид:

$$V_{OA_2B_2C_1}=\frac{1}{3}|OC_1|S_{OA_2B_2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{8}a\cdot\left(\frac{3a}{4}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4};$$

$$V_{OA_3B_3C_2}=\frac{1}{3}|OC_2|S_{OA_3B_3}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{8}\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Отсюда находим объем общей части призм

$$V=2(V_{OA_2B_2C_1}-V_{OA_3B_3C_2})=\frac{5\sqrt{3}}{48}a^3.$$

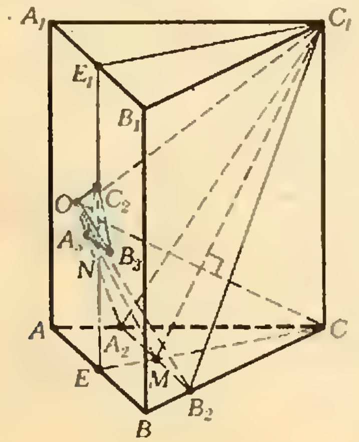


Рис. 2.

Физика

Вариант 1

1. В системе отсчета, связанной с неподвижным наблюдателем (в инерциальной системе отсчета), на брусок действует единственная сила — сила трения со стороны шайбы. Брусок не будет выскальзывать из-под шайбы, а будет вращаться вокруг оси вместе с диском, пока выполняется условие (второй закон Ньютона)

$$M\omega^2R \leqslant \mu mg.$$

Отсюда находим предельное значение угловой скорости:

$$\omega=\sqrt{\mu mg/(MR)}.$$

2. Запишем условие плавания лодки в начальном состоянии, до ремонта:

$$mg=\rho_{в}lSg,$$

где m — масса лодки, $\rho_{в}$ — плотность воды, l — глубина погруженной части лодки, S — площадь дна. После наклеивания пластика *снаружи* условие плавания примет вид

$$mg+\varrho dSg=\varrho_в(l+d+h)Sg.$$

Из полученных уравнений находим плотность ϱ пластика:

$$\varrho=\varrho_в(d+h)/d=1{,}6\cdot 10^3\ кг/м^3.$$

Если наклеить пластик на дно *внутри* лодки, то условие равновесия будет таким:

$$mg+\varrho dSg=\varrho_в(l+h)Sg,$$

и

$$\varrho=\varrho_в h/d=0{,}6\cdot 10^3\ кг/м^3.$$

3. Пусть напряженность внешнего однородного поля равна $\vec{E}_0$ и силовые линии этого поля направлены слева направо (см. рис. 2 в статье). Тогда, используя принцип суперпозиции электрических полей, можем записать

$$E_1=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-E_0,\quad E_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+E_0,$$

где σ — поверхностная плотность заряда пластины и ε_0 — электрическая постоянная. Отсюда находим

$$\sigma=\varepsilon_0(E_1+E_2),\quad E_0=(E_2-E_1)/2.$$

Сила, действующая на единицу площади пластины,

$$f=\sigma E_0=\varepsilon_0(E_2^2-E_1^2)/2.$$

4. Поскольку в задаче речь идет и о продольном увеличении β, и о поперечном увеличении Γ, прежде всего установим связь между ними. Рассмотрим отрезки AG, AB и BD (см. рис. 3 в статье). Обозначим расстояния точек B и A до линзы через d_0 и d_1, а их изображений — через f_0 и f_1 соответственно. Из формулы линзы имеем

$$\frac{1}{d_0}+\frac{1}{f_0}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1},\ \text{или}\ \frac{d_1-d_0}{d_0d_1}=\frac{f_0-f_1}{f_0f_1},$$

откуда

$$\beta_1=\frac{f_1-f_0}{d_0-d_1}=\frac{f_0}{d_0}\,\frac{f_1}{d_1}=\Gamma_0\Gamma_1.$$

Аналогично для отрезков BD, BC и CE найдем

$$\beta_2=\Gamma_0\Gamma_2,$$

а для отрезка AC —

$$\beta=\frac{\beta_1|AB|+\beta_2|BC|}{|AB|+|BC|}=\frac{\beta_1+\beta_2}{2}=\Gamma_1\Gamma_2.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{\beta_1+\beta_2}{2}=\frac{\beta_1}{\Gamma_0}\,\frac{\beta_2}{\Gamma_0},\ \text{и}\ \Gamma_0=\sqrt{\frac{2\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}=2.$$

Вариант 2

1. $v=\sqrt{2E(k_1+k_2)/(Mk_1)}$.

2. $\alpha=\varrho S^2\sigma c\Delta R/\Delta U=3{,}6\cdot 10^{-6}\,К^{-1}$.

3. Поскольку пластины конденсатора раздвигают быстро, заряды на них не изменяются, и контуру передается энергия

$$\Delta E_{+}=\frac{q_m^2}{2C_1}-\frac{q_m^2}{2C_2}=\frac{q_m^2}{2C}\,\frac{\Delta d}{d}.$$

За полпериода в контуре теряется (выделяется в виде тепла) энергия

$$\Delta E_{-}=Q=\frac{I_m^2}{2}R\,\frac{T}{2}=\frac{\omega_0^2q_m^2}{2}\,R\,\frac{\pi}{\omega_0}.$$

Колебания затухать не будут, если $\Delta E_{+}>\Delta E$. Отсюда получаем

$$\frac{\Delta d}{d}>\pi\omega_0RC=\pi R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

4. $R=F-l=20$ см.

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $\{(1;2;3),\ (1;5;0),\ (3;2;1),\ (3;5;-2)\}$. Указание. Выразите из первого уравнения $y+z$ и подставьте во второе уравнение, затем выразите $x+z$ и подставьте в третье.

2. $M(2;6)$; точка M переходит к точку $M_1=M$, середина C $(1;3)$ отрезка AB переходит в середину C_1 $(5;5)$ отрезка A_1B_1; $\alpha=90°$. Указание. Координаты точки M являются решением системы

$$\begin{cases}|MA|^2=|MA_1|^2\\ |MB|^2=|MB_1|^2.\end{cases}$$

Их можно найти также как координаты пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AA_1 и BB_1; $[AB]\perp[A_1B_1]$.

3. Функция $y=2x^3-x$ — нечетная; следовательно, ее график имеет центр симметрии (начало координат). График функции $y=\cos x$ конгруэнтен графику нечетной функции $y=\sin x$; следовательно, он имеет центр симметрии. График функции $y=3x^2+2x$ конгруэнтен графику функции $y=3x^2$ (докажите!), не имеющему центра симметрии; следовательно, он не имеет центра симметрии. Чтобы график некоторой функции f имел центр симметрии $M(a;b)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого x, для которого $a+x\in D_f$, выполнялось $a-x\in D_f$ и (рис. 3).

$$f(a+x)+f(a-x)=2b. \qquad (1)$$

Из равенства (1) для функции $f(x)=x^3+6x^2-5$ при $x=0$ и при $x=a$ получаем систему с решениями $a_1=0$, $b_1=-5$ и $a_2=-2$, $b_2=11$; при a_2, b_2 равенство (1) является тождеством; следовательно, график функции $y=x^3+6x^2-5$ имеет центр симметрии. Если точка M $(a;b)$ является центром симметрии графика функции f и $x\notin D_f$, $x\neq a$, то $2a-x\notin D_f$, $2a-x\neq a$. Поскольку для функции

$$f(x)=\frac{1}{2^{x-1}-1}$$

D_f не содержит одной точки $x=1$, абсцисса центра симметрии, если он существует, равна 1; подставив в равенство (1) для этой функции $a=1$, получаем, что оно является тождеством при $b=-\frac{1}{2}$; следовательно,

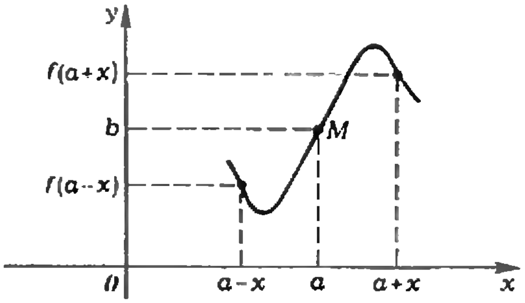


Рис. 3.

график этой функции имеет центр симметрии.

4. $a=-3\frac{1}{2}$. Указание. Пусть x_0 — абсцисса вершины параболы. Рассмотрите три случая: $x_0<0$, $0<x_0<2$, $x_0>2$.

5. Ответ на оба вопроса: $a=b=c=0$. Указание. Выразите левую часть через $\sin x$ и $\cos x$; трехчлен $\alpha t^2+\beta t+\gamma$ имеет больше двух корней только при $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Вариант 2

1. $\left\{(1;2),\ \left(-4;\frac{1}{3}\right)\right\}$.

2. 2; S_{Ox}, $Z_{(3,0)}$. Указание. При рассматриваемых перемещениях $[A_1B_1]$ переходит в $[AB]$. Если P_1 — произвольная точка и P — ее образ, то в случае, когда A_1 переходит в B, а B_1 — в A, получим

$$\begin{cases} |P_1A_1|=|PB| \\ |P_1B_1|=|PA|. \end{cases}$$

Выведите отсюда, что рассматриваемое перемещение есть $Z_{(3,0)}$. Другой случай рассматривается аналогично.

3. $x=-\frac{5}{6}\pi+2\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$.

4. Периодические: $y=2+3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$ (наименьший положительный период — 3π), $y=2\cos\frac{3x}{2}-3\sin 2x$ (4π), $y=\cos^2 x$ (π), остальные — не периодические. Указание. Функция, непрерывная в каждой точке $a\in\mathbf{R}$ и не ограниченная на $\mathbf{R}$, не является периодической. Производная периодической функции — периодическая.

5. При любом $a\in\mathbf{R}$, $b=2a$, $c=0$, $d=-a$. Указание. Трехчлен $\alpha t^2+\beta t+\gamma$ имеет больше двух корней только при $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Физика

1. $T_1=\frac{(2m_2+m)m_1g}{m_1+m_2+m}=3{,}6$ Н;

$T_2=\frac{(2m_1+m)m_2g}{m_1+m_2+m}=4$ Н.

Указание. Запишите основное уравнение движения для каждого груза и для блока.

2. $v_m=\frac{k_2a}{\sqrt{m(k_1+k_2)}}=1$ м/с; $x_m=\frac{k_2a}{k_1+k_2}=2{,}5\cdot10^{-2}$ м $=2{,}5$ см. Указание. Воспользуйтесь законом сохранения энергии, имея в виду, что в начальный момент системе сообщили запас энергии $E=k_2a^2/2$.

3. $A=(p_2-p_1)(V_3-V_1)=\frac{p_0V_0}{T_0}\left(\frac{T_3}{V_3}-\frac{T_1}{V_1}\right)\times(V_3-V_1)\approx45$ Дж (здесь $p_0=10^5$ Па и $T_0=273$ К — давление и температура при нормальных условиях). Указание. Изобразите данный процесс в координатах p, V, где работа газа численно равна площади фигуры под соответствующим графиком.

4. $p=\frac{m}{M}\frac{RT}{V}\approx3573$ Па ≈27 мм рт. ст.

5. $t=100$°C.

6. $U_1=\frac{(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)C_2}{C_1+C_2}=3$ В;

$U_2=\frac{(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)C_1}{C_1+C_2}=2$ В.

7. $q=\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)(l+r_1+r_2)\times\sqrt{4\pi\varepsilon_0k(l-l_0)\frac{r_1}{r_2}}\approx2{,}1\cdot10^{-6}$ Кл.

8. Расход энергии уменьшится на $\Delta W=\frac{mI\varrho l}{2kS}\approx1{,}5\cdot10^{-4}$ Дж.

9. Система формирует три мнимых изображения: одно находится справа от линзы на расстоянии $f_1=F/2$, второе — слева от линзы на расстоянии $f_2=9F/2$, третье — тоже слева на расстоянии $f_3=9F/11$.

10. Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$mv_0=mv_1+mv_2,$$
$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}+\frac{hc}{\lambda}.$$

Отсюда найдем

$$v_1=\frac{v_0}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4hc}{mv_0^2\lambda}}\right)\approx2\cdot10^4\ \text{м/с};$$

$$v_2=\frac{v_0}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4hc}{mv_0^2\lambda}}\right)\approx5\cdot10^4\ \text{м/с}.$$

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. $\frac{20}{123}$.

2. $]-\infty;-3]\cup[5;+\infty[$.

3. $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi l$ $(k,l\in\mathbf{Z})$

4. 2.

5. 24 см.

Вариант 2

2. $\{4-\sqrt{2}\}$.

3. 4, $5\sqrt{2}$.

4. $x=[1+(-1)^k]\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k\ (k\in\mathbf{Z})$.

5. $\frac{a^3\cdot\sin\beta}{8\cos\beta(1+\cos\beta)}$.

Вариант 3

1. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\ (k\in\mathbf{Z})$.

2. $\{1\}$.

3. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

4. За 40 дней.

Физика

1. $t=(L+l)/v=120$ с $=2$ мин.

2. $t=(2+\sqrt{2})\tau\approx3{,}4$ с (здесь $\tau=1$ с); $h=gt^2/2\approx57{,}8$ м.

3. $v_0=gt/2=50$ м/с; $h=gt^2/8=125$ м.

4. $a=g(m_2-m_1)/(m_1+m_2)=1$ м/с^2; $T=m_1(g+a)=99$ Н.

5. $v=\sqrt{2(gh-F_c l/m)} \approx 11{,}5$ м/с.
6. $\alpha=\arccos {}^1/_2=60°$.
7. Длина воздушного столбика уменьшится на $\Delta l=lh/(H+h)=10$ см (здесь $H=760$ мм).

8. $U_{1,2} = \frac{\mathcal{E}}{2} \pm \sqrt{\frac{\mathcal{E}^2}{4} - Pr}$; $U_1=9$ В; $U_2=1$ В.
9. $\alpha=\arcsin(n \sin\beta)\approx 50{,}3°$.
10. $d=F(1+H/h)\approx 74$ м (здесь $h=36$ см).

Геометрический кроссворд

(см. «Квант», 1983, № 10)

По горизонтали

5. Сторона. **6.** Отрезок. **8.** Круг. **9.** Долгота. **10.** Точка. **13.** Архимед. **14.** Аксиома. **17.** Медиана. **18.** Логарифм. **19.** Частное **20.** Синусоида. **23.** Прямоугольник. **24.** График.

По вертикали

1. Конус. **2.** Катет. **3.** Лобачевский. **4.** Хорда. **5.** Секущая. **7.** Квадрат. **11.** Гипербола **12.** Биссектриса. **15.** Перпендикуляр. **16.** Многоугольник. **19.** Час. **21.** Угол. **22.** Длина.

Шахматная страничка

(см. «Квант», 1983, № 9, 10)

Задание 17 (Ортуэта—Санц). Черные эффектно выигрывают: **1...Л:b2!! 2. К:b2 c3! 3. Л:b6** (3. Кd3 c4+ 4. Л:b6 cd) **3...c4!! 4. Лb4 a5!! 5. Кa4** (5. Лb5 c2; 5. Л:c4 cb) **5...ab.** Знаменитая шахматная комбинация.

Задание 18 (Смыслов—Росстетто). Экс-чемпион мира выигрывает при помощи пешечного прорыва подобного тому, с которым мы ознакомились в предыдущем примере: **1. cb! Лe1+! 2. Л:e1 Ф:b5 3. ba Фc6 4. Лb1!! Крh7 5. Лb8,** и пешка проходит в ферзи. Черные сдались.

Задание 19 (В. Помогалов, 1973 г.). **1. Крa7 Сc8 2. Крb8! Сe6 3. c8Ф С:c8 4. Крc7!!** Белые не забывают об уроках Рети, после 4. Кр:c8 Крg6 5. Крd7 Кр:f6 им не на что рассчитывать. **4...Крg6 5. Кр:d6! Кр:f6 6. Крc5** с ничьей (поле превращения пешки «а» — черное, а слон белопольный).

Задание 20 (А. Ринк, 1922 г.). Маневр Рети встречается и в этюдах на выигрыш, где им пытается пользоваться (увы, безуспешно) слабейшая сторона. Данный этюд является классическим на эту тему. **1. a4 Крb3! 2. a5 Крc3!** Черный король перемещается в духе Рети — направляясь к своей пешке и приглядываясь к чужой. Если 2...Крc4, то 3. a6 Крd3 4. a7 f2 5. a8Ф f1Ф 6. Фa6+ **3. Крg1!** Замысел противника удается разрушить. Не годится ни 3. a6? Крd2!, ни 3. Крg3? Крd4! **3...Крd4 4. a6 Крe3 5. Крf1,** и белые побеждают. То, что сейчас произошло на доске, называется «анти-Рети»!

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили
М. А. Гусева, М. Б. Дубах, Н. С. Кузьмина,
Э. В. Назаров, И. А. Смирнов, Н. Г. Смирнова,
Е. К. Тенчурина

Фото А. А. Кулешова, В. Н. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Главный художник Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

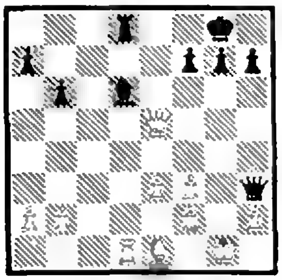
Сдано в набор 23.11.83
Подписано к печати 22.12.83
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Усл. кр.-от. 23,8
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,10. Т-22275
Цена 40 коп. Заказ 3117. Тираж 175020 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

РЕНТГЕН

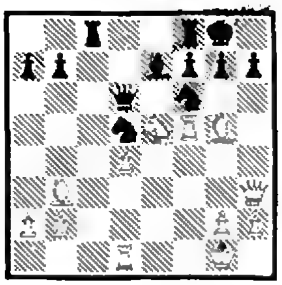
В «Кванте» № 11 за 1983 г. мы рассмотрели несколько примеров на тему связки. Этот комбинационный прием очень часто встречается в партиях. А сегодня на очереди другой прием, который называют *сквозным действием фигур* или, иначе, *рентгеном*.



**Шайди — Погач
(Венгрия, 1963 г.)**

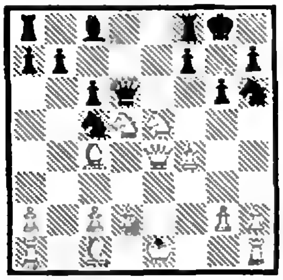
Пока что слышны мотивы связки — нельзя 1...С:е5, а после 1...f6 2.Фd5+ Крf8 у черных много угроз, но их губит связка —3.Сb4! Сильный ход 1...Фd7, после 2.Фd4 Фе8 3.f4 Се7! уже белые гибнут из-за связки, однако 3.Ф:d6 Л:d6 4.Л:d6 должно привести к ничьей. Но такой результат черных не устраивает. После **1...Ф:h2+!!** противнику приходится сдаться. Первое впечатление таково, что на доске произошло какое-то недоразумение, ведь между черным ферзем на h2 и слоном d6 находится белый ферзь, то есть черный ферзь не защищен. Но в этом и заключается идея рентгена — лучи, испускаемые слоном, проходят сквозь белого ферзя, и он как будто не существует для слона. После 2.Ф:h2 С:h2+ 3.Кр:h2 Л:d1 у черных решающий материальный перевес.

Пункт f7 нередко оказывается уязвимым местом в лагере черных, и комбинация на рентген позволяет обнажить эту слабость. Вот классический пример на эту тему.



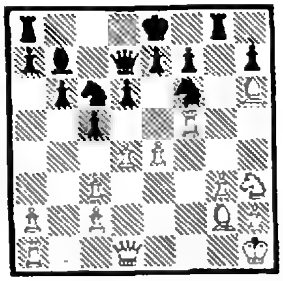
**Ботвинник — Видмар
(Ноттингем, 1936 г.)**

Белые слон и ладья воздействуют на поле f7 сквозь коней. **1. К:f7! Л:f7** (1...Кр:f7 2.С:d5+ с выигрышем) **2.С:f6 С:f6** (2...К:f6 3.Л:f6! С:f6 4.Ф:c8+) **3.Л:d5 Фc6 4.Лd6!!** Только теперь нацеленность слона на пешку f7 стала видимой. 4.Лс5? сейчас проигрывало ввиду ответа 4...С:d4+! **4...Фe8 5.Лd7.** Черные сдались.



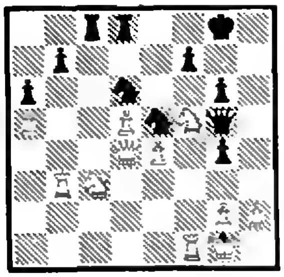
**Зелевинский — Равинский
(Москва, 1962 г.)**

Белыми играл известный физик-теоретик и к тому же мастер спорта СССР по шахматам. Ферзь белых под боем, но физик установил рентгеновский аппарат на с4 и не обращает внимания на своего ферзя. **1.К:f7! К:f7** (1...К:е4 2. К:d6 К:d6 3.Ке7++ Крg7 4.Сb2+) **2.Ке7+ Крg7 3.Сb2+ Крh6 4.Фе3! Ка4 5.f5+ g5 6.Фh3×.**



**Черкасов — Хохлов
(Киев, 1969 г.)**

Слон b7 взял на прицел неприятельского слона g2, конь с6 и пешка е4 ему не помеха. **1...К:е4! 2.С:е4 К:d4!! 3.Лf4** (3. С:b7 Ф:b7+) **3...Кf5** (3...Ф:h3 4.С:b7 Лb8 5.Лh4) **4.Фf3 К:g3+**. Белые сдались.

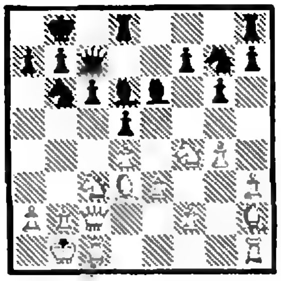


**Сабо — Дода
(Румыния, 1969 г.)**

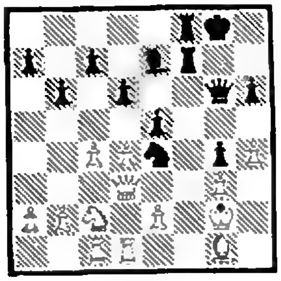
Ферзь g5 устремил свой взгляд на белого короля. Попадающиеся по дороге пешки не в счет. **1...Кf3+! 2.gf К:f5 3.Фf2** (3.еf gf+ 4.Крf2 Фg2+) **3...g3! 4.Фе1** (4.hg К:g3 5.Фg2 Фе3+ 6.Лf2 Л:с3 с угрозой 7...Ке2+) **4...gh++ 5.Крf2** (5.Кр:h2 Крg7 и Лh8+) **5...Фg3+ 6.Кре2 Кd4+**. Белые сдались.

В этом номере начинается наш очередной шахматный конкурс. Победители его, как и прежде, будут награждены шахматно-математической литературой с автографами ведущих шахматную страничку.

Конкурсные задания

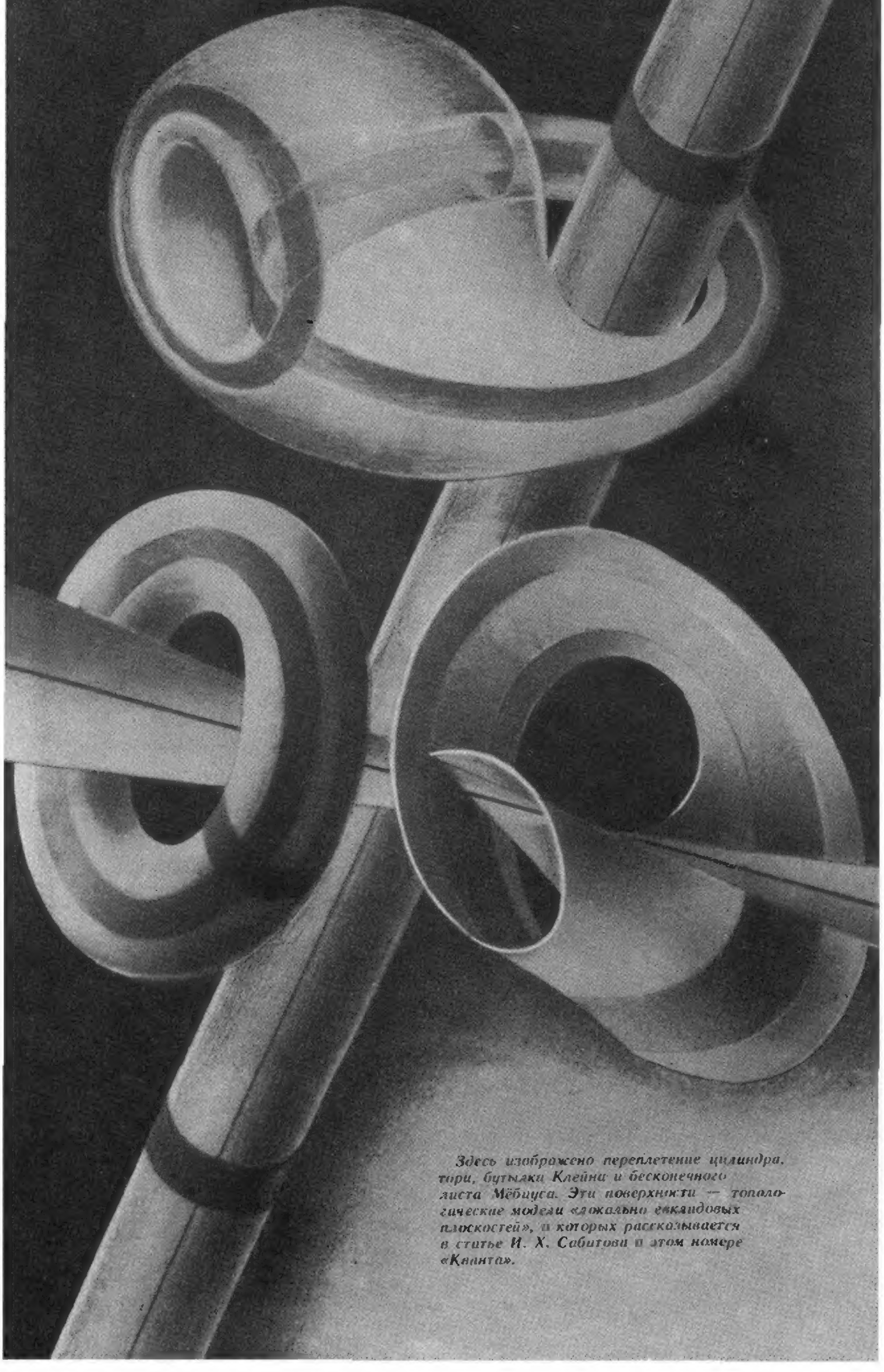


**1. Белые начинают
и выигрывают.**



**2. Черные начинают
и выигрывают.**

Срок отправки решений — 25 марта 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант» с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 1, 2».



Здесь изображено переплетение цилиндра, тора, бутылки Клейна и бесконечного листа Мёбиуса. Эти поверхности — топологические модели «локально евклидовых плоскостей», о которых рассказывается в статье И. Х. Сабитова в этом номере «Кванта».

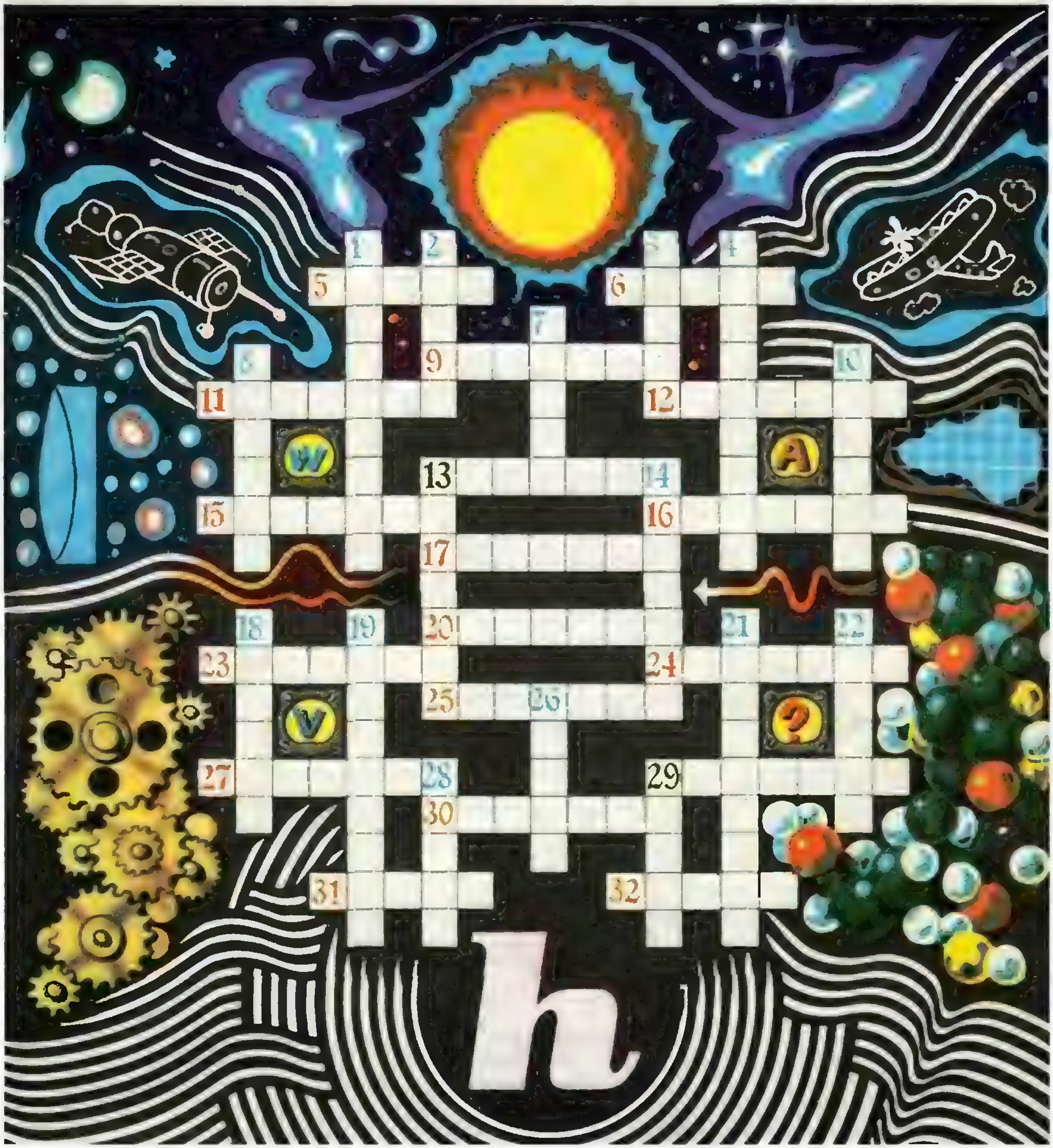
Цена 40 коп. Индекс 70465

КРОССВОРД

По горизонтали. 5. *Простой механизм.* 6. *Кристалл, разновидность углерода.* 9. *Передающая телевизионная трубка.* 11. *Синусоидальная составляющая периодического колебания сложной формы с частотой более высокой, чем основной тон.* 12. *Радиоактивный химический элемент.* 13. *Устройство для излучения и приема электромагнитных волн.* 15. *Наборная машина.* 16. *Переключательное устройство.* 17. *Вещество, состоящее из макромолекул.* 20. *Расширение трубы.* 23. *Приспособление для измерения площадей на планах, картах.* 24. *Один из первых русских летчиков.* 25. *Научное сочинение.* 27. *Топливо.* 29. *Город, в котором была построена первая в мире атомная электростанция.* 30. *Оптическая система, в которой устранена хроматическая аберрация.* 31. *Инертный газ.* 32. *Древнегреческий ученый.*

По вертикали. 1. *Электроизмерительный прибор.* 2. *Квант электромагнитного поля.* 3. *Физическая величина.* 4. *Образование полостей в жидкости в результате локального понижения давления.* 7. *Немецкий физик и инженер, создавший первую промышленную установку для ожижения воздуха.* 8. *Каучук с большой примесью серы.* 10. *Человек, прокладывающий новые пути в какой-либо сфере деятельности.* 13. *Прибор, устройство.* 14. *Существенное, неотъемлемое свойство объекта.* 18. *Мера длины в астрономии.* 19. *Газообразная оболочка Земли.* 21. *Великий русский ученый, основатель Московского университета.* 22. *Защитное вооружение из металлических пластин.* 26. *Отрицательный электрод.* 28. *Созвездие Южного полушария.* 29. *Простейшее приспособление для определения направления вертикали.*

Составил Г. Н. Плотников



НОМЕР
2

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант

2 1984

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

	В НОМЕРЕ:	**IN THIS ISSUE:**
2	*Б. В. Гнеденко.* Математическое творчество и общественный прогресс	*B. V. Gnedenko.* Mathematical research and social progress
6	*В. А. Займовский.* Трещина — враг металла	*V. A. Zaimovski.* Cracks — enemies of metals
13	*В. П. Коротихин.* Зримая прочность	*V. P. Korotikhin.* Visible solidity
16	*А. П. Веселов.* Классификация пленок	*A. P. Veselov.* Classification of spanning surfaces
	Наш календарь	**Our calendar**
22	Лев Андреевич Арцимович	Lev Andreevich Artsimovich
23	Яков Ильич Френкель	Yakov Il'ich Frenkel
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
24	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
31	Школа без доски и мела	School without blackboard or chalk
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school-children**
33	Задачи	Problems
34	*Н. А. Родина.* Такая знакомая и такая удивительная вода!	*N. A. Rodina.* So familiar and surprising — water!
	Геометрическая страничка	**Geometric page**
38	Перспектива	Perspective
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
41	Задачи М846 — М850; Ф858 — Ф862	Problems M846 — M850; P858 — P862
44	Решения задач М831 — М835; Ф842 — Ф846	Solutions M831 — M835; P842 — P846
53	**Варианты вступительных экзаменов**	**College entrance examination problems**
59	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь *(51, 52)*	**Miscellaneous** *(51, 52)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Перегрузка фигур *(3-я с. обложки)*	Overload of pieces *(3 rd cover page)*

Фотография на 1-й с. обложки — иллюстрация к статье В. П. Коротихина «Зримая прочность»

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1984

Математическое творчество и общественный прогресс

Академик АН УССР Б. В. ГНЕДЕНКО

Борис Владимирович Гнеденко

Общественный прогресс в первую очередь связан не с количеством производимых изделий, а с обилием новых идей, которые изменяют производительные силы и общественное сознание, открывают новые пути в науке и производстве. Конечно, для общественного прогресса одних новых идей недостаточно, требуется и их осуществление, материальное их воплощение в дела.

Создание нового — всегда в какой-то мере разрушение старого, уже устоявшегося. Вот почему так мучительно долго и сложно рождаются и пробивают себе путь принципиально новые концепции в науке и непривычные подходы к решению практических проблем.

Об этом превосходно рассказано в недавней статье А. Д. Александрова «Тупость и гений» (см. «Квант», № 11, с. 12—17 и № 12, с. 7—12 и 15 за 1982 г.), посвященной истории открытия неевклидовой геометрии Лобачевского. При чтении этой статьи возникает только одно пожелание, чтобы слово «тупость» читатели относили не к талантливым людям, открывавшим и открывающим новое в безбрежном океане непознанного, а к тем, кто готов категорически судить обо всем, даже о том, чего он не понимает, и закрывать дорогу всему новому и перспективному.

Чтобы человечество двигалось вперед по пути прогресса, оно нуждается в постоянном притоке смелых умов, способных увидеть в привычном и установившемся возможности совершенствования, не страшащихся отказаться от общепринятого решения во имя лучшего. Вот почему для молодежи так важна атмосфера творчества, поиска новых решений и постановки принципиально новых проблем.

* * *

Годы школьного и университетского обучения обладают неповторимой особенностью, поскольку именно тогда человек находит свои истинные увлечения, обогащает свой разум огромным объемом знаний, ставит перед собой жизненные цели и начинает испытывать свои творческие силы. Именно в это время перед молодыми людьми возникает вопрос: а что я могу добавить к тому, что гении прошлого дали человечеству? Есть ли у меня для этого способности и талант? Ответы на эти вопросы могут определить всю дальнейшую жизнь человека. Общество же крайне заинтересовано в том, чтобы его члены получали привычку к самостоятельному мышлению, к поиску нового, к творчеству, к совершенствованию уже известного.

Ряд крупных мыслителей полагает, что наличие творческих способностей является счастливой случайностью и далеко не каждый наделен ими в достаточно полной мере. Действительно, каждый из нас встречался с людьми, практически мгновенно находящими выход из положения, которое остальных ставит в тупик. В школе и в университете встречаются учащиеся, которые играючи справляются с труднейшими вопросами, тогда как для других они являются непреодолимыми препятствиями. Но только ли эти учащиеся призваны сказать новое слово в науке, или же это сделают наиболее прилежные? На самом деле здесь все не так просто.

Я неоднократно наблюдал, что многие студенты-математики, превосходно сдававшие экзамены, так и не стали математиками-творцами. И это случилось не потому, что они не прилагали к этому усилий, не стремились к тому, чтобы создать новое. Просто у них это не получилось, они как бы были лишены творческого начала. В то же время нередко студенты, не блиставшие во время экзаменов, считавшиеся далеко не знатоками той или иной области математики, стали авторами превосходных работ, создали либо новые направления математических исследований, либо доказали превосходные теоремы. В них, как оказалось, горел творческий огонь, они обладали даром сопоставления, способностью взглянуть на вещи с иной стороны, в результате чего они замечали новое и интересное там, где многие специалисты проходили мимо, не видя ничего перспективного для науки.

В одной из статей академика А. Н. Колмогорова «Наука требует горения» (Известия, 1962, 21 февраля) написано: «Талант, одаренность, скажем, в области математики, физического эксперимента, конструирования новых приборов, даны от природы не всем. Никакой упорный труд не может заменить эту природную одаренность. Он дает действительно ценные плоды в науке лишь в соединении с одаренностью, как, конечно, и одаренность окажется бесплодной без упорного и сосредоточенного труда».

Не следует думать, что математическая одаренность встречается крайне редко. Мой опыт показывает, что математически одаренных людей встречается достаточно много, только нередко они сами не верят в свою одаренность или же не находят в себе сил развивать ее упорным, направленным в определенную сторону трудом. Иногда же природная одаренность не получает развития, поскольку обладающие ею люди не имеют увлекательных проблем для самостоятельных размышлений или же не прошли школу творчества. Ведь творчеству необходимо учиться так же, как и любому делу. Недаром во все времена молодые люди стремились попасть в те университеты, в которых работали выдающиеся ученые и руководители, где выдвигались и решались значительные научные проблемы. Молодой человек, попавший в такой коллектив, узнает большое число актуальных вопросов, требующих разрешения, постигает возможные подходы к их решению, наблюдает, как другие занимаются близкими задачами и продвигаются к заветной цели. Все это приближает его к проникновению в процесс творчества, оказывает огромное стимулирующее и воспитывающее воздействие на его личность и характер.

* * *

В конце прошлого века в нашей стране прославила себя петербургская математическая школа. Ее истоки связаны с деятельностью Л. Эйлера (1707—1783), М. В. Остроградского (1801—1862) и ряда других ученых. Пожалуй, своего расцвета она достигла в период, когда в Петербургском университете работал выдающийся математик П. Л. Чебышев (1820—1896). Его научные интересы были исключительно широки — теория чисел, теория вероятностей, теория функций, теория интегрирования, теория механизмов. Он охотно делился с математической молодежью интересовавшими его проблемами. Совсем не случайно поэтому Чебышев был как бы центром притяжения для способных молодых математиков, и недаром из его окружения вышли такие замечательные исследователи, как А. М. Ляпунов (1857—1918), А. А. Марков (1856—1922) и Д. А. Граве (1863—1939). Чебышев не только предлагал проблемы, но и создавал обстановку, которая содействовала развитию способностей, интересовался результатами молодых математиков и радовался их успехам.

Мне посчастливилось провести научную юность в прославленной московской школе теории вероятностей, когда в ней в полную силу работали такие выдающиеся исследователи, как А. Н. Колмогоров (род. 1903), А. Я. Хинчин (1894—1959), Н. В. Смирнов (1900—1966), Е. Е. Слуцкий (1880—1948). В ту пору буквально каждая неделя приносила науке новые результаты, новые постановки задач. И все это активно обсуждалось на научном семинаре по теории вероятностей. Вместе с математиками в этом семинаре принимали участие биологи и физики, а также специалисты по проблемам телефонной связи. В результате такого общения теория вероятностей возникала перед начинающими математиками не только как объект чисто математического исследования, но и как орудие познания явлений природы и технических процессов. Теория вероятностей и вместе с ней и вся математика возникали перед нашим умственным взором как вечно живая, а значит, развивающаяся область знания, в которой нам самим предстоит сделать еще очень многое.

На семинаре, о котором шла речь, после каждого доклада проходило его обсуждение и выяснялось, что законченное на первый взгляд исследование на самом деле нуждается в продолжении во многих направлениях, в нем находятся вопросы, которые требуют доработок, углубленного изучения и дальнейшего развития. Коллективное обсуждение индивидуального труда приводило к убеждению, что научные исследования — не только личное дело исследователя, но и значительное общественное явление. А в связи с этим возникал вопрос: на чем сосредоточить свои усилия, какие проблемы представляют принципиальную значимость для науки и для общественного прогресса? Далее становилось ясным, как существен для личных научных успехов критически воспринимающий научный коллектив, способный указать недостатки и новые стороны проблемы, еще не затронутые исследователем, мимо которых часто может пройти исследователь-одиночка.

На семинаре постепенно выкристаллизовывался ясный взгляд на замечательные слова К. А. Тимирязева, русского естествоиспытателя последнего столетия, которые звучат примерно так: «Исследователю необходимо знать все о немногом и понемногу обо всем». Это крайне важно, поскольку знание о многом придает широту взглядам, а знание всего о немногом позволяет увидеть то, что еще не выяснено, что требует дальнейших поисков.

Чтение журнальной литературы, посещение лекций и семинаров, посвященных специальным вопросам, постепенно вырабатывало свободу обращения с определенной группой вопросов, глубокое проникновение в методы исследования, широкий взгляд на весь круг идей, а вместе с тем и некоторую неудовлетворенность уже достигнутым. Возникали новые вопросы, еще не получившие решения. Они волновали, о них думалось постоянно в любой обстановке — за столом, в театре, на концерте, в трамвае. Мысль непрерывно искала и сопоставляла то, что уже было известно, с тем, что только хотелось узнать и разрешить. Порой решение приходило быстро, и озаряло всю проблему как молния. Далее оставалось только изложить на бумаге то, что было так внезапно найдено. Порой же проходили дни, недели, месяцы, а иногда и годы, прежде чем удавалось нащупать путь решения проблемы. И чем труднее давалось решение, тем желаннее оно становилось, тем упорнее работалось. И должен сказать, что никогда мне в голову не приходила мысль о том, что время на поиски потеряно. Никогда ни об одном исследователе у меня не появлялось мысли о его тупости, если решение не давалось ему в руки сразу.

* * *

Творческие способности, как и любые другие, требуют постоянного упражнения, постоянной тренировки.

Эта тренировка начинается еще в школе, когда учащийся решает нестандартные задачи, самостоятельно ищет решение, преодолевает затруднения, вникает в познаваемое, а не бездумно запоминает его. Все это формирует характер и обостряет творческие способности. Но для того чтобы всерьез заняться творчеством, нужна проблема, над которой хочется думать, которая вызывает искреннее увлечение и внутреннее убеждение в том, что без размышлений над ней невозможно существовать, когда мысль непроизвольно возвращается к ней. При этом не только исследователь овладевает проблемой, но и проблема овладевает исследователем. И, конечно, в процессе воспитания творческих начал исключительно велика роль учителя, способного направить на путь исканий, вызвать страсть познания и поиска.

Это достигается многими путями — развитием привычки думать, а не только запоминать; воспитанием уверенности в собственных силах у каждого учащегося; решением нестандартных задач, требующих работы мысли; показом того, как работали выдающиеся ученые прошлого; созданием атмосферы поиска, а также многими другими приемами. В университете эта традиция усиливается чтением специальных курсов и участием в специальных семинарах, позволяющих студентам вплотную подойти к тематике современных исследований и узнать об очередных проблемах в определенной области знания. В зависимости от личных творческих задатков молодые люди быстрее или медленнее подходят к самостоятельному творчеству. Случается, что некоторые лица отходят от поисков нового, поскольку их больше привлекают другие формы деятельности — практическая работа, популяризация, накопление знаний, организационная или общественная деятельность. Однако мы знаем, что каждый год в ведущих вузах страны выделяются студенты, которые увлекаются научными поисками и получают самостоятельные результаты, достойные опубликования. Конечно, далеко не каждый становится ученым самого первого ранга. Но, как правило, молодые люди, проявившие себя в студенческие годы и получившие тогда самостоятельные научные результаты, остаются верными научным исканиям и вносят в науку свой полезный вклад, позволяющий ей двигаться по пути прогресса.

* * *

Несомненно, что в творчестве приходится считаться с возможностью различных склонностей у молодых людей: одних интересует задача построения общих теорий; других волнуют поиски наиболее общих условий, в которых действует та или иная теорема; третьи стремятся применить свои математические знания для решения задач практики; четвертые же считают, что их более всего занимает приведение полученных результатов в стройную систему; пятые подвергают направления математических исследований и сами основные понятия углубленному философскому анализу и затем объединяют различные направления математической мысли воедино.

Особенно существенными для общественного прогресса мне представляются способности тех исследователей, которые умеют в задачах практики находить источники для развития теории и в абстрактных построениях выявлять методы для исследования практических ситуаций.

Творческие способности, умение создавать новое, сопоставлять различные ситуации и выводить из этого сопоставления неизвестные ранее следствия представляют собой не просто личное богатство, но и огромную общественную ценность.

Молодые поколения должны знать больше, шире и глубже и приобретенные знания превращать в дела, а для этого нужно приучаться систематически познавать и творчески мыслить.

Трещина — враг металла

Доктор физико-математических наук
В. А. ЗАЙМОВСКИЙ

Проблема разрушения металлов касается каждого из нас, поскольку из металла сделаны автомобили и поезда, корабли и самолеты, мосты и рельсы, а также многие другие изделия и детали, от надежной работы которых зависит наша безопасность. Разрушение маленькой детальки рулевого управления автомобиля может иметь весьма неприятные последствия, а если разрушается рельс или обрушивается мост, если разламывается корпус корабля или самолета, то последствия могут быть трагичными.

Самым «коварным» видом разрушения металлов и других конструкционных материалов является так называемое хрупкое разрушение. Особенность его в том, что оно «подкрадывается» незаметно, не предупреждая о своем приближении вплоть до самого критического момента. Когда же этот момент наступает, то чаще всего уже ничего нельзя поделать. Процесс разрушения развивается с огромной скоростью и остановить его нельзя. Именно хрупкое разрушение стало причиной гибели многих самолетов и кораблей, причиной катастроф, связанных с разрушением мостов, газопроводов и т. п. Количество подобных аварийных разрушений крупных конструкций исчисляется тысячами, и ущерб от них огромен.

А непосредственным «исполнителем приговора», инструментом разрушения являются хрупкие трещины.

Трещина Гриффитса

Роль трещин в процессах хрупкого разрушения первым понял английский ученый и инженер А. Гриффитс в начале 20-х годов нашего столетия.

В те годы Гриффитс работал инженером в авиационном исследовательском центре и занимался исследованиями прочности стекла. Стекло не использовалось в авиастроении в качестве конструкционного материала и нужно было Гриффитсу как модель, на которой можно было получить хрупкое разрушение. Руководители центра не одобряли «увлечения» Гриффитса, и когда горелка, на которой он плавил стекло,

16 января 1943 года американский танкер «Шенектеди» внезапно разломился на две части прямо в порту. Трещина прошла почти мгновенно через палубу и по обоим бортам до подводной части.

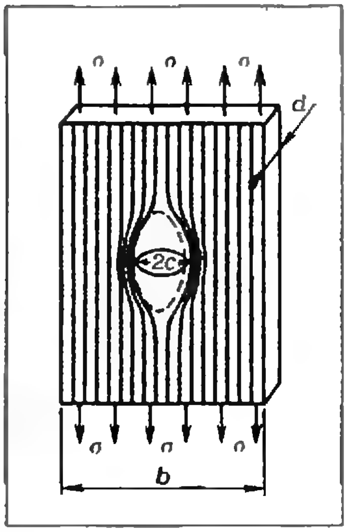


Рис. 1. Пластина с эллиптической трещиной.

стала причиной пожара в лаборатории, его опыты были запрещены, и сам он переведен на другую работу. Но все же Гриффитс успел получить результаты, на которых базируется вся современная физическая теория хрупкого разрушения.

Чтобы понять суть теории Гриффитса, нужно вспомнить, как происходит деформация твердого тела. При деформации, как известно, возникает сила упругости F. Напряжение σ равно отношению величины этой силы к площади S поперечного сечения тела: $\sigma = F/S$. С другой стороны, напряжение определяется величиной относительной деформации тела $\varepsilon = \Delta l/l$ (Δl — изменение длины тела, l — начальная длина). Для каждого материала существует предельное значение деформации $\varepsilon_{\max}$, которую он может выдержать, и соответствующее значение напряжения $\sigma_{\text{пр}}$ (предел прочности) (см. учебник «Физика 9»).

Гриффитс установил, что прочность тонких стеклянных нитей может быть в сотни раз большей, чем прочность обычного (скажем, оконного) стекла. Он предположил, что в массивных стеклянных изделиях есть очень мелкие, невидимые глазу трещины, которые резко уменьшают их прочность.

Хорошо известно, что любое отверстие в деформированном теле вызывает концентрацию напряжения. Картину напряженного состояния можно представить наглядно с помощью «силовых» линий, густота которых пропорциональна напряжению в материале. Если в теле есть отверстие, то силовые линии обходят его (ведь пустота не может нести нагрузку) и сгущаются у его краев (рисунок 1), где материал оказывается перегруженным. Среднее напряжение σ в сечении при этом не меняется, так как иначе нарушилось бы условие равновесия тела.

Величина «концентрированного» напряжения зависит от формы отверстия, его размера и радиуса кривизны его краев. Например, у краев отверстия, имеющего в сечении форму эллипса, напряжение возрастает до величины

$$\sigma_{\text{конц}} = \alpha\sigma,$$

где σ — напряжение вдали от отверстия, а α — так называемый коэффициент концентрации напряжения. Значение α определяется длиной отверстия и радиусом кривизны у края. Как показывают расчеты, для эллиптического отверстия

$$\alpha = 1 + 2\sqrt{c/\varrho},$$

где c — половина длины отверстия, ϱ — радиус кривизны у края.

Если роль концентратора напряжения играет трещина, то положение резко ухудшается, так как ее вершина может быть очень острой. Предельный радиус кривизны в вершине «атомно острой» трещины равен межатомному расстоянию, то есть $\sim 10^{-4}$ мкм. Такая трещина при длине в несколько микрон (когда ее с трудом можно увидеть в сильный оптический микроскоп) приводит к увеличению напряжения у ее края в сотни раз, что и объясняет наблюдаемое снижение прочности.

Гриффитс, однако, использовал в своем анализе другой подход. Он обратил внимание не на перегруженные, а наоборот — на недогруженные участки материала вблизи трещины. Картина распределения силовых линий на рисунке 1 показывает, что не только само отверстие не участвует в работе материала, но «отлынивают» от работы и некоторые объемы выше и ниже отверстия. Иными словами, при появлении в деформированном теле трещины одни участки частично разгружаются и передают свои обязанности другим участкам, расположенным левее и правее трещины. Условно можно рассматривать эту ситуацию так, как будто произошла полная разгрузка некоторого объема (эффективного), размеры которого сопоставимы с длиной трещины (на рисунке 1 граница эффективного объема показана красной штриховой линией).

Упругая энергия, которая высвобождается при разгрузке эффективного объема, расходуется на образование новых поверхностей — «берегов» трещины (ведь поверхность обладает повышенной энергией, а разрушение образца увеличит его суммарную поверхность). Как показывают расчеты (они приведены в конце статьи в Приложении), поверхностная энергия линейно увеличивается с ростом трещины, а упругая энергия, высвобождающаяся при увеличении эффективного объема, пропорциональна квадрату размера трещины.

На рисунке 2 представлено графически изменение энергии деформированной пластины в зависимости от длины трещины. Как видно из рисунка, существует некоторый критический размер трещины ($c_{\text{кр}}$), при котором энергия деформированного тела максимальна. При деформации образца (при заданном напряжении) трещины, длина которых меньше $2c_{\text{кр}}$, расти не будут, так как это привело бы к повышению энергии пластины. Если же в образце есть трещина длины $2c > 2c_{\text{кр}}$, то ее рост будет выгодным — энергия образца будет понижаться.

Гриффитс получил соотношение, связывающее критический размер трещины ($c_{\text{кр}}$) и напряжение σ в образце (см. Приложение):

$$c_{\text{кр}} = \frac{2E\gamma_s}{\pi\sigma^2},$$

где γ_s — поверхностная энергия, приходящаяся на единицу площади (у твердых тел эта энергия значительно больше, чем у жидкостей).

Итак, если известно напряжение, возникающее в образце при данной деформации, можно указать, при каком критическом размере трещины материал образца неминуемо разрушится. Переписав гриффитсовское соотношение в виде

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi c}} \approx \sqrt{\frac{E\gamma_s}{c}} = \sigma_{\text{кр}},$$

мы выясним другую сторону вопроса. Если в образце есть трещина длины $2c$, то мы можем найти из этой формулы критическое значение напряжения $\sigma_{\text{кр}}$ и, соответственно, то пре-

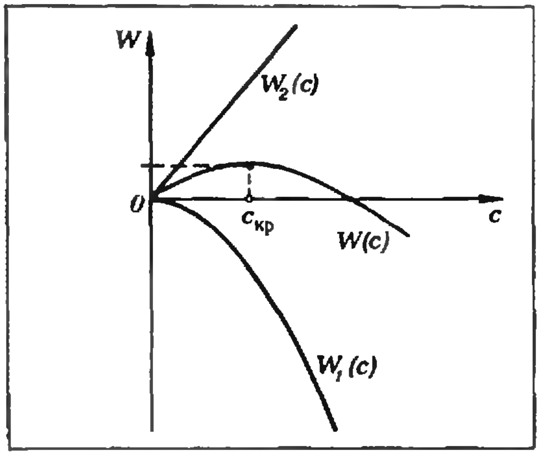


Рис. 2. График изменения энергии деформированной пластины в зависимости от размера трещины (красная кривая); $W_1(c)$ — упругая энергия (она взята отрицательной, так как характеризует уменьшение общей энергии деформации пластины); $W_2(c)$ — поверхностная энергия.

дельное значение деформации, с которого начинается неотвратимое разрушение материала образца. При $\sigma > \sigma_{кр}$ трещина начнет расти, то есть будет увеличиваться c. Из формулы видно, что с ростом c все меньшее значение σ становится критическим для данного материала. Фактически это означает, что после достижения критического напряжения окончательное разрушение неизбежно даже в случае уменьшения или полного снятия деформации.

Проверяя полученную им формулу для стекла, Гриффитс получил хорошее совпадение расчетных данных с экспериментальными. Однако для металлов, как было выяснено позднее, формула Гриффитса давала очень большую ошибку. Причину этого несоответствия установил венгерский физик Е. Орован. Оказалось, что при образовании трещины в металле в тонком слое, прилегающем к берегам трещины, обязательно имеются, пусть небольшие, остаточные деформации (именно поэтому осколки разрушенного металла не удается совместить так же точно, как это можно сделать с осколками стеклянного стакана).

Однако это не противоречит идее баланса энергии, которую развил Гриффитс. Просто в расчетах нужно учесть, что часть упругой энергии, высвобождающейся при разгрузке эффективного объема, затрачивается на пластическую деформацию слоя материала, прилегающего к берегам трещины. Это приводит к тому, что в формуле Гриффитса к величине γ_s добавляется слагаемое γ_p — энергия пластической деформации, приходящаяся на единицу площади свободной поверхности трещины:

$$\sigma_{кр} \approx \sqrt{\frac{E(\gamma_s + \gamma_p)}{c}}.$$

Эта формула (ее называют формулой Гриффитса — Орована) прекрасно описывает реальную ситуацию при хрупком разрушении металлов.

Посмотрите на фотографию на с.6. Так выглядит при большом увеличении (в несколько тысяч раз) поверхность разрушения стали. Отчетливо видны «холмы», «долины» и другие особенности рельефа поверхности. Это и есть следы пластической деформации, сопровождающей рост трещины в металле. Анализ подобных фотографий, проводимый специальными методами, позволяет восстаиовить подробности поведения трещины при разрушении металла.

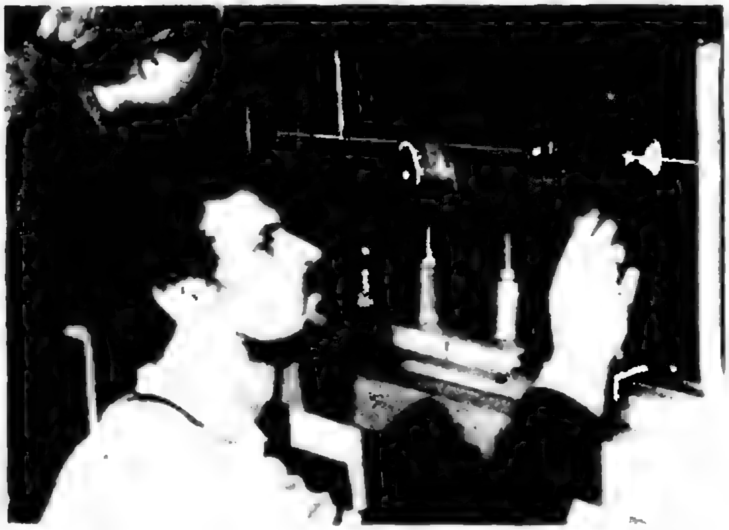
Итак, основные выводы теории Гриффитса сводятся к следующему. Во-первых, можно указать размеры трещин, с которыми материал еще может надежно работать при заданном напряжении. Во-вторых, после достижения критического соотношения между напряжением и длиной трещины процесс дальнейшего роста трещины становится неуправляемым, лавинным. Вершина трещины очень быстро разгоняется до огромных скоростей*).

Предельная скорость трещины составляет примерно половину скорости звука в данном материале. Для стали экспериментально зафиксированы скорости движения трещин около 2,5 км/с, или ~10 000 км/ч! Интересно, что трещина может развивать такую огромную скорость за одну тысячную долю секунды, то есть ускорение на этапе разгона — порядка 10^6 м/с^2. Примерно так и произошло разрушение газопровода, результаты которого вы видите на фотографии на с. 11, — трещина за считанные секунды пробежала несколько миль.

Конечно, если рабочее напряжение в конструкции мало́, то критическая длина трещины будет очень большой. Так, после разрушения одного из мостов было обнаружено, что перед наступлением катастрофы в нем была трещина длиной 3 м. Она росла медленно, в течение, может быть, многих лет, о чем свидетельствуют окисленная поверхность ее берегов. Именно это позволяет легко отличить «докритическую» трещину от «свежего» излома. Но чаще приходится иметь дело с трещинами значительно меньшей длины, и для их обнаружения применяют специальные методы.

---

*) Конечно, понятия скорости и ускорения трещины условны, так как трещина не является материальным телом. Речь идет о движении ее вершины



В металлофизической лаборатории технологического факультета Московского института стали и сплавов студенты исследуют детали поверхности разрушения металла с помощью лазерного луча.

Усталость и живучесть металлов

Как же возникают и как растут трещины до наступления критического момента? Один из самых распространенных в технике случаев связан с так называемой усталостью металлов. Этим термином определяют процессы постепенного накопления повреждений и роста трещин при периодически меняющейся деформации материала. Именно такие деформации возникают, например, на вращающемся изогнутом валу. В той точке вала, которая в данный момент находится внизу (точка *А* на рисунке 3, *а*), материал растянут. Но когда эта точка окажется наверху, она попадет в зону сжатия. Вращение приводит к многократному повторению этой ситуации; деформация, а следовательно, и напряжение в окрестности точки *А* будут со временем меняться так, как показано на рисунке 3, *б*.

Подобных деталей вокруг нас огромное множество. Это и коленчатый вал двигателя, и оси железнодорожных вагонов, и маховики, и многие-многие другие. Усталость неизбежно возникает в «работе» любого моста: мост всегда деформирован в результате действия силы тяжести, а когда по нему проходит поезд (или машина), деформация возрастает, затем уменьшается до исходного уровня, и т. д.

Появление усталостных трещин обусловлено своеобразными процессами пластической деформации, которые охватывают не весь объем материала, а сосредоточены в самых «слабых» точках детали — там, где есть острые углы, отверстия и т. п., около которых создается концентрированное напряжение. Появляющаяся трещина сама становится эффективным концентратором напряжения. Постепенный рост трещины увеличивает концентрацию напряжения, и скорость ее роста увеличивается. В результате рано или поздно длина трещины достигнет критического значения, определяемого соотношением Гриффитса — Орована. За этим наступает быстрое окончательное разрушение.

Полный срок службы изделия можно разделить на две части: время до появления трещины такого размера,

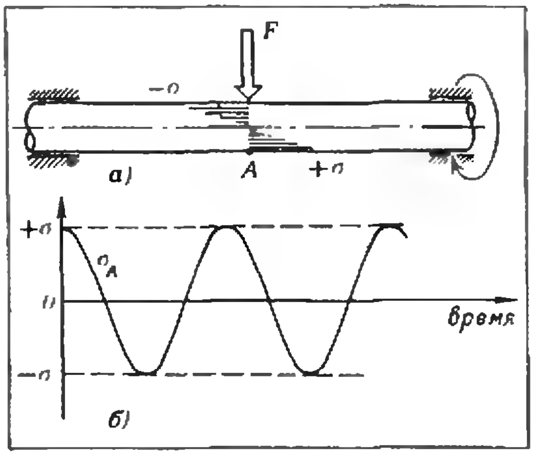


Рис. 3. Изменение напряжения при вращении деформированного вала.

Разрушение магистрального газопровода.

что ее уже можно обнаружить каким-либо методом, и время от этого момента до окончательного разрушения. Соотношение между этими двумя составляющими полной долговечности изделия зависит от свойств самого материала и от многих внешних факторов, но, к счастью, второй период чаще всего растягивается на достаточно большой срок.

Способность материала работать при наличии растущей в нем трещины называется живучестью. Конечно, точность определения продолжительности периода живучести зависит от чувствительности метода, который применяют для обнаружения трещин.

На железной дороге конкретное воплощение этой ситуации каждый пассажнр может наблюдать из окна вагона. Многие, вероятно, видели стоящие на путях вагоны-дефектоскопы, но пока еще контроль рельсов в основном осуществляется вручную. Если вы много путешествуете по железной дороге, то, возможно, видели и такую картину: вдоль пути движется рабочий в наушниках, толкая перед собой тележку на колесах; прибор на тележке — ультразвуковой дефектоскоп. Рабочий обходит свой участок дороги раз в 10 дней, и если в проверяемом рельсе имеется трещина размером больше копеечной монеты, в наушниках прозвучит предостерегающий сигнал. Рельс будет заменен новым, и угроза катастрофы миновала.

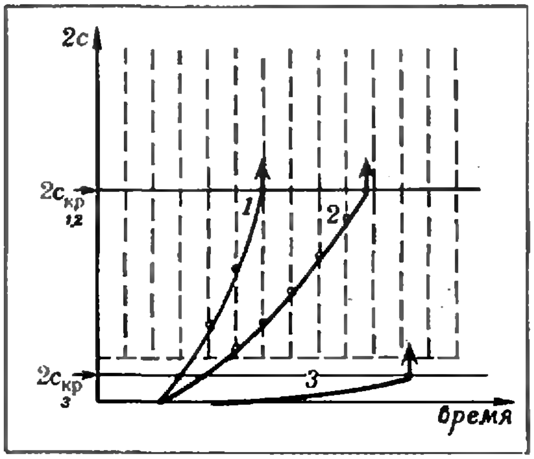


Рис. 4. Зависимость длины усталостной трещины от времени для трех материалов.

Теперь оценим пригодность для изготовления рельсов трех различных материалов. Предположим, что для двух из них критическая длина трещины ($2c_{кр}$) одинакова, а для третьего — значительно меньше. Усталостные трещины в этих трех материалах могут расти с существенно разными скоростями. На рисунке 4 рост длины трещины для каждого материала показан красными кривыми. В нашем случае материал *2* имеет гораздо бо́льшую живучесть, чем материал *1*. Штриховая горизонтальная линия на рисунке характеризует минимальную длину трещины, которая может быть обнаружена данным методом, а вертикальные штриховые линии отмечают периодичность контроля. Как видно из рисунка, в первом материале трещина может быть обнаружена при двух проверках, а во втором — при пяти.

Ясно, какой из этих двух материалов будет более надежным. Ведь обходчик — это живой человек, который может быть в плохой форме или отвлечься в неподходящий момент и т. д. Даже если сделать скидку на это, дефектный рельс из второго материала будет заменен прежде, чем трещина достигнет критического размера и произойдет непоправимое. То, что наверняка можно сделать с пятой попытки, не всегда делается со второй!

Что касается материала *3*, то он обладает великолепной живучестью. Но пока чувствительность дефектоскопа, используемого для контроля, не может быть повышена, этот материал должен быть забракован. Хотя трещина в нем растет очень медленно, она достигнет критической длины и разорвет рельс, даже не предупредив дефектоскописта о своем присутствии.

Повышение чувствительности дефектоскопа — задача технически разрешимая. Но это привело бы к замедлению процесса контроля или сделало бы аппаратуру более громоздкой, так что обходчик уже не смог бы действовать в одиночку. Можно и чаще делать проверки, но ведь надо когда-то пропускать и сами поезда и, кроме того, возможное число обходчиков не беспредельно.

* * *

Изучение законов образования и движения трещин необходимо — знание этих законов позволяет разрабатывать способы защиты металлов от разрушения. И не случайно становятся все более редкими аварии и катастрофы, связанные с коварным хрупким разрушением.

Приложение

Рассмотрим трещину, образовавшуюся в пластине толщины d. Будем, как и Гриффитс, считать, что если трещина имеет эллиптическую форму — такую, как на рисунке 1, — то эффективный объем ограничен (в плоскости пластины) эллипсом с полуосями c и $2c$ и равен $2\pi c^2 d$. Энергия, запасенная в пластине вследствие ее деформации, равна работе, которую совершила упругая сила F при перемещении всех частей тела на расстояние Δl (Δl — абсолютная деформация тела):

$$A = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l$$

$\left(\frac{1}{2} F\right.$ — среднее значение упругой силы, которая в процессе деформации линейно увеличивалась от 0 до $\left.F\right)$. Энергия, приходящаяся на единицу объема, — это

$$u = \frac{A}{Sl} = \frac{1}{2} \frac{F}{S} \cdot \frac{\Delta l}{l}.$$

Но F/S — это напряжение σ в пластине, а $\Delta l/l$ — относительная деформация ε. Если деформация упругая, то справедлив закон Гука и

$$\sigma = \varepsilon E,$$

где E — модуль упругости материала пластины.

Итак, энергия упругой деформации, приходящаяся на единицу объема пластины, —

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon \sigma = \frac{\sigma^2}{2E},$$

и, следовательно, при разгрузке эффективного объема $2\pi c^2 d$ выделяется энергия

$$W_1 = \frac{\pi \sigma^2 c^2 d}{E}.$$

При образовании трещины длины $2c$ вскрылись две новые поверхности, каждая площадью $2cd$ (кривизной берегов трещины пренебрегаем). Энергия, которая была затрачена на образование этих поверхностей, равна

$$W_2 = 4cd\gamma_s$$

(γ_s — поверхностная энергия, приходящаяся на единицу площади).

Таким образом, появление трещины изменило энергию деформированной пластины на величину

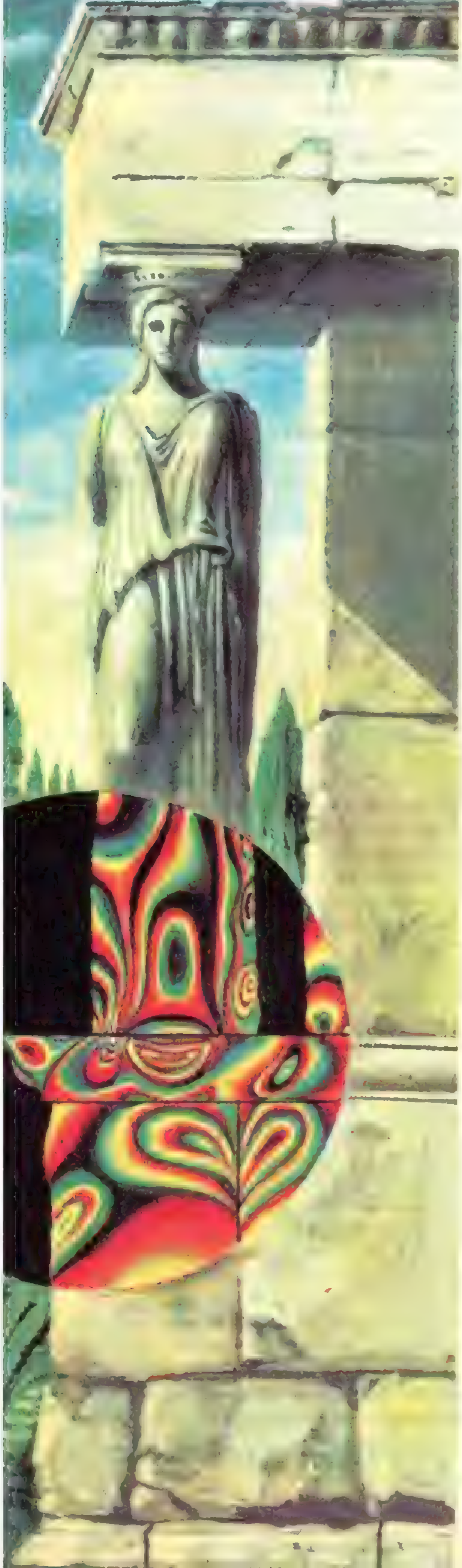
$$W = W_2 - W_1 = 4cd\gamma_s - \frac{\pi \sigma^2 c^2 d}{E}.$$

Приведенный на рисунке 2 график зависимости $W(c)$ имеет максимум в точке с абсциссой $c = c_{кр}$. В этой точке производная $\frac{dW}{dc}$ обращается в нуль:

$$\frac{dW}{dc} = 4d\gamma_s - \frac{2\pi \sigma^2 cd}{E} = 0,$$

и из этого условия мы находим $c_{кр}$:

$$c_{кр} = \frac{2E\gamma_s}{\pi \sigma^2}.$$



Зримая прочность

В. П. КОРОТИХИН

Во все времена человек заботился о прочности того, что создавалось его руками. Однако у древних строителей и конструкторов представления о природе прочности были в основном интуитивные. Новые здания, например, проектировались почти всегда по типу старых, проверенных, и обязательно с большим запасом прочности, который видели в непомерной массивности колонн, арок, стен. Но и толстые стены бывают непрочными. Наглядный тому пример — величественные развалины мечети Биби-Ханым в Самарканде, разрушившейся через 30 лет после окончания строительства. И таких случаев было немало.

В наше время катастрофические разрушения в строительстве и технике происходят гораздо реже, чем даже 100 лет назад. А ведь в XX веке создано и создается новых машин, приборов и сооружений несоизмеримо больше, чем во все прошлые времена. При этом сегодняшняя техника не чета технике прошлого. Современные сооружения должны, зачастую, выдерживать поистине фантастические механические напряжения. Как удается избежать ошибок, сделать верный прогноз прочности будущей конструкции? Ответить на этот вопрос в нескольких словах невозможно. Для этого существует целая наука — механика деформируемого твердого тела, которая включает в себя математическую теорию упругости, теории пластичности, ползучести, разрушения, устойчивости, волновых процессов и т. д.

Существуют и различные экспериментальные методы исследования деформаций в телах. Экспериментальными методами решаются наиболее сложные задачи, не поддающиеся пока что теоретическому анализу. Об одном из них, по праву считающемся самым наглядным и универсальным, и пойдет речь.

Модель панели типового жилого дома, исследуемая методом фотоупругости. На экране видна четкая интерференционная картина, по которой можно определить распределение деформаций и напряжений, возникающих при нагрузке (нагрузка приложена в четырех точках).

Метод фотоупругости, или поляризационно-оптический метод, позволяет исследователям увидеть сам процесс возникновения в конструкции деформаций и вызванных ими напряжений.

Идея метода фотоупругости была разработана еще в прошлом веке. В 1815 году шотландский физик Дейвид Брюстер обнаружил, что при освещении некоторых прозрачных веществ, подвергнутых деформации, поляризованным светом на экране, установленном позади освещаемого образца, наблюдается яркая интерференционная картина. Брюстер предположил, что расположение и конфигурация интерференционных полос определяются теми деформациями, которые возникают в образце в результате действия нагрузки.

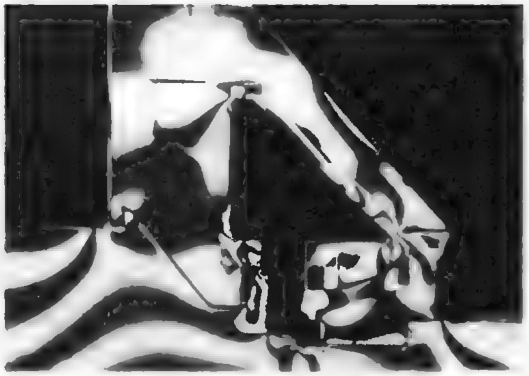
Позднее в работах Максвелла, Френеля и других ученых была установлена точная математическая зависимость между оптическими явлениями, наблюдаемыми в деформированных прозрачных материалах, и существующими в них механическими деформациями и напряжениями. Таким образом, появилась возможность «расшифровывать» картину полос, переводить ее в картину распределения деформаций и напряжений в исследуемом объекте. А таким объектом может быть модель моста, стены здания, участка плотины, переборки корабля и т. п.

Однако реализовать идею метода фотоупругости в XIX веке было очень сложно. Главная помеха заключалась в том, что не было хорошего материала для моделей. Приходилось работать со стеклом, а изготавливать из стекла модели — занятие весьма трудоемкое и дорогостоящее. Когда узнаешь, что в 1911 году французский ученый Менаже исследовал прочность арочного моста на ажурной стеклянной модели, хочется, образно говоря, снять шляпу перед этой «старинной», «ручной» работой.

Модели первой плотины Днепрогэса были сделаны из желатина. Неудобств здесь было много. Во-первых, изготовить можно было только сильно упрощенные плоские модели поперечных сечений плотины; во-вторых, чтобы эти модели сохранялись плоскими, их приходилось помещать между двумя стеклами, и т. д. Точность такого эксперимента была невысокой.

По-настоящему широкое применение метод фотоупругости получил с тридцатых годов нашего столетия, когда на смену стеклу и желатину пришел целлулоид. В наше время основными материалами для моделей служат фенолформальдегидные и эпоксидные смолы, которые, помимо высокой прочности, простоты обработки, обладают еще замечательным свойством «замораживать» деформации. Кавычки, как вы убедитесь, здесь вполне уместны. При замораживании сделанную из смолы модель помещают в шкаф-термостат и плавно поднимают температуру до 140 °С. После этого модель нагружают и, не снимая нагрузки, начинают понижать температуру в термостате. Когда температура становится близка к комнатной, нагрузку убирают, а саму модель вынимают из термостата. Эффект получается такой же, как если бы мы сжали пропитанную водой губку и, не разжимая, поместили ее на мороз. Когда вода замерзнет, можно снять зажимы — отпечаток от них останется. Вот так же в модели остается картина деформаций (только физика здесь иная, связанная с переориентацией молекулярной структуры полимера). На обложке журнала вы видите замороженную картину полос в модели напорного водовода. Картина соответствует распределению деформаций и напряжений, возникающих под дей-

Модель части плотины Днестровской ГЭС.



Картина полос в срезе модели плотины Днестровской ГЭС.

ствием внутреннего давления. В верхней части отверстия видна трещина.

До появления способа замораживания все исследования в фотоупругости проводились только на плоских моделях. Объясняется это тем, что картина интерференционных полос, возникающая при прохождении поляризованного света через модель, зависит не только от деформаций, но и от толщины модели. Для того чтобы избежать лишних измерений и громоздких вычислений, связанных с учетом изменения толщины, изготавливали только плоские модели. Способ замораживания деформаций дает возможность брать для исследования пространственную модель конструкции, сооружения, например — плотины.

Из твердой эпоксидной смолы делают почти полную уменьшенную копию плотины — с машинным залом, водоводами и прочими существенными деталями. Ее устанавливают в термостате, разогревают и нагружают. При этом нагрузки подбираются так, чтобы они имитировали рабочее состояние плотины. После остывания модель вынимают из термостата. Из нее выпиливают плоские кусочки, так называемые срезы, которые и исследуют. Так можно изучить все закоулки плотины и составить полную картину деформаций и напряжений, которые будут возникать в плотине в рабочем режиме. Важность такой информации очевидна.

Много внимания уделяют ученые-механики задачам прочности различных конструкций и сооружений при импульсных воздействиях. Такие нагрузки как удар, взрыв, сейсмические волны могут за очень короткий промежуток времени наделать немало бед. И здесь метод фотоупругости дает возможность предусмотреть многие неприятные последствия. В сочетании с методами высокоскоростной фотографии он позволяет исследовать динамику поведения объекта при кратковременных мощных нагрузках.

Новые материалы на основе эпоксидных смол дают возможность применять метод фотоупругости не только на моделях, но и непосредственно на конструкциях. Достигается это с помощью специальных покрытий, которые наносятся на поверхность исследуемого участка объекта и деформируются вместе с ним. Это дает возможность проводить измерения в заводских и полевых условиях, в жидких, химически агрессивных и взрывоопасных средах. Особенно широко покрытия применяются в задачах авиационной и металлообрабатывающей промышленностях.

Во время наземных испытаний новой конструкции самолета покрытия наносятся на те участки двигателя, фюзеляжа, крыла, которые особенно интересуют конструкторов машины. При этом требуется только одно — чтобы данное место было открытым для прямого наблюдения картины полос, возникающих в покрытии (их наблюдают в отраженном свете). Результаты такого «натурного» эксперимента всегда представляют большой практический интерес.

Подобных примеров можно привести очень много. Круг задач, охватываемых методом фотоупругости, чрезвычайно велик. Это задачи атомной энергетики и гидротехнического строительства, космической и авиационной техники, металлургии, машиностроения, горного дела...

Совершенствование метода, разработка новых материалов для моделей и покрытий расширяют его возможности и область применения.

Классификация пленок

Кандидат физико-математических наук
А. П. ВЕСЕЛОВ

Главные действующие лица нашего рассказа — пленки — воображаемые организмы особого рода, живущие в нашем трехмерном мире и способные к удивительным превращениям. Читатель может себе представлять *пленку* как гибкое, плоское (то есть не имеющее толщины) амебообразное существо ограниченных размеров с подвижной границей, которая представляет собой одну замкнутую линию; вблизи каждой внутренней (то есть не граничной) точки пленка устроена как кусочек плоскости, возможно, изогнутый. При своей жизнедеятельности пленка может не только *непрерывно деформироваться* (то есть изгибаться, растягиваться и сжиматься без разрывов и склеек), но и претерпевать более радикальное превращение — *разрыв-срастание*: при этом превращении пленка временно разрывается по дуге (начинающейся и заканчивающейся на границе), как-то растягивается, сжимается и извивается, а затем срастается, притом непременно так, что те точки, которые были оторваны друг от друга, снова соединяются в прежнем порядке. Разрыв-срастание, таким образом, не меняет внутреннего строения пленки, однако позволяет принципиально изменить ее расположение в пространстве, — например, заузлить или распутать ее. Если вам приходилось разматывать леску из спутанного клубка, то вы можете себе представить, насколько облегчилась бы ваша задача, обладай леска указанным выше свойством. О превращениях пленок мы еще поговорим позже, а сейчас познакомим читателя с некоторыми представителями класса пленок.

Простейший из них (рис. 1) отвечает виду реальной амебы, но вполне может принимать форму треугольника, квадрата и даже пятиконечной звезды. Он имеет специальное название — *диск*.

Пленка, изображенная на рисунке 2, называется по довольно понятным причинам *ручкой*, хотя больше напоминает не отбитую ручку чашки, а велосипедную камеру с небольшой дыркой. Впрочем, форма ее может меняться до неузнаваемости (рис. 3).

Следующая пленка (рис. 4) заслуживает того, чтобы о ней поговорить побольше. Мы ее будем называть *амебиус*, в честь ее первооткрывателя А. Ф. Мёбиуса, хотя чаще ее называют *листом Мёбиуса*.

Август Фердинанд Мёбиус (1790—1868) был одним из ведущих геометров своего времени. Работая директором одной из немецких обсерваторий и отдавая много времени занятиям астрономией, он тем не менее на протяжении многих лет размышлял о свойствах объектов типа наших пленок, в частности, изображенного на рисунке 4 листа Мёбиуса. Лишь в преклонном возрасте Мёбиус решился представить результаты своего труда на суд Парижской Академии, однако столь нетрадиционная тематика его «Мемуара об односторонних поверхностях» привела к тому, что рукопись пылилась на полках Академии до тех пор, пока автор не решил издать ее на свои средства отдельной книгой. Примерно в то же время появились работы, посвященные тем же вопросам, другого немецкого астронома И. Б. Листинга (1808—1882), получившего свои результаты независимо от А. Ф. Мёбиуса.

Читателю рекомендуется немедленно изготовить макет амебиуса, для чего необходимо вырезать из бумаги полоску длины около 20 см и ширины 4 см. Проведя посередине одной из ее сторон вдоль всей длины синюю линию, и, аналогично, с другой стороны — красную линию, нужно затем склеить концы полоски, предварительно перекрутив их на 180° (рис. 5). Обратим сразу внимание на следующее примечательное обстоятельство: синяя линия в месте склейки переходит в красную и наоборот, то есть теперь обе линии находятся на одной стороне поверхности. Амебиус имеет лишь одну сторону! В отличие от исходной полоски, где были две стороны (условно: синяя и красная), у амёбиуса всю поверхность можно обойти, не переходя через край.

Совершим теперь варварский акт: разрежем нашего амебиуса ножницами вдоль синей-красной линии. Ну как? Признайтесь — этого вы сов-

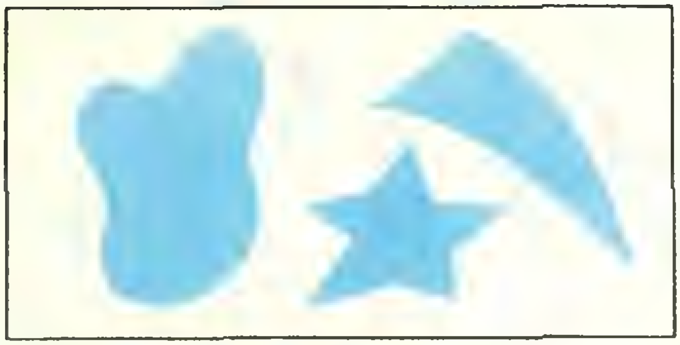


Рис. 1.

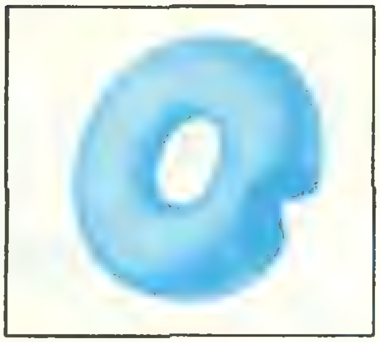


Рис. 2.

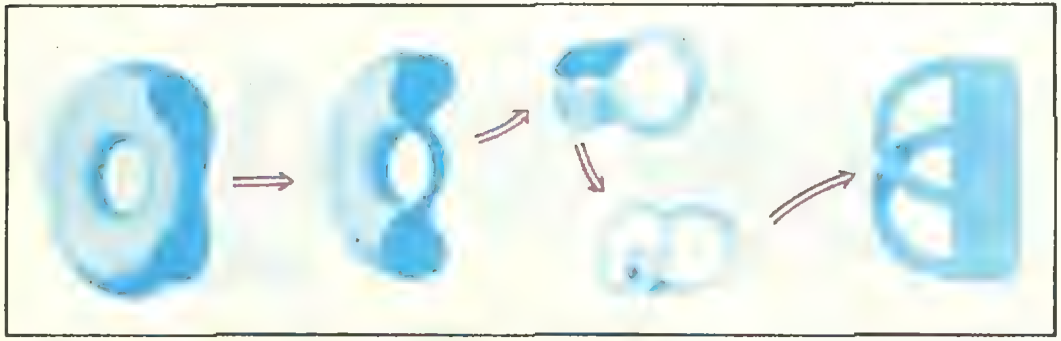


Рис. 3.

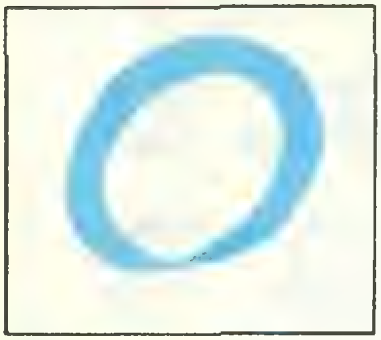


Рис. 4.

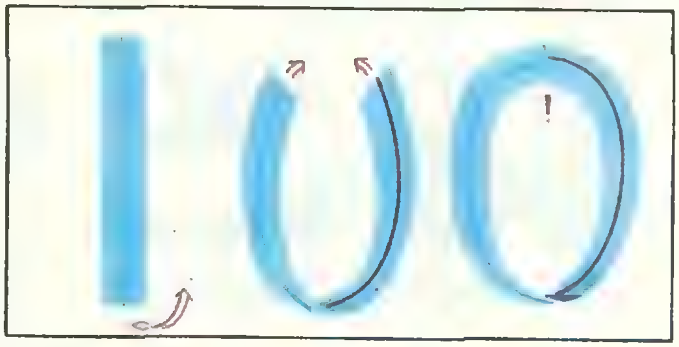


Рис. 5.

сем не ждали (если не проделывали эту операцию раньше). Амебиус не распался на два, но разрез подействовал на него губительно: граница новой поверхности состоит уже из двух замкнутых кривых (проверьте!), и поэтому полученная поверхность не отвечает никакой пленке в нашем смысле. Кроме того, у нее уже две стороны. Именно поэтому повторно аналогичная процедура не приведет к столь поразительному результату, хотя вряд ли читатель сможет предугадать его.

Однако оставим подобные жестокие операции и посмотрим, что происходит с амебиусом в естественных условиях. Прежде всего, благодаря способности к разрыву-срастанию, амебиус может принять форму ленты, перекрученной на любое нечетное число полуоборотов (рис. 6). (Отметим, что полоска, скрученная на целое число оборотов, не отвечает никакой пленке, так как имеет границей две замкнутые кривые.) В самом деле, порвавшись поперек, он может раскрутиться на любое целое число оборотов, а затем срастись на старом месте (проследите это на полоске бумаги). Точно так же амебиус может завязываться в любой узел и снова развязываться (рис. 6).

Для таких превращений не потребовалось бы никаких временных разрывов, живи амебиус в четырехмерном пространстве. Четвертое измерение позволяет, помимо известного из научно-фантастической литературы выхода из полностью закрытой комнаты, свободно развязывать узлы и раскручивать перекрученные пленки. Таким образом, способность

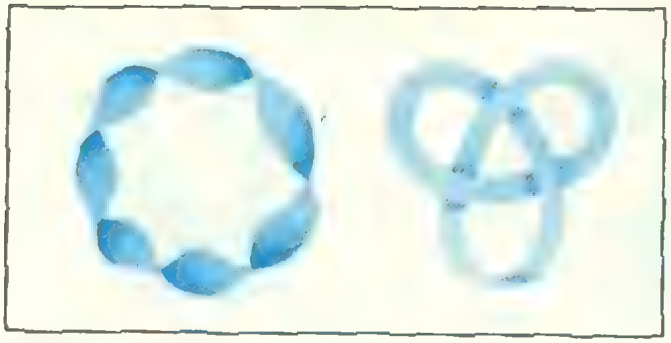


Рис. 6.

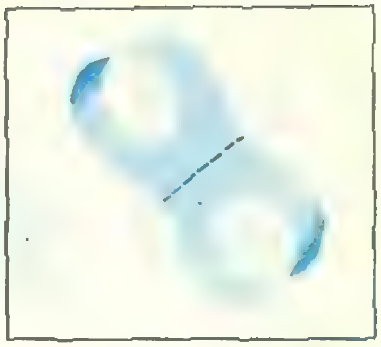


Рис. 7.

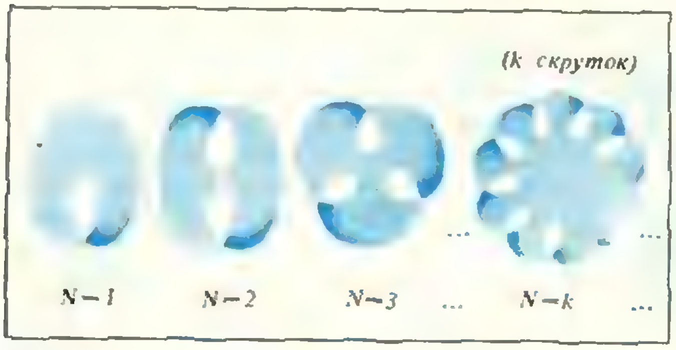


Рис. 8.

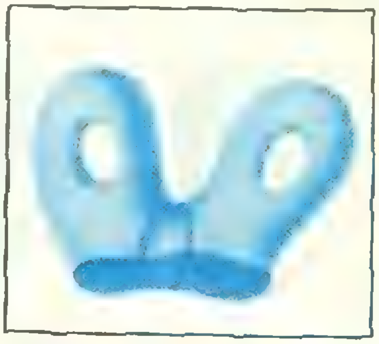


Рис. 9.

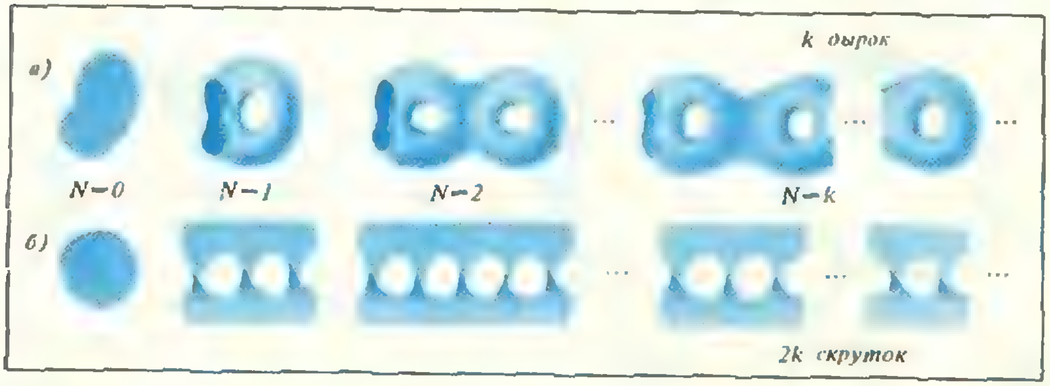


Рис. 10.

к разрыву-срастанию у наших пленок появилась в процессе эволюции только из-за «маломерности» нашего пространства. Желающим *познакомиться с четырехмерным* пространством поближе рекомендуем книжку И. М. Гельфанда и др. *Метод координат* (М.: Наука, 1965).

Можно выделить целое (бесконечное) семейство пленок, которые естественно называть *амебиусовыми*. Второй (после амебиуса) представитель этого семейства получается в результате «приживления» двух амебиусов друг к другу по кусочку границы (рис. 7). Следующий — приживлением трех амебиусов и т. д. Формы этих пленок весьма разнообразны, так что их не всегда просто опознать. На рисунке 8 изображено все семейство в одном из наиболее симметричных их обличий.

Точно таким же образом ручка порождает семейство *двусторонних* пленок, получающихся последовательным приживлением друг к другу нескольких ручек (рис. 9). Семейство двусторонних также состоит из бесконечного числа видов, определяемых числом видов ручек, «входящих в состав» пленки. Сюда естественно включать и диски, поскольку у них тоже две стороны (они отвечают числу ручек $N=0$). Автор не смог выбрать наиболее красивую среди многообразия форм этих пленок, и поэтому на рисунке 10 *а*, *б* семейство нарисовано дважды. Убедитесь на примере двукратной ручки ($N=2$), что это две различные формы одной и той же пленки. Предупреждаю, что это не так просто, но доставит истинному любителю геометрии немало удовольствия. Возможно, вам удастся обнаружить более изящные формы этих пленок.

Читатель уже убедился, что сколь многообразен и богат класс наших пленок, столь сложен может быть их внешний вид. Поэтому, я думаю, для него будет неожиданным следующий результат, являющийся основным в науке о пленках.

> Класс всех пленок состоит из двух бесконечных семейств — семейства амебиусовых (рис. 8) и семейства двусторонних пленок (рис. 10).

Этот результат — типичная *теорема классификации.* Она утверждает, что любой представитель некоторого класса (у нас — любую пленку) можно отнести ровно к одному виду из некоторого списка (у нас — из списка амебиусовых и двусторонних).

«Этого не может быть! — воскликнет читатель, немного поразмыслив, — ведь здесь не упомянута, например, пленка, получающаяся сживлением амебиуса и ручки» (рис. 11). Однако посмотрим, так ли это, для удобства выбрав ручку формы, изображенной справа на рисунке 3 (рис. 12). Амебиус «выворачивает» ручку, превращая ее в два амебиуса, так что наша пленка есть не что иное, как тройной амебиус, изображенный на рисунке 8 под номером 3. Результат поразительный, поскольку ответ получился такой же, как если бы вместо ручки был двойной амебиус, — совсем другая пленка! Легко понять теперь, что в результате сживления k амебиусов ($k\geqslant 0$) и l ручек ($l\geqslant 0$) получается ($k+2l$)-кратный амебиус, так что смешивая ручки и амебиусы, мы ничего нового не получим. (Отметим, что тем самым признак двусторонности является рецессивным, а амебиусовость — доминантным; см. учебник «Общая биология 9—10», 1983, § 55.)

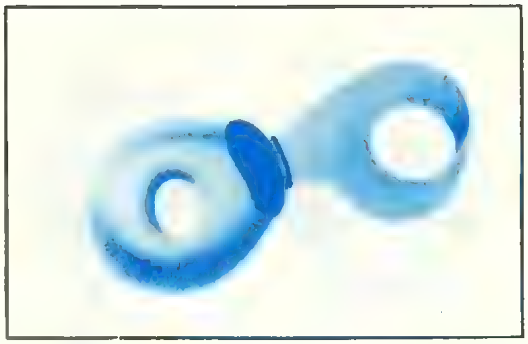


Рис. 11.

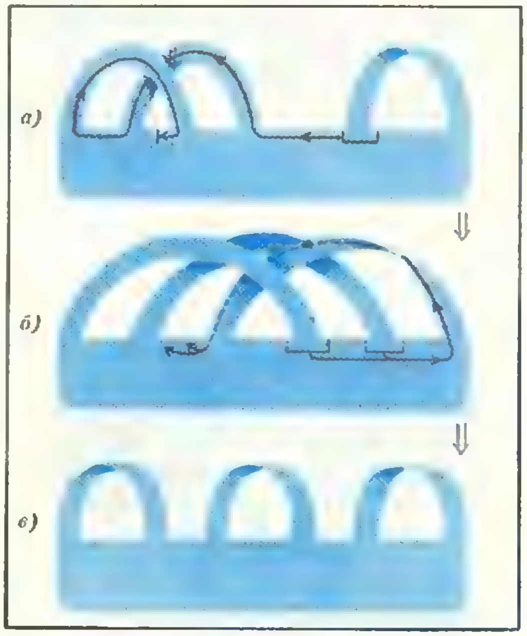


Рис 12. Удивительное превращение ручки с амебиусом в тройной амебиус. Сначала одно из оснований амебиуса проводится вдоль края ручки (а)), пока не занимает положение между двумя средними основаниями ручки (б)). Затем два правых основания ручки проводится поочередно вдоль края скрученной ленты амебиуса (см. б)). Проходя вдоль края амебиуса, две ленты ручки перекручиваются — получаются две новые скрученные ленты, одна из которых охватывает другую. Охваченную ленту можно высвободить, двигая оба ее основания вдоль края охватывающей. Получится тройной амебиус!

(Здесь проводится операция передвижения ленты вдоль края пленки. Эту операцию пленка вполне способна выполнить: часть пленки вдоль ее границы становится чрезвычайно эластичной, а основание ленты, напротив, — жестким; лента, двигаясь вдоль края, растягивает вслед за собой эластичный край пленки и сжимает его навстречу себе. Внешне это выглядит так, как будто основание ленты просто скользит по краю пленки.)

Однако пора перейти к доказательству основного результата. Возьмем

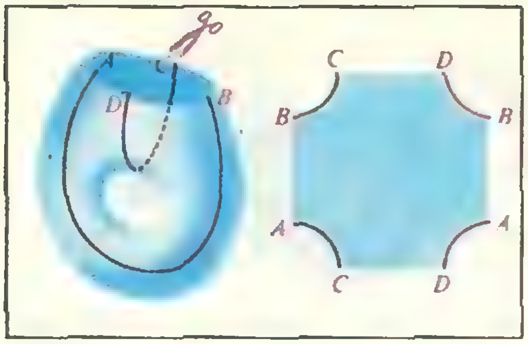


Рис. 13.

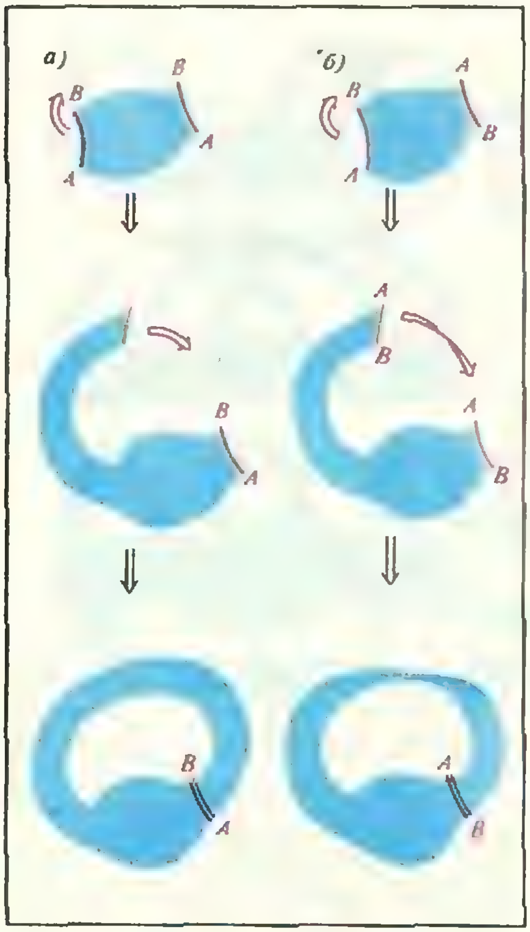


Рис. 14.

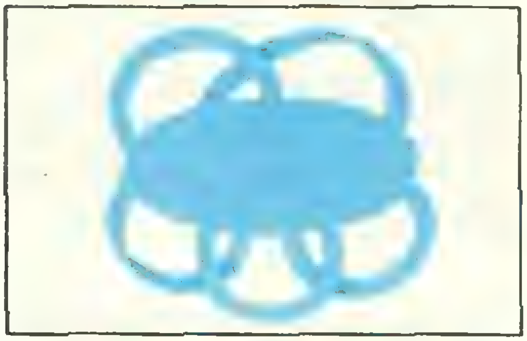


Рис. 15.

любую пленку. Воспользуемся интуитивно очевидным фактом, что всякую пленку некоторыми разрезами можно превратить в диск. Для ручки, например, понадобятся два разреза, для амебиуса достаточно и одного. На границе полученного диска останутся следы разрезов (рис. 13). Чтобы восстановить пленку, надо проделать обратную операцию по их сращиванию. Будем делать это таким образом: возьмем кусочек ткани вдоль одного из краев разреза и вытянем его в виде длинной ленты, а затем срастим с другим краем. Обратим внимание на то, что получившиеся ленты бывают двух типов I и II, в зависимости от того, как лежат края разреза на границе диска (рис. 14).

В результате мы получим исходную пленку в виде, подобном изображенному на рисунке 15.

Приведение пленки к одной из перечисленных форм осуществим в несколько этапов. Первый этап («выметание» из-под ленты типа I) — изображен на рисунке 16. В результате такой процедуры, примененной ко всем лентам типа I, мы приведем пленку к виду, где каждая такая лента будет расположена отдельно от всех остальных. Разберемся теперь с лентами типа II . Под такой лентой обязательно находится ровно одно из оснований какой-то другой ленты (в данном случае это может быть только лента того же типа), иначе край всей пленки состоял бы из двух кривых. Такую пару лент естественно (см. рис. 3) назвать ручкой.

Второй этап состоит в аналогичной операции выметания из-под ручки (рис. 17), результатом которой будет выделение «чистой» ручки. В конце концов пленка примет вид диска с приклеенными по отдельности ручками и лентами типа I или амебиусами (читатель, конечно, же узнал их). Далее, если есть хотя бы один амебиус, то он раскрутит все ручки в двойные амебиусы (см. рис. 12), и мы придем к одной из форм для семейства амебиусовых (рис. 8). В противном случае пленка состоит из некоторого числа ручек и является двусторонней, что и завершает наше доказательство.

Впрочем, все ли мы доказали? Мы установили, что любую пленку можно отнести по крайней мере к одному из видов, перечисленных в списке. А может быть, — ее можно отнести к нескольким видам? Другими словами, не могут ли два вида из списка оказаться одним и тем же (то есть приводиться друг в друга по естественным законам развития пленок)? Оказывается — нет. Но на доказательстве мы останавливаться не будем, отсылая читателя к книгам, перечисленным в конце статьи.

Отметим, что приведенное доказательство дает эффективный способ для определения вида, которому принадлежит данная пленка, в частности, позволяет решить, когда две данные формы отвечают одной пленке.

Задача. Определите, к какому виду принадлежат пленки, изображенные на рисунке на с. 51, а также покажите, что формы, изображенные на рисунке 10, действительно соответствуют одной и той же двусторонней пленке.

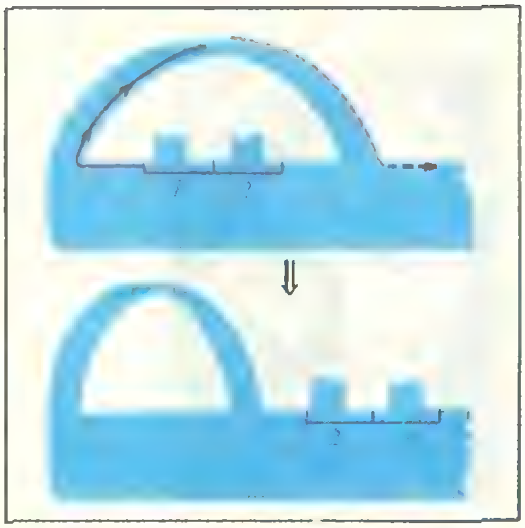


Рис. 16.

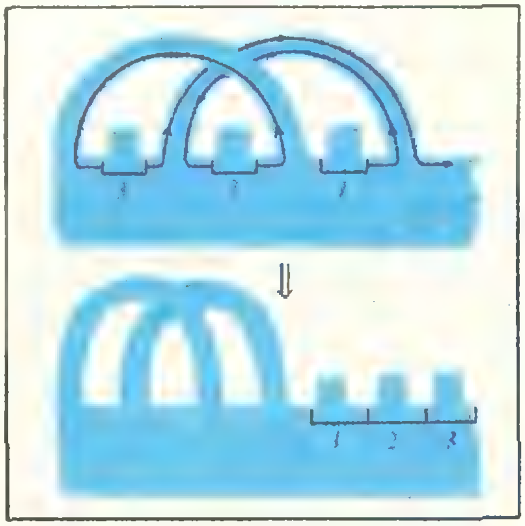


Рис. 17.

На этом можно было бы закончить, однако во избежание недоразумений автор должен отметить, что все изложенное имеет отношение не столько к биологии, сколько к *топологии* — области геометрии, занимающейся свойствами фигур, не меняющимися при любых сжатиях и растяжениях. В связи с этим дадим перевод основных понятий с биологического языка, принятого в статье, на математический. Пленки — компактные связные двумерные многообразия со связным краем, двусторонняя и амебиусовая пленка — соответственно ориентируемое и неориентируемое двумерное многообразие со связным краем, амебиус — лист Мёбиуса, название «диск» и «ручка» заимствованы из топологии и в переводе не нуждаются. Наша классификация есть не что иное, как топологическая классификация двумерных многообразий со связным краем. Из нее сразу получается и топологическая классификация замкнутых многообразий (таких как сфера, тор или поверхность бублика), если заметить, что после вырезания небольшой дырочки мы придем к пленке. Подробнее об этих вопросах можно прочесть в очень интересной книжке В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича «Наглядная топология» (М.: Наука, 1980). Рекомендую посмотреть также раздел «Топологические эксперименты» в книге Ст. Барра «Россыпи головоломок» (М.: Мир, 1978).

Поправка

В статье «Роль математической физики в современной науке» («Квант», 1983, № 12) напечатано ошибочное утверждение. На странице 3, вторая колонка, 8—13 строки сверху, должно быть: «Например, если сумма всех сил, действующих на данное тело, начальная скорость которого равна нулю, постоянна, то есть длина и направление вектора $\vec{F} \neq \vec{0}$ не зависят от значения времени t, то движение тела происходит по прямой линии.»

Лев Андреевич Арцимович

(к 75-летию со дня рождения)

Выдающийся советский физик академик Лев Андреевич Арцимович родился 25 февраля 1909 года в Москве в семье профессора статистики. В 1928 году окончил Белорусский государственный университет, вскоре приехал в Ленинград и поступил препаратором в Физико-технический институт (ФТИ), которым руководил знаменитый ученый академик А. Ф. Иоффе.

Иоффе стремился как можно раньше включать своих учеников и сотрудников в самостоятельные смелые научные исследования. Арцимович оказался необычайно одаренным физиком, успешно владеющим как теорией, так и экспериментом. «Этот парень удивительно умел все сосчитать, составлять уравнения и корректно их решать», — вспоминая приход Арцимовича в ФТИ, писал член-корреспондент АН СССР А. И. Алиханьян.

В 1931 году Арцимович тщательно исследовал полное внутреннее отражение рентгеновских лучей от тонких металлических пленок, заложив тем самым основы оптики рентгеновских лучей.

В 1934—35 годах Л. А. Арцимович занимался изучением свойств медленных нейтронов и, совместно с И. В. Курчатовым, убедительно показал, что они активно захватываются атомными ядрами водорода — протонами. Затем он выполнил ряд работ, подтвердивших справедливость квантовой механики, которая в это время бурно развивалась, но встречала на своем пути немало препятствий, сомнений и противоречий. Особенно важной была его работа, подтвердившая выполнение законов сохранения энергии и импульса при аннигиляции электрона и позитрона, справедливость которых одно время подвергалась сомнению.

В 1944 году академик И. В. Курчатов пригласил Л. А. Арцимовича в только что созданный им Институт атомной энергии, где Лев Андреевич работал до конца своей жизни. Сначала он возглавил там важное прикладное направление — разделение изотопов атомных ядер при помощи электромагнитных установок. В 1950 году И. В. Курчатов поручил Арцимовичу руководство исследованиями физики горячей плазмы и управляемых термоядерных реакций — одной из важнейших научных проблем современности.

Под руководством Арцимовича советские физики разработали несколько направлений, ведущих к решению труднейшей задачи — созданию термоядерного реактора. Наиболее перспективным из них оказалось создание экспериментальных установок «Токамак» (тороидальные камеры в магнитном поле), на которых были достигнуты рекордные результаты по нагреву и удержанию плазмы.

Эта проблема до конца еще не решена, но Арцимович твердо верил в торжество человеческого разума. Заканчивая свою монографию об управляемых термоядерных реакциях, он написал следующие слова: «Вряд ли есть какие-либо сомнения в том, что в конечном счете проблема управляемого термоядерного синтеза будет решена. Природа может расположить на пути решения этой проблемы лишь ограниченное число трудностей, и после того, как человеку, благодаря непрерывному проявлению творческой активности, удастся их преодолеть, она уже не в состоянии будет изобрести новые».

Много лет Л. А. Арцимович руководил Отделением общей физики и астрономии Академии наук СССР. Он оказал большую помощь развитию квантовой электроники и лазерной техники, строительству самого крупного в мире советского оптического телескопа, разработке проблем внеатмосферной астрономии. Он был также активным борцом за мир, бессменным представителем отечественной науки на знаменитых Пагуошских конференциях ученых — сторонников мира.

В. А. Лешковцев

Яков Ильич Френкель

(к 90-летию со дня рождения)

Имя выдающегося советского физика-теоретика Я. И. Френкеля прочно связано с целым рядом физических эффектов. Прежде чем кратко рассказать о них — несколько данных из его биографии.

Яков Ильич родился 10 февраля 1894 года в Ростове-на-Дону. С 1909 года жизнь его навсегда связывается с городом на Неве. В 1913 году он с золотой медалью заканчивает известную в Петербурге гимназию. К этому времени молодой человек выполняет первую самостоятельную работу по физике, которую высоко оценивает профессор А. Ф. Иоффе. По окончании физико-математического факультета Петроградского университета Я. И. Френкель остается при нем для подготовки к профессорской деятельности. С начала 1918 года он преподает физику в Таврическом (Симферопольском) университете. В 1921 году Френкель переезжает в Петроград и начинает работать в Физико-техническом институте (ФТИ) и на физико-механическом факультете Политехнического института. Вскоре он становится главой теоретического отдела ФТИ и заведующим кафедрой теоретической физики на физмехе. С обоими этими учреждениями, территориально расположенными в двух шагах друг от друга, связана вся тридцатилетняя научная и педагогическая деятельность Якова Ильича.

Я. И. Френкель посвящал свои усилия разработке широкого круга проблем. Назовем лишь некоторые из полученных им результатов.

Он первым ввел представление о колебательно-поступательном характере движения молекул в жидкостях и построил основы кинетической теории жидкостей (работы 1926—44 гг.).

Ввел понятие о дефектах кристаллической решетки (1926 г.). «Дефекты по Френкелю» (или «френкелевские пары») — это сочетание пустого узла в решетке — дырки — и атома, перешедшего из этого узла в пространство междоузлий. С ними неразрывно связаны процессы диффузии, тепло- и электропроводности в твердых телах.

Френкелевский экситон — квант возбуждения — представляет собой связанное состояние электрона и положительной дырки, способное двигаться по кристаллу (предложен в 1931 г.). Сейчас физика экситонов — одна из наиболее интенсивно развивающихся областей физики твердого тела.

Для описания процессов, происходящих в ядре, Френкель предложил использовать представления статистической физики и термодинамики, рассматривая ядро как систему большого числа частиц (нуклонов). Им (независимо от Н. Бора) была создана капельная модель ядра (модель Бора — Френкеля, 1936 г.). Было введено понятие температуры ядра, испускание частиц из ядра трактовалось в терминах испарения, а поглощение — конденсации. Эти простые соображения оказались необычайно плодотворными и дали особенно ценные результаты после открытия деления урана (1939 г.). Я. И. Френкелем (одновременно с Н. Бором и Дж. Уилером) была разработана теория деления тяжелых ядер.

Ученый-романтик, каким был Я. И. Френкель, по самому складу своего ума может находить черты общего в разных и, казалось бы, далеко друг от друга отстоящих явлениях, связывая далекое с близким, усматривая черты нового в старом. Такому художественному видению мира в большой степени способствовало то, что Яков Ильич владел кистью: его портреты и пейзажи не раз экспонировались на выставках и воспроизводились в различных книгах и журналах. Он был хорошим скрипачом, тонко чувствовавшим музыку и исполнявшим ее исключительно проникновенно.

Автор первого в нашей стране полного курса теоретической физики Яков Ильич Френкель выполнил фундаментальные работы не только в области физики жидких и твердых тел и физики ядра, но и в классической и квантовой механике, астрофизике, геофизике и биофизике.

В. Я. Ильин

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Как решается основная задача механики?» предназначена восьмиклассникам, «Диэлектрики, полупроводники, полуметаллы, металлы» — девятиклассникам и «Фотоэлектрический эффект и кванты» — десятиклассникам. Материалы подготовил И. К. Белкин.

Как решается основная задача механики?

Основная задача механики, как неоднократно указывается в учебнике «Физика 8», — определять положение (координаты) движущегося тела в любой момент времени. Это механика обязательно должна «уметь», иначе она не может быть наукой о движении. Законы движения, открытые Ньютоном, и прежде всего второй закон Ньютона (основной закон динамики) $\vec{F}=m\vec{a}$, как раз и позволяют решать эту задачу.

Второй закон Ньютона связывает силу, приложенную к телу, и вызванное силой ускорение. Но ускорение — это быстрота изменения скорости, а скорость, в свою очередь, — быстрота изменения перемещения тела. Поэтому, решив уравнение, выражающее основной закон динамики, мы узнаем о быстроте изменения координат тела, а значит, и о самих координатах в любой момент времени. Для этого кроме силы нужно знать еще начальные условия — начальные координаты и начальную скорость тела.

На первый взгляд кажется, что уравнение второго закона Ньютона очень простое и что решается оно тоже просто. Однако надо помнить, что уравнение $\vec{F}=m\vec{a}$ — векторное. Это значит, что за ним «скрываются» три скалярных уравнения для проекций силы и ускорения на оси координат:

$$F_x=ma_x,$$
$$F_y=ma_y,$$
$$F_z=ma_z.$$

Эти уравнения в самом деле решаются легко, но только в том случае, когда проекции силы F_x, F_y и F_z постоянны, то есть когда их значения одинаковы при любых значениях координат точки, а значит, и в любой момент времени. Тогда постоянны и значения проекций ускорения a_x, a_y и a_z, движение тела, следовательно, равноускоренное, и координаты x, y и z определяются равенствами

$$x=x_0+v_{0x}t+\frac{a_xt^2}{2},$$
$$y=y_0+v_{0y}t+\frac{a_yt^2}{2},$$
$$z=z_0+v_{0z}t+\frac{a_zt^2}{2}.$$

Здесь x_0, y_0 и z_0 — начальные координаты, а v_{0x}, v_{0y} и v_{0z} — соответствующие проекции начальной скорости на оси координат.

В школьном курсе физики рассматриваются только такие задачи, когда силы постоянны. Значительно сложнее решать основную задачу механики, если сила и ее проекции зависят от координат. В действительности обычно именно так и бывает. Как решается задача в таком случае? Конечно, и теперь нужно знать начальные условия и силу. Но теперь «знать силу» — значит знать, как она изменяется при изменении координат тела.

Пусть, например, на тело действует сила F_x, которая определенным (и известным) образом зависит от координаты x. Для определения координаты x тела в любой момент времени прежние формулы непригодны, потому что если сила F_x изменяется от точки к точке, будет изменяться и ускорение a_x тела. Будем решать задачу постепенно, так сказать, шаг за шагом.

Сначала рассмотрим движение нашего тела в течение малого промежутка времени Δt, начиная с момента, который мы условимся считать начальным. В этот момент ($t=0$) координата x тела равна x_0

(начальная координата), а скорость равна v_{0x} (начальная скорость). Промежуток Δt выберем настолько малым, чтобы в течение этого времени силу F_x, а значит, и ускорение a_x можно было считать постоянными. Силу F_{0x} мы знаем, поскольку нам известно, как сила зависит от координаты; a_{0x} мы тоже знаем, так как $a_{0x}=F_{0x}/m$. Следовательно, по известным нам формулам равноускоренного движения для скорости v_{1x} и координаты x_1 в конце промежутка времени Δt мы можем написать:

$$v_{1x}=v_{0x}+a_{0x}\Delta t,$$

$$x_1=x_0+v_{0x}\Delta t+\frac{a_{0x}\Delta t^2}{2}.$$

Затем рассмотрим движение тела в следующий столь же малый промежуток времени Δt. Начальной координатой теперь будет найденное нами значение x_1 и начальной скоростью — значение v_{1x}. В течение этого второго промежутка на тело будет действовать уже другая сила — F_{1x}. Ее значение мы найдем, зная зависимость силы от координаты. Соответственно другим будет и ускорение тела a_{1x}. Таким образом, к концу второго промежутка времени скорость тела будет равна

$$v_{2x}=v_{1x}+a_{1x}\Delta t,$$

а координата —

$$x_2=x_1+v_{1x}\Delta t+\frac{a_{1x}\Delta t^2}{2}.$$

Эти значения скорости и координаты будут начальными для движения тела в течение следующего, третьего, промежутка, и мы таким же способом найдем значения скорости и координаты к концу этого промежутка. Так, «двигаясь» шаг за шагом, мы сможем определить координату x тела в любой момент времени. Аналогично можно найти и координаты y и z.

В рассмотренной нами процедуре нетрудно заметить систематическую ошибку, которую мы допускаем. Состоит она в том, что сила и ускорение считаются постоянными в течение каждого малого промежутка времени Δt, а в конце промежутка они скачком изменяются. Между тем в действительности и сила, и ускорение всегда изменяются непрерывно. Уменьшить эту ошибку можно, уменьшив значение Δt. Ошибка практически вовсе исчезнет, если промежутки времени сделать бесконечно малыми. Но тогда число наших «шагов» станет бесконечно большим, и процедура из-за этого сделается невозможной.

Специально для таких случаев разработан особый математический аппарат, называемый дифференциальным и интегральным исчислением (Ньютон придумал его именно для этой цели). С его помощью и решается основная задача механики. Но принцип решения именно тот, который мы здесь рассмотрели. Именно таким способом рассчитывают сложные механические движения (например, спутников и ракет) современные ЭВМ.

В заключение отметим следующее. Когда мы говорим, что основная задача механики — находить координаты движущихся тел по известным силам и начальным условиям, то это вовсе не значит, что только этим и занимается механика. Бывает и так, что движение тела, то есть его положение в любой момент времени, известно из наблюдений. Тогда законы движения позволяют найти силу, действующую на тело. Эта задача, так называемая обратная задача механики, столь же важна, как и рассмотренная нами прямая задача, но, как нетрудно понять, она значительно проще.

Диэлектрики, полупроводники, полуметаллы, металлы

В классической физике было принято все вещества по их электрическим свойствам разделять на проводники и диэлектрики («Физика 9», §§ 44 и 46). Современная физика различает еще два промежуточных состояния — полупроводники («Физика 9», § 78) и полуметаллы. Лишь с появлением квантовой механики стало ясно, в чем различия между всеми этими типами веществ. В этой заметке мы постараемся вкратце описать суть современной квантовомеханической теории, объясняющей электрические свойства твердых тел.

Твердое тело состоит из атомов, образующих кристаллическую решетку. Атомы удерживаются в решетке силами взаимодействия электрически заряженных атомных частиц — положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов. Электрический ток в кристалле — это движение электронов, которое подчиняется законам квантовой механики. Согласно этим законам, электроны и в отдельном атоме, и в кристалле могут обладать лишь определенными (разрешенными) значениями энергии, или, иными словами, находиться на определенных *энергетических уровнях*. Чем выше уровень, тем большей энергии он соответствует.

В атоме эти уровни расположены довольно далеко один от другого — принято говорить, что уровни образуют дискретный энергетический спектр (рис. 1). При определенных условиях электроны могут переходить с одного уровня на другой, разрешенный, уровень. Электрон с данной энергией может двигаться только по замкнутой траектории — орбите — вокруг ядра.*)

Когда атомы объединяются в кристалл, часть электронов по-прежнему остается на своих атомных орбитах, но наиболее удаленные от ядра электроны получают возможность двигаться по всему кристаллу благодаря тому, что внешние орбиты соседних атомов перекрываются. А это значит, что и энергетические уровни, раньше принадлежавшие отдельным атомам, становятся «общими» для всего кристалла. Вместо дискретных уровней в кристалле образуются *энергетические зоны*, состоящие из очень близко расположенных уровней. Электроны, которые находятся на этих «обобществленных» уровнях, называются *валентными электронами*.

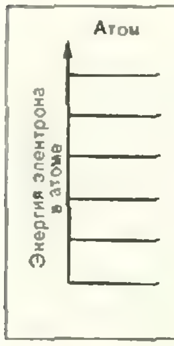


Рис. 1.

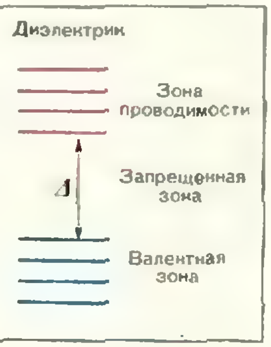


Рис. 2.

Валентные электроны движутся по орбитам, охватывающим весь кристалл, и, казалось бы, могут проводить электрический ток. Однако если бы все было так просто, все твердые тела были бы хорошими проводниками (металлами). Законы квантовой механики делают картину гораздо более сложной и разнообразной.

Во-первых, энергетические зоны разделены промежутками, в которых нет ни одного энергетического уровня. Эти промежутки называются *запрещенными зонами*. Во-вторых, электроны подчиняются так называемому принципу Паули, согласно которому на каждом уровне в данном состоянии может находиться только один электрон. При наинизшей возможной температуре (равной абсолютному нулю) энергетические уровни последовательно снизу вверх (то есть начиная с наименьших значений энергии) заполняются электронами в соответствии с принципом Паули, а уровни с более высокими энергиями остаются свободными. Различная степень заполнения энергетических зон, а также различия в их относительном расположении и позволяют разделить все твердые тела на диэлектрики, полупроводники, полуметаллы и металлы.

Диэлектрики. При $T=0$ валентные электроны целиком заполняют наинизшую зону, называемую *валентной зоной* (рис. 2). Свободных уровней в ней нет, а следующая разрешенная зона — *зона проводимости* — отделена от нее широкой запрещенной зоной. Если к такому образцу приложить электрическое поле, оно не сможет ускорить электроны, то есть создать электрический ток, так как ускорить электрон — значит сообщить ему дополнительную энергию, а, согласно законам квантовой механики, это можно сделать, только переведя его на более высокий энергетический уровень. Но принцип Паули запрещает электронам занимать уже занятые уровни, а попасть в следующую разрешенную зону, которая совершенно пуста, они не могут, потому что энергия, полученная от электрического поля, много меньше ширины Δ запрещенной зоны.

---

*) Орбита в квантовой механике, в отличие от классической, понятие условное. Об определенной «размытой» орбите электрона можно говорить лишь приближенно, и ее замкнутость означает только то, что электрон «в среднем» находится на определенном расстоянии от ядра

При температуре, отличной от нуля, электроны, в принципе, могут перейти в зону проводимости и стать носителями электрического тока. Однако для того чтобы число электронов, перешедших в эту зону, было достаточно большим, нужно диэлектрик нагреть до такой высокой температуры, что он расплавится, прежде чем ток достигнет измеримой величины. При комнатной температуре ток в диэлектрике практически не течет.

Полупроводники. От диэлектрика полупроводник отличается только тем, что ширина Δ запрещенной зоны, отделяющей валентную зону от зоны проводимости, у него много меньше (в десятки раз). При $T=0$ валентная зона в полупроводнике, как и в диэлектрике, целиком заполнена, и ток по образцу течь не может. Но благодаря тому, что энергия Δ невелика, уже при незначительном повышении температуры часть электронов может перейти в зону проводимости (рис. 3). Тогда электрический ток в веществе станет возможным, причем сразу по двум «каналам». Во-первых, в зоне проводимости электроны, приобретая энергию в электрическом поле, переходят на более высокие энергетические уровни. Во-вторых, вклад в электрический ток дают... пустые уровни, оставленные в валентной зоне электронами, ушедшими в зону проводимости. Действительно, принцип Паули разрешает любому электрону занять освободившийся уровень в валентной зоне. Но, заняв этот уровень, он оставляет свободным свой собственный уровень и т. д. Если следить не за движением электронов по уровням в валентной зоне, а за движением самих пустых уровней, то оказывается, что эти уровни, имеющие научное название *дырки*, тоже становятся носителями тока. Число дырок, очевидно, равно числу электронов, ушедших в зону проводимости (так называемых *электронов проводимости*), но дырки обладают положительным зарядом, потому что дырка — это отсутствующий электрон.

Таким образом, в полупроводнике электрический ток — это ток электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне. Такая проводимость полупроводника называется *собственной*.

Электроны и дырки при движении по кристаллу взаимодействуют с атомами кристаллической решетки, теряя при этом свою энергию. С этими потерями связано электрическое сопротивление вещества. При увеличении температуры потери энергии возрастают, так что сопротивление полупроводника должно было бы с ростом температуры тоже увеличиваться. Но при повышении температуры растет *число электронов*, переходящих в зону проводимости, а следовательно, и число дырок в валентной зоне. Это значит, что растет (и очень

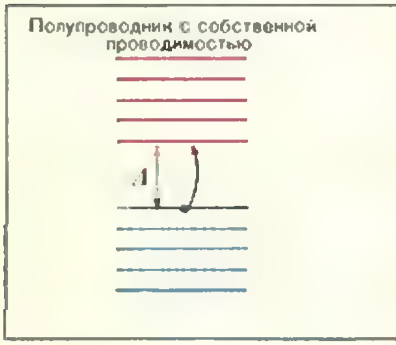


Рис. 3.

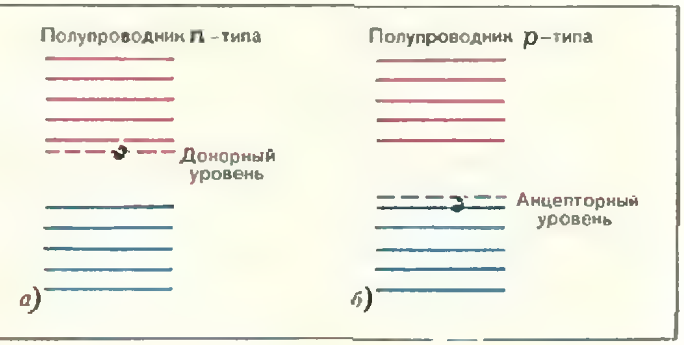


Рис. 4.

быстро) общее число носителей тока. Из-за этого сопротивление полупроводника с повышением температуры не растет, а падает. Полупроводник и можно определить как *вещество, практически не проводящее ток при абсолютном нуле температур, но сопротивление которого с ростом температуры резко падает.*

В природе, однако, полупроводников с собственной проводимостью не существует: в них всегда имеются примеси других веществ, которые и определяют их электрические свойства. Наличие примесей приводит к тому, что в запрещенной зоне полупроводника появляются дополнительные энергетические уровни, с которых или на которые тоже возможны электронные переходы. Широкое применение полупроводников в технике стало возможным только после того, как технологи научились управлять содержанием примесей в полупроводниках и по своему усмотрению делать их проводимость (*примесную проводимость*) почти чисто электронной или чисто дырочной.

Оказывается, можно подобрать такие примеси, атомы которых легко отдают электроны. Освободившиеся при этом дополнительные уровни энергии располагаются внутри запрещенной зоны полупроводника вблизи ее *верхнего края* (рис. 4, *а*). Такие примеси называются *донорными примесями*, а уровни — донорными уровнями. Из рисунка 4, *а* видно, что при одной и той же температуре электронам с таких уровней гораздо легче перейти в зону проводимости, чем электронам из валентной зоны, поэтому примесные уровни и станут основными поставщиками электронов в зону проводимости. Но при этом в валентной зоне дырок появляться не будет, и проводимость полупроводника станет почти чисто электронной. Такие полупроводники называются полупроводниками *n*-типа.

Существуют и такие примеси, атомы которых легко присоединяют к себе электроны (*акцепторные примеси*). Дополнительные уровни их электронов (акцепторные уровни) тоже располагаются внутри запрещенной зоны полупроводника, но вблизи ее дна (рис. 4, *б*). В этом случае электронам из валентной зоны легче перейти на акцепторные уровни примеси, чем в зону проводимости. Тогда в валентной зоне появятся дырки без того, чтобы в зоне проводимости появились электроны. Получится полупроводник с почти чисто дырочной проводимостью, или полупроводник *p*-типа.

Наиболее известные полупроводниковые материалы — это германий и кремний, а их главные технические применения как раз и связаны с возможностью создания образцов *n*- и *p*-типов («Физика 9», с. 212).

Полуметаллы. Это вещества, в которых между зоной проводимости и валентной зоной зазор отсутствует, так что они слегка перекрываются (рис. 5). В таких веществах уже при нулевой температуре имеется небольшое количество электронов и дырок, но *электропроводность их очень слабо зависит от температуры.*

Полуметаллы в природе встречаются редко, из них наиболее известны висмут, сурьма и их сплавы.

Металлы. Электроны в металлах окончательно «забывают» свое атомное происхождение, их уровни образуют одну очень широкую зону. Она всегда заполнена лишь частично (число электронов меньше числа уровней) и потому может называться *зоной проводимости* (рис. 6). Ясно, что *в металлах ток может течь и при нулевой температуре.* Более того, с помощью квантовой механики можно доказать, что *в идеальном металле* (решетка которого не имеет дефектов) при $T=0$ ток должен течь без сопротивления![1])

---

[1] Мы не касаемся здесь сверхпроводников, которые теряют сопротивление при температурах, отличных от абсолютного нуля.

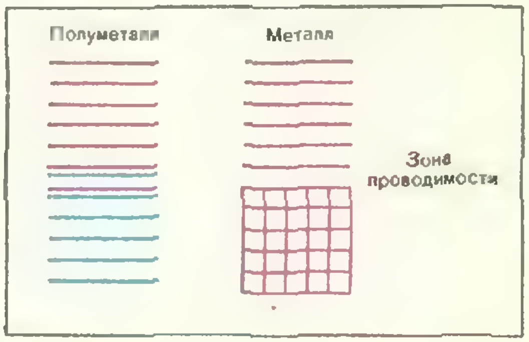


Рис. 5.

Рис. 6.

К сожалению, идеальных кристаллов не бывает, а нулевой температуры достичь невозможно. В действительности электроны теряют энергию, взаимодействуя с колеблющимися атомами решетки, так что *сопротивление реального металла растет с температурой* (в отличие от сопротивления полупроводника). Но самое главное — это то, что при любой температуре электропроводность металла значительно выше электропроводности полупроводника потому, что в металле гораздо больше электронов, способных проводить электрический ток.

Фотоэлектрический эффект и кванты

Фотоэлектрический эффект был открыт немецким физиком-экспериментатором В. Галльваксом в 1888 году.*) Он обнаружил, что при освещении отрицательно заряженного проводника ультрафиолетовым светом заряд проводника быстро уменьшается.

Фотоэффект был подробно исследован в 1888—1890 годы русским ученым А. Г. Столетовым и несколько позже — немецким ученым Ф. Ленардом. Так, в 1899 году Ленард доказал, что при освещении металла ультрафиолетовым (а иногда и видимым) светом из металла вырываются отрицательно заряженные частицы — электроны.**)

Сам по себе факт вырывания электронов из металла под действием света не вызывал удивления. К этому времени уже было известно, что свет — это электромагнитная волна. Значит, падающий на поверхность металла свет приносит с собой переменное электрическое поле. В таком поле электрон в металле должен совершать колебания, а при достаточно большой амплитуде он может и вылететь из металла, где его удерживает сила притяжения к положительно заряженным частицам (напомним, что амплитуда определяет энергию колебаний). Можно ожидать, что на «раскачку» электрона потребуется некоторое время (расчет показывает, что могут потребоваться даже минуты). Число вылетающих в единицу времени электронов должно, очевидно, зависеть от интенсивности падающего света (то есть от энергии излучения, проходящей за единицу времени через единичную площадку в направлении, перпендикулярном лучу). Так, свет мощного прожектора должен, естественно, вырывать больше электронов, чем свет карманного фонарика. От интенсивности падающего света должна зависеть и энергия вылетающих электронов.

Таким образом, на основании волновой теории света можно было ожидать, что:

1. Любой свет, то есть свет любой длины волны, должен вырывать электроны из металла, поскольку любой свет приносит с собой переменное электрическое поле.
2. На вырывание электрона из металла требуется определенное время. Поэтому фотоэлектроны (электроны, вырванные светом) должны появляться через некоторое время после включения света.
3. Число вырванных электронов и их энергия должны быть пропорциональны интенсивности света (то есть квадрату амплитуды колебаний в световой волне).

Однако исследования, проведенные А. Г. Столетовым, В. Галльваксом и Ф. Ленардом, показали, что законы фотоэффекта совсем не такие, как ожидалось. Оказалось, что:

1. Не всякий свет вырывает электроны из металла. Для каждого металла существует определенная наименьшая частота $\nu_{\min}$ (наибольшая длина волны $\lambda_{\max}$), такая, что свет меньшей частоты (большей длины волны) вовсе не вырывает электронов. Если частота колебаний в световой волне меньше этой граничной

---

*) Годом раньше немецкий физик Г. Герц обнаружил, что искровой разряд между двумя электродами происходит более активно, если искровой промежуток освещается ультрафиолетовым светом.

**) Говоря более точно, испускание электронов твердыми и жидкими телами следует называть внешним фотоэлектрическим эффектом (в отличие от внутреннего фотоэффекта, когда под действием света электроны остаются внутри тела и лишь изменяют свое состояние).

частоты, то и самый мощный прожектор, испускающий такой свет, не вырвет ни одного электрона. Но если частота больше $\nu_{\min}$, то и маленький карманный фонарик вызовет вылет электронов. Эта наименьшая частота (наибольшая длина волны) называется красной границей фотоэффекта.

2. Вылет электронов из металла начинается практически одновременно с началом его освещения. Мгновенность действия и сделала фотоэффект таким важным в различных автоматических устройствах.

3. Вырванные светом электроны имеют различные значения кинетической энергии — от самых малых до некоторого максимального значения $mv^2_{\max}/2$. Эта максимальная энергия фотоэлектронов линейно зависит от частоты света, а не от его интенсивности. Интенсивности света пропорционально только число вырванных электронов (в этом состоит закон Столетова для фотоэффекта).

Таким образом, главную роль почему-то играет частота света, которая определяет его цвет, но не имеет никакого отношения к энергии волны. Законы фотоэффекта оказались, следовательно, несовместимыми с волновой теорией света.

Полное теоретическое объяснение фотоэлектрического эффекта было найдено в 1905 году А. Эйнштейном. Он показал, что в этом случае свет ведет себя не как волна, а как поток частиц, квантов света, энергия которых выражается равенством $E=h\nu$, введенным еще за пять лет до этого М. Планком для объяснения совсем другого процесса.

Сам фотоэффект состоит в том, что световые частицы, сталкиваясь с электронами металла, передают им свою энергию и импульс (сами кванты при этом исчезают). Если энергия квантов падающего света больше той работы, которую электрон должен совершить против сил притяжения к положительно заряженным частицам вещества, электрон может вылететь из металла. Если энергия квантов меньше этой работы (работы выхода электрона из металла), ни один электрон из металла не вылетит.

Становится понятным смысл граничной частоты, то есть красной границы фотоэффекта: для вырывания электрона из металла энергия квантов должна быть не меньше, чем $h\nu_{\min}$. Эта энергия и равна работе выхода A электрона из данного металла. В случае, когда энергия $h\nu$ падающих квантов больше A, максимальная кинетическая энергия электронов равна разности $h\nu-A$:

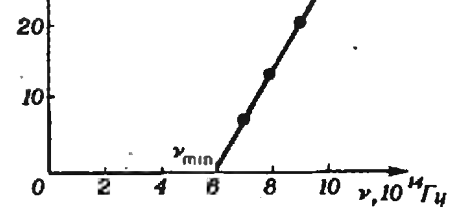
$$\frac{mv^2_{\max}}{2}=h\nu-A.$$

Это и есть формула Эйнштейна для фотоэффекта. Обычно ее пишут в виде

$$h\nu=A+\frac{mv^2_{\max}}{2}.$$

А что же интенсивность света, играет ли она какую-нибудь роль? Да, играет. Если свет вызывает фотоэффект, то число вылетающих в единицу времени электронов пропорционально именно интенсивности света. Но интенсивность света теперь связана не с амплитудой колебаний в световой волне, а с числом квантов, испускаемых источником в единицу времени. Вдвое более «сильная» лампа испускает вдвое больше квантов; свет такой лампы и электронов из металла вырвет вдвое больше. Но энергия вылетающих электронов зависит не от силы света лампы, а от того, какого цвета свет она испускает.

Теория Эйнштейна самым тщательным образом была проверена экспериментально (в опытах, подобных описанному в «Физике 10» на с. 225). Особенно точные измерения провел в 1916 году американский физик Р. Милликен. Результаты этих исследований могут быть пред-



ставлены в виде графика зависимости максимальной кинетической энергии электронов от частоты света (см. рисунок; приведенный на нем график относится к металлу барию). В этом графике вся суть теории Эйнштейна. Из него видно, что пока частота света меньше граничной $\nu_{\min}$, энергия электронов равна нулю. А дальше кинетическая энергия растет пропорционально частоте ν (точнее разности частот $\nu - \nu_{\min}$), как это и следует из уравнения Эйнштейна. А наклон графика (тангенс угла наклона) определяет значение постоянной Планка h.

Открытие и исследование фотоэлектрического эффекта привели к тому, что наряду с волновой теорией света появилась еще одна теория — квантовая теория света. В 1921 году за важные физико-математические исследования, особенно за открытие законов фотоэлектрического эффекта, А. Эйнштейну была присуждена Нобелевская премия (высшая международная награда за научные достижения). В 1923 году за исследования в области элементарных зарядов и фотоэлектрического эффекта такая же премия была присуждена Р. Милликену.

Школа без доски и мела

20 лет ВЗМШ

При слове «школа» на ум приходит классная комната, где ученики сидят за партами, а учитель пишет мелом на доске. Есть, однако, школа, где все происходит совсем не так. В этом учебном году отмечает свое двадцатилетие Всесоюзная заочная математическая школа Академии педагогических наук СССР при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова (ВЗМШ). Всего в ВЗМШ сейчас учится около пятнадцати тысяч учеников — школьников 8—10 классов.

В комнате, занимаемой ВЗМШ в Московском университете, на стене висит карта СССР, в которую воткнуты флажки, соответствующие 42 филиалам школы при университетах и других вузах. На противоположной стене — многоярусная полка для тетрадей учеников. На третьей стене — портрет академика И. Г. Петровского, основавшего и горячо поддерживавшего Заочную школу, и список членов Научного совета ВЗМШ, в который входят вице-президент АН СССР, ректор МГУ академик А. А. Логунов, президент Академии педагогических наук СССР академик АПН СССР М. И. Кондаков и другие известные ученые.

Цель ВЗМШ — помочь любознательным школьникам, живущим в селах и маленьких городах, приобрести математическую культуру, пополнить свои знания в области математики, научиться решать нестандартные задачи и грамотно записывать их решения. Разумеется, занятия в ВЗМШ не заменяют обычные уроки математики, а дополняют их. Руководство ВЗМШ вовсе не предполагает, что ее ученики станут именно математиками. Математика нужна и становится все нужнее людям самых различных специальностей. Выпускники ВЗМШ поступают в инженерные, технологические, строительные вузы, мореходные, авиационные и железнодорожные учебные заведения, становятся педагогами и врачами.

Ученики ВЗМШ регулярно получают по почте специальные задания, разработанные учеными и педагогами, изучают содержащийся в них теоретический материал, решают задачи и посылают решения по почте на проверку. По своему содержанию задания, как правило, примыкают к школьной программе, хотя, конечно, они несколько труднее. (По отзывам учеников, их оценки в Заочной школе часто на балл ниже, чем в обычной школе.) В качестве дополнительных даются и довольно трудные задачи, чтобы и для наиболее сообразительных нашлось дело. Пройдя многолетнюю проверку, многие задания затем были выпущены массовым тиражом, и существует уже целая литература, порожденная Заочной школой. Организатор ВЗМШ и постоянный председатель ее Научного совета член-корреспондент АН СССР И. М. Гельфанд привлек к составлению заданий педагогов и ученых, многие из которых — сотрудники МГУ. По материалам ВЗМШ работают кружки и факультативы, и даже радиопередача «Математический кружок Сигма» (см. «Квант», 1983, № 3). В ВЗМШ есть и биологическое отделение.

Все работы учеников ВЗМШ тщательно проверяются. В обычной школе учитель чаще всего просто подчеркивает ошибки учеников, а подробный разбор ошибок проводит устно. В условиях заочного обучения проверка работ превращается в целое искусство, которое передается из поколения в поколение проверяющих. Многие выпускники Заочной школы, поступая в МГУ и другие вузы, сами становятся проверяющими, хорошо помня, каким авторитетом для них был автор замечаний на полях их работ. Недостатки работ отнюдь не исчерпываются простыми ошибками. Один ученик не понял условия задачи, другой ценную мысль неграмотно выражает, а третий вообще не ведает, как приступить к делу. И каждому надо коротко и ясно, в нескольких фразах, показать и в чем он заблуждается и что он должен делать, чтобы правильно решить задачу.

Например, была дана такая задача: «Существует ли треугольник, у которого все высоты меньше 1 см, а площадь больше 100 см^2?» Один ученик написал в решении: «Да, существует. Основание берем сколь угодно большое, а высоту 2—3 мм, тогда другие высоты будут меньше 1 см, так как угол близок к 180°». Подобные тексты представляют трудную проблему для проверяющих, потому что их нельзя ни просто одобрить, ни просто отвергнуть. Хотя этот ученик, несомненно, сообразительный, его еще надо учить и учить, как записывать свои мысли. Проверяющий написал на полях: «То, что Вы написали, хорошая прикидка, которая должна была показать Вам, какие стороны и углы могут быть у Вашего треугольника. Вы вольны были писать или оставить при себе эту прикидку. Но ответ должен был выглядеть так: «положим $a=$...см, $в=$...см, $c=$...см. Тогда треугольник с такими сторонами удовлетворяет условию задачи. Доказательство: ... .». А без этого задача не решена!».

Проверенные работы высылаются ученикам для доработки — разумеется, не в качестве наказания, а чтобы они прочли замечания, которые им были сделаны, и почерпнули из них как можно больше пользы.

Немалая трудность в обучении математике вообще, а при заочном обучении особенно, обусловлена спецификой математики как науки. Математика работает с абстракциями, и такая работа требует соблюдения особых «правил игры». Те пешеходы, заводы, бассейны и комбайны, о которых идет речь в школьных задачах, так же качественно отличаются от своих конкретных тезок, как шахматный король отличается от живых королей. Соответственно, необычен и язык математики. Математические тексты пестрят не только формальными обозначениями, но и такими непривычными выражениями, как «сколь угодно большой», «произвольный», «если и только если», «для любого *A* найдется *B*», выражающими сложные логические конструкции. Критерием понимания утверждений является умение обращаться с ними: делать из них выводы, формулировать противоположные утверждения, проверять их на частных случаях, обобщать, переходить к наглядным представлениям и т. п. Чтобы успешно работать с математическими абстракциями, необходимо свободно и правильно владеть математическим языком, а такое умение лучше всего приобретается в непосредственном общении с культурным в этом отношении собеседником. Таким образом, нужны какие-то гибридные формы обучения, сочетающие преимущества очной и заочной форм.

С этой целью в ВЗМШ принимаются «коллективные ученики» — группы школьников, работающие над заданиями под руководством своего учителя. Это очень гибкая и удобная форма занятий, которая получила положительную оценку со стороны многих учителей и учеников. Вот характерный отзыв: «Вы делаете громадное дело, вливая конкретное, живое содержание в работу тысяч математических кружков».

Пожелаем же дальнейших успехов всем работникам Заочной школы — педагогам, студентам, ученым, занятым общим делом — выявлением талантов и приобщением их к науке.

А. Л. Тоом

Из старых задач ВЗМШ

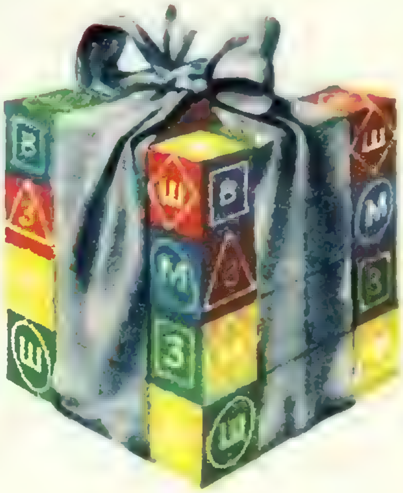
Этот рисунок навеян следующей задачей из старой вступительной работы ВЗМШ:

Можно ли заполнить табличку 4×4 буквами В, З, М и Ш, обвести их рамками четырех типов (квадрат, ромб, треугольник, круг) и раскрасить клетки таблицы в четыре цвета так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) в каждой строке и в каждом столбце должны встречаться все буквы, все цвета и все типы рамок;

2) каждая буква должна появляться по разу в клетке каждого цвета;

3) рамка каждого типа должна содержать каждую букву и каждый цвет?



Квант для младших школьников

Задачи

1. В коробке лежали спички. Их количество удвоили, а затем убрали 8 спичек. Остаток спичек снова удвоили, а затем снова отняли 8 спичек. Когда эту операцию проделали в третий раз, в коробке не осталось ни одной спички. Сколько их было сначала?

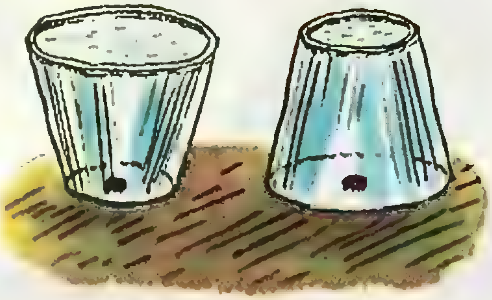
2. *А* и *К* — различные цифры. Еще 7 цифр в примере на умножение заменены звездочками. Восстановите цифры в этом примере.

$$\begin{array}{r} {*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}K \\ \times \qquad K \\ \hline AAAAAAAAA \end{array}$$

3. Что можно сказать о точках *A*, *B* и *C* на плоскости, если известно, что для любой точки *M* этой плоскости расстояние *AM* меньше хотя бы одного из расстояний *BM* и *CM*?

4. Саша и Гриша на велосипедах часто катались по лесной тропинке от одного конца леса до другого. Однажды Гриша, проехав 2 км по лесу, встретил Сашу, чинившего свой велосипед. Друзья поговорили о школьных делах, и Гриша поехал дальше. Достигнув опушки леса, он заметил, что со времени въезда в лес прошло 24 минуты. Развернувшись, он поехал в обратную сторону и через 2 км снова встретил Сашу, чинившего свой велосипед, но уже в другом месте. «Сколько же ты проехал?», — спросил Гриша. — «Всего 900 метров», — ответил ему Саша. Определите время их первого разговора, если известно, что Гриша ездил все время с одной и той же скоростью 10 км/час.

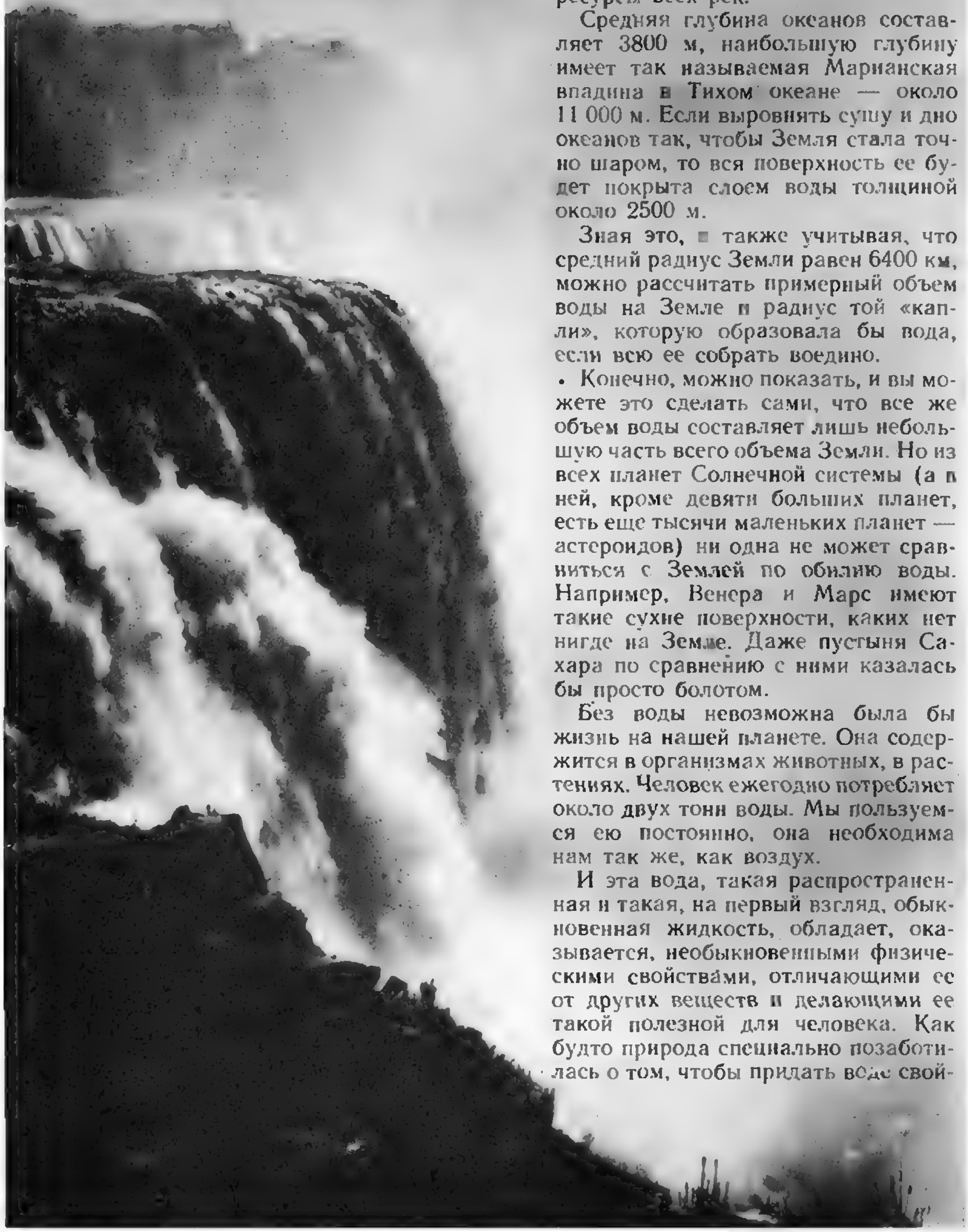
5. Два сосуда конической формы, изображенные на рисунке, залиты доверху одинаковым количеством воды. В донышках сосудов имеются одинаковые отверстия. Из какого сосуда быстрее выльется вода, если открыть эти отверстия?



Эти задачи нам предложили Р. Ю. Винокур, В. Д. Вьюн, Г. А. Гальперин, А. С. Козинский, С. Р. Сефибеков.

Такая знакомая и такая удивительная вода!

Доктор педагогических наук
Н. А. РОДИНА



Если последовательно сфотографировать все части поверхности земного шара, то 70% снимков будут иметь такой вид, как фотография на странице 35, — поверхность Земли более чем на 2/3 покрыта водой.

На долю океанов приходится основная масса воды, содержится она в озерах, реках, под землей и в воздухе. Запас воды в атмосфере — в виде пара — вдвое превышает ресурсы всех рек.

Средняя глубина океанов составляет 3800 м, наибольшую глубину имеет так называемая Марианская впадина в Тихом океане — около 11 000 м. Если выровнять сушу и дно океанов так, чтобы Земля стала точно шаром, то вся поверхность ее будет покрыта слоем воды толщиной около 2500 м.

Зная это, а также учитывая, что средний радиус Земли равен 6400 км, можно рассчитать примерный объем воды на Земле и радиус той «капли», которую образовала бы вода, если всю ее собрать воедино.

Конечно, можно показать, и вы можете это сделать сами, что все же объем воды составляет лишь небольшую часть всего объема Земли. Но из всех планет Солнечной системы (а в ней, кроме девяти больших планет, есть еще тысячи маленьких планет — астероидов) ни одна не может сравниться с Землей по обилию воды. Например, Венера и Марс имеют такие сухие поверхности, каких нет нигде на Земле. Даже пустыня Сахара по сравнению с ними казалась бы просто болотом.

Без воды невозможна была бы жизнь на нашей планете. Она содержится в организмах животных, в растениях. Человек ежегодно потребляет около двух тонн воды. Мы пользуемся ею постоянно, она необходима нам так же, как воздух.

И эта вода, такая распространенная и такая, на первый взгляд, обыкновенная жидкость, обладает, оказывается, необыкновенными физическими свойствами, отличающими ее от других веществ и делающими ее такой полезной для человека. Как будто природа специально позаботилась о том, чтобы придать воде свой-

ства, благодаря которым смягчаются жара и холод на Земле, рыбы могут зимовать в водоемах, человек пользуется «мостами изо льда»...

Рассмотрим некоторые из этих свойств.

Вода относится к тем редким веществам, которые в обычных условиях нашей жизни встречаются и в виде твердого тела, и в виде жидкости, и в виде газа. Многие ли из вас видели, например, твердый бензин (температура его плавления ниже —60°C)? Жидкое железо мы можем увидеть только во время экскурсии на металлургический завод, а жидкий воздух — в специальных лабораториях. А вот воду мы хорошо знаем во всех трех состояниях. Зимой, стоя на берегу реки, мы видим лед — твердое состояние воды, видим в проруби воду, вдыхаем вместе с воздухом водяной пар (он невидим).

Известно, что все тела при нагревании расширяются, а при охлаждении сжимаются. Это относится и к воде. Именно этим объясняется, например, прогревание воды способом конвекции. Но если пронаблюдать расширение и сжатие воды при изменении ее температуры более тщательно, то мы заметим особенность воды, имеющую большое значение для человека.

Представьте себе, что в двух одинаковых колбах налиты жидкости. В одной колбе — вода, в другой — любая другая жидкость, скажем бензин, и обе жидкости имеют одинаковую температуру, например, 15 °C. Будем постепенно охлаждать эти жидкости до 0 °C. Сначала вода не проявит никаких «чудес», обе жидкости будут сжиматься. Но после того как температура жидкостей станет равной 4 °C, бензин будет продолжать сжиматься, а вода станет расширяться!

Рассмотрим обратный процесс: будем нагревать эти жидкости от 0 °C. Бензин (и другие жидкости) будет только расширяться, а вода сначала сожмется, а лишь после 4 °C начнет расширяться, то есть поведет себя как остальные жидкости.

Вы можете проделать опыт, доказывающий это удивительное свойство воды. Налейте в банку или в стакан примерно до половины высоты холодной воды (по возможности, воду возьмите похолоднее, но не холоднее 4 °C) и опустите в воду термометр, который может измерять температуру от 0 °C и выше (годится, например, школьный лабораторный термометр или комнатный). Резервуар термометра должен находиться вблизи дна сосуда (хорошо, если вы укрепите термометр так, чтобы его можно было двигать только вверх и вниз). Теперь осторожно поместите на поверхность воды небольшие кусочки льда слоем 2—4 см и наблюдайте за показаниями термометра. Температура будет понижаться, но когда она станет близкой к 4 °C (она может отличаться на 1—1,5 °, это зависит от качества термометра, то есть его «класса», от наличия примесей в воде и других причин), вы увидите, что столбик термометра остановится. Убедитесь, что он остается неподвижным, а затем осторожно поднимите термометр так, чтобы его резервуар оказался в верхнем слое воды, где находится лед. Вы увидите, что там температура близка к 0 °C. В процессе опыта вам, может быть, придется добавлять лед; делайте это осторожно, чтобы он не опускался вниз и не перемешивался с нижними слоями воды.

Из наших наблюдений следует, что наибольшую плотность вода имеет при 4 °С, при нагревании выше этой температуры и при охлаждении ниже нее плотность воды уменьшается. Это свойство пресной воды (морская вода им не обладает) носит название аномалии теплового расширения (аномалия — неправильность, отклонение от общей закономерности).

На рисунке 1 изображен график зависимости объема воды от температуры (для 1 г воды). Пользуясь им, постройте график зависимости плотности воды от температуры.

Благодаря аномалии теплового расширения воды водоемы с пресной водой не промерзают зимой до дна. По мере наступления холодов воздух над озером, рекой или прудом постепенно охлаждается. Охлаждается и соприкасающийся с ним верхний слой воды. По мере остывания он становится плотнее и опускается на дно — тонет в менее плотной теплой воде. Постепенно придонный слой воды становится все холоднее, и наконец температура его достигает 4 °С. Лежащие над ним слои воды продолжают охлаждаться от 4 °С до 0 °С, но теперь уже плотность их становится меньше, и они не опускаются вниз. Поэтому на дне водоема и зимой сохраняется сравнительно теплый слой воды, в котором и зимуют рыбы, рачки, водоросли.

Но на этом «чудеса» не кончаются, вода не скупится на сюрпризы.

Возьмите две пробирки (или маленькие стеклянные пузырьки) и налейте в одну из них воду, а в другую — расплавленный воск или стеарин. Воск оставьте в комнате — он быстро застынет, а воду придется вынести на мороз или поместить в морозильную камеру холодильника, чтобы она обратилась в лед. И снова вода удивит нас! Воск в процессе отвердевания сожмется, на его поверхности образуется глубокая воронка. А на поверхности льда вы увидите выпуклость (а если пузырек был наполнен водой доверху и закрыт, то лед его даже разорвет).

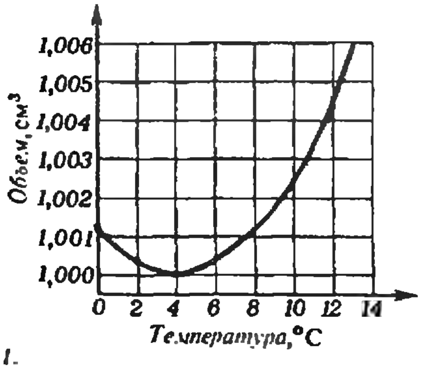


Рис. 1.

Сделаем вывод: при переходе воды из жидкого состояния в твердое плотность ее уменьшается — ведь объем ее увеличивается при неизменной массе. У воска, как и у большинства веществ, наоборот, плотность при отвердевании увеличилась.

Благодаря этой особенности воды лед, покрывающий зимой поверхность озера, не опускается на дно, не тонет. Если бы он не имел такого свойства, то аномалия теплового расширения воды не принесла бы пользы, водоемы промерзали бы до дна. То, что вода имеет наибольшую плотность при 4 °С и что она расширяется при отвердевании, приводит к такому окончательному распределению температур в водоемах, какое показано на рисунке 2.

Возникает, однако, вопрос: почему не выравнивается температура воды в водоеме? Почему за долгую холодную зиму водоемы все же не охлаждаются до дна за счет теплопроводности? Это объясняется тем, что вода имеет очень малую, или, как говорят, плохую теплопроводность.

Слой воды толщиной в 1 м и площадью в 1 м^2 при разности температур его поверхностей, равной 1 °С, передает за одну секунду от более нагретой к менее нагретой поверхности 0,58 Дж энергии. Эта величина — 0,58 Дж/(м^3 · °С · с) — называется коэффициентом теплопроводности воды. Для сравнения укажем значения коэффициентов теплопроводности меди — 395 Дж/(м^3 · °С · с) (в 660 раз больше, чем воды), алюминия — 204 Дж/(м^3 · °С · с).

Плохо проводит тепло и лед. А если поверх льда лежит еще и свежевыпавший снег, а он состоит из мелких кристалликов льда, между которыми находится воздух, — совсем плохой проводник тепла, имеющий коэффициент теплопроводности

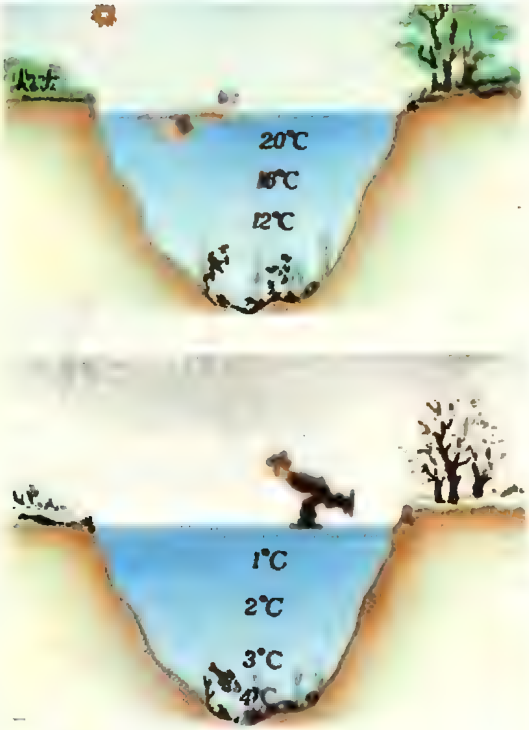


Рис. 2.

0,023 Дж/(м³·°С·с), — то уж такая «шуба» надежно укрывает от мороза нижние слои воды в глубоких водоемах.

Обсудим еще одно замечательное свойство воды. Посмотрите таблицу удельных теплоемкостей тел (учебник для 6—7 классов). Самая большая удельная теплоемкость у воды! Чтобы нагреть 1 кг ее на 1 °С необходимо 4200 Дж энергии. Для керосина при тех же условиях необходимо 2100 Дж, а для ртути — 140 Дж. Значит, и остывая на один градус, килограмм воды отдаст окружающим телам в два раза больше энергии, чем керосин, и в 30 раз больше, чем ртуть. Поэтому при пользовании грелкой не только проще всего, но и выгоднее всего заполнять ее обычной водой.

Подсчитайте, какое количество тепла выделится при остывании грелки с объемом 2 л, от 100 °С до 20 °С в двух случаях: когда грелка заполнена водой и когда она заполнена растительным маслом (плотность воды 1000 кг/м³, масла — 900 кг/м³, их удельные теплоемкости, соответственно, 4200 Дж/(кг·°С) и 2000 Дж/(кг·°С).

А теперь рассмотрим это явление в других масштабах. Летом, в теплую погоду, количество теплоты, поглощаемое от окружающего воздуха водами океанов, морей, больших озер, настолько значительно, что смягчается жара в тех местах суши, которые лежат вблизи больших водоемов. Наступает зима, и вода, остывая, отдает воздуху это громадное количество теплоты. Поэтому зима в таких местах Земли не столь сурова, как в других, лежащих на тех же широтах.

Подсчитаем, например, какое количество теплоты отдает Черное море при смене времен года от лета к зиме. Наблюдения показывают, что средняя температура поверхностных вод Черного моря летом около 25 °С, а зимой около 7 °С. Площадь его поверхности приблизительно равна 420 000 км², а средняя глубина — около 1200 м.

Объем воды в море

$$V = (420\,000 \cdot 10^6)\ \text{м}^2 \cdot 1200\ \text{м} \approx \approx 5 \cdot 10^{14}\ \text{м}^3.$$

Подсчитаем массу воды, зная, что плотность морской воды равна 1030 кг/м³:

$$m = 1030\ \text{кг/м}^3 \cdot 5 \cdot 10^{14}\ \text{м}^3 \approx \approx 5{,}1 \cdot 10^{17}\ \text{кг}.$$

Удельная теплоемкость морской воды равна 4000 Дж/(кг·°С). Следовательно, общее количество теплоты, которое отдает море, остывая, равно:

$$Q = 4000\ \text{Дж/(кг} \cdot {}^\circ\text{С)} \cdot (25-7)\ {}^\circ\text{С} \times \times 5{,}1 \cdot 10^{17}\ \text{кг} \approx 3{,}7 \cdot 10^{22}\ \text{Дж}.$$

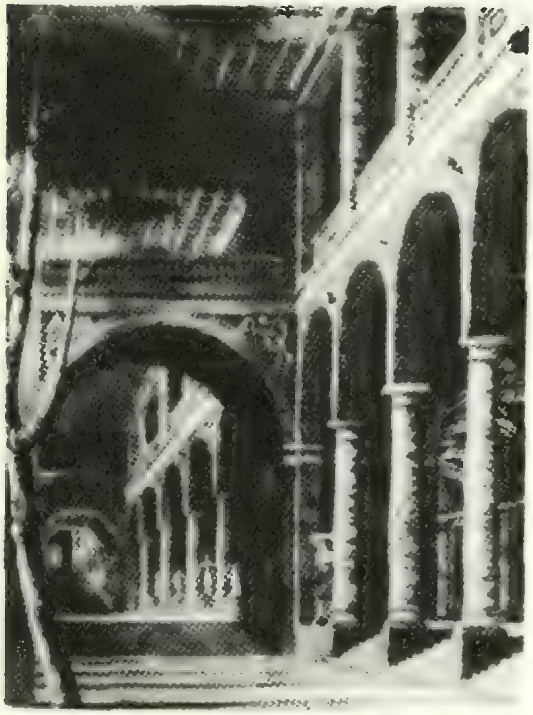
Подсчитайте сами, сколько нужно было бы сжечь каменного угля, чтобы получить такое количество теплоты.

Воду применяют в качестве охладителя для двигателей внутреннего сгорания и реакторов потому, что она поглощает много тепла при нагревании.

Вода хорошо растворяет многие вещества, и поэтому ее можно сделать и соленой, и сладкой. Температура кипения воды такова, что в ней можно сварить большинство потребляемых человеком продуктов...

Мы предлагаем вам посмотреть еще и таблицу удельных теплот парообразования веществ, убедиться, что из всех веществ, указанных в ней, вода имеет наибольшую удельную теплоту, и подумать — какие выгоды (а может быть, неудобства?) приносит это человеку.

Под редакцией Д. Б. ФУКСА



Перспектива

Общеизвестно, что уходящие вдаль параллельные линии кажутся нам сходящимися и что это явление называется перспективой. Перспективой издревле пользовались художники для создания на плоском холсте иллюзии пространственного изображения. Иллюстрацией может служить картина Гонзаго, фотографию которой вы видите перед собой.

Наиболее доступное плоское изображение пространственных объектов — это фотография. Можно считать, что фотографирование — это отображение, ставящее в соответствие каждой точке пространства (точнее, его части) некоторую точку листа бумаги следующим образом. Фиксируется точка — «фокус» Φ — и плоскость — «экран» $Э$ (плоскость, параллельная задней стенке аппарата). Чтобы избежать происходящего в реальном фотоаппарате переворачивания изображения, мы помещаем эту плоскость между фокусом и снимаемым объектом. После этого точке A фотографируемой части пространства ставится в соответствие точка A' пересечения экрана с прямой ΦA (рис. 1).

Посмотрим, как изображаются на экране прямые, плоскости и углы.

1°. *Отрезок прямой, не проходящей через Φ, изображается как прямолинейный отрезок* (отрезок линии пересечения плоскости $Э$ с плоскостью, проходящей через заданный отрезок и точку Φ; рис. 2).

2°. *Уходящий в бесконечность кусок прямой l, не параллельной $Э$ и не проходящей через Φ, изображается как конечный интервал*, кончающийся в точке пересечения плоскости $Э$ с прямой, параллельной l и проходящей через Φ. Эта точка называется *изображением бесконечно удаленной точки прямой l* (см. рис. 2).

3°. *Изображения бесконечно удаленных точек параллельных прямых (не параллельных $Э$) совпадают* («параллели сходятся на бесконечности!»).

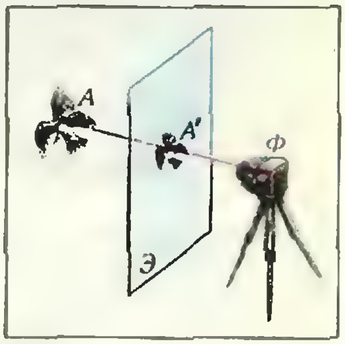


Рис. 1.

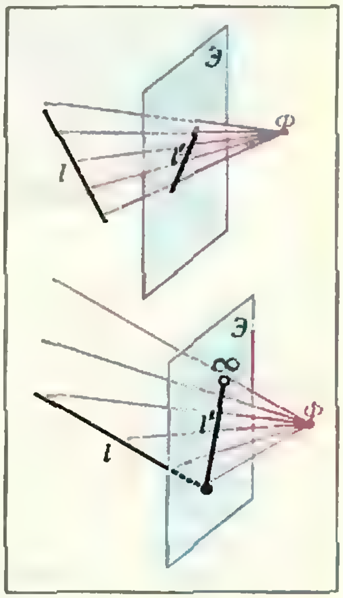


Рис. 2

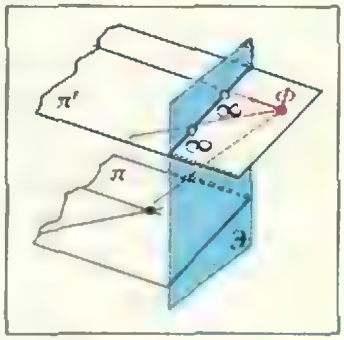


Рис. 3.

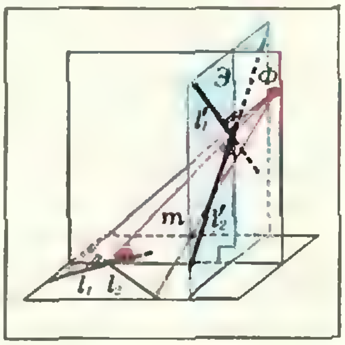


Рис. 4.

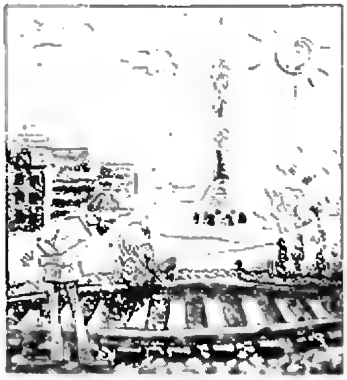
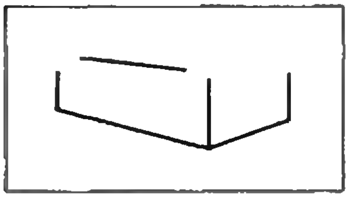


Рис. 5.

М823. *С фотографии срисован контур дома длиной 60 м и шириной 15 м, причем более длинная стена на фотографии слева (остальные части контура на фотографии загорожены веткой дерева).*

Требуется: а) дорисовать контур; б) нарисовать точную карту (проекцию на горизонтальную плоскость), на которой указать контур дома и точку съемки; в) определить высоту дома и высоту, с которой производилась съемка.



$3^1/_2$°. *Изображения параллельных прямых тогда и только тогда параллельны, когда эти прямые параллельны Э.*

4°. Пусть π — плоскость, не параллельная *Э*. Изображения бесконечно удаленных точек прямых, параллельных π, заполняют на *Э* прямую — линию пересечения плоскости *Э* с плоскостью π', параллельной π и проходящей через *Ф*. Эта прямая называется *изображением бесконечно удаленной прямой плоскости* π (рис. 3). Очевидно, у параллельных плоскостей эти изображения одинаковы.

Предположим теперь, что в нашем пространстве выделено «вертикальное направление» (как это имеет место в реальном пространстве) и что экран вертикален (параллелен этому направлению). Изображение бесконечно удаленной прямой горизонтальной плоскости называется *горизонтом* (это название соответствует общепринятому представлению о горизонте). Из сказанного видно, что изображения бесконечно удаленных точек горизонтальных прямых лежат на горизонте. Добавим к этому:

5°. *Горизонт горизонтален* (то есть перпендикулярен изображениям на экране вертикальных прямых).

К сожалению, длины и углы при нашем отображении искажаются. В нескольких случаях это искажение удается проконтролировать:

6°. Если I_1, I_2 — *вертикальные отрезки, находящиеся на равном расстоянии от экрана, i_1, i_2 — изображения этих отрезков на экране, то* $|I_1|:|I_2| = |i_1|:|i_2|$.

7°. *Если I_1, I_2 — вертикальные отрезки равной длины, находящиеся на расстояниях r_1, r_2 от плоскости, параллельной Э и проходящей через Ф, и i_1, i_2 — изображения этих отрезков,* то $|i_1|:|i_2| = r_2:r_1$.

8°. Проведем через *Ф* вертикальную плоскость *B*, перпендикулярную экрану, и прямую *m* в *B*, составляющую с *Э* угол 45°. Пусть *П* — произвольная горизонтальная плоскость, *A* — точка пересечения *m* с *П* и l_1, l_2 — произвольные прямые в *П*, проходящие через *A*. *Тогда угол между изображениями прямых на экране равен углу между этими прямыми* (рис. 4).

Утверждения 6° и 7° очевидны, утверждение 8° следует из того, что углы, равенство которых оно утверждает, симметричны относительно плоскости, перпендикулярной *l* и проходящей через линию пересечения *П* и *Э*.

Заметим, что изучаемая нами «фотографическая перспектива» отличается от «зрительной перспективы». Например, человек, стоящий перед прямолинейной трамвайной линией, скажет, что рельсы видятся ему сходящимися и направо, и налево; значит, он видит их не прямолинейными, что не согласуется с утверждением 1°. Другой человек, рассматривающий Останкинскую телебашню, скажет, что точка, расположенная на половине высоты башни, кажется ему более близкой к верхушке башни, чем к основанию, — это противоречит утверждению 6° (рис. 5). Причина этих различий в том, что наш глаз, в отличие от объектива фотоаппарата, не смотрит неподвижно в одну точку, а быстро пробегает по рассматриваемому предмету (например, когда мы читаем, мы пробегаем глазами каждую строчку). Поэтому зрительный образ предмета складывается в нашем сознании из бесчисленных кусочков, на которых предмет виден под разными углами. Если добавить, что мозг вносит в видимое изображение массу поправок, в том числе и на перспективу, станет ясно, что геометрия зрительного образа для нас чересчур сложна.

Теперь обратимся к задаче М823 из Задачника Кванта, составлявшей задание к этой геометрической страничке.

Решение. Так как изображения вертикальных отрезков на нашем чертеже параллельны, то экран вертикален (см. $3^1/_2$°), и горизонт горизонтален (см. 5°).

а) *Дорисовка контуров дома* (рис. 6). Достраиваем четырехугольник ABB_1A_1. Продолжаем линии AB, A_1B_1 до пересечения в точке *K*. Проводим через точку *K* «горизонт» — прямую, перпендикулярную AA_1 и BB_1. Линию *AC* продолжаем до пересечения с горизонтом в точке *M*. Соединяем A_1 с *M*. Через *C* проводим вертикальную линию до пересечения в точке C_1 с A_1M. Соединяем B_1

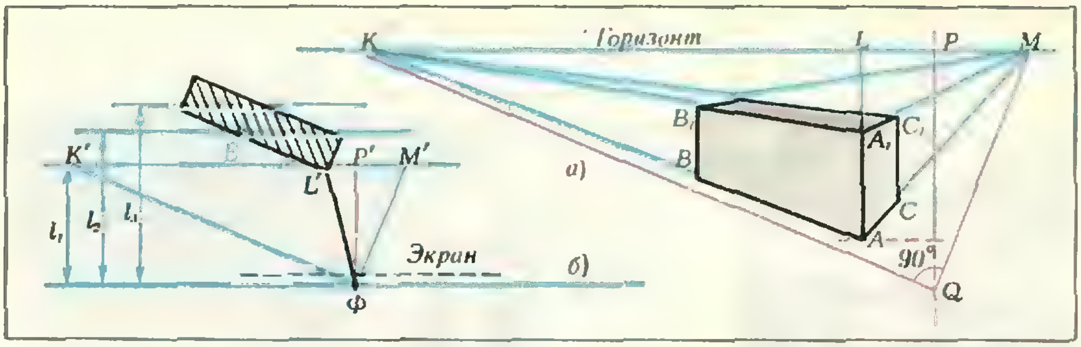


Рис. 6.

с M и C_1 с K. Продолжение линии AA_1 и точка L понадобятся нам в части б), красные линии — в части в).

б) На рисунке 6, б черные линии изображают требуемый план, синие — дополнительные построения; красные линии нужны для части в). Построение использует длины сторон, а также следующие пропорции (мы пользуемся обозначениями рисунков 6, *а* и *б*; прямые $ФK'$, $ФM'$ на рисунке 6, *б* параллельны сторонам дома): $l_2:l_1=AA_1:BB_1$; $l_3:l_1=AA_1:CC_1$; $K'L':L'M'=KL:LM$. (Построение по этим данным проводится без труда и многими разными способами; например, можно начать с того, что нарисовать в заданном масштабе заштрихованный прямоугольник, а затем найти на нем точку E.)

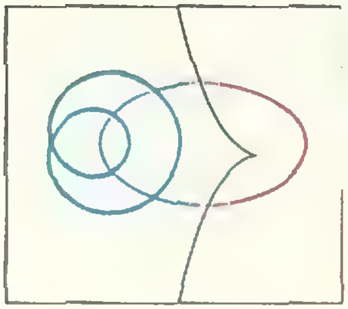
в) Проделаем на рисунках 6, *а* и *б* следующие построения (они показаны на них красным цветом): проведем перпендикуляр $ФP'$ к отрезку $K'M'$, отметим на отрезке KM точку P, такую, что $KP:PM=K'P':P'M'$, и построим точку Q, такую, что $PQ\perp KM$ и $KQ\perp QM$. Тогда

$$AA_1:AL:PQ=h:H:l_1, \tag{1}$$

где h — высота дома и H — высота точки съемки. Поскольку l_1 мы можем найти из рисунка 6, *б*, этого достаточно для нахождения h и H (по нашим измерениям, $l_1\approx 50{,}7$ м, $h\approx 24{,}5$ м, $H\approx 40{,}9$ м). Докажем пропорцию (1). В точке местности, соответствующей точке P' нашего плана, соорудим вертикальную мачту и отметим на ней две точки: первую — на уровне точки съемки, вторую — ниже первой, так, чтобы отрезок между первой и второй точками был виден из фокуса под углом 45° (вторая точка оказалась у нас ниже уровня земли). Длина этого отрезка равна расстоянию от фокуса до мачты, то есть l_1, а на фотографии его изображением служит отрезок PQ (в силу утверждения 8° угол KQM должен быть прямым). Теперь пропорция (1) следует из утверждения 6°.

Задание к следующему выпуску геометрической странички

На чертеже изображены три кривые: красным — эллипс, синим — «вывернутая восьмерка» и черным — полукубическая парабола. Сведите каждую из этих кривых на отдельный лист (можно с увеличением, но обязательно точным!), возьмите на них достаточно частые последовательности точек на примерно одинаковых расстояниях и проведите в этих точках нормали к кривым (нормаль — перпендикуляр к касательной в точке касания); не забудьте, что перпендикуляр располагается по обе стороны от прямой, к которой он восстановлен). Каждый из трех ваших чертежей будет густо разлинован прямыми, идущими в различных направлениях. Вы увидите, что эти прямые не равномерно заполняют чертеж (на одном из них будет даже совершенно пустой кусок). Более того, на каждом из чертежей можно будет различать кривую, к которой прямые сгущаются особенно сильно. Попытайтесь проследить ход этих кривых.



Задачник Кванта

Задачи

M846 — M850; Ф858 — Ф862

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 апреля 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2 — 84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «M846, M847» или «Ф858». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M846. Докажите, что среднее арифметическое длин сторон правильного многоугольника меньше среднего арифметического длин его диагоналей.

В. Ф. Лев

M847. Квадрат расчерчен на $n\times n$ клеток. Двое игроков по очереди обводят по одной стороне одной клетки (дважды обводить одну и ту же сторону нельзя). Кто выиграет при правильной игре, если

а) побеждает игрок, первым построивший замкнутую линию;

б) проигрывает игрок, который вынужден первым построить замкнутую линию.

И. Ветров, А. Коган

M848. а) Постройте график функции

$$f_0(x)=\bigl||x-1|-2||x|-3|\bigr|.$$

б) На рисунке 1 изображены графики трех «кусочно-линейных» функций f_1, f_2, f_3. Запишите формулы для них в виде

$$y=kx+b+c_1|x-a_1|+\ldots+c_m|x-a_m|,$$

где k, b, c_i, a_i — некоторые числа, m — количество точек излома графика (a_i — абсциссы точек излома, $i=1, 2, \ldots, m$).

в) Запишите в таком же виде функцию f_0 из пункта а).

г)* Некоторая функция является комбинацией линейных функций, «модуля» и операции сложения, причем знак модуля использован в ее записи n раз (в примере а) $n=4$). Какое наибольшее число изломов (при каждом n) может иметь ее график?

П. Г. Сатьянов

M849. Из цифр 1, 2, ..., 7, взятых в разном порядке, составлены семь семизначных чисел. Докажите, что сумма седьмых степеней нескольких из этих чисел не может равняться сумме седьмых степеней остальных чисел.

Г. А. Гальперин

M850*. Через точку пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC и отрезка, соединяющего основания двух других биссектрис, проведена прямая, параллельная стороне BC. Докажите, что длина меньшего основания образовавшейся трапеции равна полусумме длин ее боковых сторон.

В. И. Дубровский

Ф858. После удара футболиста мяч полетел в направлении ворот, находящихся на расстоянии $L=32$ м, со скоростью $v=25$ м/с под углом α к горизонту ($\cos\alpha=0{,}8$). Из-за бокового ветра, дующего вдоль ворот перпендикулярно скорости $\vec{v}$, горизонтальное смещение мяча в плоскости ворот оказалось равным $s=2$ м. Найти время полета мяча до плоскости ворот. Мяч не вращается; скорость ветра $u=10$ м/с.

В. И. Чивилёв

Ф859. Шар радиуса R и массы m движется по горизонтальной поверхности под действием постоянной силы натяжения $\vec{F}$ легкой нерастяжимой нити. Точка закрепления нити находится на высоте h над поверхностью (рис. 2), нить все время горизонтальная, шар движется поступательно. При каком максимальном коэффициенте трения это возможно? Чему равно ускорение шара?

Л. Г. Маркович

Ф860. В конической непроводящей лунке с углом 2α при вершине на глубине h находятся два небольших одинаково заряженных тела, связанных нитью (рис. 3); масса каждого тела m. После пережигания нити тела́ начинают скользить вверх по поверхности лунки и вылетают из лунки на высоте H над ее основанием со скоростью v. Коэффициент трения тел о поверхность лунки $\mu=a\,\mathrm{tg}\,\alpha$ ($a<1$). Определить заряды тел.

О. Я. Савченко

Ф861. В колебательном RLC контуре сопротивление невелико, так что колебания затухают в нем слабо. Для получения незатухающих колебаний поступают следующим образом: дважды за период в моменты, когда ток в цепи максимален, катушку индуктивности быстро растягивают от длины l до длины $l+\Delta l$, а в моменты, когда максимален заряд на конденсаторе, катушку быстро сжимают до прежнего размера (параметрический резонанс). При каком относительном изменении длины катушки $\Delta l/l$ колебания в контуре будут незатухающими? Индуктивность катушки считать обратно пропорциональной ее длине.

А. И. Киркинский

Ф862. Линза с фокусным расстоянием F и диаметром d вставлена в отверстие такого же диаметра в экране из светопоглощающего материала ($d/F<2$). Экран расположен так, что оптическая ось линзы совпадает с биссектральной плоскостью и перпендикулярна ребру дву-

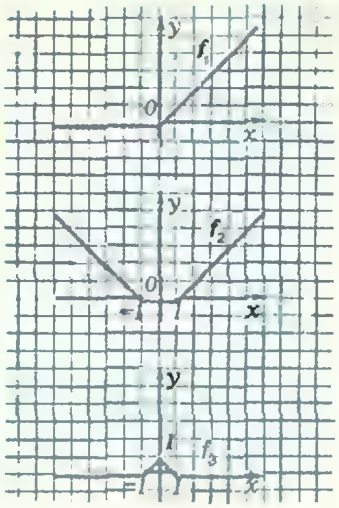


Рис. 1.

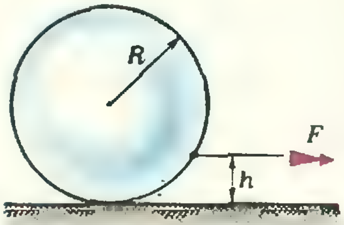


Рис. 2.

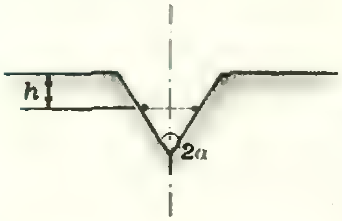


Рис. 3.

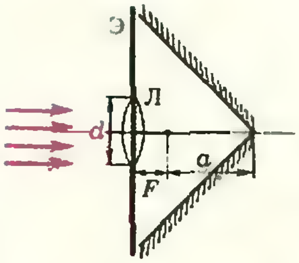


Рис. 4.

гранного прямого угла (рис. 4). Грани угла посеребрены. Расстояние от ребра угла до фокуса линзы равно a $(a>F)$. Экран освещается широким пучком, параллельным оси линзы. Какая доля светового пучка, отраженного от зеркала, выйдет наружу, пройдя через линзу? На каком расстоянии от линзы эти лучи дадут изображение?

А. А. Лапидес

Problems

M846 — M850; P858 — P862

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than April 30 th, 1984, to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M846. Prove that the arithmetic mean of the lengths of the sides of a regular polygon is less than the arithmetic mean of its diagonals.

V. F. Lev

M847. A square is divided into $n\times n$ little squares. Two players in turn draw lines along one side of one square (it is forbidden to draw a line covering a line already drawn). Who wins in errorless play, if

a) the winner is the player who has first constructed a closed line;

b) the loser is the player first forced to construct a closed line.

A. Kogan, I. Vetrov

M848. a) Plot the graph of the function

$$f_0(x) = \left|\left|x-1\right|-2\left|\left|x\right|-3\right|\right|.$$

b) Figure Рис. 1 shows the graphs of three "piecewise-linear" functions f_1, f_2, f_3. Express these functions in the form

$$y=kx+b+c_1\left|x-a_1\right|+\ldots+c_m\left|x-a_m\right|,$$

where k, b, c_i, a_i are numbers, m is the amount of break points of the graph (the a_i are the abcissas of the break points, $i=1, 2, \ldots, m$).

c) Express the function f_0 (see a)) in the same form.

d)* A certain function is the composition of linear functions, sums and absolute values, the absolute value sign being used n times (in a) $n=4$). What is the maximal number of break points (for a given n) that its graph may have?

P. G. Satianov

M849. The digits 1, 2, ..., 7 taken in seven different orders, constitute seven seven-digit numbers. Prove that the sum of the seventh powers of some of these numbers can't equal the sum of seventh powers of the others.

G. A. Galperin

M850*. A line parallel to the side BC of triangle ABC is drawn through the intersection point of the bissector of angle A with the segment joining the points where the other two bissectors intersect the opposite sides. Prove that the length of the lesser base of the trapezium thus obtained equals the half sum of its two lateral sides.

V. N. Dubrovsky

P858. A football is kicked towards the goal from a distance of $L=32$ *m* with velocity $v=25$ *m/s* at an angle α to the horizon ($\cos\alpha=0{,}8$). Due to a side wind, blowing along the goal perpendicularly to $\vec{v}$, the horizontal displacement of the ball in the goal's plane is $s=2$ *m*. Find the ball's time of flight to this plane. The ball does not spin; the wind velocity is $u=10$ *m/s*.

V. I. Chivilev

P859. A ball of radius R and mass m moves on a horizontal surface under a constant force $\vec{F}$ exerted by a light unstretchable string. The string is attached to the ball at a point whose height above the surface is constantly equal to h, the string is constantly horizontal, the ball moves rectilinearly without spinning (see figure Рис. 2). For what maximal friction coefficient is this possible? What is the ball's acceleration?

L. G. Markovich

P860. A cone-shaped receptacle (with vertex angle 2α) contains two identically charged small bodies of mass m tied by a string at depth h (see figure Рис. 3). After the string is burned through, the bodies begin to slide upward along the surface of the receptacle and at the height H above the vertex fly out with velocity v. The friction coefficient of the bodies on the receptacle's surface is $\mu = a \tan \alpha (a < 1)$. Determine the bodies' charges.

O. Ya. Savchenko

P861. The oscillating circuit RLC has a weak resistance so that the oscillations decrease slowly. In order to obtain non-decreasing oscillations, the following is done: twice during each period, when the current in the circuit is maximal in absolute value, the inductivity coil is rapidly stretched from length l to length $l+\Delta l$ and then, when the current is minimal, rapidly contracted to the original length (parametric resonance). For what relative change in the length of the coil $\Delta l/l$ will the oscillations be non-decreasing? The inductivity of the coil is assumed inversely proportional to its length.

A. I. Kirkinsky

P862. A lens of focal distance F and diameter D is put into an aperture of the same diameter in a screen made of light-absorbing material ($D/F < 2$). The screen is placed so that the lens'soptical axis is contained in the bissector plane of a right dihedral angle formed by two silver-covered half-planes and is perpendicular to its edge (see figure Рис. 4). The distance from the lens's focus point to the angle's edge is a ($a > F$). A wide light beam, parallel to the lens'saxis, falls on the screen. What part of the beam will come back through the lens? At what distance from the lens will the returning beam produce an image?

A. A. Lapides

Решения задач

M831 — M835; Ф842 — Ф846

M831. *Пусть P и Q — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, M и N — середины диагоналей AC и BD. Докажите, что если прямые MN и PQ перпендикулярны, то $|BC| = |AD|$*

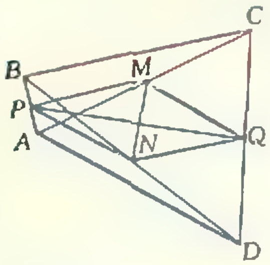
Первое решение. Отрезки PM и NQ — средние линии треугольников ABC и DBC (см. рисунок), поэтому $|PM| = |NQ| = \frac{1}{2}|BC|$. Аналогично, $|PN| = |MQ| = \frac{1}{2}|AD|$. Следовательно, $PMQN$ — параллелограмм, и поскольку его диагонали перпендикулярны, это ромб. Таким образом $|BC| = 2|PM| = 2|PN| = |AD|$.

Второе решение. Выразим векторы $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{MN}$ через $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \end{aligned} \qquad (1)$$

и перемножим скалярно левые и правые части этих равенств:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{4}(|AD|^2 - |BC|^2).$$



Из этого соотношения видно, что $|AD|=|BC|$ тогда и только тогда, когда $\vec{PQ}\cdot\vec{MN}=0$, то есть отрезки PQ и MN перпендикулярны (или вырождаются).

Оба решения без изменений проходят для любой четверки точек A, B, C, D на плоскости или в пространстве. В частности, справедливы, например, такие утверждения: *если у четырехугольника средние линии перпендикулярны, то его диагонали равны; если три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, попарно перпендикулярны, то каждое его ребро равно противоположному* (о таких — «равногранных» — тетраэдрах рассказывалось в статье В. Э. Матизена в «Кванте» № 7 за 1983 г.). Из приведенных решений также видно, что в условиях *задачи прямые* AD и BC образуют равные углы с PQ (и с MN).

В. В. Прасолов, В. Н. Дубровский

◆

М832. *а) Докажите, что для любого натурального $n\geqslant 6$ квадрат можно разрезать на n квадратов (среди которых могут быть и квадраты одинакового размера).*

б) Докажите, что для любого натурального $n\geqslant 100$ куб можно разрезать на n кубов.

а) Если квадрат разрезан на n квадратов, то разрезая любой из них на 4 равных квадрата, мы получим разрезание исходного на $n+3$ квадрата. Поэтому достаточно придумать разрезания для $n=6$ (что дает все $n=3k$, $k=2, 3, \ldots$), для $n=7$ (что дает все $n=3k+1$) и для $n=8$ (что дает все $n=3k+2$). Эти разрезания показаны на рисунке 1.

б) Идея решения такая же, как в пункте а). Разрезая любой из кубов, составляющих исходный куб, на m равных кубов, мы увеличим общее число частей на $m-1$. Нам понадобятся три основных способа разрезания: для $m=8$ (по схеме $2\times2\times2$), для $m=20=3^3-2^3+1$ (8 кубов из 27, образующих куб $3\times3\times3$, заменяются на один размером $2\times2\times2$; рис. 2) и для $m=38=4^3-3^3+1$ (27 кубов в разрезании $4\times4\times4$ заменяются на один размером $3\times3\times3$; рис. 3). Комбинируя эти разрезания по указанному принципу, мы получим, что куб можно разрезать на n кубов для

$$n=1+7k,\ (1+19)+7k,\ (1+2\cdot19)+7k,\ (1+3\cdot19)+7k,$$
$$(1+4\cdot19)+7k,\ (1+37)+7k,\ (1+2\cdot37)+7k$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots).$$

А так как первые слагаемые в этих выражениях — 1, 20, 39, 58, 77, 38 и 75 — меньше 100 и дают при делении на 7 все возможные остатки (соответственно, 1, 6, 4, 2, 0, 3 и 5), среди выписанных чисел содержатся все числа n, $n\geqslant100$. В действительности, как легко понять, среди этих чисел содержатся все числа, больше 70. Подумайте, можно ли еще уменьшить эту границу.

В. А. Ли

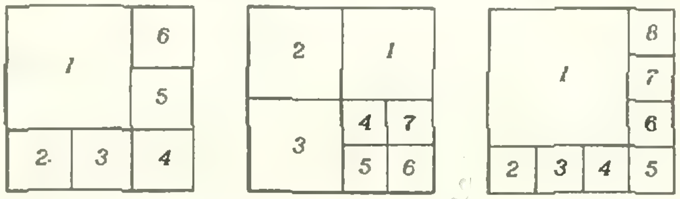


Рис. 1.

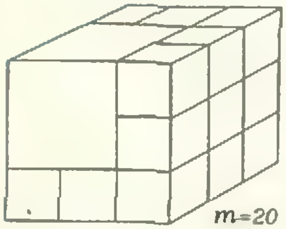


Рис. 2.

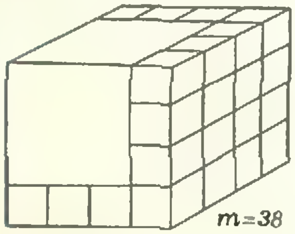


Рис. 3.

М833*. *Последовательность x_n задается условиями:*

$$x_1=2;\ x_{n+1}=\frac{2+x_n}{1-2x_n}\quad(n=1, 2, 3, \ldots).$$

◆

Прежде всего докажем индукцией по n, что $x_n=\operatorname{tg} n\alpha$, где $\alpha=\operatorname{arctg} 2$. При $n=1$ это верно по условию. Пусть теперь $x_n=\operatorname{tg} n\alpha$; тогда

$$x_{n+1}=\frac{2+x_n}{1-2x_n}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg} n\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} n\alpha}=\operatorname{tg}(n+1)\alpha,$$

Докажите, что

а) $x_n \neq 0$ (при всех n);

б) Эта последовательность непериодическая.

что и требовалось. (Это соотношение поясняет и происхождение задачи: она связана с элементарным доказательством иррациональности чисел вида $\operatorname{tg} r\pi$, где r — произвольное рациональное число, не кратное $1/4$.)

а) Заметим, что при любом m

$$x_{2m} = \operatorname{tg} 2ma = \frac{2 \operatorname{tg} ma}{1 - \operatorname{tg}^2 ma} = \frac{2x_m}{1 - x_m^2}. \qquad (*)$$

Теперь можно доказывать утверждение а) от противного. Если $x_n = 0$ и n — четное число, $n = 2m$, то из $(*)$ следует, что $x_m = 0$. Если $n = 2^k(2s+1)$, где k и s — целые неотрицательные числа, то повторяя это рассуждение k раз, получим, что $x_{2s+1} = 0$. Отсюда $(2 + x_{2s})/(1 - 2x_{2s}) = 0$ или $x_{2s} = -2$, то есть в силу $(*)$ $2x_s/(1 - x_s^2) = -2$. Оба корня этого уравнения иррациональны (они равны $(1 \pm \sqrt{5})/2$), но все x_s должны быть рациональными, так как числа $(2 + x)/(1 - 2x)$ при любом рациональном x и число $x_1 = 2$ рациональны. Противоречие.

Попутно отметим, что $x_n \neq 1/2$ ни при каком n (это доказывается вполне аналогично), поэтому последовательность определена при всех n.

б) Докажем, что последовательность x_n не только непериодична, но и вообще принимает каждое свое значение только один раз. Допустим, что это не так, и $x_{n+m} - x_n = 0$ при некоторых n и m, $n, m \geqslant 1$. Поскольку $x_n = \operatorname{tg} na$, получим, что

$$\operatorname{tg}(n+m)a - \operatorname{tg} na = \frac{\sin ma}{\cos(n+m)a \cos na} = 0.$$

Следовательно, $x_m = \operatorname{tg} ma = 0$, а это в силу а) невозможно.

В. Э. Матизен

◆

М834. *Оросительная установка, расположенная в точке O, обслуживает круг радиуса 100 м с центром O. Такими установками нужно полностью орошать квадратное поле 1 км × 1 км.*

а) Бригадир предложил расположить 64 установки в вершинах квадратной сетки со сторонами, параллельными краям поля (рис. 1). В каких пределах может меняться сторона a квадратной сетки?

б) Восьмиклассник Витя утверждает, что можно оросить поле с помощью лишь 46 таких установок. Прав ли Витя?

а) Ответ: длина стороны a квадратов сетки (в метрах) должна быть заключена в пределах

$$122.7 \approx 100(10 - \sqrt{2})/7 \leqslant a \leqslant 100\sqrt{2} \approx 141.4.$$

Углы поля должны отстоять не более, чем на 100 м от ближайших к ним установок. Расстояние между противоположными углами поля равно $1000\sqrt{2}$, а между противоположными угловыми установками — $7a\sqrt{2}$ (рис. 1), поэтому должно выполняться условие

$$1000\sqrt{2} \leqslant 100 + 7\sqrt{2}a + 100,$$

откуда

$$a \geqslant 100(10 - \sqrt{2})/7 \approx 122.65.$$

Центр каждого квадрата сетки должен отстоять от его вершин также не более чем на 100 м, поэтому должно выполняться условие $a/\sqrt{2} \leqslant 100$, откуда $a \leqslant 100\sqrt{2} \approx$ $\approx 141{,}42$. Заметим, что даже при максимальном значении $a = 100\sqrt{2}$ все установки (при их симметричном относительно центра расположении на поле) уместятся в квадрате 1000×1000, поскольку $7\sqrt{2} < 10$.

Если оба условия на a выполнены, то, как легко видеть, все поле будет орошено; удобно нарисовать вокруг каждой установки O квадрат с центром в O и диагональю 200 метров (со стороной $100\sqrt{2} \geqslant a$), — такие квадраты покрывают все поле, и каждая установка поливает свой квадрат.

б) Витя предложил расставлять установки не по квадратной, а по треугольной сетке; на рисунке 2 показано, как разместить ровно $46 = 4 \cdot 7 + 3 \cdot 6$ установок, орошающих все поле; на этом рисунке $R = 100$, $b = 100\sqrt{3} \approx 173{,}2$ м. Пользуясь той же идеей, можно расставить даже $45 =$ $= 4 \cdot 6 + 3 \cdot 7$ установок (рис. 3).

На этих рисунках ряды по 6 и 7 установок отстоят друг от друга на $3R/2$, причем крайние (верхний и нижний) ряды отстоят от краев поля всего на $R/2$, а этого как раз достаточно, чтобы все точки этих краев были политы; удобно, как это сделано на рисунке 3, нарисовать шести-

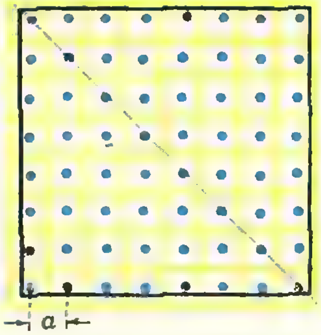


Рис. 1.

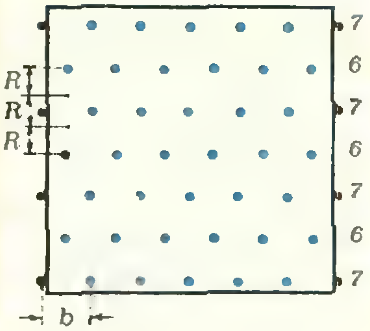


Рис. 2.

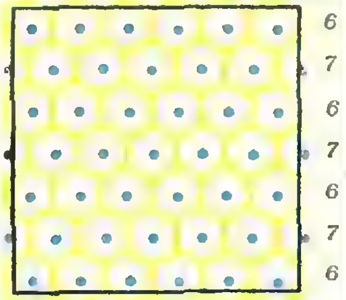


Рис. 3.

угольники со стороной R, каждый из которых покрывается своей установкой.

В горизонтальном направлении ряд из 6 установок обслуживает расстояние $6b = 600\sqrt{3} \approx 1039{,}23 > 1000$, так что и в этом направлении все обстоит благополучно. Правда, в рядах из 7 установок на рисунках 2 и 3 крайние выступают за границы поля, но это легко исправить — можно просто сдвинуть каждую из них на край поля или равномерно уменьшить все расстояния по горизонтали.

С различными проявлениями «оптимальности» шестиугольной решетки в математических задачах и физических явлениях можно познакомиться, например, в книге Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп» из серии Библиотечка «Квант» (М., 1981). Напишите нам, встречались ли вам интересные ее использования в живой природе (не считая, конечно, всем известных пчелиных сот), в технике.

Н. Б. Васильев

◆

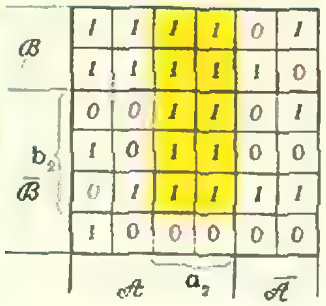
М835*. *На однокруговой шахматный турнир приехало n шахматистов из страны A и n шахматистов из страны B. Оказалось, что как бы ни разбить шахматистов на пары (чтобы друг с другом играли шахматисты разных стран), найдется хотя бы одна пара шахматистов, которые уже встречались ранее друг с другом. Докажите, что можно выбрать a шахматистов из страны A и b шахматистов из страны B так, что каждый из выбранных a шахматистов встречался с каждым из выбранных b шахматистов, а $a+b>n$.*

Доказательство проведем индукцией по n.

При $n=1$ утверждение задачи очевидно ($a=b=n=1$). Теперь надо доказать его для $n=k$, предполагая, что оно верно для всех $n<k$.

В случае, когда каждый из k шахматистов, прибывших из страны A, встречался ранее с каждым, прибывшим из B, доказывать нечего ($a=b=k$). Поэтому будем считать, что какие-то два шахматиста — α из A и β из B — друг с другом не встречались. Тогда остальные шахматисты удовлетворяют условию задачи для $n=k-1$. (Если составить из них пары и присоединить к ним (α, β), то по условию в одну из этих пар, но заведомо не в (α, β), попадут встречавшиеся шахматисты.) По предположению индукции можно образовать группу $\mathbf{A}$ из a_1 шахматистов страны A и группу $\mathbf{B}$ из b_1 шахматистов страны B так, что каждый шахматист группы $\mathbf{A}$ встречался с каждым из $\mathbf{B}$ и $a_1+b_1>k-1$. Если окажется, что $a_1+b_1>k$, — все в порядке ($a=a_1$, $b=b_1$). Остается рассмотреть случай $a_1+b_1=k$; рассуждения иллюстрирует рисунок на полях.

Пусть $\mathbf{A}$ — группа из $k-a_1=b_1$ шахматистов из A, не вошедших в группу $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — группа шахматистов из B, не вошедших в $\mathbf{B}$. Устроим два новых турнира — для групп $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ ($n=a_1$) и $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ ($n=b_1$). Один из этих турниров (для определенности, с участием групп $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$) удовлетворяет условию задачи. (В противном случае можно так составить пары из шахматистов групп $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и, независимо, групп $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, что ни в одну из этих пар не попадут встречавшиеся шахматисты, а это противоречит условию для «общего» турнира.) По предположению индукции в группе $\mathbf{A}$ можно найти a_2 шахматистов, каждый из которых встречался с каждым из каких-то b_2 шахматистов группы $\mathbf{B}$, причем $a_2+b_2>a_1$. Кроме того, по выбору групп $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ каждый из этих $a=a_2$ шахматистов встречался с каждым из b_1 шахматистов группы $\mathbf{B}$. Таким образом мы можем выбрать $a=a_2$ шахматистов из страны A и $b=b_1+b_2$



1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0

𝓑
b_2
$\bar{\mathcal{B}}$
𝓐
a_2
$\bar{\mathcal{A}}$

В этой «таблице встреч» каждый столбец отвечает шахматисту, прибывшему из страны A, а строка — шахматисту из B (здесь $n=6$). Единицы ставятся на пересечении строк и столбцов, отвечающих встречавшимся ранее шахматистам, на остальных местах — нули. Желтым цветом отмечены клетки, отвечающие парам выбранных шахматистов, красным — одна из максимальных систем независимых нулей.

из страны B, каждый из которых встречался со всеми выбранными шахматистами другой страны. При этом $a+b=a_2+b_2+b_1>a_1+b_1=k$, что и требовалось.

Приведенный нами рисунок также поясняет, как свести задачу к следующей теореме Д. Кёнига о матрицах*) (то есть прямоугольных таблицах), составленных из нулей и единиц:

Назовем линией любую строку или столбец таблицы; два числа в таблице, не лежащие на одной и той же линии, назовем независимыми. Тогда минимальное число линий, содержащих все нули, равно максимальному числу независимых нулей.

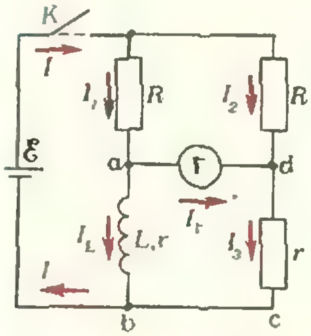
В нашем случае число строк и столбцов в матрице («таблице встреч» — см. рис.) одинаково (и равно n); условие задачи означает, что в любом наборе независимых чисел есть единица, то есть максимальное число независимых нулей меньше n. По теореме Кёнига можно указать меньше n линий, содержащих все нули. Тогда на пересечениях остальных линий — a столбцов и b строк, где $a+b>n$, — стоят единицы, а это, по существу, и утверждается в задаче.

Еще одно эквивалентное утверждение, часто используемое в олимпиадных задачах, — теорема Холла о различных представителях (или «теорема о сватовстве»): *пусть каждый из n юношей знаком с некоторыми из n девушек, причем для любых k юношей ($k=1, 2, \dots, n$) имеется по крайней мере k девушек, знакомых хотя бы с одним из них; тогда их можно разбить на пары так, что в каждой паре будут знакомые девушка и юноша.* Эту теорему в разных формулировках и с несколькими доказательствами можно найти в статьях М. И. Башмакова («Квант», 1970, № 4, с. 14) и В. Н. Вагутена («Квант», 1974, № 11, с. 23).

Л. Д. Менихес

◆

Ф842. *В схеме, изображенной на рисунке, в некоторый момент замыкают ключ К. Найти установившееся значение тока, текущего через катушку с индуктивностью L и активным сопротивлением r. Какой заряд протечет через гальванометр Г после замыкания ключа? Параметры элементов, указанные на рисунке, считать заданными. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением гальванометра пренебречь.*



В установившемся режиме, когда в схеме будет течь постоянный ток, а катушка индуктивности будет обладать только активным сопротивлением r, схема будет симметричной. В этом случае ток через гальванометр равен нулю, а токи в правой и левой частях разветвленного участка схемы будут равны друг другу и равны $\mathcal{E}/(R+r)$. Следовательно, в установившемся режиме ток через катушку будет равен

$$I_L(\infty)=\mathcal{E}/(R+r).$$

Пусть теперь в некоторый произвольный момент времени через элементы схемы текут такие токи, как это показано на рисунке. Поскольку сопротивление гальванометра равно нулю, при любых конечных значениях тока через гальванометр падение напряжения на нем будет также равно нулю, и следовательно, в любой момент времени токи I_1 и I_2 будут равны.

Согласно закону сохранения заряда,

$$I_1=I_Г+I_L, \tag{1}$$

$$I=I_1+I_2=2I_1=I_L+I_3. \tag{2}$$

Согласно закону Ома для контура abcd,

$$I_Lr-I_3r=-L\frac{dI_L}{dt}. \tag{3}$$

Из уравнений (3) и (2) получаем:

$$I_1-I_L=\frac{L}{2r}\,\frac{dI_L}{dt}.$$

Используя уравнение (1), найдем связь тока $I_Г$ через гальванометр с током I_L через катушку индуктивности:

---

*) См., например, Холл М. *Комбинаторика*. М.: Мир, 1970.

$$I_\Gamma = \frac{L}{2r}\,\frac{dI_L}{dt}.$$

Заряд, протекший через гальванометр, очевидно, будет равен

$$Q=\int\limits_0^\infty I_\Gamma dt=\int\limits_0^\infty \frac{L}{2r}\,\frac{dI_L}{dt}\,dt=\frac{L}{2r}\int\limits_0^\infty dI_L=$$

$$=\frac{L}{2r}\,[I_L(\infty)-I_L(0)]=\frac{L\mathscr{E}}{2r\,(R+r)}.$$

Здесь $I_L(0)$ — ток через катушку в начальный момент времени. До замыкания ключа ток I_L был равен нулю; следовательно, и после замыкания он также будет равен нулю: $I_L(0)=0$.

В. В. Можаев

◆

Ф843. *Колесо радиуса R, расположенное на высоте H над землей, вращается с угловой скоростью ω. С колеса срывается капля и падает на землю в точке B под центром колеса (рис. 1). Найти время падения капли и точку A колеса, в которой капля отрывается.*

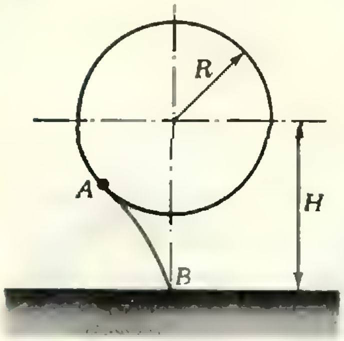


Рис. 1

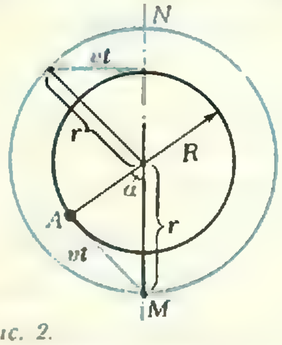


Рис. 2.

Чтобы найти время падения капли, представим себе, что одновременно с каждой точки колеса срываются капли, и рассмотрим движение этих капель в системе отсчета, падающей с ускорением $\vec{g}$. В этой системе капли движутся по инерции со скоростью $v=\omega R$. Через время t они будут находиться на окружности радиуса

$$r=\sqrt{R^2+v^2t^2}$$

(рис. 2). Чтобы найти положение капель в неподвижной системе отсчета, связанной с землей, эту окружность надо опустить на расстояние

$$s=gt^2/2.$$

Ясно, что в тот момент, когда $r+s=H$, капля долетит до точки B на земле. Из условия

$$\sqrt{R^2+v^2t^2}+\frac{gt^2}{2}=H$$

находим:

$$t^2_{\text{пад}}=\frac{2}{g^2}\left((v^2+gH)\pm\sqrt{v^4+2gHv^2+g^2R^2}\right).$$

В этой формуле нас устраивает только знак «минус», так как второй корень соответствует приходу в точку B той капли, которая находится в точке N окружности (см. рис. 2), а эта капля задерживается колесом. Подставляя $v=\omega R$, находим:

$$t_{\text{пад}}=\frac{\sqrt{2\left(\omega^2R^2+gH-R\sqrt{\omega^4R^2+2gH\omega^2+g^2}\right)}}{g}. \qquad (*)$$

Зная время падения капли до точки B, легко найти точку ее отрыва от колеса. Действительно, в падающей системе отсчета эта капля через время $t=t_{\text{пад}}$ после отрыва должна оказаться в точке M окружности (см. рис. 2). Следовательно, она отрывается в точке A такой, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{vt_{\text{пад}}}{R}=\omega t_{\text{пад}},$$

где $t_{\text{пад}}$ определяется формулой (*).

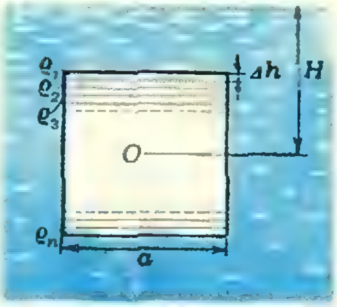
А. Н. Григоренко

◆

Ф844. *В сосуд, наполненный смесью жидкостей, плотность которой изменяется с глубиной по закону $\varrho=\varrho_0+\alpha h$, опускают тело массы m и объема V. Тело целиком погружается в жидкость. На*

Пусть в состоянии равновесия центр тяжести куба, погруженного в смесь, находится на глубине H. Сила тяжести, действующая на куб, уравновешивается выталкивающей силой, равной численно весу смеси в объеме куба.

Чтобы найти этот вес, разобьем мысленно жидкость в объеме куба на n тонких горизонтальных слоев *какой глубине оно окажется, если имеет форму куба? шара?*



толщины Δh таких, что в пределах каждого слоя плотность жидкости можно считать постоянной (см. рисунок). Тогда вес жидкости в объеме куба равен

$$P = gS\cdot\Delta h(\varrho_1+\varrho_2+\ldots+\varrho_n)$$

(S — площадь грани куба). Поскольку плотность смеси меняется с глубиной по линейному закону, сумма, стоящая в скобках, равна $(\varrho_1+\varrho_n)n/2$. Если ϱ_1 — плотность у верхней грани куба, а ϱ_n — у нижней, то

$$\varrho_1=\varrho_0+\alpha\left(H-\frac{a}{2}\right),\qquad \varrho_n=\varrho_0+\alpha\left(H+\frac{a}{2}\right),$$

где a — длина ребра куба. Таким образом,

$$P=gS\cdot\Delta h\cdot n\,\frac{\varrho_1+\varrho_n}{2}=gSa(\varrho_0+\alpha H)=gV(\varrho_0+\alpha H).$$

Теперь из условия равновесия куба —

$$mg=gV(\varrho_0+\alpha H)$$

— найдем глубину его погружения:

$$H=\frac{m-\varrho_0 V}{\alpha V}.$$

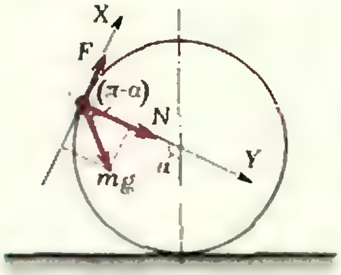
Аналогичным образом можно найти глубину погружения шара. Сделав это самостоятельно, вы убедитесь, что шар погружается в смесь на ту же глубину, что и куб.

Из приведенного решения понятно, что если тело массы m и объема V имеет такую форму, что площади его горизонтальных сечений, взятых на одинаковом расстоянии по вертикали от некоторой точки O тела, равны, то при полном погружении тела в смесь точка O будет находиться на глубине $H=\dfrac{m-\varrho_0 V}{\alpha V}$.

Л. Г. Маркович

◆

Ф845. *Внутрь камеры автомобильного колеса радиуса R попал небольшой камешек. При какой минимальной скорости автомобиля камешек будет вращаться вместе с колесом, если коэффициент трения камешка о камеру равен μ?*



На камешек внутри камеры действуют три силы (см. рисунок): сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}$. Чтобы камешек вращался вместе с колесом, эти силы должны сообщать ему центростремительное ускорение v^2/R, где v — линейная скорость вращения колеса, равная скорости движения автомобиля (колеса вращаются без проскальзывания).

Запишем уравнение движения камешка в проекциях на оси X и Y (см. рисунок):

$$F-mg\sin(\pi-\alpha)=0, \qquad (1)$$

$$N+mg\cos(\pi-\alpha)=mv^2/R. \qquad (2)$$

Из уравнения (1) находим:

$$F=mg\sin\alpha.$$

Абсолютное значение силы трения не может быть больше μN, и следовательно, $N\geqslant F/\mu$. Минимальному значению v соответствует, как видно из уравнения (2), $N=\dfrac{F}{\mu}=\dfrac{m}{\mu}g\sin\alpha$. С учетом этого получаем:

$$v^2_{\min}=Rg\left(\frac{\sin\alpha}{\mu}-\cos\alpha\right).$$

Выражение, стоящее в скобках, минимально, когда производная функции $f(\alpha)=\dfrac{\sin\alpha}{\mu}-\cos\alpha$ равна нулю, то есть

$$\frac{\cos\alpha}{\mu}+\sin\alpha=0 \Rightarrow -\mu=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Тогда

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{-\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Следовательно,

$$v_{\min} = \sqrt{gR\left(\frac{1}{\mu\sqrt{1+\mu^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)} = \sqrt{\frac{gR}{\mu}\sqrt{1+\mu^2}}.$$

А. В. Лепин

◆

Ф846. *Почему мощные двигатели постоянного тока следует включать через пусковой реостат?*

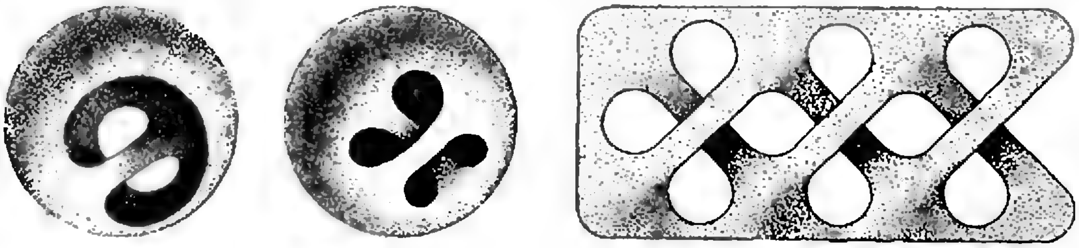
При нормальной работе двигателя ток в его обмотке равен

$$I = \frac{U - \mathcal{E}_и}{r_я},$$

где U — напряжение сети, $\mathcal{E}_и$ — ЭДС индукции, возникающая при вращении якоря двигателя в магнитном поле, $r_я$ — сопротивление обмотки якоря, которое невелико. Если двигатель включать прямо в сеть, без пускового реостата, то в момент пуска двигателя, когда якорь еще неподвижен и $\mathcal{E}_и = 0$, пусковой ток в обмотке $I_п = U/r_я$ будет намного превышать нормальный рабочий ток. Чтобы уменьшить значение $I_п$ и предотвратить перегрев обмотки, в цепь якоря вводят пусковой реостат, который затем выводят.

А. В. Кубышкин

Эти замысловатые поверхности, придуманные Ю. В. Котовым, являются «пленками» (см. статью «Классификация пленок» на с. 16). Определите, к какому классу каждая из них относится.



Задачи для исследования

1. Имеется несколько гирек. Известно, что если любую из них убрать, то остальные можно разделить на две группы равной массы.

Докажите, что число гирек нечетно, если

а) массы гирек — целые числа;

б) массы гирек — любые действительные числа.

в) Из какого наименьшего числа гирек с различными целочисленными массами может состоять набор, удовлетворяющий условиям задачи?

г) Сколько гирек может входить в такой набор?

В. В. Произволов,
Э. И. Туркевич

2. Известно, что квадрат любого целого числа при делении на 3 дает остаток 0 или 1, а при делении на 5 — 0, 1 или 4.

а) Найдите все натуральные k, такие, что остаток от деления квадрата любого целого числа на k — тоже квадрат.

б) Попробуйте найти такие k, что остаток от деления куба любого целого числа на k — тоже куб.

С. А. Голдобин

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Маленькие хитрости маленьких

Оригинальное решение

— Лиза, реши задачку. Тебе семь лет, а твоей подружке Оле на два года меньше. Сколько лет Оле?

— Пять лет.

— Правильно. А как ты решала?

— Я вчера была у нее на дне рождения!

Кухня погоды

В который раз мама объясняет шестилетней Марине, почему идет дождь. Сейчас привела ее на кухню:

— Вот смотри. Когда вода кипит в кастрюле, то на ее крышку садится пар, а потом он, охлаждаясь, спадает назад в кастрюлю каплями. Так и дождь.

Девочка просияла:

— Наконец-то я поняла, почему идет дождь! Его люди варят!

Заниматься надо!

Хороший солнечный день. Все дети играют во дворе, только одна трехлетняя Лена рассматривает картинки в книжке.

— Доченька, иди погуляй.

— Нет, заниматься надо! — строго ответила девочка.

Съедобные ...трубы

— Папа, что это за машина? — спросил четырехлетний Дима.

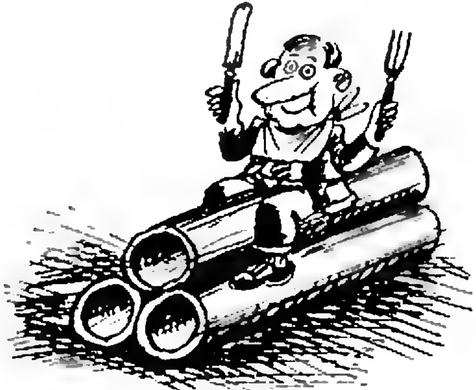
— Сварочный аппарат.

— А что он делает?

— Трубы варит.

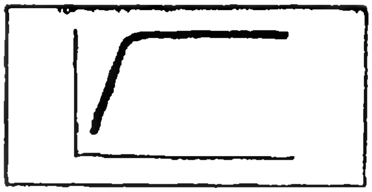
— А когда он их сварит, кто их будет есть?

В. А. Миронов

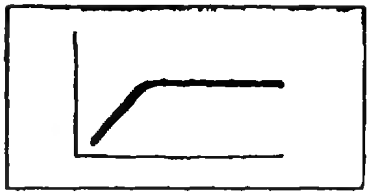


Как важно быть точным

На семинаре по ядерной физике Э. Ферми, пояснив зависимость эффективного сечения рассеяния нейтронов от их энергии, изобразил на доске следующий график:



Затем задумался, извлек из кармана маленькую логарифмическую линейку, быстро произвел какие-то вычисления и со словами «немного пониже» стер старую кривую и провел новую.



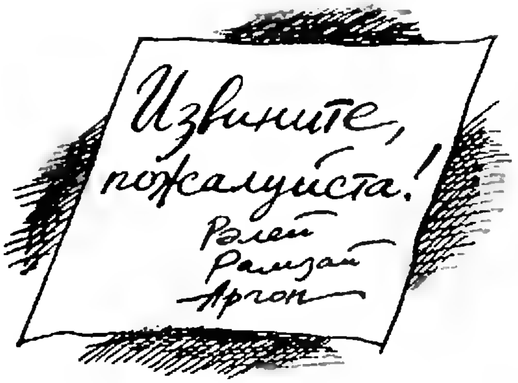
После минутного молчания аудитория разразилась смехом (ведь никаких численных значений ни на том, ни на другом графике проставлено не было). Ферми сначала не понял, в чем дело, но затем понимающе улыбнулся и продолжил лекцию.

(По материалам журнала «American journal of physics», 1976, v. 44, № 3, p. 235.)

Извините за аргон

Когда в 1895 году знаменитые английские ученые Рэлей и Рамзай открыли первый инертный газ — аргон (за это открытие позднее им была присуждена Нобелевская премия) и ввели «нулевую» колонку для благородных газов в таблицу Менделеева, большинство ученых отнеслись к этому достижению скептически. Чрезвычайно терпеливый и корректный Рэлей ответил: «Без сомнения, результат очень странен. В самом деле, я вижу некоторые признаки того, что аномальные свойства аргона преподносятся как своего рода обвинения против нас. Но мы работали очень добросовестно. Факты были слишком за нас, и все, что мы можем сделать сейчас, это извиниться за самих себя и за газ».

(По материалам журнала «Успехи физических наук», 1966, т. 88, № 1, стр. 149.)



Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1983 году.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} > \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2\left(\cos 2x+\cos\frac{x}{2}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\sin x+\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

3. В треугольнике ABC с периметром $2p$ длина стороны AC равна a и величина острого угла ABC равна α. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK.

4. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}-5\right|-\left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}-7\right|+\left|24\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}+13\right|=11-\sqrt{\sin\frac{\pi(x-2y-1)}{3}}, \\ 2(x^2+(y-a)^2)-1=2\sqrt{x^2+(y-a)^2-\frac{3}{4}} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение

5. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Точка F взята на ребре AD, а точка N взята на ребре DB так, что $|DN|:|NB|=1:2$. Через точки F, N и точку пересечения медиан треугольника ABC проведена плоскость, пересекающая ребро CB в точке H. Через точку H проведена плоскость, параллельная плоскости (ADB) и пересекающая ребра CA и CD в точках L и K соответственно. Известно, что $|CH|:|HB|=(|AF|:|FD|)^2$ и что радиус шара, вписанного в пирамиду $CHLK$, равен R. Найдите отношение площади треугольника ABC к сумме площадей всех граней пирамиды $ABCD$, если длина перпендикуляра, опущенного из вершины D на плоскость ABC, равна h.

Вариант 2

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{16-x^2}\cdot\log_2(x^2-5x+6).$$

2. Найдите все решения уравнения*)

$$\frac{1+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x}{2\sin x\cdot\cos x-1}.$$

3. Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости неравенством

$$2|x|+|y+2x+1|<5.$$

4. Угол при основании равнобедренного треугольника равен $\pi/6$. Построен круг радиуса $2/\sqrt{3}$ с центром в вершине треугольника. Определите отношение площади общей части треугольника и круга к площади треугольника, если длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна $\sqrt{7}$.

5. При всех a решите уравнение

$$(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=(a-1)(a+2)$$

и определите, при каких a оно имеет ровно одно решение.

6. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{2-|y|}\times(5\sin^2 x-6\sin x\cdot\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33})=\arcsin^2 x+\arccos^2 x-\frac{5}{4}\pi^2.$$

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin 3x+\sin 5x=\sin 4x.$$

2. Решите уравнение

$$|5x^2-3|=2.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{3}{2}\log_4\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2}\log_2 x>1.$$

4. После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7, а в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найдите это двузначное число.

5. Прямая, параллельная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, пересекает катет AC в точке D, а катет BC — в точке E, причем длина отрезка DE равна 2, а длина отрезка BE равна 1. На гипотенузе взята точка F так, что длина отрезка BF равна 1. Известно также, что величина угла FCB равна α. Найдите площадь треугольника ABC.

6. Дан трехгранный угол с вершиной O, у которого величина каждого из плоских углов равна φ. Плоскость α пересекает ребра этого

---

*) Слова «решите уравнение», «найдите все решения уравнения», «найдите все действительные решения уравнения» (варианты 8, 9) и «найдите все x, удовлетворяющие уравнению» (варианты 10, 11) означают одно и то же; аналогично — для систем. (*Прим. ред.*)

трехгранного угла в точках A, B и C, причем отрезки OA и OB равной длины, а отрезок OC короче отрезка OA. Известно, что величина двугранного угла между плоскостью α и гранью OAB равна β. Два шара расположены по разные стороны от плоскости α так, что каждый шар касается всех граней трехгранного угла и плоскости α. Найдите:
1) величину угла между прямой, проходящей через центры шаров, и плоскостью грани OAB,
2) отношение радиусов указанных шаров.

Вариант 4
(химический факультет)

1. Найдите все решения уравнения

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+$$
$$+4\sin x=2+\sqrt{2}\,(1-\sin x).$$

2. Решите неравенство

$$(\sqrt{x^2-4x+3}+1)\log_5\left(\frac{x}{5}\right)+$$
$$+\frac{1}{x}(\sqrt{8x-2x^2-6}+1)<0.$$

3. Треугольная призма $ABCA'B'C'$ с нижним основанием ABC и боковыми ребрами AA', BB', CC' рассечена плоскостью, проходящей через точки E, F, C, где точка E является серединой ребра AA', и точка F лежит на ребре BB', причем $|BF|:|FB'|=1:2$. Найдите объем части призмы $ABCA'B'C'$, заключенной между секущей плоскостью и нижним основанием этой призмы, если известно, что объем призмы равен V.

4. Найдите координаты точки, лежащей на графике функции $y=1+\cos x$ при $0\leqslant x\leqslant\pi$ и наименее удаленной от прямой $x\sqrt{3}+2y+4=0$.

5. Значениями переменных x, y являются действительные числа. Найдите все целые значения n, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 6x^2+24y(x+y)+2(3n-2)x+ \\ +4(3n-2)y+3=0, \\ 4(x^2+y^2)+(4n+2)y+2n^2= \\ =8xy+(4n+2)x+\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

имеет решение. При найденных целых значениях n найдите все решения этой системы.

Вариант 5
(биологический факультет)

1. Решите уравнение

$$4\cos^3 x+3\sqrt{2}\sin 2x=8\cos x.$$

2. Найдите все значения x, при которых производная функции

$$y(x)=3x^3\cdot\ln x-36x\cdot\ln x-7x^3+108x$$

равна нулю.

3. Решите неравенство

$$8+6|3-\sqrt{x+5}|>x.$$

4. Площадь трапеции $ABCD$ равна 6. Пусть E — точка пересечения продолжений боковых сторон этой трапеции. Через точку E и точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, которая пересекает меньшее основание BC в точке P, а большее основание AD — в точке Q. Точка F лежит на отрезке EC, причем $|EF|:|FC|=|EP|:|EQ|=1:3$. Найдите площадь треугольника EPF.

5. Найдите все значения b, при которых оба неравенства

$$2b\cdot\cos 2(x-y)+8b^2\cdot\cos(x-y)+$$
$$+8b^2(b+1)+5b<0,$$
$$x^2+y^2+1>2bx+2y+b-b^2$$

выполняются при любых x и y.

Вариант 6
(факультет почвоведения)

1. Поле разделено на три участка. За день были вспаханы половина первого участка и 3/4 второго участка, а третий участок, который составляет четвертую часть всего поля, был вспахан полностью. Вспаханная за день площадь поля в два раза больше площади второго участка. Какую часть площади поля составляет площадь, вспаханная за день?

2. Решите уравнение

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos 2x=1.$$

3. Найдите действительные x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x+2^{y-1}=3, \\ 4x+4^{y}=32. \end{cases}$$

4. В треугольнике ABC биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке K. Известно, что $|BC|=2$, $|KC|=1$, $|BK|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Найдите площадь треугольника ABC.

5. Найдите все значения α, которые удовлетворяют условию $2<\alpha<5$ и при которых уравнение

$$\log_2(3-|\sin\alpha x|)=\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)$$

относительно x имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $2\leqslant x\leqslant 3$.

Вариант 7
(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos^2 2x-5\sin^2 x+1=0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_2(\sqrt{x^2-4x}+3)>$$
$$>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}\right)+1.$$

3. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите площадь треугольника CKB, если длина катета AC равна b и величина угла ABC равна β.

4. Решите систему

$$\begin{cases} 2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3}=3^{-y-4}, \\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2\leqslant 8. \end{cases}$$

5. Каждое из ребер треугольной пирамиды $ABCD$ имеет длину 1. Точка P на ребре AB, точка Q на ребре BC и точка R на ребре CD взяты так, что длина отрезка AP равна $\frac{1}{2}$, длина отрезка BQ равна $\frac{1}{3}$ и длина отрезка CR равна $\frac{1}{3}$. Плоскость PQR пересекает прямую AD в точке S. Найдите величину угла между прямыми SP и SQ.

Вариант 8
(отделение геофизики геологического факультета)

1. Найдите все действительные решения уравнения

$$(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23).$$

2. В треугольнике ABC угол BAC — прямой, длины сторон AB и BC равны, соответственно, 1 и 2. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке L, G — точка пересечения медиан треугольника ABC. Что больше — длина BL или длина BG?

3. Решите неравенство

$$\log_{\sin\frac{\pi}{3}}(x^2-3x+2)\geqslant 2.$$

4. Найдите все пары действительных чисел x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 3\sin 3x+\cos y=-4, \\ x+y=\dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

5. Согласно расписанию, катер проходит по реке, скорость течения которой 5 км/ч, путь из A в D длиной 15 км за 1 час. При этом, выходя из пункта A в 12 часов, он прибывает в пункты B и C, отстоящие от A на расстояние 11 км и 13 км соответственно, в 12 ч 20 мин и в 12 ч 40 мин. Известно, что если бы катер двигался из A в D без остановок с постоянной скоростью v (относительно воды), то сумма абсолютных величин отклонений от расписания прибытия в пункты B, C, D не превышала бы уменьшенного на полчаса времени, необходимого катеру для прохождения 5 км со скоростью v в стоячей воде. Какой из пунктов — A или D — находится выше по течению?

6. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, в котором длины сторон AB и AC равны 1, и косинус угла BAC равен $\frac{4}{5}$. Ребро SA перпендикулярно ребрам AB и AC, угол BAC вдвое больше угла BSC. Внутри пирамиды находится прямой круговой цилиндр, образующая которого параллельна BC. Какова наибольшая возможная площадь боковой поверхности такого цилиндра?

Вариант 9
(отделение общей геологии геологического факультета)

1. Найдите все действительные решения уравнения

$$(x+1)\sqrt{x^2+x-2}=2x+2.$$

2. В треугольнике ABC угол BAC — прямой, длины сторон AB и BC равны, соответственно, 1 и 3. Точка K делит сторону AC в отношении $7:1$, считая от точки A. Что больше — длина AC или длина BK?

3. Решите неравенство

$$\log_3(5x^2+6x+1)\leqslant 0.$$

4. Найдите все пары действительных чисел x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \cos 4x+\sin 2y=-2, \\ x-y=2\pi. \end{cases}$$

5. Автобус проходит путь AE, состоящий из участков AB, BC, CD, DE длиной 10 км, 5 км, 5 км, 6 км соответственно. При этом, согласно расписанию, выезжая из пункта A в 9 часов, он проходит пункт B в $9\frac{1}{5}$ ч, пункт C — в $9\frac{3}{8}$ ч, пункт D в $9\frac{2}{3}$ ч. С какой постоянной скоростью v должен двигаться автобус, чтобы сумма абсолютных величин отклонений от расписания прохождения пунктов B, C, D и времени движения автобуса от A до E при скорости v не превосходила 51,7 минут?

6. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, длины сторон AB и AC равны $\sqrt{5}$, ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, угол BAC вдвое больше угла BSC. Среди всех прямых круговых цилиндров с образующей, параллельной SA, находящихся внутри пирамиды, рассматривается цилиндр с наибольшей площадью боковой поверхности. Известно, что расстояние от центра его нижнего основания до ребра BC составляет $\frac{11}{16}$ длины медианы AM треугольника ABC. Найдите объем пирамиды $SABC$.

Вариант 10
(специальности «экономическая кибернетика» и «планирование народного хозяйства» экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42.$$

2. Найдите все x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{4-x^2}\,(\sin 2\pi x-3\cos \pi x)=0.$$

3. Решите неравенство

$$\log_3(x^2-2)<\log_3\left(\frac{3}{2}|x|-1\right).$$

4. В треугольнике ABC медианы, опущенные на стороны AC и BC, пересекаются под прямым углом. Длина стороны AC равна b, длина стороны BC равна a. Найдите длину стороны AB треугольника ABC.

5. В магазине продаются красные и синие карандаши. Красный карандаш стоит 17 копеек, синий карандаш — 13 копеек. На покупку карандашей можно затратить не более 4 рублей 95 копеек. При закупке число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей более, чем на пять. Необходимо закупить максимально возможное суммарное количество красных и синих карандашей, при этом красных карандашей нужно закупить как можно меньше. Сколько красных и сколько синих карандашей можно закупить при указанных условиях?

6. Для каждого неотрицательного значения a решите неравенство

$$a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3\geqslant 0.$$

Вариант 11
(специальность «политическая экономия» экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$2^{x+2}\cdot 5^{x+2}=2^{3x}\cdot 5^{3x}.$$

2. Найдите все x, удовлетворяющие уравнению

$$\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} 5x.$$

3. Решите неравенство

$$4(x-1)<\sqrt{(x+5)(3x+4)}.$$

4. Сколько точек с целочисленными координатами находится внутри криволинейной трапеции, образованной осью абсцисс, прямыми $x=\frac{3}{2}$, $x=129$ и графиком функции $y=\log_2 x$? Точки, лежащие на границе указанной криволинейной трапеции, не учитывать.

5. На факультет подано от школьников на 600 заявлений больше, чем от производственников. Девушек среди школьников в 5 раз больше, чем девушек среди производственников, а юношей среди школьников больше, чем юношей среди производственников в n раз, причем $6<n<12$ (n — целое число). Определите общее количество заявлений, если юношей среди производственников на 20 больше, чем девушек среди производственников.

6. Определите, при каких значениях a уравнение

$$x-a=2|2|x|-a^2|$$

имеет ровно три корня. Найдите эти корни.

Вариант 12
(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}=2^{5-x}+9.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x}<1.$$

3. В треугольниках ABC и $A'B'C'$ длина стороны AB равна длине стороны $A'B'$, длина стороны AC равна длине стороны $A'C'$, величина угла BAC равна 60° и величина угла $B'A'C'$ равна 120°. Известно, что отношение длины $B'C'$ к длине BC равно $\sqrt{n}$ (где n — целое число). Найдите отношение длины AB к длине AC. При каких значениях n задача имеет хотя бы одно решение?

4. В окружность радиуса 7 вписан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Длины сторон AB и BC равны. Площадь треугольника ABD относится к площади треугольника BCD, как 2:1. Величина угла ADC равна 120°. Найдите длины всех сторон четырехугольника $ABCD$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2\cos x+a\cdot\sin y=1, \\ \log_2\sin y=(\log_2 a)\log_a(2-3\cos x), \\ \log_a z+\log_a\left(\frac{1}{2a}-1\right)=0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение относительно x, y и z. При каждом таком значении a найдите все решения.

Вариант 13
(специальность «структурная и прикладная лингвистика» филологического факультета)

1. Решите уравнение

$$\log_5(x-1)=\log_5\frac{x}{1+x}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2=4^x+8, \\ 2^{x+1}+y+1=0. \end{cases}$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=24x-\cos 12x-3\sin 8x$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$.

4. В трапеции $ABCD$ сторона AD является большим основанием. Известно, что $|AD|=|CD|=4\frac{2}{3}$, $\widehat{BAD}=90°$ и $\widehat{BCD}=150°$. На основании AD построен треугольник AED так, что точки B и E лежат по одну сторону от прямой (AD), причем $|AE|=|DE|$. Длина высоты этого треугольника, проведенной из вершины E, равна $1\frac{2}{5}$. Найдите площадь общей части трапеции $ABCD$ и треугольника AED.

5. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$|1-ax|=1+(1-2a)x+ax^2$$

имеет ровно одно решение.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Два тела двигаются с постоянными скоростями по взаимно перпендикулярным прямым. Скорость первого тела $v_1=30$ м/с, второго — $v_2=20$ м/с. В тот момент, когда расстояние между телами наименьшее, первое тело находится на расстоянии $s_1=500$ м от точки пересечения прямых. На каком расстоянии s_2 от точки пересечения прямых находится в этот момент второе тело?

2. Плоский обруч движется так, что в некоторый момент времени скорости концов диаметра AB лежат в плоскости обруча и перпендикулярны этому диаметру (рис. 1). Скорость точки A равна v_A, а скорость точки B равна v_B. Определите скорости концов диаметра CD, перпендикулярного AB, в этот же момент времени, считая, что эти скорости также лежат в плоскости обруча.

3. Тело массы $m=0{,}5$ кг прикреплено двумя одинаковыми пружинами к вертикальным стенкам и совершает колебания, двигаясь прямолинейно по горизонтальной плоскости (рис. 2). Величины двух последовательных отклонений тела от среднего положения (положения равновесия) вправо и влево равны $s_1=10$ см и $s_2=7$ см. Определите коэффициент трения μ тела о плоскость, если известно, что жесткость каждой пружины $k=15$ Н/м. (Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.)

4. В вертикально стоящем цилиндрическом сосуде со свободно двигающимся (без трения) поршнем массой $m_п$ и площадью S находится некоторое количество идеального газа. При нагреве газа на ΔT градусов его объем увеличивается на ΔV. Найдите массу m газа, если атмосферное давление постоянно и равно p_0. Молярная масса газа M.

5. Плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого $d=1$ см, находится в вакууме и расположен так, что сила тяжести перпендикулярна его пластинам (рис. 3). Верхняя пластина конденсатора закреплена, а нижняя, которая изготовлена из фольги толщиной $h=0{,}1$ мм, лежит на изолирующей подставке. До какого напряжения U надо за-

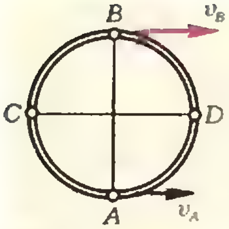


Рис. 1

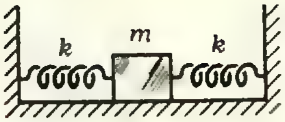


Рис. 2.

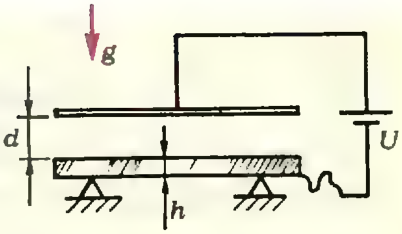


Рис. 3.

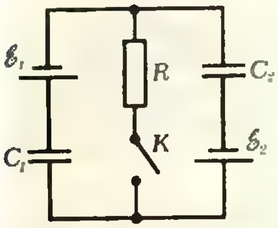


Рис. 4.

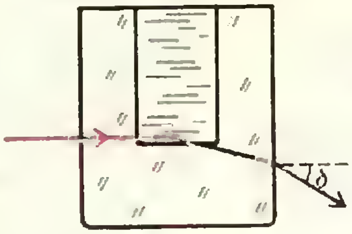


Рис. 5

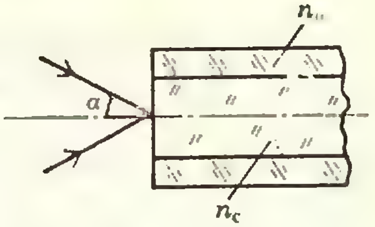


Рис 6.

рядить конденсатор, чтобы нижняя пластина перестала давить на опору? Плотность фольги $\rho = 2830$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Весом соединительных проводов пренебречь.

6. В схеме, изображенной на рисунке 4, вначале ключ K не замкнут. Какой по абсолютной величине заряд Q протечет через резистор с сопротивлением R, если ключ замкнуть? $\mathcal{E}_1 = 10$ В, $\mathcal{E}_2 = 20$ В, $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ.

7. От понижающей трансформаторной подстанции, действующее значение напряжения на выходе которой $U = 220$ В, необходимо протянуть до потребителя двухпроводную линию электропередачи длиной $L = 1$ км. Какого сечения S должен быть алюминиевый провод, которым будет прокладываться эта линия, если потребляемая в нагрузке мощность $P = 10$ кВт, а действующее значение падения напряжения в линии не должно превышать $\Delta U = 20$ В? Удельное сопротивление алюминия $\rho = 2{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, нагрузка на конце линии чисто омическая.

8. Жидкость налита в прямоугольный сосуд с толстым дном (рис. 5). Световой луч падает на дно сосуда под углом, отличающимся от 90° на пренебрежимо малую величину. Преломившись на границе раздела жидкость — стекло и стекло — воздух, луч выходит из сосуда под углом $\delta = 30°$ к первоначальному направлению. Вычислите показатель преломления жидкости $n_ж$, если показать преломления стекла $n_c = 1{,}50$.

9. Оптический волоконный световод представляет собой стеклянный цилиндр — сердцевину — с показателем преломления $n_c = 1{,}50$, окруженный оболочкой с показателем преломления $n_о = 1{,}41$ (рис. 6). Распространение излучения по световоду осуществляется за счет полного внутреннего отражения на границе раздела сердцевина — оболочка. На передний торец световода падает сходящийся под углом 2α пучок. Каково максимальное значение α_m угла, при котором все попадающее в световод излучение будет распространяться по световоду?

10. Определите минимально возможное расстояние $l_{\min}$ между предметом и его действительным изображением, полученным с помощью линзы с фокусным расстоянием F.

Механико-математический факультет

1. Тело массой $m = 20$ кг тянут с силой $F = 120$ Н по горизонтальной поверхности. Если эта сила приложена под углом $\alpha_1 = 60°$ к горизонту, то тело движется равномерно. С каким ускорением a будет двигаться тело, если ту же силу приложить под углом $\alpha_2 = 30°$ к горизонту? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2. На столе лежит доска массы $M = 1$ кг, а на доске груз массы $m = 0{,}5$ кг. Какую силу F нужно приложить к доске, чтобы она выскользнула из-под груза? Коэффициент трения между грузом и доской $\mu_1 = 0{,}1$; между доской и столом $\mu_2 = 0{,}2$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

3. С каким минимальным ускорением a нужно перемещать в горизонтальном направлении брусок A, чтобы тела *1* и *2* не двигались относительно бруска (рис. 7)? Массы тел одинаковы, коэффициент трения между бруском и обоими телами $\mu = 0{,}4$. В блоке трения нет. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

4. На диске, который может вращаться вокруг вертикальной оси, лежит маленькая шайба массой $m = 100$ г. Шайба соединена горизонтальной пружиной с осью диска. Если число оборотов диска не превышает $n_1 = 2$ об/с, пружина находится в недеформированном состоянии. Если число оборотов диска медленно увеличивается до $n_2 = 5$ об/с, то пружина удлиняется вдвое. Определите жесткость k пружины.

5. С идеальным газом проводят процесс *1—2—3—4*, изображенный на V-T диаграмме (рис. 8). В некотором состоянии *3* на отрезке, изображающем процесс *2—3—4*, давление газа такое же, как и в состоянии *1*. Известно, что $V_1 = 1$ м^3, $V_2 = 4$ м^3, $T_1 = 100$ К, $T_4 = 300$ К. Каков объем V_3 газа в состоянии *3*?

6. Пружина, прикрепленная верхним концом к крышке откачанного вертикального цилиндра, удерживает невесомый поршень у самого дна цилиндра. В каком отношении $V_{верх}/V_{нижн}$ поршень будет делить весь объем цилиндра, если по обе стороны поршня ввести

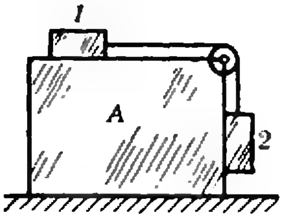


Рис. 7.

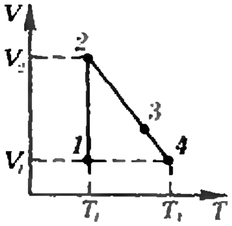


Рис. 8.

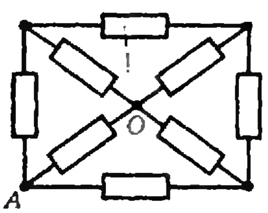


Рис. 9.

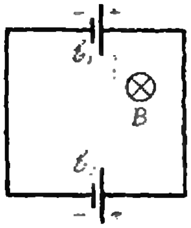


Рис. 10.

по одинаковой массе одного и того же газа? Известно, что расстояние между дном и поршнем возрастет вдвое, если пространство над поршнем от газа освободить.

7. Восемь одинаковых резисторов, сопротивление каждого из которых $R=15$ Ом, образуют цепь, показанную на рисунке 9. Источник напряжения подключен к точкам A и O. Найдите сопротивление R_{AO} цепи.

8. Из провода длиной $l=2$ м, обладающего сопротивлением $R=4$ Ом, спаян квадрат. В стороны квадрата включены источники с ЭДС $\mathscr{E}_1=10$ В и $\mathscr{E}_2=8$ В согласно схеме, приведенной на рисунке 10. Цепь помещена в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости квадрата, направленное за чертеж и возрастающее во времени по закону $B=kt$, где $k=16$ Тл/с. Найдите силу тока I в цепи. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

9. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. В начальный момент времени электрон находился в точке O и его скорость $\vec{v}$ была перпендикулярна вектору магнитной индукции. Найдите расстояние l электрона от точки O в момент времени t. Массу электрона m и его заряд q считать известными.

10. Точечный источник света помещен на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=8$ см на расстоянии $d=12$ см от линзы. Линза начинает смещаться в направлении, перпендикулярном своей главной оптической оси, со скоростью $v_1=1$ см/с. С какой скоростью v_2 начнет смещаться при этом изображение источника, если сам источник остается неподвижным?

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. К потолку кабины лифта, поднимающегося с ускорением $a=1{,}2$ м/с^2, прикреплен динамометр. К динамометру подвешен блок, свободно вращающийся без трения вокруг горизонтальной оси. Через блок перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы с массами $m_1=200$ г и $m_2=300$ г. Пренебрегая массами блока и нити, определите показание F динамометра.

2. Молекула, летящая со скоростью $v=300$ м/с перпендикулярно поверхности движущегося тяжелого поршня, испытывает с ним упругое столкновение. Поршень движется в ту же сторону, что и молекула, со скоростью $V=30$ м/с. Какую часть $\Delta E/E$ энергии молекула потеряет при соударении?

3. В пространство над ртутным столбиком в трубке барометра попало немного воздуха. Когда барометр показывал давление $p_1=748$ мм рт. ст., длина цилиндрической части, занятой воздухом, была $l=60$ мм. Трубку осторожно выдвинули из сосуда со ртутью еще на $\Delta h=21$ мм, после чего барометр стал показывать давление $p_2=751$ мм рт. ст. Считая температуру постоянной, определите атмосферное давление p_a в момент опыта.

4. Процесс в идеальном газе идет сначала так, что давление и объем связаны равенством $p\sqrt{V}=B$. Когда температура газа достигает значения T, процесс продолжается при ином характере зависимости давления от объема: $p=D/V^2$. Найдите упомянутую температуру T, если константы B и D, а также количество вещества $\nu=m/M$ заданы.

5. Два одинаковых сосуда соединены тонкой трубкой с краном. В первом сосуде находится некоторое количество идеального газа при температуре $t_1=27$ °С, а во втором — иное количество того же газа при температуре $t_2=227$ °С и том же давлении. Во сколько раз изменится давление газа, если открыть кран и довести температуру содержимого сосудов до $t_3=127$ °С?

6. Два одинаковых свинцовых шарика брошены вертикально вверх один вслед за другим через некоторый промежуток времени с одинаковыми начальными скоростями v_0. Шарики столкнулись на высоте h и слиплись. На сколько поднимется температура шариков? Удельная теплоемкость свинца равна c.

7. Маленький шарик массой $m=0{,}01$ мг, несущий заряд $q=10$ нКл, помещен в однородное электрическое поле, направленное горизонтально. Шарик приходит в движение без начальной скорости и через время $t=4$ с приобретает скорость $v=50$ м/с. Найдите напряженность E поля. Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2.

8. Замкнутая цепь состоит из источника и реостата, соединенных последовательно. В цепи течет ток $I_0=0{,}5$ А. Если сопротивление реостата уменьшить в $k=4$ раза, ток возрастет в $l=2$ раза. Какой ток I будет течь в цепи, если сопротивление реостата уменьшить до нуля?

9. По П-образной рамке, помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, движется без трения с постоянной скоростью $v=2$ м/с перемычка, сопротивление которой $R=0{,}2$ кОм (рис. 11). К перемычке приложена сила $F=4$ Н. Найдите силу тока I в перемычке. Сопротивлением рамки пренебречь. Силу тяжести не учитывать.

10. Луч света из воздуха попадает на однородный прозрачный шар, проникает в него и достигает поверхности раздела шар — воздух. Какой угол φ составляет вышедший луч с падающим на шар, если угол падения луча $\alpha=26°$, а угол преломления $\beta=17°$?

Химический факультет и факультет почвоведения

1. Двигатели ракеты, запущенной вертикально вверх с поверхности Земли, работали в течение времени $t=1$ мин и сообщали ракете постоянное ускорение $a=3g$. Какой максимальной высоты h достигла ракета? Ускорение свободного падения считать постоянным и равным $g=9{,}8$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. С аэростата сбросили два шарика одинакового радиуса $R=1$ см: один — алюминиевый (плотность $\varrho_1=2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3), другой — железный (плотность $\varrho_2=7{,}8\cdot10^3$ кг/м^3). Шарики соединены длинной тонкой нитью. Найдите натяжение T нити после того, как из-за сопротивления воздуха движение шариков установится, то есть они приобретут постоянные скорости.

3. Герметичный цилиндр разделен газонепроницаемым поршнем на равные части. В одной половине находится идеальный газ с молярной массой M_1, в другой — M_2. Массы газов, их объемы и температуры одинаковы. Поршень освободили. На какую долю $\Delta V/V$ своего первоначального значения окажется увеличенным объем одной из частей цилиндра (или уменьшенным объем другой части) после установления равновесия при той же температуре?

4. Из двух одинаковых проводников изготовлены два контура — квадратный и круглый. Оба контура помещены в одной плоскости в однородном, изменяющемся во времени магнитном поле. В круглом контуре индуцируется постоянный ток $I_1=0{,}4$ А. Найдите силу тока I_2 в квадратном контуре.

5. Сходящийся световой пучок падает на рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $-F$ и собирается в точку, лежащую в фокальной плоскости по другую сторону линзы. На каком расстоянии f от линзы соберется пучок, если рассеивающую линзу заменить на собирающую с фокусным расстоянием $+F$?

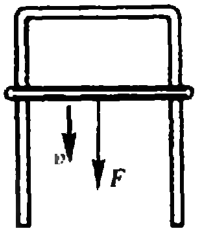


Рис. 11.

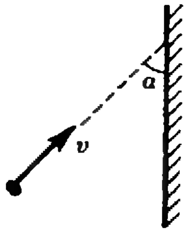


Рис. 12.

Географический и геологический факультеты

1. Будет ли плавать в воде (плотность воды $\varrho_0=1000$ кг/м^3) полый кубик из железа (плотность железа $\varrho=7800$ кг/м^3), если длина ребра кубика $a=20$ см, а толщина стенок $b=0{,}5$ см?

2. В герметически закрытом сосуде находится воздух, температура которого $t_1=27$ °C, а относительная влажность $\varphi_1=60$ %. Давление насыщенного водяного пара при этой температуре $p_1=26{,}7$ мм рт. ст. Чему будет равна относительная влажность φ_2 воздуха в данном сосуде, если его поддерживать при температуре $t_2=100$ °C?

3. Герметичный сосуд объемом $V=0{,}25$ м^3 содержит азот под давлением $p_1=120$ кПа. Какое давление p_2 установится в сосуде, если азоту сообщить количество теплоты $Q=8{,}4$ кДж? Молярная теплоемкость азота в описанных условиях $C=21$ Дж/(моль · К). Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль · К).

4. Точечный источник света движется равномерно и прямолинейно под углом $\alpha=45°$ к плоскому зеркалу со скоростью $v=10$ м/с (рис. 12). Найдите скорость $v_{\text{отн}}$ движения изображения относительно источника.

Публикацию подготовили
А. И. Боголюбов, Б. Б. Буховцев,
Н. И. Ионкин, И. И. Мельников,
В. И. Родин, А. Н. Соколихин

Ответы, указания, решения

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант 1

1. $[-2;\ -1]\cup\{3\}$. Указание. Неравенство

$$\sqrt{(x+2)(3-x)}\cdot\frac{x+1}{(x+4)\left(x+\frac{5}{2}\right)}<0$$

равносильно системе

$$\begin{cases}(x+1)(x+4)\left(x+\frac{5}{2}\right)<0,\\(x+2)(3-x)>0.\end{cases}$$

2. $x_1=\frac{\pi}{6}+4\pi k$, $x_2=\frac{5}{6}\pi+2\pi l$ $(k,\ l\in\mathbf{Z})$. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 2x=\sin x,\\ \sin x+\cos\frac{x}{2}>0.\end{cases}$$

Функция $\cos\frac{x}{2}$ имеет период 4π.

3. $\frac{1}{2}(p-a)^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Указание. $|BK|=p-a$.

4. $a_1=6k-1$, $a_2=6l+3$, $a_3=6m$, $a_4=6n+2$ $(k,\ l,\ m,\ n\in\mathbf{Z})$.

Решение. Исследуем вспомогательную функцию

$$F(z)=|12z-5|-|12z-7|+|24z+13|.$$

Легко посчитать, что

$$F(z)=\begin{cases}24z+11, \text{ если } 0<z<\frac{5}{12},\\ 48z+1, \text{ если } \frac{5}{12}<z<\frac{7}{12},\\ 24z+15, \text{ если } z>\frac{7}{12}.\end{cases}$$

Таким образом, функция F возрастает на $[0;\ +\infty[$. Следовательно, при $z\geqslant 0$ имеем $F(z)\geqslant F(0)=11$. Значит, левая часть первого уравнения системы $\geqslant 11$ и равна 11 только при $\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}=0$. С другой стороны, правая часть этого уравнения $\leqslant 11$ и равна 11 только при $\sqrt{\sin\frac{\pi(x-2y-1)}{3}}=0$. Поэтому первое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos\frac{\pi y}{2}=0,\\ \sin\frac{\pi(x-2y-1)}{3}=0.\end{cases}\qquad(1)$$

Сделав во втором уравнении подстановку $l=x^2+(y-a)^2$, найдем, что это уравнение равносильно уравнению

$$x^2+(y-a)^2=1.\qquad(2)$$

Из (1) следует, что пара чисел $(x;\ y)$ тогда и только тогда является решением данной системы, когда x и y удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases}y=2p+1\quad(p\in\mathbf{Z}),\\ x-2y-1=3q\quad(q\in\mathbf{Z}).\end{cases}\qquad(3)$$

Значит, в частности, x должен быть целым числом. Тогда из (2) x равен -1, 0 или 1. При $x=-1$ из (2) $y=a$ и равенства (3) равносильны системе

$$\begin{cases}y+1=2(p+1),\\ 2(y+1)=-3q.\end{cases}$$

Значит, $y+1$ делится на 6, откуда $a=6k-1$ $(k\in\mathbf{Z})$. Аналогично, при $x=1$ получаем $y=a$ и

$$\begin{cases}y-3=2(p-1),\\ 2(y-3)=-3(q+2).\end{cases}$$

Значит, $y-3$ делится на 6, откуда $a=6l+3$ $(l\in\mathbf{Z})$. При $x=0$ имеем $y-a=\pm 1$ и

$$\begin{cases}y-1=2p,\\ 2(y-1)=-3(q+1).\end{cases}$$

Значит, $y-1$ делится на 6, откуда $a=6m$ или $a=6n+2$ $(m,\ n\in\mathbf{Z})$.

5. $\frac{(17-\sqrt{17})R}{8h}$. Решение. Пусть S — площадь грани ABC, S_1, S_2, S_3 — площади остальных граней, R' — радиус шара, вписанного в пирамиду $DABC$. Тогда

$$\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}SR'+\frac{1}{3}S_1R'+\frac{1}{3}S_2R'+\frac{1}{3}S_3R',$$

откуда для искомого отношения $\lambda=\frac{S}{S+S_1+S_2+S_3}$ получаем $\lambda=\frac{R'}{h}$.

Пирамида $KLHC$ (рис. 1) получается из пирамиды $DABC$ гомотетией с центром C и коэффициентом

$$k=\frac{|CH|}{|CB|}.$$

Поэтому $R=kR'$. Значит,

$$\lambda=\frac{R}{kh}.$$

Таким образом, чтобы найти λ, надо найти k. Спроектируем всю конфигурацию на плоскость ABC параллельно прямой NM (M — точка пересечения медиан треугольника ABC). При этом вершина D перейдет в середину D_1 ребра AC (поскольку из $\frac{|DN|}{|NB|}=\frac{1}{2}=\frac{|D_1M|}{|MB|}$ следует $(DD_1)\parallel(NM)$; рис. 2); значит, грань ADC перейдет в ребро AC; с другой стороны, плоскость FNM перейдет в прямую HM (так как $(FNM)\parallel(NM)$); следовательно, точка F перейдет в $F_1=(HM)\cap(AC)$. Таким образом, $(FF_1)\parallel(NM)\parallel(DD_1)$. Проведем через точку B прямую, параллельную (HF_1) (см. рис. 2). Положим $|F_1D_1|=a$ и $\frac{|AF|}{|FD|}=m$. Тогда $|AF_1|=\frac{|AF|}{|FD|}\cdot|F_1D_1|=ma$, $|B_1F_1|=\frac{|BM|}{|MD_1|}\times\times|F_1D_1|=2a$, $|CD_1|=|AD_1|=|AF_1|+|F_1D_1|=(m+1)a$, $m^2=\left(\frac{|AF|}{|FD|}\right)^2=\frac{|CH|}{|HB|}=\frac{|CF_1|}{|F_1B_1|}=\frac{|CD_1|+|D_1F_1|}{|F_1B_1|}=\frac{m+2}{2}$. Отсюда $2m^2-m-2=0$, $m=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$. Значит, $k=\frac{|CH|}{|CB|}=\frac{|CH|}{|CH|+|HB|}=\frac{1}{1+\frac{1}{m^2}}=\frac{17+\sqrt{17}}{34}$.

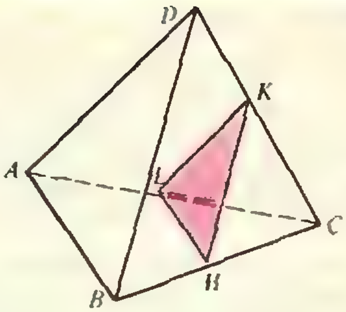


Рис. 1.

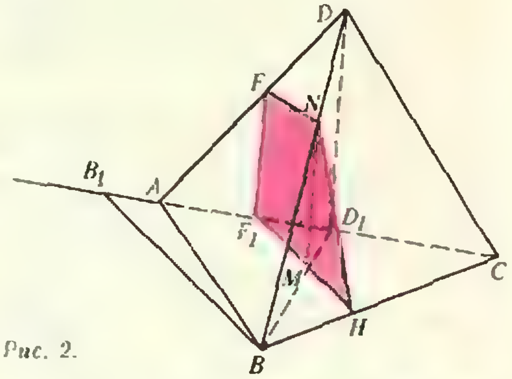


Рис. 2.

Вариант 2

1. $[-4;\ 2[\ \cup\ ]3;\ 4]$.
2. $x=\frac{3}{4}\pi+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.
3. 25.
4. $\frac{2\pi\sqrt{3}+9}{27}$.
5. $\{1-\sqrt{a^2-2a+5},\quad 1+\sqrt{a^2+4a+8}\}$ при

$a<-2$, $\{1-\sqrt{a^2-2a+5},\ 1-\sqrt{a^2+4a+8}\}$ при $-2\leqslant a<-\frac{1}{2}$, $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ при $a=-\frac{1}{2}$, $\{1-\sqrt{a^2-2a+5},\ 1-\sqrt{a^2+4a+8}\}$ при $-\frac{1}{2}<a\leqslant 1$, $\{1+\sqrt{a^2-2a+5},\ 1-\sqrt{a^2+4a+8}\}$ при $a>1$.

6. $\{(-1;\ 2);\ (-1;\ -2)\}$. Указание. Докажите, что $5\sin^2 x-6\sin x\cdot\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}=-\sqrt{58}\sin(2x+\varphi)+3\sqrt[3]{33}-2>0$ при всех $x\in R$. С помощью тождества $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ докажите, что правая часть $\leqslant 0$ на своей области определения, причем равна она нулю только при $\arcsin x=-\frac{\pi}{2}$.

Вариант 3

1. $x_1=\frac{\pi}{4}k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.

2. $\left\{-1,\ -\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{\sqrt{5}}{5},\ 1\right\}$.

3. $\left]0;\ \frac{1}{16}\right[$.

4. 83.

5. $\frac{1}{2}(1+2\cos 2\alpha)^2\operatorname{tg}2\alpha$.

6. 1) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$;

2) $$\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}-1}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}-1}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}.$$

Указание. Центры O_1, O_2 шаров лежат на прямой OH, являющейся пересечением биссекторов двугранных углов данного трехгранного угла (задача 538 в «Геометрии 9–10»). Биссектор двугранного угла с ребром OC пересекается с плоскостью OAB по биссектрисе OD угла AOB. Картина симметрична относительно (COD). 1) Искомый угол — HOD. Отсеките от данного трехгранного угла правильную треугольную пирамиду с ребром, например, $|OA|$. 2) В плоскости COD имеем картину, изображенную на рисунке 3. $|OK_2|=|OK_1|+|K_1D|+|DK_2|$.

Вариант 4

1. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

2. $\{1\}$.

3. $\frac{5}{18}V$. Указание. Пусть h — расстояние от C до плоскости $ABB'A'$, h_1 — расстояние от B до прямой AA'. Достроим данную призму до параллелепипеда. Если V_1 — его объем, то $V=\frac{1}{2}V_1$. Приняв за основание параллелепипеда грань $ABB'A'$, получаем, что $V_1=S_{ABB'A'}\cdot h=(|AA'|\cdot h_1)h$. Итак, $V=\frac{1}{2}|AA'|\cdot h_1 h$ (эту непривычную формулу объема призмы полезно запомнить!). С другой стороны, искомый объем «нижней части» — это объем четырехугольной пирамиды $CABFI$ с вершиной C.

4. $(0;\ 2)$. Указание. $d(x)=f(x)\cdot\cos\alpha$ (рис. 4).

5. $n=-1$; $\left\{\frac{1}{9}+\frac{\sqrt{7}}{18}+\frac{\sqrt{3}}{6};\ \frac{13}{36}+\frac{\sqrt{7}}{18}-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)$, $\left(\frac{1}{9}+\frac{\sqrt{7}}{18}-\frac{\sqrt{3}}{6};\ \frac{13}{36}+\frac{\sqrt{7}}{18}+\frac{\sqrt{3}}{12}\right)$, $\left(\frac{1}{9}-\frac{\sqrt{7}}{18}+\frac{\sqrt{3}}{6};\ \frac{13}{36}-\frac{\sqrt{7}}{18}-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)$, $\left(\frac{1}{9}-\frac{\sqrt{7}}{18}-\frac{\sqrt{3}}{6};\ \frac{13}{36}-\frac{\sqrt{7}}{18}+\frac{\sqrt{3}}{12}\right)\Big\}$. Указание. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases}6(x+2y)^2+2(3n-2)(x+2y)+3=0,\\ 4(x-y)^2-2(2n+1)(x-y)+2n^2-\frac{5}{2}=0.\end{cases}$$

Вариант 5

1. $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_2=(-1)^l\frac{\pi}{4}+\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.

2. 2, e^2.

3. $[-5;\ 20]$.

4. $\frac{3}{32}$. Указание. $|BP|=|PC|$.

5. $\left]-\infty;\ -1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right[\cup\left]-\frac{1}{2};\ 0\right[$. Решение. Второе неравенство равносильно неравенству

$$(x-b)^2+(y-1)^2>b.$$

Значит, оно выполняется при любых x и y тогда и только тогда, когда $b<0$. Поскольку первое неравенство равносильно неравенству $b(4\cos^2(x-y)+8b\cos(x-y)-8b^2+8b+3)<0$, оба неравенства выполняются при любых x и y тогда и только тогда, когда $b<0$, и при любых x, y

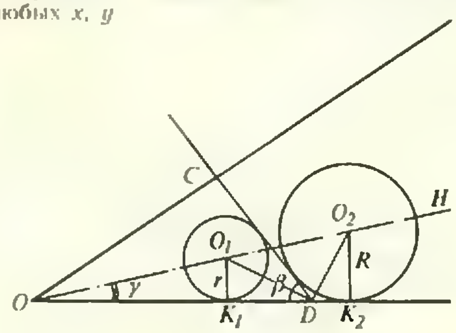


Рис. 3.

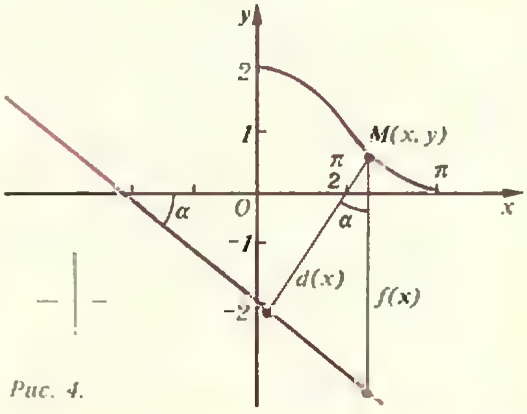


Рис. 4.

$$4\cos^2(x-y)+8b\cos(x-y)+8b^2+8b+3>0,$$
то есть когда $b<0$, и при любых $z\in[-1;\ 1]$
$$f(z)=4z^2+8bz+8b^2+8b+3>0.$$
Вершина графика трехчлена $f(z)$ лежит в точке $z_0=-b$. Так как $b<0$, $z_0>0$. Трехчлен $f(z)$ обладает нужным свойством либо при $f(z_0)>0$, что равносильно $b\in\left]-\infty;\ -\frac{3}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2};\ 0\right[$, либо при
$$\begin{cases} f(z_0)<0,\\ z_0>1,\\ f(1)>0,\end{cases}$$
что равносильно $b\in\left[-\frac{3}{2};\ -1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right[$.

Вариант 6

1. $\frac{5}{7}$.
2. $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi l\quad (k, l\in\mathbf{Z})$.
3. $\{(-17;\ \log_2 10)\}$.
4. $\frac{15}{16}\sqrt{7}$.
5. $\frac{9}{13}\pi$, $\frac{15}{13}\pi$. Указание. $\log_2(3-|\sin ax|)\geqslant 1$ при всех x.

Вариант 7

1. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$.
2. $[-1;\ 0]$.
3. $\frac{1}{4}b^2\sin 2\beta\cdot\operatorname{ctg}^2\beta$.
4. $\{(-1;\ -3),\ (3;\ -3)\}$.
5. $\arccos\frac{46}{\sqrt{2641}}$.

Вариант 8

1. $\{-1;\ 4\}$.
2. $|BL|>|BG|$.
3. $\left[\frac{1}{2};\ 1\right[\cup\left]2;\ 2\frac{1}{2}\right]$.
4. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad y=\pi-2\pi k\quad (k\in\mathbf{Z})$. Указание. Уравнение $3\sin 3x-\sin x=-4$ равносильно системе
$$\begin{cases}\sin 3x=-1\\ \sin x=1.\end{cases}$$
5. A. Решение. Пусть w — скорость катера относительно берега, то есть $w=v-5$, если D выше по течению чем A, и $w=v+5$, если выше A. По условию
$$\left|\frac{11}{w}-\frac{1}{3}\right|+\left|\frac{13}{w}-\frac{2}{3}\right|+\left|\frac{15}{w}-1\right|<\frac{5}{v}-\frac{1}{2}.\qquad (1)$$
Предположим, что D выше, чем A. Тогда
$$\left|\frac{11}{v-5}-\frac{1}{3}\right|+\left|\frac{13}{v-5}-\frac{2}{3}\right|+\left|\frac{15}{v-5}-1\right|<\frac{5}{v}-\frac{1}{2}.$$
Поскольку $|a+b-c|\leqslant|a|+|b|+|c|$,
$$\frac{9}{v-5}<\frac{5}{v}-\frac{1}{2},$$
а это неравенство решений не имеет. Предположение, что D выше чем A, привело к противоречию. Следовательно, выше A.*)

6. $\frac{3\pi}{10}\cdot\frac{\sqrt{19+6\sqrt{10}}-3}{\sqrt{10+6\sqrt{10}}+\sqrt{19+6\sqrt{10}}-3}=\frac{3\pi}{10}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}+\sqrt{6+\sqrt{10}}}$.

Указание. Пусть AH — высота треугольника ABC. Докажите, что для любого цилиндра $Ц$, находящегося внутри пирамиды $SABC$, образующая которого параллельна BC, существует такой же цилиндр $Ц'$, конгруэнтный $Ц$, проекция которого на плоскость SAH касается (AH) и (SH) (рис. 5, *а*) и проекция которого на плоскость ABC касается (AB) и (AC) (рис. 5, *б*).

Вариант 9

1. $\{-3;\ 2\}$.
2. $|AC|>|BK|$.
3. $\left[-1\frac{1}{5};\ -1\right[\cup\left]-\frac{1}{5};\ 0\right]$.
4. $x=\frac{7}{4}\pi+\pi k$, $y=-\frac{\pi}{4}+\pi_k\ (k\in\mathbf{Z})$.
5. 50 км/ч. Указание. Сделав в неравенстве
$$\left|\frac{10}{v}-\frac{1}{5}\right|+\left|\frac{15}{v}-\frac{3}{8}\right|+\left|\frac{20}{v}-\frac{2}{3}\right|+\frac{26}{v}<\frac{517}{600}$$
замену $v=\frac{5}{x}$, нарисуйте графики левой и правой части.
6. $\frac{4}{5}\sqrt{13}$.

Вариант 10

1. $\{-5;\ 5\}$.
2. $\left\{-2,\ -1\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\frac{1}{2},\ 2\right\}$.
3. $\left]-2;\ -\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2};\ 2\right[$.
4. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$.
5. 19 синих и 14 красных. Указание. Обозначим искомое число синих карандашей через x, красных — через y. Тогда решением задачи является точка $(x_0;\ y_0)$ с целочисленными координатами, лежащая в пятиугольнике, заштрихованном на рисунке 6, для которой x_0+y_0 максимально, а y_0 при этом минимально.
6. $]-\infty;\ 3]$ при $a=0$, $\left]-\infty;\ \frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a};\ +\infty\right[$ при $0<a<\frac{1}{12}$, $\mathbf{R}$ при $a\geqslant\frac{1}{12}$. Указание. $a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3=(ax^2-x+3)(a^2x^2+ax+3a+1)$. (Догадаться до этого разложения можно, написав $a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3=a(ax^2+3)^2-x+3$.) (1)

---

*) Данное решение предложено редакцией журнала. В авторском решении дополнительно проверялось, что при предположении «A выше чем D» неравенство (1) имеет решение. (*Прим. ред.*)

Отсюда следует, что любой корень трехчлена ax^2-x+3 является корнем многочлена, стоящего в левой части; поэтому этот многочлен делится на ax^2-x+3.) Замечание. Равенство (1) показывает, что если положить $f(x)=ax^2+3$, то многочлен, стоящий в левой части неравенства, будет иметь вид $f(f(x))-x$. Легко доказать, что *в данном случае* уравнение $f(f(x))=x$ равносильно уравнению $f(x)=x$. Решив последнее — квадратное — уравнение, можно дальше применить к данному неравенству метод интервалов.

Вариант 11

1. $\{1\}$.

2. $x=\pi k$ $(k\in \mathbf{Z})$.

3. $]-\infty;\ -5]\cup\left[-1\frac{1}{3};\ 4\right[$.

4. 642.

5. 832. Указание. Все «числа заявлений» — натуральные числа.

6. При $a=-2$ $\left(\left\{-2,\ 1\frac{1}{5},\ 3\frac{1}{3}\right\}\right)$ и при $a=-\frac{1}{2}$ $\left(\left\{-\frac{1}{5},\ 0,\ \frac{1}{3}\right\}\right)$. Указание. Нарисуйте график правой части.

Вариант 12

1. $2(1-\log_2 3)$.

2. $[-1-2\sqrt{13};\ -5[\cup]1;\ -1+2\sqrt{13}]$.

3. $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ при $n=2$ и 1 при $n=3$.

4. $|AD|=2\sqrt{21}$, $|CD|=\sqrt{21}$, $|AB|=|BC|=7\sqrt{3}$. Замечание. Используйте «усиление теоремы синусов»: $\frac{a}{\sin A}=2R$, где R — радиус описанной окружности (см., например, с. 42 в пособии «Геометрия 8» (М.: Просвещение, 1977)).

5. $x=\pm\arccos\frac{1-2a}{2-3a}+2\pi k$, $y=(-1)^l\times\arcsin\frac{1}{2-3a}+\pi l$, $z=\frac{2a}{1-2a}$ $(k, l\in\mathbf{Z})$ при $a\in\left]0;\ \frac{1}{4}\right[\cup\left]\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}\right]$.

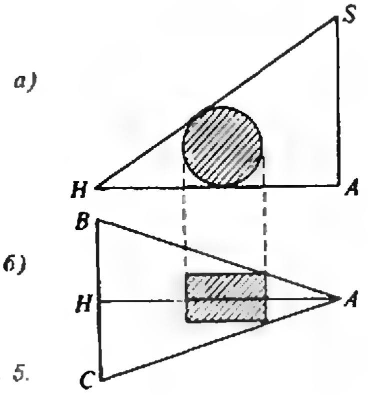


Рис. 5.

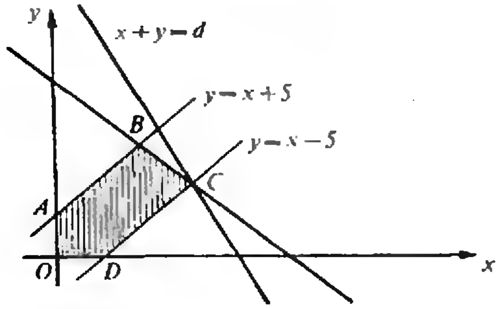


Рис. 6.

Вариант 13

1. $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2. $\{(0;\ -3)\}$.

3. $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}\right]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=4\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$,

$\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}\right]} f(x)=f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=$

$=-4\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$.

4. $\frac{49}{3}(3\sqrt{3}-5)$. Указание. Не забудьте доказать, что точка E лежит внутри угла PCD (P — произвольная точка на продолжении $[AC]$ за точку C).

5. 1, 0. Решение. Данное уравнение при любом a имеет корень 0. Следовательно, надо найти a, при которых оно других корней не имеет. Легко проверить непосредственно, что при $a=0$ и при $a=1$ уравнение имеет только нулевой корень. При $a<2$, $\neq 0$, $\neq 1$ уравнение имеет ненулевой корень $\frac{a-1}{a}$ (если $x=\frac{a-1}{a}$ и $a<2$, то $ax<1$ и уравнение принимает вид $ax^2+(1-a)x=0$). При $a>2$ уравнение имеет ненулевой корень $\frac{3a-1+\sqrt{9a^2-14a+1}}{2a}$ (если $x=\frac{3a-1+\sqrt{9a^2-14a+1}}{2a}$ и $a>2$, то $9a^2-14a+1>0$, $ax=\frac{3a-1}{2}+\frac{\sqrt{9a^2-14a+1}}{2}>\frac{3a-1}{2}>1$ и данное уравнение равносильно уравнению $ax^2+(1-3a)x+2=0$).

Физика

Физический факультет

1. $s_2=s_1v_1/v_2=750$ м.

2. Модули скоростей точек C и D одинаковы и равны $v_C=v_D=\sqrt{(v_A^2+v_B^2)/2}$; проекции этих скоростей на горизонтальную и вертикальную оси равны соответственно $v_{Cx}=v_{Dx}=(v_A+v_B)/2$, $v_{Cy}=-v_{Dy}=(v_B-v_A)/2$.

3. $\mu=k(s_1-s_2)/(mg)=0{,}09$.

4. $m=\left(p_0+\frac{m_п g}{S}\right)\frac{M\Delta V}{R\Delta T}$.

5. $U=d\sqrt{2\rho hg/\varepsilon_0}\approx 8000$ В.

6. $Q=\mathcal{E}_1C_1+\mathcal{E}_2C_2=5\cdot10^{-5}$ Кл.

7. $S>\frac{2L\rho P}{\Delta U(U-\Delta U)}=1{,}4\cdot10^{-4}\ м^2=1{,}4\ см^2$.

8. $n_ж=\sqrt{n_c^2-\sin^2\delta}\approx 1{,}41$.

9. $\alpha_m=\arcsin\sqrt{n_c^2-n_0^2}\approx 30°$.

10. $l_{min}=4F$.

Механико-математический факультет

1. $a=\frac{F}{m}\left(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\frac{mg-F\sin\alpha_2}{mg-F\sin\alpha_1}\right)\approx$ $\approx 0{,}825$ м/с^2.

2. $F>(M+m)(\mu_1+\mu_2)g=4{,}5$ Н.

3. $a=g(1-\mu)/(1+\mu)=4{,}2$ м/с^2.

4. $k=4\pi^2 m(2n_2^2-n_1^2)\approx 181,6$ Н/м.

5. $V_3=V_1\dfrac{(V_2T_4)/(V_1T_1)-1}{V_2/V_1+T_4/T_1-2}\approx 2,2$ м^3.

6. $V_{верх}/V_{нижн}=4/3$.

7. $R_{AO}=7R/15=7$ Ом.

8. $I=(\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2-kl^2/16)/R=-0,5$ А.

9. $l=\dfrac{2mv}{|q|B}\left|\sin\dfrac{|q|Bt}{2m}\right|$.

10. $v_2=v_1d/(d-F)=3$ см/с.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $F=4m_1m_2(g+a)/(m_1+m_2)=5,28$ Н.
2. $\Delta E/E=4(V/v-V^2/v^2)=0,36=36\ \%$.
3. $p_B=p_2+\dfrac{(p_2-p_1)l}{\Delta h-(p_2-p_1)/(\varrho g)}=761$ мм рт. ст. (здесь $\varrho=13,6\cdot10^3$ кг/м^3 — плотность ртути).
4. $T=\sqrt[3]{B^2D}/(\nu R)$.
5. Давление газа возрастет в $(T_1+T_2)T_3:(2T_1T_2)=16/15$ раз.
6. $\Delta T=(v_0^2-2gh)/(2c)$.
7. $E=\dfrac{m}{q}\sqrt{\dfrac{v^2}{\tau^2}-g^2}=7,5$ В/м.
8. $I=I_0l(k-1)/(k-l)=1,5$ А.
9. $I=\sqrt{Fv/R}=0,2$ А.
10. $\varphi=2(\alpha-\beta)=18°$.

Химический факультет и факультет почвоведения

1. $h=6gt^2\approx212$ км.
2. $T=2\pi R^3g(\varrho_2-\varrho_1)/3\approx0,107$ Н.
3. $\Delta V/V=(M_1-M_2)/(M_1+M_2)$.
4. $I_2=\pi I_1/4\approx0,314$ А.
5. $f=F/3$.

Географический и геологический факультеты

1. Кубик утонет, так как его масса (8,9 кг) больше массы вытесненной воды (8 кг).
2. $\varphi_2=\varphi_1(p_1/p_2)(T_2/T_1)\approx2,6\ \%$ (здесь $p_2\approx760$ мм рт. ст. — давление насыщенного пара при $t_2=100$ °С).
3. $p_2=p_1+QR/(CV)\approx133,3$ кПа.
4. $v_{отн}=\sqrt{2}\,v\approx14,1$ м/с.

Шахматная страничка

(см. «Квант», 1983, № 11)

Задание 21 (Абрахам — Цинн, Ливерпуль, 1932 г.). **1.Фg8+! Kpe7** (1...Kp:g8 2.Kg6 с неизбежным 3. Лh8×) **2. Ф:f7+ Kpd8 3. Kg6 Ф:b2 4. Лd1+.** Черные сдались (4...Cd7 5. Ф:e8+! Kp:e8 6. Лh8×).

Задание 22 (Карасев — Кламан, Ленинград, 1967 г.). **1. Лe8!** (но не 1. Лg6? Лg8!) **1...Фd8 2.Лg6! Лg8 3. Л:f7 Лd1+ 4.Kph2 Фb8+ 5.g3 Лd2+ 6.Kph1.** Черные сдались.

Кроссворд

(см. «Квант», № 1, 4-я с. обложки)

По горизонтали. 5. Ворот. 6. Алмаз. 9. Ортикон. 11. Обертон. 12. Актиний. 13. Антенна. 15. Линотип. 16. Триггер. 17. Полимер. 20. Раструб. 23. Палетка. 24. Уточкин. 25. Трактат. 27. Керосин. 29. Обнинск. 30. Ахромат. 31. Аргон. 32. Герон.

По вертикали. 1. Вольтметр. 2. Фотон. 3. Длина. 4. Кавитация. 7. Линде. 8. Эбонит. 10. Пионер. 13. Аппарат. 14. Атрибут. 18. Парсек. 19. Атмосфера. 21. Ломоносов. 22. Кираса. 26. Катод. 28. Насос. 29. Отвес.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили:

Л. В. Денисенко, М. Б. Дубах, А. Л. Коршунов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров, А. Е. Остаев, В. А. Серов, И. Е. Смирнова, Е. К. Темчурина
Фото А. М. Бернштейна, В. П. Коротихина, Б. П. Хасенова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Главный художник Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54
Сдано в набор 20.12.83. Подписано к печати
Печать офсетная Усл. кр. отт. 24,8
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,18. Т-01658
Цена 40 коп. Заказ 3419. Тираж 177349 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

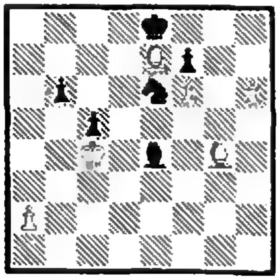
Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ПЕРЕГРУЗКА ФИГУР

Тактический прием, о котором пойдет речь сегодня, носит название *перегрузки фигур*. Дальнобойной шахматной фигуре — ферзю, ладье или слону часто приходится выполнять важные задания на определенной линии. Но внезапно на другой линии появляется новое действующее лицо, которое отвлекает внимание нашей фигуры. Теперь ей приходится смотреть в две стороны, происходит перегрузка и ее работе, что ведет к печальным последствиям.

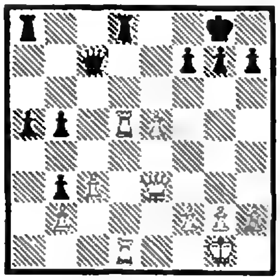
Бывает и так, что две фигуры одного цвета спокойно занимаются своим делом, а тем временем на пересечении линий их действия появляется непрошеный гость, на которого надо реагировать. Перегруженными оказываются сразу две фигуры.

Эта геометрическая тема родственна другой, более распространенной теме — отвлечения. Однако отвлечение, как правило, осуществляется слишком прямолинейно — фигура вынуждена покинуть свой пост и перебраться на неудачное место. При перегрузке же фигура ни к чему не принуждается, она просто запутывается в своих обязанностях. Но пора переходить к примерам.



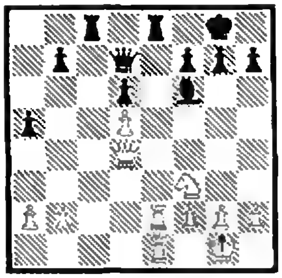
Тайманов — Смыслов (Первенство СССР, 1966—67 гг.)

Черный слон сдерживает движение пешки «h» и уверенно справляется с этой задачей. Однако после **1. Cf3!!** он неожиданно попадает в состояние перегрузки. Брать на f3 он не может из-за 2.h7, а покинуть большую диагональ нельзя ввиду 2.Сс6×. После **1...b5+ 2.Крс3! Kg5 3.h7** черные сдались (3...С:h7 4.Сс6×, 3...K:h7 4.С:е4).



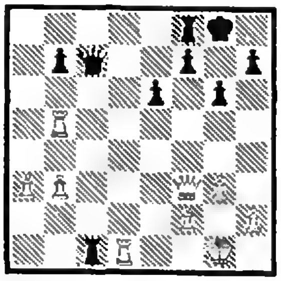
Минич — Хонфи (Матч Югославия—Венгрия, 1966 г.)

1.Фа7!, и тяжелые фигуры черных оказались перегруженными. На 1...Л:d5 решает 2.Ф:а8+, а на 1...Лdс8 — 2.Ф:с7 Л:с7 3.Лd8+. Черные сдались. Эта комбинация имеет знаменитую предшественницу.



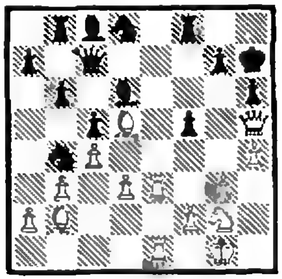
Адамс — Торре (Новый Орлеан, 1920 г.)

1.Фg4! Пока в положении перегрузки оказался черный ферзь. **1...Фb5 2.Фс4!** А теперь и черная ладья. **2...Фd7 3.Фс7! Фb5** (3...Фа4 4. Ле4! g6 5. Ф:с8 Ф:е4 6. Ф:е8+) **4.а4! Ф:а4 5. Ле4! Фb5 6. Ф:b7!** Таких перегрузок ферзь черных не выдержал, черные сдались.



Рагозин — Панов (Первенство СССР, 1940 г.)

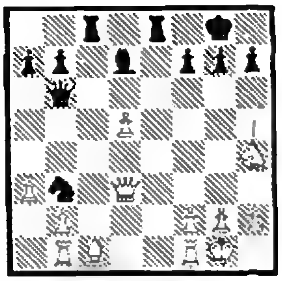
Черные только что дали шах, белые загородились ладьей, и похоже, что дело близится к ничьей. Но после **1...Фс6!** ферзь белых очутился в состоянии высшей степени перегрузки — одновременно обе ладьи ему не защитить. Белые сдались.



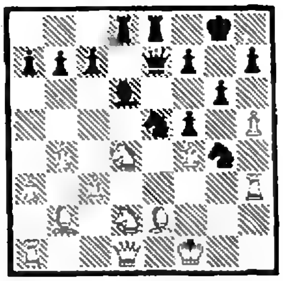
Яндемиров — Гик (Москва, 1983 г.)

Черные последним ходом сыграли Кс6 — b4, полагая, что их слон надежно держит поле f4 (правильно было Кс6 — d4, и у белых нет компенсации за фигуру). Однако после **1.Ле7!** слон, увы, оказался сильно перегружен. Не хочется пускать коня на f4, но все же приходится менять направление удара. **1...С:е7 2.Kf4! Ф:f4 3.Л:е7 Фd4 4.С:d4 cd 5.Ле8 Л:е8 6.Ф:е8**, и вскоре белые выиграли.

Конкурсные задания

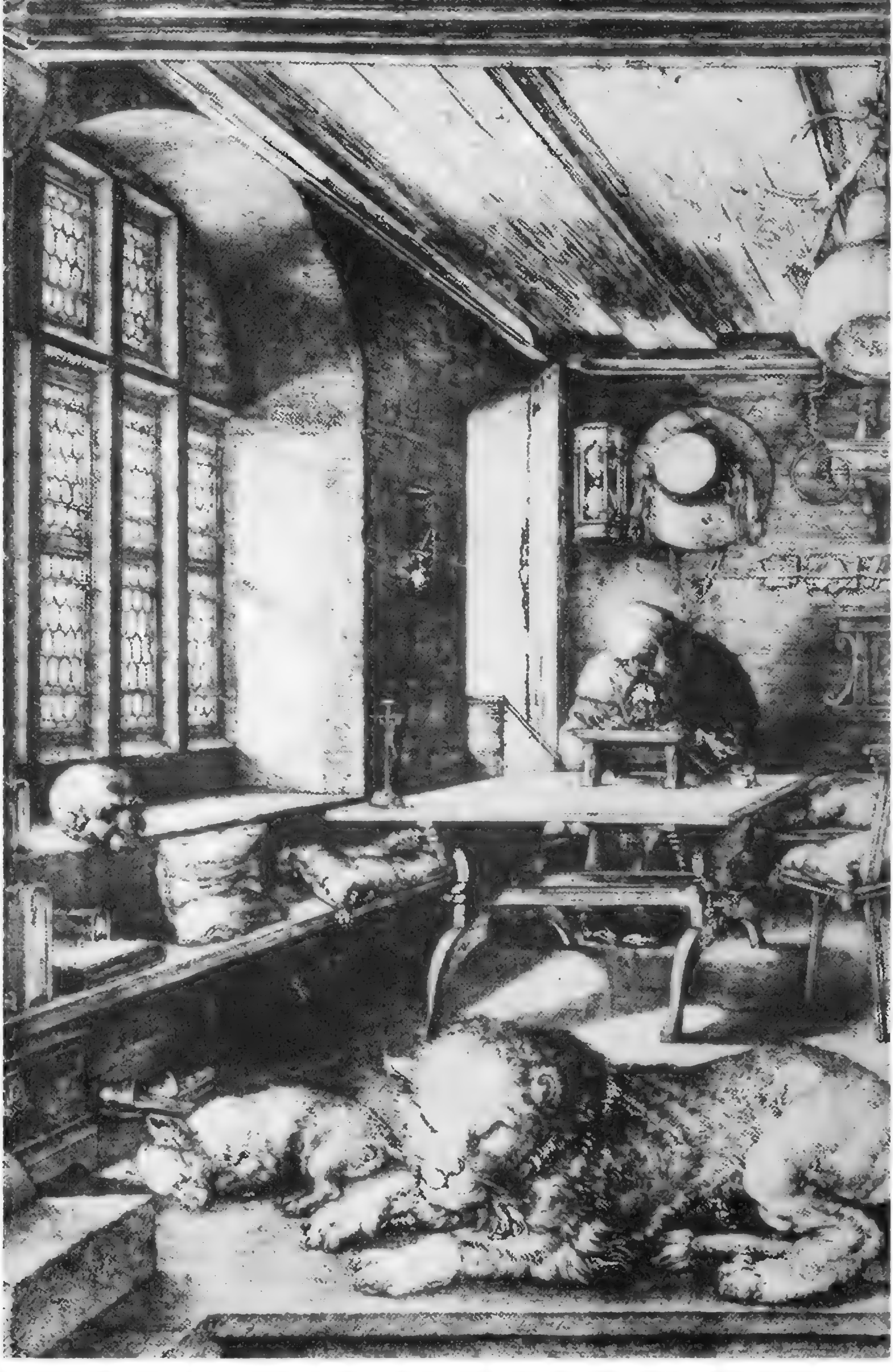


3. Черные начинают и выигрывают.



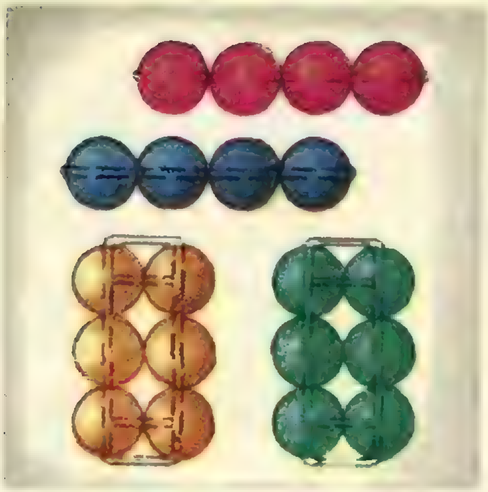
4. Черные начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 апреля 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 3, 4).



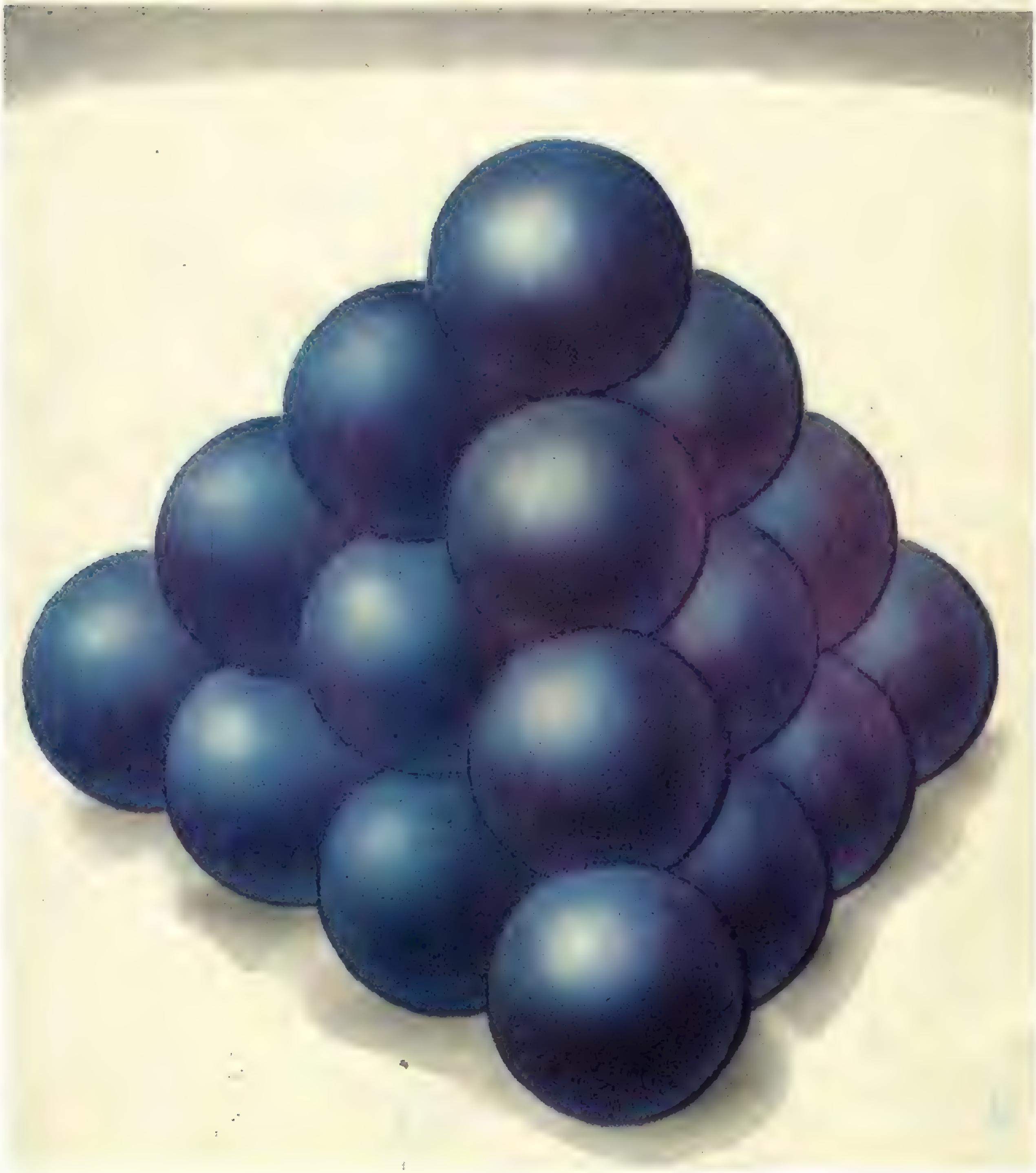
Цена 40 коп.

Индекс 70465



Сложить из двадцати отдельных синих шариков тетраэдр, показанный на рисунке, совсем просто. Но в предлагаемой головоломке шарики скреплены в четыре жесткие группы (4, 4, 6, 6), нарисованные слева, и такой же (только разноцветный) тетраэдр нужно собрать из этих четырех элементов. Попробуйте! Шарики можно вылепить из глины (или пластилина) или воспользоваться старыми бусами; между собой их можно скрепить клеем, проволочкой или тонкими деревянными палочками.

А. К.



НОМЕР
3

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант

3 1984

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: | **IN THIS ISSUE:**

2	*Я. Б. Зельдович.* Вселенная	*Ya. B. Zeldovich.* The universe
10	*Л. С. Понтрягин.* Кубическая парабола	*L. S. Pontriagin.* The cubic parabola
15	*С. М. Рытов.* Из предыстории радио	*S. M. Rytov.* From the early history of radio
	Новости науки	**Science news**
19	*А. Ю. Вайнтроб, А. Б. Сосинский.* Доказательство гипотезы Морделла	*A. Yu. Vaintrob, A. B. Sossinsky.* Proof of the Mordell hypothesis
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
20	*А. А. Боровой.* Цвета рассеянного света	*A. A. Borovoy.* Colors of diffuse light
22	**Спрашивайте—отвечаем**	**Questions and answers**
	Математический кружок	**Mathematics circle**
23	Ошибки в геометрических доказательствах	Errors in geometric proofs
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
27	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
33	*И. А. Кушнир.* Задачи-матрешки	*I. A. Kushnir.* Problems and dolls
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
34	Задачи	Problems
35	*А. Н. Колмогоров.* Решето Эратосфена	*A. N. Kolmogorov.* Eratosthenes's sieve
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
36	Победители конкурса «Задачник «Кванта»	Kvant contest prizewinners
37	Задачи М851—М855; Ф863—Ф867	Problems M851—M855; P863—P867
39	Решения задач М836—М840; Ф847—Ф851	Solutions M836—M840; P847—P851
47	Из писем читателей	From our readers's letters
49	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
51	*В. В. Можаев.* Магнитное поле и магнитные силы	*V. V. Mojaev.* Magnetic field and magnetic forces
55	**Варианты вступительных экзаменов**	**College entrance examinations problems**
59	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь *(35, 50)*	**Miscellaneous** *(35, 50)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Перекрытие *(3-я с. обложки)*	Interception *(3rd cover page)*

Фотография, воспроизведенная на первой странице обложки, сделана с борта станции «Салют-6» космонавтами Л. Поповым и В. Рюминым. Она служит прекрасной иллюстрацией к статье «Цвета рассеянного света», опубликованной в этом номере журнала

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1981

Выдающемуся советскому физику-теоретику, лауреату Ленинской и Государственных премий СССР, трижды Герою Социалистического Труда академику Я.Б.Зельдовичу 8 марта 1984 года исполнилось 70 лет. Журнал "Квант" поздравляет Якова Борисовича с этим юбилеем. Нашим читателям мы предлагаем в этом номере статью Я.Б.Зельдовича, посвященную современной космологии.

Вселенная

Академик

Я.Б.ЗЕЛЬДОВИЧ

Яков Борисович Зельдович.

Как устроена Вселенная? Каково её прошлое, настоящее и будущее?

Эти вопросы естественно появляются после того, как мы в общих чертах поняли, как устроена ближайшая наша окрестность, сначала земной шар, затем Солнце и вся Солнечная система, а потом и другие звезды, наша и другие галактики.

Космология — наука, исследующая Вселенную как целое, — пожалуй, самая трудная ветвь астрономии. За последние десятилетия достигнуты определенные успехи в понимании современного состояния и ряда этапов эволюции Вселенной. Эти успехи — результат работы многих людей, совместных усилий астрономов и физиков.

В настоящее время многое о Вселенной известно нам вполне достоверно. Перечислим основные факты.

1. Вселенная однородна. Это значит, что она везде одинакова, но «однородность», «одинаковость» нужно понимать в определенном статистическом смысле. Поясню примером: воздух в сосуде однороден. В каждом кубическом сантиметре одинаково число молекул кислорода и одинаково число молекул азота. Если же взять очень маленькие объемы, например, кубики с ребром $3 \cdot 10^{-7}$ см, объем их примерно 10^{-20} см^3, то в них в среднем должна находиться одна молекула кислорода или азота. Значит, в каждый данный момент в каком-то одном или нескольких кубиках нет ни одной молекулы, в других — одна молекула N_2, в третьих — одна молекула O_2, а может быть и две или три молекулы, одинаковых или разных. Однородность же проявляется только тогда, когда мы рассматриваем достаточно большие объемы.

Во Вселенной однородность проявляется в объемах (кубах) с характерным размером (ребром) больше 300 мегапарсеков (1 мегапарсек (Мпс) $= 10^6$ парсек (пс) $\approx 3 \cdot 10^6 \cdot 10^{18}$ см $= 3 \cdot 10^{24}$ см).

Учтем, что 1 год $\approx 3 \cdot 10^7$ с, а скорость света $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с. Значит, за год свет проходит $3 \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 10^7$ см $\approx 10^{18}$ см — такая единица длины называется световым годом; 1 парсек ≈ 3 световым годам. В космологии, как и в теоретической физике, часто пользуются этими единицами.

Однородность Вселенной в масштабах 300 Мпс и бо́льших означает, что в любом кубе с таким ребром, где бы его ни «поместить» во Вселенной, будет заключено приблизительно одинаковое количество скоплений галактик; такие скопления представляют собой самые большие структурные единицы Вселенной и заменяют молекулы газа в приведенном выше примере. В масштабах же порядка 30 Мпс Вселенная неоднородна. Заметим, что масштабы ~300 Мпс значительно меньше того расстояния, до которого можно исследовать Вселенную современными телескопами.

2. Как мы уже сказали, самой большой структурной единицей является во Вселенной скопление галактик. Большие скопления содержат тысячи галактик, их линейные размеры достигают нескольких мегапарсеков. Входящие в

скопления галактики состоят из сотен миллиардов звезд. Звезды же состоят из горячего газа, образованного атомными ядрами и электронами. Небольшая часть газа находится в пространстве между звездами. Если взять достаточно большой объем во Вселенной и поделить общее количество вещества в нем на объем, то получим среднюю плотность. Средняя плотность вещества во Вселенной заключена между 10^{-30} и 10^{-31} г/см^3. Большой объем надо было взять для того, чтобы случайно не попасть на область, где вещества намного больше или меньше, чем в среднем.

Атомные ядра состоят, как мы знаем, из протонов и нейтронов (в свою очередь протоны и нейтроны состоят из кварков, но это сейчас для нас несущественно). Среди ядер больше всего во Вселенной свободных протонов, то есть ядер водорода. Их примерно 70 % от общего числа нуклонов (протонов и нейтронов). Около 15 % протонов связаны в других ядрах, главным образом в ядрах гелия. И наконец, ~15 % составляют нейтроны, также связанные в ядрах. Всего гелия во Вселенной приблизительно 25—28 %. На ядра тяжелых элементов остается всего лишь около 2 % нуклонов.

Плотность электронов (число штук в 1 см^3) равна плотности протонов, так что электрические заряды их уравновешивают друг друга. В среднем Вселенная электронейтральна. Протоны и нейтроны имеют приблизительно одинаковую массу $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г, масса электрона намного меньше, она равна $9{,}1 \times 10^{-28}$ г. Понятно теперь, что среднее (для больших объемов!) число нейтронов и протонов в 1 см^3 можно оценить, поделив $(10^{-30} \div 10^{-31})$ г/см^3 на $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г. Оказывается, что в 1 см^3 во Вселенной в среднем $6 \cdot (10^{-7} \div 10^{-8})$ нуклонов. Другими словами, один нуклон (протон или нейтрон) приходится в среднем на несколько кубических метров!

Подчеркнем еще раз, что внутри тех больших объемов, о которых мы говорили, вещество распределено крайне неравномерно. Например, в центре нашего Солнца плотность около 100 г/см^3, в $(10^{32} \div 10^{33})$ раз больше средней. Существуют и гораздо более плотные звезды, плотность в центральных областях нейтронных звезд $\sim 10^{14}$ г/см^3. И в то же время между галактиками плотность вещества меньше средней.

3. Вселенная заполнена первичным радиоизлучением с длинами волн от 1 метра до 1 миллиметра. Это излучение называют еще реликтовым, потому что оно сохранилось от самых первых стадий эволюции Вселенной. Оно не связано с какими-либо источниками, например, со звездами или с радиогалактиками.

Читатели «Кванта» знают, что излучение можно рассматривать как поток частиц — квантов электромагнитного поля, иначе их называют фотонами. Поэтому можно не только говорить о потоке и плотности энергии излучения, но и подсчитать число фотонов, находящихся в данный момент в единице объема.

Оказывается, что это число велико — 500 фотонов в 1 см^3. Средняя энергия фотона $1{,}6 \cdot 10^{-15}$ эрг $= 1{,}6 \cdot 10^{-22}$ Дж. Общая энергия всех фотонов в единице объема около $8 \cdot 10^{-13}$ эрг/см$^3 = 8 \times 10^{-14}$ Дж/м^3. Для сравнения со средней плотностью вещества во Вселенной выразим энергию фотонов через массу. Воспользуемся для этого формулой Эйнштейна $E = mc^2$. Тогда соответствующая «фотонная плотность массы» равна

$$8 \cdot 10^{-13} \text{ эрг/см}^3 : (3 \cdot 10^{10} \text{ см/с})^2 \approx \approx 8 \cdot 10^{-34} \text{ г/см}^3.$$

Итак, по порядку величины «фотонная плотность массы» 10^{-33} г/см^3*).

Вырисовывается любопытная картина: *по числу штук* фотонов гораздо больше, чем протонов, нейтронов и электронов. Если же вести подсчет плотности, то есть *массы* в единице объема, то протоны и нейтроны в 100 или 1000 раз превосходят фотоны (излучение).

Хочется сравнить ситуацию со слонами в лесу, где есть также муравьи: число слонов меньше числа муравьев, но они тяжелее, и общая масса всех слонов больше массы всех муравьев. Однако это сравнение неточное. Фотоны не муравьи, они не сидят в муравейниках, они со скоростью света летают во всех направлениях и нигде не собираются в кучи или стаи — именно потому, что они «легкие»; про-

---

*) Говоря о массе фотона, мы имеем здесь в виду определяемое формулой Эйнштейна соответствие массы и энергии; напомним, что *масса покоя* фотона равна нулю. Энергия фотона ε, его импульс p и масса μ связаны формулой: $\varepsilon = \mu c^2 = cp$. Буквами E и m мы обозначаем в тексте соответственно суммарную энергию и массу всех фотонов в 1 см^3.

тоны и нейтроны — «тяжелые», поэтому силы тяготения собирают их в плотные кучи — планеты, звезды, галактики.

Подсчет числа реликтовых фотонов совершается с помощью радиотелескопов. Технически это довольно трудная задача, так как на Земле есть много фотонов местного, земного и солнечного происхождения. Преодолев все эти трудности, радиоастрономы измерили общий поток фотонов реликтового излучения. Он оказался равным $1{,}3 \cdot 10^{12}$ $(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{стер})^{-1}$. Отсюда и была вычислена указанная выше концентрация реликтовых фотонов во Вселенной.

Есть основания считать, что кроме фотонов Вселенную пронизывают и другие частицы, в частности, нейтрино и антинейтрино разных сортов. Если масса покоя нейтрино равна нулю, то их вклад в суммарную плотность примерно равен вкладу в плотность от излучения. Однако даже очень малая масса покоя одного из видов нейтрино (в 25 000 раз меньше массы покоя электрона) радикально изменила бы наши представления о средней плотности вещества во Вселенной.

Современная физика уже вполне охотно приписывает нейтрино малую массу покоя, хотя и не дает определенного числа. В свою очередь астрономы приводят доводы в пользу того, что масса галактик и скоплений галактик больше массы содержащегося в них обычного вещества. Предполагается, что существует еще какая-то «скрытая» масса, которая обнаруживается только по той силе тяготения, которую она создает.

4. Вселенная не остается все время в одном и том же состоянии — она эволюционирует. Об этом можно судить, измеряя скорость движения далеких галактик. Наблюдения показывают, что далекие галактики удаляются от нас со скоростью u, пропорциональной расстоянию r до них. Формула $\vec{u}=H\vec{r}$ выражает знаменитый закон Хаббла. Коэффициент пропорциональности H называется постоянной Хаббла и приблизительно равен 50 (км/с)/Мпс. Отметим здесь же, что название «постоянная» указывает в этом случае только на независимость H от величины и направления вектора $\vec{r}$. В то же время H зависит от времени.

Для того чтобы установить этот закон, нужно было научиться определять скорости движения галактик и расстояния, на которых они находятся.

Принцип определения скорости таков. Излучение галактик содержит спектральные линии, принадлежащие определенным химическим элементам (вспомните, например, «желтую линию» натрия, которую вы видите, когда поваренная соль NaCl попадает в пламя газовой горелки). Законы физики везде одинаковы. Длина волны определенной линии в момент излучения — $\lambda_{\text{изл}}$ одинакова на Земле и в любой самой далекой галактике. Если источник удаляется, то согласно эффекту Доплера покоящийся наблюдатель будет принимать излучение, смещенное к красному концу спектра, другими словами, длина волны для наблюдателя $\lambda_{\text{набл}}$ увеличится. Относительная величина смещения в космологии обозначается буквой z и определяется формулой

$$z=\frac{\lambda_{\text{набл}}-\lambda_{\text{изл}}}{\lambda_{\text{изл}}}.$$

Для случая, когда скорость u много меньше скорости света c, $z \approx u/c$. В случае же, когда скорость u приближается к c, формула, связывающая u и z, становится более сложной, но нам она не потребуется.

Понятно поэтому, что измеряя смещение спектральных линий в спектрах небесных тел и галактик, можно вычислить их скорость удаления (так называют компоненту скорости, направленную вдоль «луча зрения»)*).

Эффект Доплера дает возможность не только измерять скорость удаляющихся от нас галактик, но «работает» и на автомобильных дорогах. Автоинспекторы вооружены специальным прибором — «пистолетом», измеряющим скорость приближающихся или удаляющихся автомашин. В отличие от космических объектов, автомашины сами не излучают, а лишь отражают электромагнитный импульс, испускаемый «пистолетом». Подумайте, как это влияет на величину эффекта Доплера?

А как же определить расстояния до галактик? Эта задача — одна из самых важных и самых трудных в космологии.

Говорят, что нужно иметь «стандартный метр» или «стандартную свечу». Это означает следующее.

Если есть далекий объект с известным размером d («метр»; не надо, конечно, отождествлять его с единицей длины в системе СИ) и если можно измерить угол θ, под которым этот объект виден, то $d=r\theta$, а значит, $r=d/\theta$.

Представим себе другую возможность. Будем считать, что известна светимость удаленного объекта («свеча»). Пусть этот объект испускает L единиц энергии в секунду; тогда поток энергии от такого источника, падающий на единицу поверхности земного приемника

---

*) Об эффекте Доплера см. статью Я. Смородинского и А. Урнова — «Квант», № 8, 1980, с. 12—17

$F = L/(4\pi r^2)$, откуда $r = \sqrt{L/4\pi F}$.

Астрономы, изучая и классифицируя сравнительно близкие к нам объекты, нашли среди них такие, светимость и размеры которых хотя бы приблизительно известны. Это позволило найти расстояния до аналогичных объектов, находящихся далеко.

Сопоставляя расстояния со смещениями спектральных линий, астрономы установили закон Хаббла и нашли постоянную H.

С другой стороны, когда постоянная Хаббла H уже известна, измерение расстояний может быть сведено к определению скорости u (или смещения z).

Разумеется, у нас нет никаких оснований думать, что мы занимаем какое-то выделенное положение во Вселенной. Естественно поэтому, что наблюдатель в любой другой галактике тоже увидит картину убегающих удаленных от него галактик. Относительная скорость любых двух галактик пропорциональна расстоянию между ними. Именно это утверждение следует из закона Хаббла (проверьте!).

5. **Большой взрыв.** Процесс разбегания галактик заключается в увеличении со временем расстояний между ними. Можно задать вопрос — когда это движение началось?

Определить момент, когда все галактики находились «в одном и том же месте» («в точке»), совсем просто, если предположить, что скорость u удаления от нас каждой галактики остается постоянной с течением времени. Достаточно для этого разделить сегодняшнее расстояние r на скорость u. Получим:

$$t = \frac{r}{u} = \frac{r}{Hr} = \frac{1}{H} = 20 \text{ млрд лет.}$$

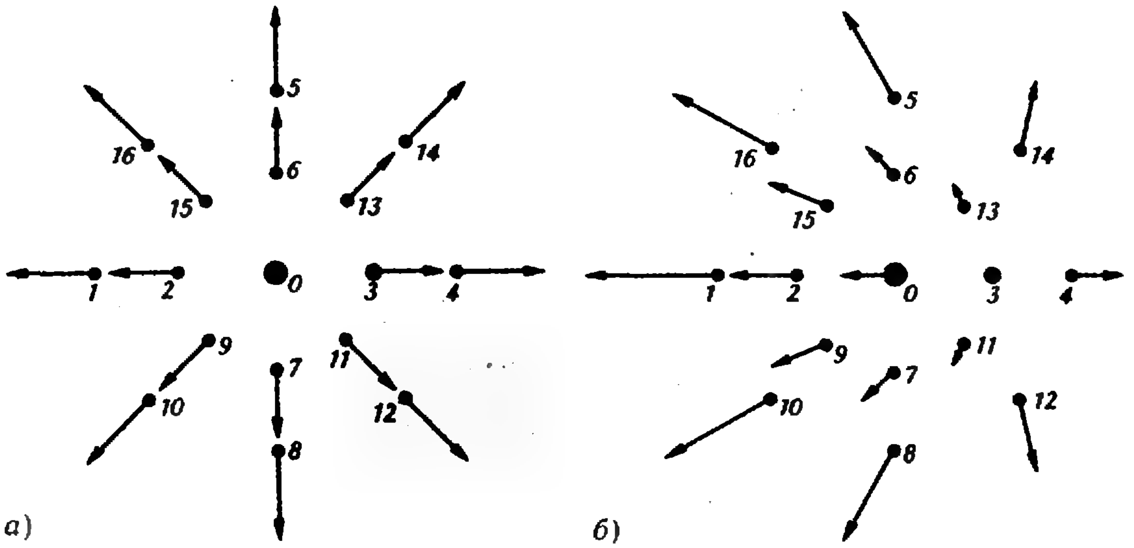
Предположение о постоянстве u не противоречит закону Хаббла: хотя расстояние r увеличивается со временем, H, как уже упоминалось выше, тоже зависит от времени.

Более аккуратные рассуждения показывают, что скорость удаления каждой галактики к тому же уменьшается с течением времени. Причина этого в том, что галактикам приходится преодолевать силы тяготения, действующие на них со стороны остальных галактик. Это приводит к тому, что в действительности время, прошедшее с начала расширения (возраст Вселенной), оказывается ближе к $t_0 = \frac{2}{3}\frac{1}{H} \approx 13$ млрд лет. (Вычисляя возраст, мы подставляем в формулы сегодняшнее значение постоянной Хаббла H, раньше величина этой постоянной была больше.)

Итак, твердо установлено, что около 13 миллиардов лет тому назад произошел Большой взрыв. Более того, прослежена последовательность событий, начинающихся с расширения очень плотного вещества. Это вещество было и очень горячим, поэтому принято говорить о теории «горячей» Вселенной. Расширение сопровождается не только уменьшением плотности, но и понижением температуры. На основе известных нам законов физики можно надежно проследить, какие процессы происходили во Вселенной начиная с того момента, когда температура вещества составляла около 10^{13} градусов, плотность 10^{33} г/см^3, давление 10^{54} дин/см^2 = $= 10^{53}$ Н/м$^2 \approx 10^{48}$ атм. При этих условиях вещество представляло собой «суп» из всевозможных частиц и античастиц. «Тяжелые» частицы и античастицы в основном аннигилируют, «выживают» кванты электромагнитного излучения (фотоны) и нейтрино. Количество вещества в «супе» ненамного превосходило количество антивещества. Поэтому выживает и небольшое (по сравнению с фотонами и нейтрино) количество протонов, нейтронов и электронов. Выжившие нейтроны с частью протонов соединяются в ядра гелия. Гораздо позже (через 300 000 лет) протоны и ядра гелия соединяются с электронами, превращаясь в нейтральные атомы. Расчетное количество образующегося гелия хорошо совпадает с тем, которое наблюдается. Это укрепляет нашу уверенность в правильности теории горячей Вселенной.

Общее расширение между тем продолжается. Фотоны остаются равномерно распределенными в пространстве и до настоящего времени. Они-то и образуют уже упоминавшийся выше космический фон радиоизлучения — реликтовое излучение.

Атомы же, наряду с общим расширением, образуют местные «сгущения» — звезды, квазары, галактики, скопления галактик. Тяжелые элементы рождаются позже — в процессах ядерного горения в звездах. При взрывах звезд они выбрасываются и начинают свое путешествие внутри галактик, часть их попадает в звезды второго



Для иллюстрации закона Хаббла на рисунке а) показано распределение скоростей убегающих галактик с точки зрения наблюдателя, находящегося в нашей Галактике (0). На рисунке б) приведено распределение скоростей тех же галактик, но с точки зрения наблюдателя, находящегося в галактике 3. Стрелки, изображающие скорости, на обоих рисунках направлены от наблюдателя, и их длины пропорциональны расстояниям от наблюдателя до соответствующей галактики.

поколения (Солнце!) и в планеты (Земля!). Общее число атомов тяжелых элементов, однако, невелико (см. выше).

Такова история эволюции Вселенной в самом кратком очерке. Уверенность в том, что эта картина эволюции в целом правильна, не исключает необходимости дальнейшей трудной работы, в ходе которой возможны и открытия, и ошибки.

Необходимо, например, подробно исследовать последнюю стадию, связанную с образованием отдельных небесных тел и галактик и с их расположением в пространстве. Один из центральных вопросов космологии — это вопрос о том, какова сегодняшняя структура Вселенной и как эта структура образовалась. Сюда же относятся вопросы о происхождении скоплений и сверхскоплений галактик. Ответы на эти вопросы зависят от начальной малой неоднородности плотности, которую потом тяготение усиливало.

Усиление неоднородности плотности проявляется в сгущении, сжатии газообразного вещества. В трехмерном пространстве «газовое облако» могло бы сжиматься в каждом из трех взаимно перпендикулярных направлений. Однако одновременное сильное сжатие вдоль двух или трех осей — явление нехарактерное. Как правило, сжатие каждого «облака» происходит в одном выделенном направлении. Такой процесс приводит к образованию тонких слоев, их называют «блинами». Плотность вещества внутри этих слоев увеличивается по мере их сжатия. При падении новых порций газа на уже образовавшиеся «блины» они разогреваются и разрастаются в направлении своей плоскости. На более поздних стадиях «блины» начинают пересекаться. В результате формируется сложная ячеистая структура, напоминающая пчелиные соты. В этой структуре слои сжатого газа окружены областями, где газа практически нет. Размеры отдельных ячеек достигают сотни мегапарсеков, а их «стенки» образуются сильно уплотненными сверхскоплениями. Именно в «блинах» происходит рождение отдельных звезд, галактик и их скоплений.

Образование структуры описывается уравнением, определяющим положение частиц вещества в произвольный момент времени t. Если задавать положение частицы в некоторой системе отсчета вектором $\vec{X}$, то уравнение имеет вид:

$$\vec{X} = t^{2/3}\vec{x} + t^{4/3}\vec{v}(\vec{x}).$$

Здесь $\vec{x}$ — вектор, определяющий начальное положение частицы (при $t=0$). Первое слагаемое в правой части этого уравнения описывает общее расширение Вселенной. Функция $\vec{v}(\vec{x})$ задает начальные возмущения для частицы, которой соответствует вектор $\vec{x}$, а второе слагаемое в целом характеризует рост возмущений со временем. Векторы $\vec{x}$ и $\vec{v}(\vec{x})$ таковы, что размерности обоих слагаемых в правой части уравнения совпадают с размерностью вектора $\vec{X}$ (понятно, что при такой записи размерность $\vec{x}$ не совпадает с размерностью $\vec{X}$). Анализ написанного уравнения требует в общем случае сложных расчетов на современных вычислительных машинах.

Попробуйте сами проанализировать более простой случай, когда мы имеем дело со свободным движением вдоль одной прямой:

$$X = x + \tau v(x).$$

Здесь X — положение частицы в произвольный момент времени, x — начальное положение частицы, $v(x) = v_0 \sin kx$ — начальное возмущение. Найдите распределения частиц, их скоростей и плотности по оси X в различные моменты времени τ. Начальную плотность (при $\tau = 0$) можно считать постоянной. Заметьте, что в этом случае размерности x и X совпадают, $v(x)$ имеет смысл скорости.

Проблема структуры тесно связана с тем, какие еще частицы (кроме атомных ядер, электронов, фотонов) содержатся во Вселенной и определяют ее среднюю плотность. Проблема «скрытой массы», уже упоминавшаяся выше, как и проблема структуры Вселенной, требует еще очень большой работы астрономов-наблюдателей. Нужно также, чтобы физики, занимающиеся элементарными частицами, закончили составление полного каталога частиц с указанием их масс и других свойств.

Есть и другая сторона вопроса: что из себя представляет вся Вселенная, Вселенная как целое? Общая теория относительности Эйнштейна говорит о том, что геометрия пространства не подчиняется законам Евклида. Пространство в целом может быть замкнутым, иметь ограниченный объем и в то же время не иметь границ. Говоря про такую возможность, всегда пользуются двумерной аналогией: поверхность шара имеет вполне определенную площадь ($4\pi R^2$), она замкнута, но не имеет границ, все ее точки равноценны. Вместе с тем, малая часть сферы по своим геометрическим свойствам очень близка к малой части плоскости. Ответ на вопрос о том, замкнута ли Вселенная, тоже связан с тем, как велика «скрытая масса».

Подчеркнем еще раз, что решение всех этих сложных задач не изменит в целом того сценария расширения, который был изложен выше.

Существуют еще и более глубокие и трудные вопросы о том, что представляет собой начальное состояние с высокой температурой и плотностью, откуда оно взялось, почему Вселенная расширяется.

Мы говорили выше о Большом взрыве. Но Большой взрыв Вселенной очень не похож на взрыв даже самой большой бомбы. Заряд из обычного взрывчатого вещества в результате химической реакции превращается в газ с давлением в сотни тысяч атмосфер. Этот газ окружен воздухом с давлением в одну атмосферу. Разность давлений газа и окружающей атмосферы представляет собой ту силу, которая вызывает движение газа и окружающего воздуха, расширение газа и весь комплекс явлений, который называется взрывом.

Между тем в Большом взрыве Вселенной с хорошей точностью плотность, температура и давление одинаковы во всех точках пространства в один и тот же момент времени.

Большой взрыв — результат определенного начального распределения скоростей в горячем веществе. Разлет частиц происходит по инерции. Высокое давление отнюдь не ускоряет разлет, а силы тяготения даже замедляют его. С самого начала *относительная* скорость разлета любых двух малых объемов вещества пропорциональна расстоянию между ними, другими словами, с самого начала «работает» закон Хаббла. Для объяснения всего того, что происходит позже, в теории Большого взрыва нужны очень специфические начальные условия.

Только в последние годы наметились ответы на вопросы о том, как же получаются эти начальные условия, что приводит к расширению Вселенной. Ответы эти связаны с тем, что современная теория допускает возможность существования состояния с отрицательным давлением, а в этом состоянии гравитационные силы вызывают отталкивание вместо обычного притяжения. Тем, кто не захочет поверить мне на слово, а пожелает проверить это утверждение, придется сначала серьезно изучить общую теорию относительности.

Мы коснулись в этой статье только некоторых вопросов, связанных с историей и эволюцией Вселенной. Законченная теория возникновения Вселенной пока еще не создана, космология при всех ее успехах отнюдь еще не завершена. Она имеет определенные хорошо сформулированные проблемы, ожидающие систематической исследовательской работы. Чтобы развивать космологию дальше, необходимы более совершенные наблюдения, прогресс физической теории и большая научная смелость.

* * *

По моим приближенным расчетам, вы, мои читатели в 4 — 5 раз моложе меня. На языке космологии вы находитесь «на другой стадии эволюции». Поэтому позвольте дать вам несколько советов.

1) Учитесь постановке задач. Учитесь этому всегда и везде. Почти любое явление в жизни, в природе, в быту может быть источником «задач», источником размышления.

Падение капли воды, ожидание автобуса, полет палки, мелькание двух оград, цвет пленки масла на воде... Еще Козьма Прутков сказал: «Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою».

Экзамены и олимпиады нацелены на решение задач, которые перед вами ставят другие. Открытия — большие или маленькие — это, как правило, постановка задач.

2) Физика неотделима от математики. Только на языке математики можно формулировать законы физики. Мой взгляд на то, как учить высшую математику, изложен в предисловии к моей книге «Высшая математика для начинающих». Недавно вышла книга И. М. Яглома и моя с близким названием, более толстая, скорее нацеленная на педагога, а не на учащегося. В этих книгах дано много конкретных примеров задач, доступных школьникам *).

3) Занимайтесь самообразованием. Ищите задачи и решайте их — в одиночку, а еще лучше вдвоем. Если Ваш партнер сильнее Вас, он Вас многому научит. Если Ваш партнер слабее, то ведя его за собой, обучая его, Вы лучше и глубже поймете вопрос сами.

4) Чередуйте приобретение знаний и приложение знаний к решению интересующих Вас вопросов. Более того, пробуйте учению придать характер открытия, научной работы. Можно взять главу учебника и подробно, шаг за шагом, страницу за страницей, формулу за формулой добросовестно прочесть, понять и разобраться в материале. Но можно поступить иначе: бегло проглядеть главу, понять — хотя бы очень приблизительно — о чем идет речь, какие задачи ставятся и решаются в данной главе. Потом отложить учебник и попытаться самому придумать решение или восстановить ход доказательства. Помучившись несколько дней, возьмите учебники и посмотрите уже внимательно — правилен ли был тот подход, который Вы нашли сами, или — в другом случае — как в учебнике преодолены те трудности, с которыми Вы столкнулись, но не справились.

Время, затраченное на поиски пути, не потеряно. Если Вы придумаете сами что-то, науке уже известное, Вы будете это знать лучше, чем если бы то же самое узнали пассивно. Пройдут годы — и Вы будете открывать новое так, как сейчас Вы открываете для себя то, что уже известно. Но даже если Вы и не нашли ответ, все равно Вы лучше поняли трудности вопроса, лучше оценили то, что написано в учебнике.

Будущий физик (или вообще ученый) уже в школьные годы не должен ограничиваться классными занятиями, стандартной программой и стабильными учебниками.

Я пишу обо всем этом, вспоминая свои школьные годы, непростые, но вдохновляющие.

Учитесь творить! И всем тем, кто становится на этот трудный путь, я от всей души желаю успеха.

Что читать о Вселенной и космологии:

1. Зельдович Я. Б. Современная космология. Природа, 1983, № 9.
2. Силк Дж. Большой взрыв. М.: Мир, 1982.
3. Вайнберг С. Первые три минуты. Современный взгляд на происхождение Вселенной. М.: Энергоиздат, 1981.
4. Климишин И. А. Релятивистская астрономия. М.: Наука, 1983.
5. Гуревич Л. Э., Чернин А. Д. Происхождение галактик и звезд. М.: Наука, 1983.
6. Долгов А. Д., Зельдович Я. Б. Вещество и антивещество во Вселенной. Природа, 1982, № 8.
7. Энциклопедический словарь юного астронома. М.: Педагогика, 1980.
8. Физика космоса. Маленькая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1976.
9. Зельдович Я. Б. Почему расширяется Вселенная. Природа, 1984, № 2.

---

*) Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике. 5-е изд. М.: Наука, 1970; Зельдович Я. Б., Яглом И. М. Высшая математика для начинающих физиков и техников. М.: Наука, 1982.

Кубическая парабола

Академик Л. С. ПОНТРЯГИН

Для понимания этой статьи нужно уметь вычислять производную многочлена и знать теорему о том, что если функция $f(x)$, заданная на отрезке $\alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2$, имеет положительную производную на интервале $\alpha_1 < x < \alpha_2$, при этом быть может имеет производную равную нулю в концах отрезка, то она возрастает на всем отрезке $\alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2$*). Так что для двух точек x_1, x_2, удовлетворяющих условию

$$\alpha_1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \alpha_2 \qquad (1)$$

имеет место неравенство

$$f(x_1) < f(x_2). \qquad (2)$$

Аналогичная теорема имеет место также и для убывания функции в случае отрицательной производной.

Кроме того нужно знать, что такое вторая и третья производные функции $f(x)$. Вторая производная $f''(x)$ есть производная от производной функции $f(x)$, то есть задается формулой

$$f''(x) = (f'(x))'. \qquad (3)$$

Третья производная $f'''(x)$ функции $f(x)$ есть производная от второй производной, то есть задается формулой

$$f'''(x) = (f''(x))'. \qquad (4)$$

Статья посвящена изучению графика функции

$$y = g(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3. \qquad (5)$$

Этот график называется *кубической параболой.*

Рассмотрим прежде всего кубическую параболу частного вида

$$y = f(x) = x^3 - px, \qquad (6)$$

где p — постоянная. График этой функции (рис. 1) обозначим через L.

Отметим прежде всего совершенно специальные, но очень заметные свойства кубической параболы (6). Кубическая парабола центрально симметрична относительно начала координат. В самом деле, если точка (x, y) принадлежит кубической параболе, то есть величины x и y удовлетворяют уравне-

---

*) «Алгебра и начала анализа 9—10», п. 25.

нию (6), то точка $(-x, -y)$ также удовлетворяет этому уравнению. Именно, имеем

$$(-y) = (-x)^3 - p(-x). \qquad (7)$$

Таким образом, наряду с точкой (x, y) к линии L принадлежит и симметричная к ней относительно начала координат точка $(-x, -y)$.

Найдем, далее, точки пересечения линии L с осью абсцисс, то есть корни уравнения

$$x^3 - px = 0. \qquad (8)$$

Уравнение это имеет три корня

$$x = 0, \ x = \pm\sqrt{p}. \qquad (9)$$

Последние два корня при $p < 0$ мнимые и потому не имеют обычного геометрического смысла. При $p > 0$ все три корня (9) различны, и, следовательно, имеются три точки пересечения линии L с осью абсцисс. При $p = 0$ три корня сливаются в один трехкратный корень $x = 0$.

Производная функции (6) задается формулой

$$f'(x) = 3x^2 - p. \qquad (10)$$

Изучая знак этой функции при различных значениях x, мы можем разбить линию L на участки возрастания и убывания функции $f(x)$ и найти точки максимума и минимума. Для той и другой цели нам следует найти корни уравнения

$$f'(x) = 3x^2 - p = 0. \qquad (11)$$

При отрицательном p функция $f'(x)$ (см. (10)) положительна при любом значении x и, следовательно, функция $f(x)$ возрастает на всем протяжении изменения x: $-\infty < x < \infty$.

При $p = 0$ функция $f'(x)$ (см. (10)) положительна при всех значениях $x \neq 0$. Таким образом, она возрастает при $-\infty < x < 0$, $0 < x < \infty$. А так как на первом из этих участков функция $f(x)$ отрицательна, на втором положительна, то она возрастет на всем протяжении изменения от $-\infty$ до ∞.

В точке $x = 0$, где $f'(x) = 0$, функция $f(x)$ также возрастает. Таким образом, при $x = 0$, где $f'(x) = 0$, функция x^3 не имеет ни максимума, ни минимума.

В случае положительного p уравнение (11) имеет два корня

$$x_1 = -\sqrt{p/3}, \ x_2 = \sqrt{p/3}. \qquad (12)$$

Следует проверить, не имеет ли функция $f(x)$ в точках x_1 и x_2 максимумов или минимумов. Те же точки x_1 и x_2 разбивают все протяжение изменения x на участки:

$$-\infty < x \leqslant x_1, \ x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \ x_2 \leqslant x < \infty. \qquad (13)$$

На первом из этих участков функция $f'(x)$ положительна, на втором — отрицательна, на третьем — вновь положительна. Таким образом, функция $f(x)$ возрастает на первом участке, убывает на втором и возрастает на третьем. Отсюда же видно, что точка x_1 есть точка максимума, а точка x_2 — точка минимума. Таким образом, кубическая парабола (6) имеет три существенно различные формы в зависимости от значения p: первая $p < 0$, вторая $p = 0$, третья $p > 0$. На рисунке 1 кубическая парабола изображена во всех трех случаях.

Рассмотрим уравнение

$$x^3 - px = c. \qquad (14)$$

Геометрически ясно, что при $p < 0$ это уравнение имеет лишь один действительный корень. При $p = 0$ это уравнение имеет также лишь один действительный корень, за исключением случая $c = 0$, когда имеется тройной корень $x = 0$. Если $p > 0$, уравнение (14) имеет три корня при

$$f(x_2) \leqslant c \leqslant f(x_1), \qquad (15)$$

причем в крайних положениях значе-

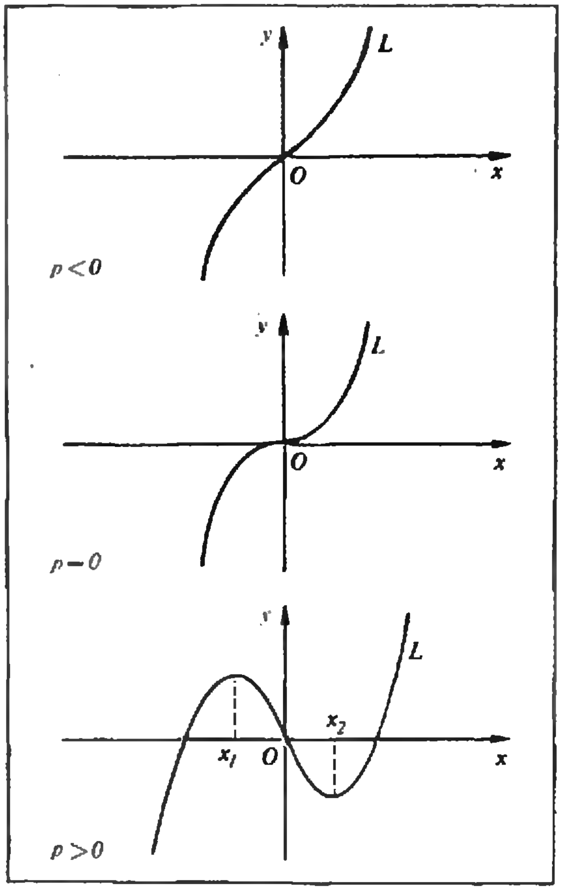


Рис. 1.

ния c на отрезке (15) имеется один простой и один двойной корень. Вне отрезка (15) имеется лишь один действительный корень уравнения (14).

Кубическая парабола (6) всегда проходит через начало координат. Тангенс угла наклона ее в начале координат определяется формулой

$$f'(0) = -p. \qquad (16)$$

Таким образом, сама касательная имеет уравнение

$$y = k(x) = -px. \qquad (17)$$

Эта касательная разбивает всю плоскость на две части: верхнюю, лежащую над ней, и нижнюю, лежащую под ней. Произвольная точка (x^*, y^*) плоскости лежит над прямой (17), если

$$y^* > -px^*. \qquad (18)$$

Точка (x^*, y^*) лежит под прямой (17), если

$$y^* < -px^*. \qquad (19)$$

Выясним, в какой из рассмотренных двух полуплоскостей лежит точка (x, y) кубической параболы, то есть точка, удовлетворяющая уравнению (6). Для выяснения этого вопроса мы должны сравнить величину

$$x^3 - px \qquad (20)$$

с величиной

$$-px. \qquad (21)$$

Ясно, что при $x<0$ величина (20) меньше величины (21), а при $x>0$ величина (20) больше величины (21). При $x<0$ точка (x, y) кубической параболы удовлетворяет условию (19), то есть лежит под касательной, а при $x>0$ эта точка удовлетворяет условию (18), то есть лежит над касательной. Следовательно, в начале координат кубическая парабола переходит с одной стороны касательной на другую ее сторону.

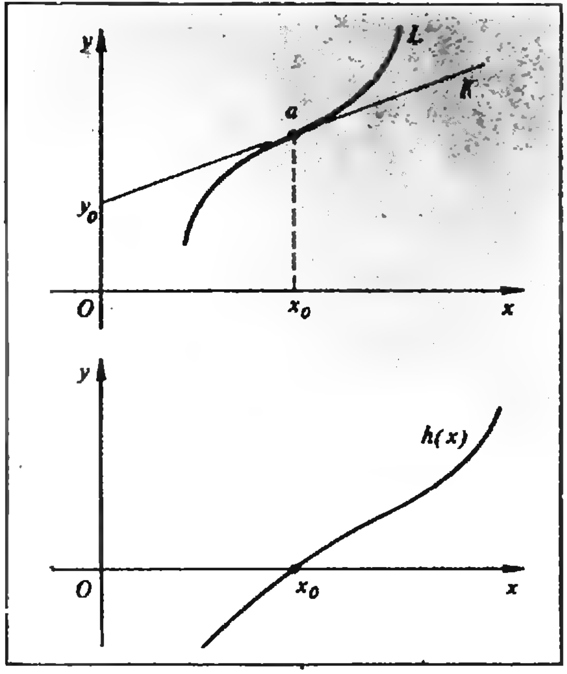


Рис. 2.

Явление перехода линии с одной стороны касательной на другую вблизи точки касания имеет общий интерес. Займемся этим явлением.

Точка перегиба. Пусть L — график некоторой функции $f(x)$, a — некоторая точка линии L с абсциссой x_0, K — касательная к L в точке a (рис. 2). Если линия L переходит в точке a с одной стороны касательной на другую, то точка называется *точкой перегиба* линии L. Оказывается, что для точки перегиба выполнено условие (см. (3))

$$f''(x_0) = 0. \qquad (22)$$

Докажем это утверждение. Уравнение касательной K мы можем записать в виде

$$y = K(x) = f'(x_0) \cdot x + y_0. \qquad (23)$$

Здесь $f'(x_0)$ есть тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс, а y_0 — некоторая константа, которая определяется условием

$$f(x_0) - K(x_0) = 0. \qquad (24)$$

Это условие выражает тот факт, что касательная в точке a к линии L проходит через точку a. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - K(x). \qquad (25)$$

Эта функция удовлетворяет следующим двум условиям

$$h(x_0) = 0, \ h'(x_0) = 0. \qquad (26)$$

Таким образом, график функции

$$y = h(x) \qquad (27)$$

касается оси абсцисс в точке $x = x_0$.

Если a есть точка перегиба, то график функции $h(x)$ в точке x_0 переходит с одной стороны оси абсцисс на другую. Докажем прежде всего, что $h''(x_0) = 0$. Доказательство будем вести от противного. Действительно, допустим, что $h''(x_0) > 0$. Так как $h'(x_0) = 0$, то функция $h(x)$ имеет в точке x_0 минимум и потому при всех x, достаточно близких к x_0, имеем

$$h(x) \geqslant h(x_0) = 0.$$

Поэтому график функции $h(x)$ не переходит в точке x_0 с одной стороны оси абсцисс на другую. Точно так же разбирается случай $h''(x_0)<0$. Тогда функция $h(x)$ имеет в точке x_0 максимум, и потому $h(x)\leqslant h(x_0)=0$; следовательно, и при $h''(x_0)<0$ график функции $h(x)$ не переходит с одной стороны оси абсцисс на другую в точке x_0. Итак, остается одна возможность: $h''(x_0)=0$.

Далее, мы имеем

$$0=h''(x_0)=f''(x_0)-K''(x_0)=f''(x_0), \tag{28}$$

так как $K''(x)=0$. Таким образом, формула (28) доказана.

Не следует, однако, думать, что это равенство является достаточным условием для того, чтобы точка с абсциссой x_0 была точкой перегиба графика функций $f(x)$.

Читателю предлагается доказать, что точка a действительно является точкой перегиба, если

$$f''(x_0)=0,\ f'''(x_0)\neq 0, \tag{29}$$

так что условие (29) является достаточным условием для того, чтобы точка a была точкой перегиба.

Вернемся теперь к кубической параболе (6). Вычислим вторую производную функции (6). Мы имеем

$$f''(x)=(x^3-px)''=6x. \tag{30}$$

Мы уже установили, что начало координат является точкой перегиба кубической параболы (2). Выражение (25) для второй производной функции (2) показывает, что начало координат является единственной точкой перегиба кубической параболы, так как вторая производная (25) обращается в нуль лишь при $x=0$.

Третья производная функции (6) определяется формулой (см. (4))

$$f'''(x)=6.$$

Таким образом, в точке $x=0$ для кубической параболы (6) выполнены условия (29), откуда в частности вытекает, что точка $x=0$ является точкой перегиба.

***

Займемся теперь общей кубической параболой (5). Выясним прежде всего сколько действительных корней имеет многочлен (5).

Рассмотрим уравнение (14)

$$x^3-px=c.$$

Как уже было сказано, при $p<0$ это уравнение имеет лишь один действительный корень. При $p=0$ это уравнение имеет также лишь один действительный корень, за исключением случая $c=0$, когда имеется тройной корень $x=0$. Если $c=0$, уравнение (14) имеет три корня при

$$f(x_2)\leqslant c\leqslant f(x_1)$$

(см. (15)), где

$$f(x_1)=\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}},\quad f(x_2)=-\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}},$$

(см. (12)), так что неравенство (15) можно записать в виде

$$|c|\leqslant\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}, \tag{31}$$

причем для крайних значений c из отрезка (31) имеется один простой и один двойной корень. Вне отрезка (31) уравнение (14) имеет лишь один действительный корень.

Многочлен (5) можно привести к виду

$$\eta=f(\xi)=\xi^3-p\xi \tag{32}$$

заменой переменных

$$x=\xi+\alpha,\quad y=\eta+\beta. \tag{33}$$

Такая замена означает параллельный сдвиг системы координат.

Производя подстановку (33), получим

$$\eta=\xi^3+(3a+a_1)\xi^2+(3\alpha^2+2a_1\alpha+a_2)\xi+\\+(\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3-\beta). \tag{34}$$

Для того чтобы многочлен (5) был приведен к виду (32), достаточно, чтобы были выполнены условия

$$\begin{gathered}3a+a_1=0,\\ \alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3-\beta=0.\end{gathered} \tag{35}$$

Из первого уравнения системы (35) имеем

$$\alpha=-\frac{a_1}{3}. \tag{36}$$

Подставляя это выражение для α во второе уравнение системы (35), получим

$$\beta=\frac{2a_1^3}{27}-\frac{a_1a_2}{3}+a_3. \tag{37}$$

Считая, что α и β заданы формулами (36) и (37), мы можем переписать (34) в виде

$$\eta=f(\xi)=\xi^3-p\xi, \tag{38}$$

где

$$p=\frac{a_1^2}{3}-a_2. \tag{39}$$

Геометрическая форма кубической параболы (5) совпадает с геометрической формой параболы (38). Последняя же зависит от знака величины p (39).

***

Выясним теперь вопрос о том, сколько корней имеет многочлен $g(x)$ (см. (5)).

Многочлены $g(x)$ и $f(\xi)$ связаны соотношением

$$f(\xi)=g(x)-\beta.$$

Таким образом, число корней многочлена $g(x)$ равно числу корней многочлена $f(\xi)+\beta$ или, что то же самое, числу корней уравнения $f(\xi)=-\beta$. Но это число нам уже известно (см. (14)). Следовательно, при $p<0$ (см. (38)) многочлен $g(x)$ имеет один действительный корень, при $p=0$ многочлен $g(x)$ также имеет один действительный корень, за исключением случая, когда величина β (см. (37)) равна нулю.

Рассмотрим случай $p>0$. Если величина β (см. (37)) удовлетворяет условию

$$|\beta| \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}}p^{3/2} \qquad (40)$$

(см. (31)), то многочлен $g(x)$ имеет три действительных корня, причем на концах отрезка (40) два корня сливаются в один. Подставляя в (40) величины β и p из соотношений (37) и (39) и возводя полученное соотношение в квадрат, получим условие

$$\left(\frac{2a_1^3}{27}-\frac{a_1a_2}{3}+a_3\right)^2 \leqslant \frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3. \qquad (41)$$

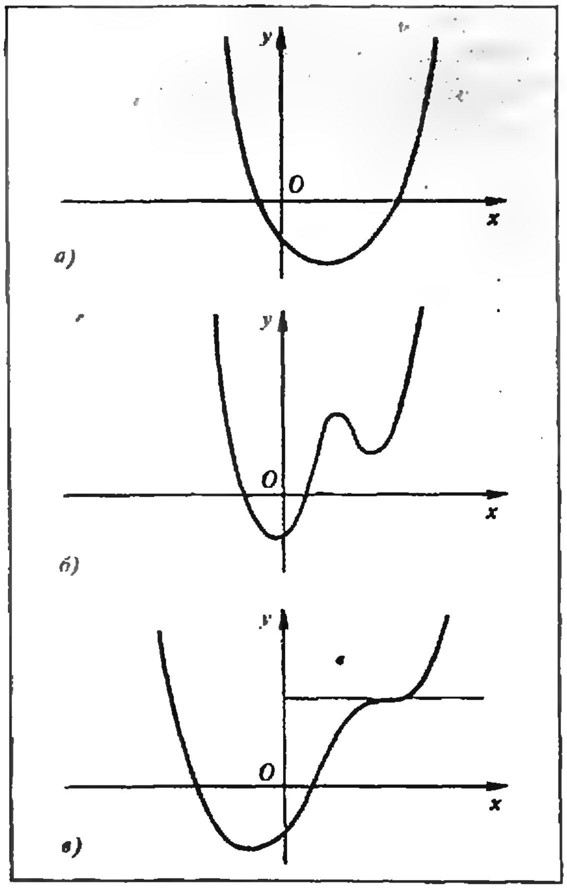


Рис. 3

Полученное условие является полным критерием наличия трех действительных корней многочлена $g(x)$, так как при его выполнении исключается случай $p<0$. Ведь первая часть неравенства (41) при $p<0$ отрицательна, в то время как левая часть, будучи квадратом, не может быть отрицательной.

* * *

Укажем теперь путь изучения графика многочлена четвертой степени

$$y=h(x)=x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4.$$

Для выяснения его поведения следует изучить поведение многочлена

$$h'(x)=4x^3+3b_1x^2+2b_2x+b_3.$$

Этот многочлен уже имеет степень 3 и вопрос о том, сколько у него действительных корней, нами уже решен.

Так как многочлен $h(x)$ неограниченно возрастает, оставаясь положительным, когда $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ *), то в случае, если многочлен $h'(x)$ имеет лишь один действительный корень, многочлен $h(x)$ имеет лишь один минимум. Если же многочлен $h'(x)$ имеет три различных действительных корня, то многочлен $h(x)$ имеет два минимума и один максимум. Вид графика функции $h(x)$ в этих двух случаях дан на рисунке 3, *а*, *б*, а в случае, когда два действительных корня сливаются в один, график имеет вид, показанный на рисунке 3, *в*.

* * *

В заключение приведу формулу Кардано (1501—1576) для решения кубического уравнения (14), то есть уравнения

$$x^3-px=c. \qquad (42)$$

После того, как решение будет получено, мы сможем заменить p и c в соответствии с формулами (37) и (39). Таким образом, мы можем получить формулу для нахождения всех корней многочлена (5).

Для решения уравнения (42) производится замена переменного на сумму двух новых неизвестных u и v, то есть

$$x=u+v. \qquad (43)$$

Новые неизвестные u и v мы свяжем некоторым дополнительным соотношением. Подставляя $x=u+v$ в уравнение (42), получим

$$u^3+v^3+(3uv-p)(u+v)=c. \qquad (44)$$

(Окончание см. на с. 32)

---

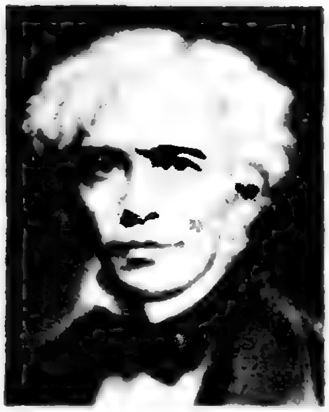
*) То есть когда x неограниченно возрастает по модулю, оставаясь положительным ($x\to+\infty$) и оставаясь отрицательным ($x\to-\infty$). (*Прим. ред.*)

Из предыстории радио

(к 125-летию со дня рождения А. С. Попова)

Член-корреспондент АН СССР
С. М. РЫТОВ

> *Как возникло изобретение, почему оно возникло именно в конце прошлого века, каким образом сооружение, построенное изобретателями, выросло в столь обширное и великолепное здание,— все это становится по-настоящему понятным только если учесть, что пионеры радио могли строить на широком и солидном фундаменте, возведение которого было завершено за несколько лет до самого изобретения.*
>
> Академик Л. И. Мандельштам



М. Фарадей.

Дж. К. Максвелл.

Г. Герц.

А. С. Попов.

Радио — одна из основ современной цивилизации, определяющая ее облик. Не только в пределах Земли, но и в межпланетных масштабах, в космических и даже в космологических проблемах радиоволны являются теперь как средством общения, так и средством познания.

Если сопоставить современное значение радио с его скромным началом, то может показаться, что весь путь развития радио — как идейный, так и практический — исчерпывается нашим веком. Но это ошибочное представление. Как писал выдающийся советский радиофизик и радиотехник академик Л. И. Мандельштам, «изобретение радио, равно как и его развитие, сделалось возможным только благодаря тому перевороту в представлениях об электрических явлениях, который связан с именами Фарадея, Максвелла и Герца. История развития этих представлений есть, по существу, предыстория радио».

В 1831 году Фарадей открыл явление электромагнитной индукции — возникновение электрического поля при всяком изменении магнитного поля. В 1833 году он открывает законы электролиза; в 1837 — обнаруживает влияние среды на емкость конденсатора; с 1845 года следует ряд дальнейших блестящих открытий, в том числе — открытие вращения плоскости поляризации света в магнитном поле, открытие диамагнетизма и парамагнетизма. Во всей своей титанической экспериментальной работе Фарадей опирался на идею о силовых линиях, на представление о роли среды в электромагнитных явлениях, на концепцию близкодействия от точки к точке в противовес ньютоновским представлениям мгновенного дальнодействия. Несмотря на расплывчатость своих представлений о природе электромагнетизма, несмотря на непонимание и оспаривание его концепций, Фарадей шел своим непроторенным путем; и этот путь вел его от одного открытия к другому. А ведь в числе сторонников дальнодействия были такие блестящие физики, как Ампер, Вебер, Кирхгоф, В. Томсон. Единственным, кто глубоко проникся идеями Фарадея и кто поставил перед собой задачу разъяснить и уточнить эти идеи, был Джеймс Клерк Максвелл. В предисловии к написанному им позднее «Трактату по электричеству и магнетизму» он так и пишет: «Главным образом в надежде сделать его [Фарадея — *С. Р.*] идеи основой математической теории, я и предпринял написание этого трактата».

Но, преследуя эту цель, сам Максвелл сделал величайшее открытие, новое не только по содержанию, но и по методу: открытие пришло не из эксперимента, а из математического обобщения теории. Он предсказал явление, обратное тому, которое открыл Фарадей,— возникновение магнитного поля при всяком изменении электрического поля. Тем самым была создана нынешняя макроскопическая электродинамика, которая математически выражена уравнениями Максвелла, в физике охватывает гигантский круг электромагнитных явлений, а исторически означает победу фарадеевского близкодействия, рождение в физике понятия поля.

Чрезвычайно важным выводом, вытекавшим из теории Максвелла, было следующее: должны существовать электромагнитные поперечные волны, скорость распространения которых конечна и определяется произведением электрической и магнитной постоянных

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$ *).

ε_0 и μ_0 были измерены ранее и значение величины $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ оказалось равным 193 088 миль/с, то есть очень близким к значению скорости света 193 118 миль/с, полученному в оптическом опыте Физо. Это позволило Максвеллу уверенно выдвинуть свой знаменитый тезис о том, что «свет есть не что иное, как электромагнитные колебания»**). Первое упоминание об этом величайшем открытии содержится в письме Максвелла Фарадею, датированном 19 октября 1861 года.

Следует заметить, что сам Максвелл скромно считал, что электромагнитная теория света предложена Фарадеем. Он прямо пишет об этом в 1864 году, ссылаясь на чисто умозрительные рассуждения Фарадея в его статье 1846 года «Мысли о лучевых колебаниях». Скромность, конечно, украшает человека, но не может уничтожить разницу между общими словами и прямым следствием теории, следствием, поддающимся опытной проверке. В том-то и дело, что теория Максвелла не только свела воедино все ранее известное об электромагнетизме, но была эвристична, она количественно предсказывала новые явления. Одним из таких предсказаний, пожалуй, самым важным были электромагнитные волны. Ни Фарадей, ни — поначалу — сам Максвелл не имели в виду той прямой связи между оптикой и электромагнетизмом, которая так ярко выявилась в качестве результата теории, создававшейся первоначально только для электромагнитных явлений. Недаром Генрих Герц сказал о теории Максвелла, о его уравнениях в своем докладе «О соотношениях между светом и электричеством» (Гейдельберг, 1889 год):

«Нельзя изучать эту чудесную теорию без того, чтобы порою не возникало ощущения, что математическим формулам присуща самостоятельная жизнь и собственный разум, что они умнее нас, умнее даже открывшего их, что они дают даже больше, чем в них было первоначально вложено».

Герц немало сделал для усовершенствования математического облика теории, но главное его достижение — это задуманные и проведенные им опыты, «классические на веки вечные», как сказал о них известный русский физик О. Д. Хвольсон.

По случаю столетия со дня рождения Максвелла (то есть в 1931 году) Дж. Дж. Томсон, сам выдающийся экспериментатор, сказал об этих опытах: «Исследования Герца являются одним из наиболее замечательных во всей истории физики триумфом экспериментального уменья, изобретательности и осторожности в выводах». И далее: «Открытие электрических волн имело не только научный интерес, хотя единственно им оно было вдохновлено. Подобно открытию электромагнитной индукции Фарадея, оно имело глубокое

---

*) См. статью «Электрическое и магнитное поля» в разделе Школа в «Кванте». (*Прим. ред.*)

**) «...названные числа совпадают с точностью до 30 миль/с, и что особенно удивительно — это то, что оба числа ошибочны более чем на 6000 миль/с... Впрочем, при опубликовании в 1864 году своего мемуара «Динамическая теория электромагнитного поля»... Максвелл указывает скорости в км/с, причем оба числа ни в какой мере не находятся в таком хорошем согласии, как это казалось вначале. К счастью, Максвелл, видимо, осознал, что скорость света была измерена очень неточно, и поэтому не дал обескуражить себя существенному расхождению в числах»,— так говорил по поводу первых определений скорости света из теории Максвелла английский физик Дж. Джинс.

влияние на цивилизацию. Оно дало в руки рабочий метод, который позволяет приблизить друг к другу обитателей земного шара на расстояние слышимости, в чем заложены социальные, воспитательные и политические возможности, значение которых мы только начинаем понимать».

Именно эти волны породили радио. Ведь радио и есть не что иное, как использование электромагнитных волн для практических целей.

Мысль об использовании электромагнитных волн для связи возникла у многих сразу же вслед за опытами Герца. Интересно поэтому, что думал по данному поводу сам Герц.

В 1889 году к Герцу обратился инженер Губер из Мюнхена с вопросом, нельзя ли открытые Герцем волны использовать для беспроволочного телефона. Полученное от Герца ответное письмо Губер в 1897 году (то есть через 3 года после смерти Герца) переслал в немецкий электротехнический журнал, где оно было напечатано без комментариев. Вот перевод этого письма.

«Милостивый государь! Я с удовольствием отвечаю на Ваше любезное письмо от 1 декабря. Силовые магнитные линии распространяются подобно лучам, так же как и силовые электрические линии, только тогда, когда их колебания достаточно быстры; в этом случае оба вида силовых линий неотделимы друг от друга, и лучи или волны, о которых идет речь в моих исследованиях, могут быть с одинаковым правом названы как магнитными, так и электрическими. Но колебания в трансформаторе или телефоне намного более медленны. Предположим, что у нас 1000 колебаний в секунду, что уже представляется довольно высоким числом колебаний; этому соответствовала бы в эфире волна длиной 300 км; фокусные расстояния применяемых зеркал должны были бы иметь размеры того же порядка. Если бы Вы были в состоянии построить вогнутые зеркала размером с материк, то Вы могли бы отлично поставить опыты, которые Вы имеете в виду. Но с обычными зеркалами практически ничего сделать нельзя, и Вы не сможете обнаружить ни малейшего действия. Так, по крайней мере, я думаю.

С совершенным уважением, преданный Вам Г. Герц.»

Мы тоже не будем комментировать это письмо. Даже гениальному человеку трудно заглянуть на десятки лет вперед и угадать пути решения технической задачи, в данном случае — радиотелефонии.

Предложения использовать электромагнитные волны для связи были, конечно, лишь пожеланиями. Надо было показать, *как* это осуществить.

Именно это и сделал Александр Степанович Попов своим великим изобретением.

Что же именно сыграло основную роль в изобретении Попова? Ведь, казалось бы, все элементы его приборов уже были известны.

Было известно, что искровой разряд, будь то разряд лейденской банки, электрофорной машины, индукционной катушки или грозовой разряд, представляет собой затухающие электрические колебания. Тем самым, было известно, как создавать электрические колебания высокой частоты.

После опытов Герца стало известно, что такие колебания порождают в окружающем пространстве электромагнитные волны. Вопрос о повышении мощности разряда, конечно, не воспринимался как нечто принципиальное, а представлялся чисто техническим.

Таким образом, центральной задачей было создание чувствительного приемника. Маленькая искорка в приемном вибраторе, которым пользовался в своих опытах Герц, конечно, не могла служить практическим способом приема.

За пять лет до изобретения Попова появился прибор, названный когерером. Это трубка с двумя электродами, между которыми находятся металлические опилки. Под действием высокочастотного поля сопротивление опилок меняется от сотен тысяч до десятков и даже единиц омов. Это происходит в результате «спекания» опилок (из-за микроскопических искр в точках их соприкосновения) при приходе электромагнитной волны. Таким образом, когерер — это превосходное реле, позволяющее высокочастотному сигналу замкнуть цепь местной батареи. Беда только в том, что при каждом срабатывании это реле портится: надо встряхнуть опилки, чтобы когерер снова стал высокоомным и мог дать скачок (резкий спад) сопротивления при следующем сигнале. Конечно, такое устройство не являлось приемником, своевременно готовым к приему сигнала.

Мы подошли теперь вплотную к тому, что нового создал А. С. Попов.

«Добившись удовлетворительного постоянства чувствительности при употреблении трубки с платиновыми листочками и железным порошком *), я поставил себе еще и другую задачу: добиться такой комбинации, чтобы связь между опилками, вызванная электрическим колебанием, разрушалась **немедленно автоматически»** [выделено мной — *С. Р.*],— так писал Попов в своей статье «Прибор для обнаружения электрических колебаний» в январском выпуске «Журнала Русского физико-химического общества» в 1896 году. И с этой задачей он справился блестяще. Можно сказать, что в своем приемнике Попов электромеханическим путем реализовал не только усиление, но и то, что теперь мы называем обратной связью.

Свой приемник Попов назвал «грозоотметчиком», но в описанных в статье опытах приемник фиксировал не только удары молнии, но и разряды электрофорной машины, и разряды в большом герцевском вибраторе, и даже быстрые взмахи заряженной эбонитовой палочкой. Статья заканчивается той же фразой, которой А. С. Попов закончил свой доклад на Физической секции Русского физико-химического общества 7 мая 1895 года:

«В заключение могу выразить надежду, что мой прибор при дальнейшем усовершенствовании его может быть применен к передаче сигналов на расстояния при помощи быстрых электрических колебаний, как только будет найден источник таких колебаний, обладающий достаточной энергией».

На деле первоначальный прогресс шел по линии увеличения высоты приемных антенн. Этот прогресс протекал, как известно, очень быстро, и чем дальше, тем быстрее. Уже в 1897 году П. Н. Рыбкин, сотрудник Попова, перекрыл передачей расстояние в 5 км.

XX век принес одно за другим многочисленные новые принципиальные изобретения и усовершенствования, поток которых продолжался и нарастает по сегодняшний день. Радиотелеграф и радиотелефон, радиовещание и телевидение, радиолокация и радионавигация, радиоастрономия и радиоспектроскопия, радиогеодезия и служба времени плюс множество новых физических явлений, открытие которых было стимулировано практическими нуждами радиотехники. Вот что такое радио в наши дни.

---

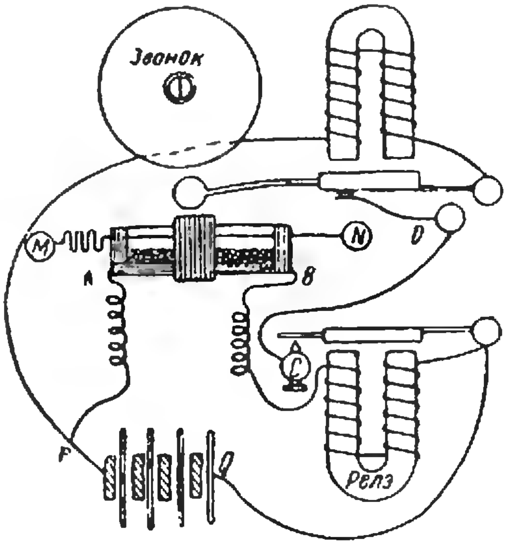
*) Попов потратил много усилий на создание хорошего когерера. [*С. Р.*]

Схема и описание прибора

(из статьи А. С. Попова «Прибор для обнаружения электрических колебаний»)

«Прилагаемая схема показывает расположение частей прибора. Трубка с опилками подвешена горизонтально между зажимами *M* и *N* на легкой часовой пружине, которая для большей эластичности согнута со стороны одного зажима зигзагом. Над трубкой расположен звонок, так чтобы при своем действии он мог давать легкие удары молоточком по средине трубки, защищенной от разбивания резиновым кольцом. Удобнее всего трубку и звонок укреплять на общей вертикальной дощечке. Реле может быть помещено как угодно.

Действует прибор следующим образом. Ток батареи в 4—5 вольт постоянно циркулирует от зажима *P* к платиновой пластинке *A*, далее через порошок, содержащийся в трубке,— к другой пластинке *B* и по обмотке электромагнита реле обратно к батарее. Сила этого тока недостаточна для притягивания якоря реле, но, если трубка *AB* подвергнется действию электрического колебания, то сопротивление мгновенно уменьшится и ток увеличится настолько, что якорь реле притянется. В этот момент цепь, идущая от батареи к звонку, прерванная в точке *C*, замкнется, и звонок начнет действовать, но тотчас же сотрясения трубки опять уменьшат ее проводимость и реле разомкнет цепь звонка. В моем приборе сопротивление опилок после сильного встряхивания бывает около 100 000 ом, и реле, имея сопротивление около 250 ом, притягивает якорь при токах от 5 до 10 миллиампер (пределы регулировки), т. е. когда сопротивление всей цепи падает ниже 1000 ом.»



Доказательство гипотезы Морделла

А. Ю. ВАЙНТРОБ,
кандидат
физико-математических
наук
А. Б. СОСИНСКИЙ

Таков уж характер современного математического творчества, что рассказать о наиболее значительных его результатах в понятной для школьников форме, как правило, не представляется возможным. Слишком далек передний фронт нашей науки от школьной математики, содержание которой вырабатывалось еще в античном мире и завершается достижениями XVII века. Наверное поэтому в «Новостях науки» в «Кванте» пока писалось лишь о физике и технике, где при всей сложности часто все же удается популярно объяснить суть дела.

Но вот и на нашу математическую улицу пришел праздник — прошлой весной была доказана гипотеза Морделла. И хотя ее формулировка мало что скажет школьнику, легко указать большое число ее следствий, которые элементарно формулируются, но не поддаются элементарному решению.

Из гипотезы Морделла следует, что некоторый обширный класс диофантовых уравнений и систем имеет лишь конечное число целых решений. (*Диофантовы уравнения* — уравнения вида $P(x, y, ..., z)=0$, где P — многочлен от нескольких переменных с целыми коэффициентами, — изучаются с времен греческого математика Диофанта (III век).)

Покажем на примере знаменитого уравнения Ферма

$$a^n+b^n=c^n, \text{ где } n\geqslant 3, \quad (1)$$

что *целые решения диофантова уравнения связаны с «рациональными точками» некоторой кривой.* Поделив обе части уравнения на c^n, мы видим, что каждому целому решению $(a; b; c)$ уравнения (1) отвечает рациональная точка (то есть точка с рациональными координатами) $(x; y)=(a/c; b/c)$ кривой, задаваемой уравнением $x^n+y^n=1$ на плоскости Oxy (и обратно). Поэтому конечность числа взаимно простых решений уравнения (1) следует из конечности числа рациональных точек на кривой $x^n+y^n=1$. А последний факт как раз и следует из гипотезы Морделла (при $n>3$). Итак, *уравнение Ферма имеет не более конечного числа взаимно простых решений.*

Задача описания рациональных точек на кривых имеет многовековую историю, но до недавнего времени полностью были исследованы лишь два частных случая: *рациональные кривые* (или *кривые рода* 0) (классический пример для этого случая — окружность $x^2+y^2=1$, рациональные точки которой соответствуют всевозможным *пифагоровым тройкам* — решениям уравнения $a^2+b^2=c^2$) и *эллиптические кривые* (или *кривые рода* 1), все рациональные точки которых могут быть получены из конечного их набора с помощью специальной операции сложения (подробнее об этом см. «Квант», 1978, № 8, с. 2). В каждом из этих случаев *число рациональных точек может быть бесконечным.*

В 1922 году английский математик Дж. Морделл (1888—1972) выдвинул гипотезу о том, что во всех остальных случаях число рациональных точек конечно. Точная формулировка звучит так: *неприводимая неособая алгебраическая кривая рода больше 1 над полем алгебраических чисел имеет лишь конечное число рациональных точек.*

Вот еще несколько примеров уравнений, для которых конечность числа взаимно простых решений следует из гипотезы Морделла:

$$x^4+3y^3x+3z^2x^2-7xz^3=0;$$
$$(x^2+y^2+2z^2)(x^2+2y^2+z^2)=(2x^2-2y^2+z^2)^2;$$
$$x^n+y^n=2z^n, \text{ где } n>3.$$

Вообще же можно сказать, что «написанный наугад» многочлен $P(x, y)$ с целыми коэффициентами степени $d>3$ «скорее всего» задает кривую с конечным числом рациональных точек.

Несмотря на усилия крупнейших математиков, гипотеза Морделла на протяжении 60 лет оставалась неприступной. И вот весной 1983 года научный мир облетело известие о том, что Герт Фалтингс, доселе малоизвестный 29-летний математик, работающий в ФРГ, доказал эту гипотезу. Его работа еще не опубликована, но 40-страничная рукопись Фалтингса выдержала проверку ведущих математических центров мира: в Гарварде (США), в Бюр-сюр-Ивет (Франция), в Институте им. Стеклова (Москва). На самом деле Г. Фалтингс доказывал (и доказал!) не гипотезу Морделла, а несколько более общую *гипотезу Шафаревича,* которую наш соотечественник, член-корреспондент АН СССР, И. Р. Шафаревич, предложил в своем докладе на Международном конгрессе математиков в Стокгольме в 1962 году. Следует отметить также, что в своей работе Г. Фалтингс опирался на результаты советских математиков Ю. Г. Зархина и А. Н. Паршина.

Гипотеза Шафаревича, как и гипотеза Морделла, относится к *алгебраической геометрии* — науке, изучающей кривые и поверхности, заданные многочленами. Но если для формулировки гипотезы Морделла нужны лишь классические понятия этой науки («неприводимость», «род»), придуманные еще в прошлом веке, то для ее доказательства потребовались изощренные методы и язык современной алгебраической геометрии, возникшие в послевоенные годы в работах таких выдающихся математиков, как Ж.-П. Серр, А. Гротендик (Франция), Дж. Тэйт (Великобритания), Д. Мамфорд (США), И. Р. Шафаревич, Ю. И. Манин (СССР).

Такова диалектика развития математической науки: классическая задача долго остается неприступной, но после создания нового аппарата ее удается обобщить и решить. Так случилось и с гипотезой Морделла — сильный молодой исследователь, овладевший современным аппаратом, добился выдающихся результатов в области, в которой математики работают уже два тысячелетия.

Лаборатория «Кванта»

Цвета рассеянного света

Кандидат физико-математических наук
А. А. БОРОВОЙ

Синева неба, белые, постоянно меняющие свои очертания облака, краски восхода и заката всегда вызывали у людей чувство восхищения. Они питали фантазию поэтов и художников и, естественно, привлекали внимание ученых.

«Воздушная синева рождается от телесной плотности освещенного воздуха, находящегося между верхним мраком и землей»,— писал еще Леонардо да Винчи. Около ста лет назад, в 1869 году, известный английский физик и популяризатор науки Дж. Тиндаль впервые поставил опыты, в которых наблюдал синий оттенок рассеянного света. Однако понадобилось еще немало усилий и труда таких ученых, как Рэлей, Смолуховский, Мандельштам, Эйнштейн, чтобы окончательно объяснить краски дневного и вечернего неба рассеянием света.

Знакомство с этим явлением мы начнем с простых модельных опытов, затем попытаемся качественно объяснить полученные результаты и от них «перекинуть мостик» к цвету неба.

1. Для опытов необходим прямоугольный сосуд с прозрачными стенками, например аквариум. Его длина должна составлять не менее 30 см. Кроме сосуда понадобится источник света, дающий слабо расходящийся пучок лучей. Можно воспользоваться диапроектором, поставив на место слайда кусочек черной бумаги с круглым отверстием диаметра 2—3 мм в центре, или приспособить для этой цели достаточно сильный электрический фонарь.

Опыты надо проводить в затемненной комнате.

Налейте в сосуд воду и направьте сквозь нее световой пучок вдоль длинной стороны сосуда (как показано на рисунке). А теперь посмотрите на него сбоку. Чем чище вода, чем меньше в ней пузырьков, пылинок и других посторонних включений, тем менее заметен пучок. Он лишь слегка подсвечивает сосуд на границах воздух — стекло и стекло — вода. Однако стоит только нарушить однородность жидкости, например начать перемешивать воду или нагревать ее (придумайте сами, как можно это осуществить), и в местах неоднородностей рассеяние света, отклонение его по различным направлениям станет значительно сильнее. (Здесь можно вспомнить и всем известный факт: солнечный луч, проникший через щель в занавеске, виден нам сбоку по светящимся в нем пылинкам.)

Из этого опыта можно сделать вывод, что свет, распространяясь в однородной жидкости, не рассеивается (или рассеивается очень слабо).

Теперь будем добавлять в воду по каплям молоко и хорошенько размешивать жидкость. Частички жира, содержащегося в молоке, не растворяются в воде, а находятся там во взвешенном состоянии. Уже после добавления первых капель рассеянный свет станет виден гораздо лучше. Обратите внимание — он имеет голубоватый оттенок. (Иногда наблюдается такой же эффект, если в легком тумане вы смотрите сбоку на свет фар проезжающей машины.)

Постепенно увеличивая концентрацию молока, мы увидим, что голубоватый цвет рассеянного света сменился в конце пути на желтоватый или даже красноватый. Окрашенным в такие же цвета будет и свет, прошедший через сосуд.

При большом количестве молока рассеянный свет становится белым.

Можно сделать еще несколько выводов: нарушение однородности жидкости добавлением в нее весьма малых частиц приводит к увеличению рассеяния, при этом синий свет рассеивается сильнее, а красный слабее, так что белый свет, прошедший сквозь такую жидкость, «обогащается» красным цветом; если же частиц очень много и они образуют целые скопления, рассеянный свет оказывается белым.

II. Качественное объяснение опытов можно понять, если опираться на такие факты:

а) Любой электрический заряд, движущийся ускоренно (например, колеблющийся), излучает электромагнитные волны. Излучение тем более интенсивно, чем больше ускорение (частота колебаний).

б) Электромагнитная волна в каждой точке среды, куда она дошла, создает переменное электромагнитное поле.

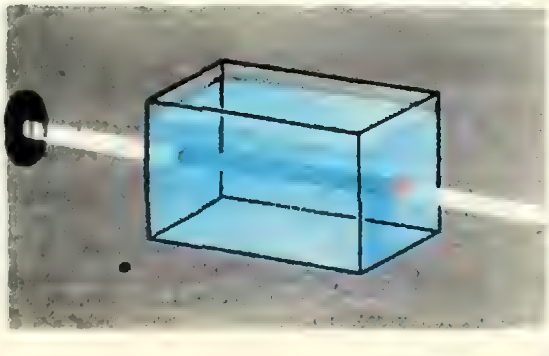
в) Волны от зарядов, колеблющихся с одной частотой, складываются таким образом, что в одних точках они могут усиливать, а в других гасить друг друга.

г) Свет представляет собой электромагнитные волны. Видимый белый свет — набор электромагнитных волн, в котором самая малая длина волны у фиолетового и синего цвета ($\lambda = (4-5) \cdot 10^{-7}$ м), а самая большая — у желтого и красного ($\lambda = (6-7) \cdot 10^{-7}$ м).

Когда свет проходит через однородную среду, его переменное поле возбуждает колебания электронов в атомах, и они начинают сами излучать электромагнитные волны той же частоты. Но, как показывает расчет, их излучение гасит друг друга во всех направлениях, кроме направления распространения света. При идеальной однородности среды мы вовсе не увидели бы рассеянного света.

Другое дело, когда среда неоднородна. Наличие неоднородностей создает совсем иные условия для сложения вторичных волн и возникает рассеяние света по различным направлениям.

Если неоднородности невелики по размерам (много меньше длины волны падающего света), рассеяние света описывается законом, открытым в 1871 году английским физиком Рэлеем: интенсивность рассеянного света прямо пропорциональна четвертой степени частоты (обратно пропорциональна четвертой степени длины волны). Следовательно, голубой свет рассеивается гораздо сильнее красного. Вот почему в наших опытах, наблюдая сбоку, мы видели голубую окраску рассеянного света, а цвет прошедшего через жидкость света оказался красноватым. Тиндаль так описывал свое впечатление от увиденного им эффекта: «Мы наблюдали синий цвет, который соперни-



чая с цветом голубого и чистого неба Италии, если не превосходил его.»

III. В повседневной жизни мы часто сталкиваемся с такими случаями, когда в однородной среде (жидкости или газе) присутствуют весьма малые (по сравнению с длиной волны видимого света) посторонние частицы. Это дым, туман или пыль в воздухе, мелкие частицы твердого вещества в воде, различные эмульсии и т. п. Все они могут вызвать рассеяние света.

Что же, голубой цвет весеннего неба или краски солнечного заката связаны с пылью и дымом в воздухе? Так вначале и думали. Но этому противоречило, например, то, что высоко в горах, где нет ни пыли, ни дыма, окраска неба может быть ярче, чем в запыленном городе.

Объяснение состоит в другом. За счет хаотичного движения молекул воздуха возможно появление в нем существенных неоднородностей плотности. Эти неоднородности приводят к рассеянию света и появлению синего или голубого цвета дневного неба. А солнечные лучи, которым на рассвете или закате приходится пронизывать гораздо бóльшую, чем днем, толщу воздуха, приобретают красный или желтый оттенки.

Конечно, это не исключает влияния пыли, дыма, тумана на окраску неба. По этому поводу можно привести любопытный эпизод*), описанный К. Паустовским в книге «Золотая роза»:

«Французский художник Моне приехал в Лондон и написал Вестминстерское аббатство. Работал Моне в обыкновенный лондонский туманный день. На картине Моне готические очертания аббатства едва выступают из тумана. Написана картина виртуозно.

Когда картина была выставлена, она произвела смятение среди лондонцев. Они были поражены, что туман у Моне был окрашен в багровый цвет, тогда как всем известно, что цвет тумана серый.

Дерзость Моне вызвала сначала возмущение. Но возмущающиеся, выйдя на лондонские улицы, вгляделись в туман и впервые заметили, что он действительно багровый».

Рассеяние света на частицах, размеры которых сравнимы с длиной волны его видимой части, могут приводить к совершенно необычной окраске, поскольку закон Рэлея здесь перестает действовать, и красный свет рассеивается даже более интенсивно, чем синий. Именно поэтому удивительный цвет неба наблюдается иногда при извержениях вулканов, когда мельчайшая пыль висит в воздухе, при песчаных бурях или крупных лесных пожарах.

Этим же объясняется явление, получившее название «синей луны»: частицы, взвешенные в воздухе, сильнее рассеивают красные лучи, и до нас доходит только синий свет.

В облаке размеры капель уже настолько велики, что свет отражается от их поверхности и не меняет своего спектра, то есть остается белым.

Удивительно красивые цвета света, рассеянного атмосферой Земли, теперь стали доступны не только земному наблюдателю. На первой странице обложки воспроизведена фотография Земли в ореоле рассеянного света, сделанная космонавтами из космоса.

---

*) Читатели «Кванта» могли с ним встретиться в статье А. Шмелева «Новогодний физический фейерверк» в № 1 за 1982 год.

Спрашивайте — отвечаем

Уважаемая редакция!

В вашем журнале часто публикуются различные замысловатые рисунки, полученные с помощью ЭВМ. Было бы очень полезно познакомить читателей с графическими изображениями электрических полей нескольких точечных зарядов. Ведь во всех учебниках, школьных и вузовских, такие рисунки выполняются «на глаз», а не в соответствии со строгими математическими расчетами.

В. И. Кондратенко,
преподаватель физики
из г. Дрогобыча

На это письмо редакция попросила ответить специалиста в области машинной графики Ю. В. Котова.

Распределение электрического поля в пространстве (на плоскости) можно сделать наглядным с помощью силовых линий и эквипотенциальных поверхностей (линий).

На второй странице обложки воспроизведена картина поля диполя, рассчитанная и построенная при помощи ЭВМ и графопостроителя. Вследствие осевой симметрии такая картина одинакова во всех плоскостях, проходящих через ось диполя. Чтобы наглядно проиллюстрировать зависимость потенциала от координат точек плоскости, построена вспо-

(Окончание см. на с. 26)

Ошибки в геометрических доказательствах

Наверное, всем школьникам встречались «доказательства» того, что $1=-1$. Вот пример такого доказательства. Пусть $a+b=c$ и $a=b=1$. Умножим обе части равенства $a+b=c$ на $a+b$. Мы получим: $a^2+2ab+b^2=c(a+b)$. После преобразований получим: $a^2+ab-ac=-ab-b^2+bc$ или $a(a+b-c)=-b(a+b-c)$. Деля обе части на $a+b-c$, получаем абсурдное равенство $a=-b$ или $1=-1$.

После мгновенного замешательства мы сразу находим ошибку в этом рассуждении: делить на $a+b-c$ нельзя, так как это выражение равно нулю. Многие другие подобные доказательства используют ту же идею «замаскированного» деления на нуль, поэтому найти ошибку в них не составляет труда.

Менее известны ошибочные доказательства заведомо неверных утверждений в геометрии. Поиски ошибки в таких геометрических доказательствах составляют порой совсем непростую и очень поучительную задачу. Таким задачам посвящена замечательная книга Я. С. Дубнова *Ошибки в геометрических доказательствах* (М.: Наука, 1969)*) Эта книга, которая, к сожалению, уже давно не переиздавалась, содержит 15 геометрических «доказательств» вместе с полным разбором. Мы приведем сейчас одно из них. Следите внимательно за ходом рассуждений и постарайтесь найти ошибку.

«Теорема». *Все треугольники равнобедренные.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 1). Проведем биссектрису угла B и срединный перпендикуляр к основанию AC. (Далее мы будем называть их просто «биссектрисой» и «срединным перпендикуляром».) Обозначим через N их точку пересечения. Опустим перпендикуляры NP и NQ на прямые AB и BC.

Поскольку точка N принадлежит биссектрисе, она равноудалена от прямых AB и BC. Следовательно, $|PN|=|QN|$ Поскольку точка N принадлежит срединному перпендикуляру, она равноудалена от точек A и C. Следовательно, $|AN|=|CN|$ Прямоугольные треугольники ANP и CNQ конгруэнтны по катету и гипотенузе, следовательно, $\angle NAP=\angle NCQ$. Кроме того, треугольник ANC равнобедренный, следовательно, $\angle NAM=\angle NCM$. Складывая равные углы, мы заключаем, что $\angle PAM=\angle QCM$. Значит, и $\angle BAM=\angle BCM$, поэтому треугольник ABC равнобедренный.

Доказательство закончено. Но у вас, наверно, возникли возражения. Попытаюсь угадать некоторые из них и на них ответить.

Возражение 1. Почему мы считаем, что биссектриса и срединный перпендикуляр пересекаются? Ведь они могут быть параллельными.

Ответ. Если биссектриса параллельна срединному перпендикуляру, то она перпендикулярна основанию треугольника. Следовательно, она является также и высотой $\triangle ABC$. Поэтому данный треугольник равнобедренный. Как видите, в этом случае вывод о том, что треугольник равнобедренный, сохраняет силу!

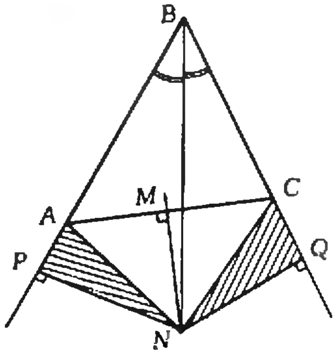


Рис. 1.

---

*) Яков Семенович Дубнов (1887—1957) — известный геометр и педагог, доктор физико-математических наук, профессор, долгие годы преподававший в Московском государственном университете. Я. С. Дубнов читал лекции для школьников в математическом лектории при МГУ. Эти лекции и легли в основу упомянутой книги.

Возражение 2. Но биссектриса может и совпадать со срединным перпендикуляром.

Ответ. На это возражение у меня есть сразу два ответа. Во-первых, в этом случае биссектриса тоже совпадает с высотой и треугольник опять оказывается равнобедренным. Во-вторых, если биссектриса совпадает со срединным перпендикуляром, то точку N можно выбрать произвольно на биссектрисе и провести все рассуждения доказательства.

Возражение 3. А что, если биссектриса пересекает срединный перпендикуляр на основании AC, то есть $N = M$?

Ответ. В этом случае биссектриса совпадает с медианой BM. Отсюда легко следует, что треугольник ABC опять оказывается равнобедренным.

Возражение 4. Вы не рассмотрели случай, когда биссектриса пересекается со срединным перпендикуляром внутри треугольника ABC.

Ответ. Этот случай изображен на рисунке 2. Рассуждая аналогично тому, как мы делали при рассмотрении рисунка 1, мы заключаем, что $|AN| = |NC|$, $|NP| = |NQ|$ и, следовательно, $\triangle APN = \triangle CQN$. Поэтому $\angle NAP = \angle NCQ$. Кроме того, $\triangle ANC$ равнобедренный, поэтому $\angle NAM = \angle NCM$. Складывая равные углы, мы получаем, что $\angle BAC = \angle BCA$. Следовательно, треугольник ABC — равнобедренный.

Впрочем, могут представить и другой контрдовод: случай, изображенный на рисунке 2, невозможен, так как биссектриса треугольника всегда лежит между его медианой и высотой.

Итак, четыре возражения мне удалось парировать. Предлагаю читателю на этом месте остановиться и все-таки найти решающее возражение против приведенного «доказательства». А если не получится — посмотреть раздел «Ответы, указания, решения».

* * *

Ну вот, теперь вы будете относиться к чертежам с бо́льшим подозрением. Возможно, некоторым читателям захотелось даже пойти дальше: сделать все математические доказательства совершенно формально-логическими, не обращаться к наглядным представлениям, исключая тем самым возможность ошибки. Математики-профессионалы обычно удовлетворяются тем, чтобы их доказательства могли бы быть записаны формально. Однако, как правило, они широко используют всевозможные наглядные представления, в том числе рисунки. Объясняется это тем, что формальные выводы значительно длиннее обычных доказательств, воспринимать и придумывать их гораздо труднее[1]). Так что отказываться от чертежей и наглядных представлений при доказательстве геометрических теорем не стоит, нужно только научиться правильно ими пользоваться. В этом вам поможет решение следующих задач, также заимствованных из упомянутой книги Я. С. Дубнова.

Задачи. Найдите ошибки в следующих доказательствах.

1. Как известно, *сумма углов треугольника равна 180°*. Доказательство этого факта опирается на аксиому параллельности. Мы сейчас дадим *доказательство*, не использующее аксиомы параллельности.

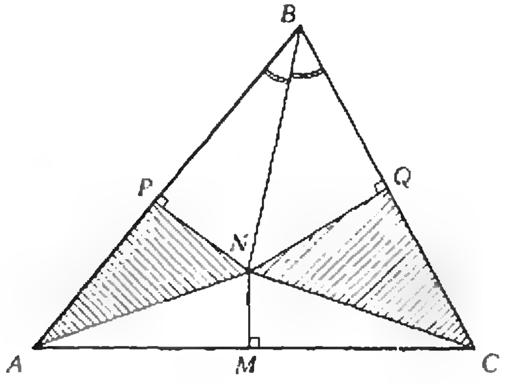


Рис. 2.

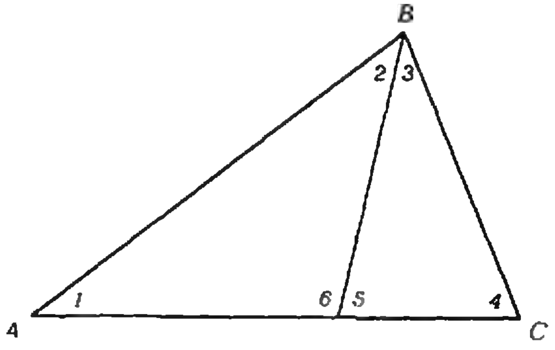


Рис. 3.

---

[1] Например, записать «единицу» на одном из формальных языков — языке теории множеств Н. Бурбаки — совсем непросто. «Полная запись... содержала бы несколько десятков тысяч знаков; для «единицы» этого, пожалуй, многовато» (Манин Ю. И. *Доказуемое и недоказуемое*. М., Советское радио, 1979).

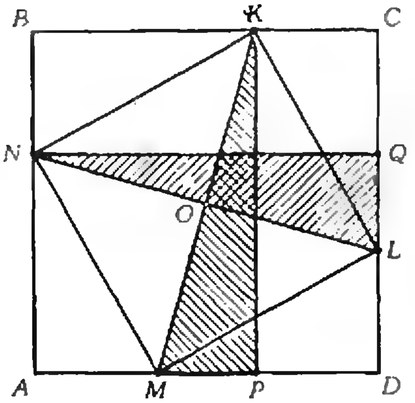


Рис. 4.

Разобьем произвольный треугольник ABC на два треугольника (рис. 3). Обозначим через x неизвестную нам пока сумму углов треугольника. Тогда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = x$ и $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = x$. Сложим эти два равенства: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2x$. Поскольку $\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$, а $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$ есть сумма углов треугольника ABC, то есть равно x, мы получаем уравнение $x + 180^\circ = 2x$. Отсюда: $x = 180^\circ$.

2. Докажем «теорему»: *прямоугольник, вписанный в квадрат, также является квадратом.*

Рассмотрим квадрат $ABCD$; пусть $KLMN$ — вписанный прямоугольник (рис. 4). Опустим перпендикуляры $KP \perp AD$ и $NQ \perp CD$. Эти перпендикуляры равны по длине сторонам квадрата, поэтому они равны между собой. Отрезки KM и NL также равны по длине, как диагонали прямоугольника $KLMN$. Следовательно, прямоугольные треугольники KPM и NQL конгруэнтны по гипотенузе и катету. Поэтому $\angle KMP = \angle NLQ$. Рассмотрим четырехугольник $OLDM$. Поскольку $\angle OMP = \angle OLQ$, сумма углов OLD и OMD равна 180°. Следовательно, сумма двух других противоположных углов четырехугольника $OLDM$ тоже равна 180°, то есть $\angle MOL + \angle MDL = 180^\circ$. Но $\angle MDL = 90^\circ$, значит, $\angle MOL$ — тоже прямой. Следовательно, $KLMN$ — прямоугольник, диагонали которого перпендикулярны, то есть квадрат.

3. Докажем «теорему»: *перпендикуляр и наклонная к прямой не пересекаются.*

Рассмотрим наклонную AP и перпендикуляр BQ к отрезку AB (рис. 5). Пусть C — середина отрезка AB. Отложим отрезки AA_1 и BB_1, по длине равные отрезку $AC = BC$. Мы утверждаем, что лучи AP и BQ не пересекаются на протяжении отрезков AA_1 и BB_1. Действительно, если бы существовала точка пересечения K, то получился бы треугольник AKB, в котором $|AK| \leqslant |AA_1|$, $|BK| \leqslant |BB_1|$, то есть $|AK| + |KB| \leqslant |AA_1| + |BB_1| = |AB|$. Последнее неравенство противоречит тому, что сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны.

Соединим теперь точки A_1 и B_1 и повторим предыдущее построение. Мы получим точки A_2 и B_2, причем $|A_1A_2| = |A_1C_1| = |C_1B_1| = |B_1B_2|$. Как и раньше, лучи AP и BQ не пересекаются на протяжении отрезков A_1A_2 и B_1B_2. В частности, точки A_2 и B_2 различны и процесс построения можно продолжить неограниченно. Следовательно, лучи AP и BQ не пересекаются.

4. Докажем, что *все окружности имеют одинаковую длину.*

Большая окружность на рисунке 6 совершает полный оборот, перемещаясь из точки A в точку B. Следовательно, расстояние AB равно длине большой окружности. Маленькая окружность внутри первой также совершает полный оборот, перемещаясь из точки C в точку D. Следовательно, $|CD|$ равен длине малой окружности. Поскольку длины отрезков AB и CD, очевидно, равны, обе окружности имеют одинаковую длину.

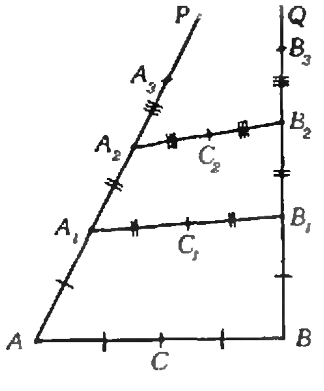


Рис. 5.

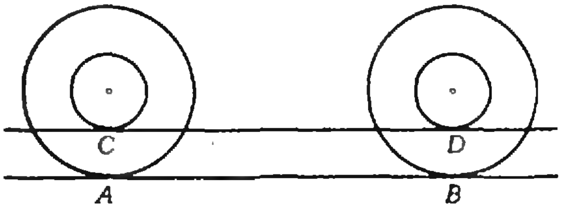


Рис. 6.

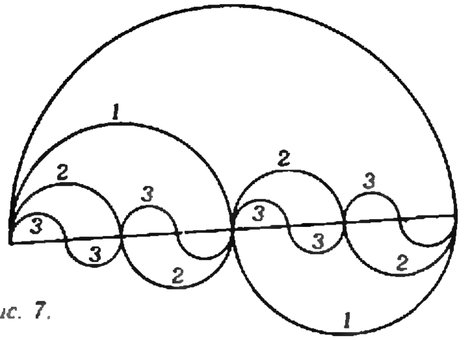


Рис. 7.

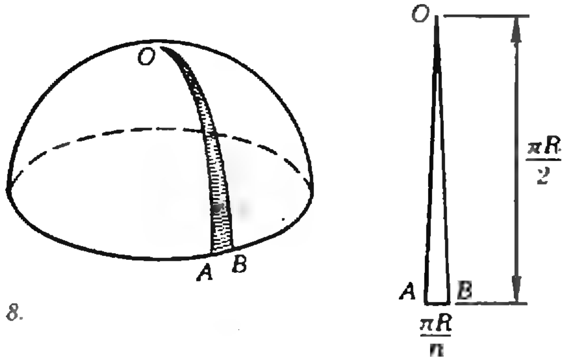


Рис. 8.

5. Известно, что длина окружности радиуса R равна $2\pi R$. Но мы «докажем», что *длина окружности вдвое больше ее диаметра.*

Построим полуокружность с диаметром AB (рис. 7). Разделим отрезок AB пополам точкой C и построим на отрезках AC и CB полуокружности, располагая их по разные стороны от прямой AB. Каждая из построенных полуокружностей имеет диаметр, вдвое меньший, чем диаметр исходной полуокружности. Поэтому их длины вдвое меньше длины исходной полуокружности. Следовательно, длина волнообразной линии, помеченной на рисунке номером 1, равна длине данной полуокружности. Разделим теперь каждый из отрезков AC и CB пополам и построим волнообразную линию 2. Ее длина также равна длине исходной полуокружности. Продолжим этот процесс, получая на каждом шаге волнообразную линию той же длины. Расстояние от точек этой линии до прямой AB не превосходит радиуса полуокружностей, составляющих эту линию, то есть стремится к нулю. Следовательно, последовательность волнообразных линий стремится к отрезку AB. Поскольку их длины равны длине данной полуокружности, такой же должна быть и длина отрезка AB. Поэтому длина окружности равна ее удвоенному диаметру.

6. Докажем, что *площадь сферы радиуса R равна π^2R^2.*

Рассмотрим полусферу с полюсом O и разделим ее экватор на n равных частей. Площадь полусферы в n раз больше площади каждого из маленьких сферических треугольников, изображенных на рисунке 8. Рассмотрим такой треугольник. Его основание равно $2\pi R/n$, а высота стремится к $\pi R/2$ при $n \to \infty$. Следовательно, его площадь стремится к $\pi^2R^2/2n$. Поэтому площадь полусферы равна

$$n \cdot \frac{\pi^2R^2}{2n} = \frac{\pi^2R^2}{2},$$

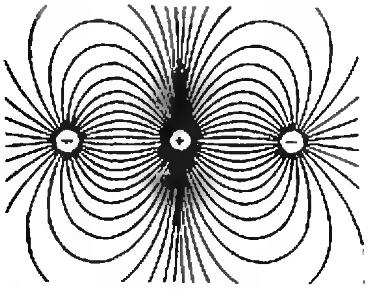
а площадь сферы — π^2R^2.

Материал подготовил С. Л. Табачников

Спрашивайте — отвечаем

(Начало см. на с. 22)

могательная поверхность. Аппликаты ее точек соответствуют значениям потенциала в точках плоского сечения поля. Там, где расположены сами заряды, поверхность «вытягивается» вверх или вниз, а при удалении от зарядов — приближается к горизонтальной («нулевой») плоскости.



В разных точках поверхность по-разному наклонена к горизонтальной плоскости. Чтобы уточнить наклон, надо в интересующей точке поверхности построить касательную плоскость и определить угол ее наклона к горизонтальной плоскости. Тангенс этого угла связан со значением напряженности поля в данной точке.

Силовые линии поля можно было бы провести на вспомогательной поверхности как линии скорейшего спуска: вдоль такой линии покатился бы маленький шарик, помещенный в данную точку поверхности.

С помощью ЭВМ и графопостроителя можно получить аналогичные картины электрических полей и для нескольких различным образом расположенных точечных зарядов. В качестве примера здесь показаны силовые линии поля, образованного тремя зарядами, находящимися на одной прямой. Крайние заряды одноименны и одинаковы, средний — противоположен по знаку, а по модулю равен сумме двух крайних.

Ю. В. Котов

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Работа, энергия и архимедова сила» предназначена восьмиклассникам, «Электрическое и магнитное поля» — девятиклассникам и «Заряд атомного ядра и периодическая система элементов Менделеева» — десятиклассникам.
Материалы подготовил И. К. Белкин.

Работа, энергия и архимедова сила

Работа силы, с которой одно тело действует на другое, равна, как известно, изменению потенциальной энергии взаимодействия этих тел, взятому с противоположным знаком («Физика 8», § 57):

$$A = -\Delta E_p.$$

Если, например, тело массы M падает в вакууме с высоты h_1 до высоты h_2 (h_1 и h_2 отсчитываются от произвольно выбранного нулевого уровня, как показано на рисунке), то сила тяжести совершает работу, равную произведению проекции Mg этой силы на направление перемещения на модуль перемещения $h_1 - h_2$:

$$A = Mg(h_1 - h_2). \qquad (1)$$

Это равенство можно записать и так:

$$A = Mgh_1 - Mgh_2 = -(Mgh_2 - Mgh_1) = -\Delta E_p,$$

то есть работа равна изменению потенциальной энергии, взятому с противоположным знаком.

Теперь допустим, что падение этого же тела происходит в некоторой жидкости (см. рисунок). Присутствие жидкости, конечно, не изменит ни массы тела, ни ускорения свободного падения, ни, следовательно, силы тяжести, действующей на тело. Но когда тело займет новое положение на высоте h_2, оно вытеснит находившуюся там жидкость, которая переместится вверх, на высоту h_1, и займет место, освобожденное телом. Тело и жидкость в объеме тела как бы поменяются местами. При этом потенциальная энергия тела уменьшится на величину $\Delta E_{p\text{т}} = (Mgh_2 - Mgh_1)$, а потенциальная энергия жидкости увеличится на величину $\Delta E_{p\text{ж}} = (mgh_1 - mgh_2)$, где m — масса жидкости в объеме, равном объему тела Общее изменение потенциальной энергии ΔE_p будет равно сумме $\Delta E_{p\text{т}}$ и $\Delta E_{p\text{ж}}$, поэтому получим

$$A = -\Delta E_p = -((Mgh_2 - Mgh_1) + (mgh_1 - mgh_2)) = (Mg - mg)(h_1 - h_2). \qquad (2)$$

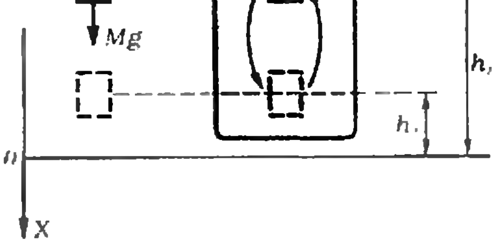
Сравнивая равенства (2) и (1), мы видим, что во втором случае на тело кроме силы $M\vec{g}$, направленной вниз, действует еще сила $-m\vec{g}$, направленная вверх. Но mg — это модуль силы тяжести, действующей на жидкость, вытесненную телом (и равной ее весу). Следовательно, сила $-m\vec{g}$ и есть архимедова сила. Утверждение о том, что такая сила существует, известно в физике как закон Архимеда: на тело, погруженное в жидкость, со стороны окружающей жидкости действует выталкивающая сила, равная весу жидкости в объеме, вытесненном телом.

Формулу (2) можно переписать в другом виде. Обозначим объем тела через V, плотность тела через $\varrho_\text{т}$ и плотность жидкости через $\varrho_\text{ж}$. Тогда масса тела $M = \varrho_\text{т} V$, масса жидкости в объеме V равна $m = \varrho_\text{ж} V$ и

$$A = (\varrho_\text{т} Vg - \varrho_\text{ж} Vg)(h_1 - h_2) = (\varrho_\text{т} - \varrho_\text{ж}) Vg(h_1 - h_2). \qquad (3)$$

Величина $\varrho_\text{ж} Vg$ и представляет собой модуль архимедовой силы.

Из формулы (3) видно, что если плотность $\varrho_\text{т}$ тела больше плотности $\varrho_\text{ж}$ жидкости, то результирующая сила, действующая на тело, направлена вниз, и тело тонет. Если, наоборот, плотность тела меньше плотности жидкости, результирующая сила направлена



вверх, и тело всплывает. Когда вес жидкости в объеме погруженной части тела станет равным силе тяжести тела, наступит равновесие. Наконец, если плотности тела и жидкости равны друг другу, тело окажется в равновесии, будучи полностью погруженным в жидкость.

Рассуждения, которые привели нас к выводу о существовании архимедовой силы (и закона Архимеда), справедливы как для жидкости, так и для газа. Поэтому закон Архимеда лежит в основе теории плавания не только кораблей на воде, но и воздушных кораблей — аэростатов, дирижаблей и т. п. с той только разницей, что воздушный корабль не может быть погружен в газ частично.

В учебнике «Физика 8» указывается, что в механике приходится иметь дело с тремя видами сил — упругости, трения и тяготения. К какому же виду нужно отнести силу Архимеда? Или это, может быть, особый, четвертый вид сил? Нет, по природе своей архимедова сила — это результат упругого взаимодействия тела и жидкости (или газа), то есть ее следует считать силой упругости, возникающей вследствие сжатия жидкости (или газа).

Отметим в заключение, что закон Архимеда, при всей его исторической важности, нельзя считать одним из основных, фундаментальных законов природы. В действительности, это прямое следствие более общего закона — закона Паскаля. Как мы только что видели, он может считаться также следствием закона сохранения энергии.

Электрическое и магнитное поля

Вокруг всякого покоящегося в некоторой системе отсчета электрического заряда q существует, как известно, электростатическое поле. Если этот заряд точечный, то напряженность поля в любой точке на расстоянии r от него определяется формулой:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}. \qquad (1)$$

Сила взаимодействия двух покоящихся точечных зарядов q и q', находящихся на расстоянии r друг от друга, равна

$$F_{эл} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}. \qquad (2)$$

Если заряды одинаковые ($q = q'$), то

$$F_{эл} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}. \qquad (2')$$

Это хорошо известный закон Кулона. Подчеркнем, что этот закон был установлен экспериментально. Входящая в формулы (1), (2) величина ε_0 — это электрическая постоянная, равная $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл^2/(Н $\cdot$ м^2).

Обсудим теперь ситуацию с зарядом, движущимся с постоянной скоростью $\vec{v}$. Скорость $\vec{v}$ мы измеряем относительно заранее выбранной системы отсчета, которую мы условно считаем неподвижной и обозначим буквой K.

Движущийся заряд — это электрический ток, а вокруг тока существует магнитное поле. Значит, движение заряда приводит к появлению магнитного поля в рассматриваемой нами системе отсчета K.

Обратите внимание на то, что если бы мы перешли в систему отсчета K', движущуюся относительно системы K со скоростью, равной скорости заряда $\vec{v}$, *никакого магнитного поля в этой системе не было бы* (помещенная там магнитная стрелка (компас) оставалась бы в покое).

Вернемся, однако, снова в систему K. Из опыта мы знаем, что магнитное поле действует на электрический ток, а значит, и на движущийся заряд. Понятно, что между электрическими и магнитными явлениями должна существовать тесная связь.

Рассмотрим простой пример. Пусть заряд q движется со скоростью $\vec{v}$ (в системе K). Тогда в пространстве вокруг него есть и электрическое, и магнитное поля. Пусть теперь в какой-то точке, где электрическое и магнитное поля созданы зарядом q, оказался другой заряд q', который движется со скоростью $\vec{v}'$. Очевидно, что на него будут действовать электрическая и магнитная силы. Аналогичное утверждение можно сделать и про заряд q.

Если заряды движутся со скоростями не слишком большими (что такое «не слишком большие», выяснится ниже), то их электрические поля в каждый момент времени практически не отличаются от случая покоящихся зарядов, а силу электрического взаимодействия зарядов можно подсчитывать по закону Кулона (2).

Мы ограничимся дальше случаем не очень быстро движущихся зарядов. В этом случае можно довольно просто сравнить магнитные и электрические силы. Мы сделаем это для двух зарядов, скорости которых в некоторый момент оказались параллельными друг другу и перпендикулярными к линии, соединяющей эти заряды (рис. 1).

Прежде всего нам нужно понять, как индукция магнитного поля $\vec{B}$, создаваемого движущимся зарядом, связана с величиной этого заряда q и его скоростью $\vec{v}$. Проведем из точки, где находится заряд q, в точку, в которой мы хотим вычислить индукцию $\vec{B}$, радиус-вектор $\vec{r}$. Обобщение результатов опытов показывает, что величина индукции определяется формулой

$$B = kq\frac{v}{r^2}\sin\varphi. \qquad (3)$$

Здесь $r=|\vec{r}|$, φ — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{r}$, а k — постоянная, определяемая опытным путем и равная 10^{-7} Н · с^2/Кл^2. Для интересующего нас случая $\varphi = 90°$ и

$$B = kv\frac{q}{r^2}. \qquad (3')$$

Направление вектора $\vec{B}$ определяется по правилу буравчика (правого винта): если вращать вектор $\vec{v}$ по направлению к вектору $\vec{r}$ в той плоскости, в которой они оба лежат, и так, чтобы вращение происходило в направлении минимального угла между $\vec{v}$ и $\vec{r}$, то вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно указанной плоскости и «смотрит» туда, куда «смотрел бы» ввинчиваемый буравчик (рис. 2).

В формулы (3) и (3′) входит в качестве множителя то же отношение q/r^2, которое содержится и в выражении для напряженности электрического поля, создаваемого зарядом q в точке, где находится заряд q'. Это замечание позволяет нам установить связь между величинами B и E. Учитывая (1), получаем

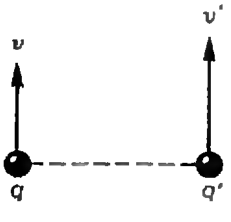


Рис. 1.

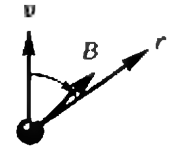


Рис. 2.

$$B = kv\frac{q}{r^2} = 4\pi\varepsilon_0 kvE.$$

Обозначим еще $4\pi k = \mu_0$, тогда

$$B = \varepsilon_0\mu_0 vE. \qquad (4)$$

Входящая в (4) величина μ_0 носит название магнитной постоянной (по аналогии с электрической постоянной ε_0). Зная k, мы вычислим $\mu_0 = 1{,}256 \times 10^{-6}$ Н · с^2/Кл^2.

Теперь, когда мы умеем вычислять магнитную индукцию B в точке, где находится заряд q', можно определить и магнитную силу (силу Лоренца), действующую на заряд q'. В общем случае сила Лоренца

$$F_{\text{л}} = q'v'B\sin\alpha. \qquad (5)$$

Здесь α — угол между векторами $\vec{v}'$ и $\vec{B}$. Направление вектора $\vec{F}_{\text{л}}$ определяется тоже по правилу правого буравчика (вектор $\vec{v}'$ нужно поворачивать в направлении минимального угла к вектору $\vec{B}$ в плоскости, в которой лежат оба этих вектора, вектор $\vec{F}_{\text{л}}$ перпендикулярен этой плоскости).

В нашем случае угол α также равен 90°, и на заряд q' действует сила

$$F_{\text{магн}} = q'v'B.$$

Подставляя сюда B из (3′), получим

$$F_{\text{магн}} = k\frac{qq'vv'}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{qq'vv'}{r^2}. \qquad (6)$$

Электрическая сила, действующая между q и q', определяется формулой (2). Предположим теперь еще, что $q=q'$, а $\vec{v}=\vec{v}'$. Тогда отношение

$$\frac{F_{\text{магн}}}{F_{\text{эл}}} = \varepsilon_0\mu_0 v^2.$$

Зная определенные из опыта постоянные ε_0 и μ_0, мы легко убедимся в том, что

$$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = 9\cdot 10^{16}\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

Но стоящая в этой формуле справа величина есть квадрат скорости света! Это, конечно, не случайное совпадение. Обозначая скорость света буквой c, получим окончательно:

$$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = c^2 \qquad (7)$$

и

$$\frac{F_{\text{магн}}}{F_{\text{эл}}} = \left(\frac{v}{c}\right)^2. \qquad (8)$$

Это очень важные формулы. Формула (7) еще раз подтверждает существование глубокой связи электрических и магнитных явлений. Из формулы (8) мы можем сделать вывод, что отношение магнитных и электрических сил для многих практически интересных случаев оказывается малой величиной. Например, обычно направленная скорость электронов в металле при прохождении тока составляет десятые доли миллиметра в секунду. В таких случаях магнитное взаимодействие электронов примерно в 10^{24} раз меньше их электрического взаимодействия. Стоит ли вообще считаться с магнитным взаимодействием движущихся зарядов? Оказывается, стоит и вот почему. Во всяком проводнике имеются в равном числе заряженные частицы обоих знаков. Поэтому проводники с током электрически практически нейтральны. Электрические силы в проводниках с огромной точностью скомпенсированы, а при их отсутствии даже очень малые магнитные силы оказываются существенными. В электрических моторах движущиеся в их обмотках электроны взаимодействуют именно магнитными силами. Именно за счет магнитных сил приводятся в движение двигатели.

Вспомним теперь, что в наших рассуждениях мы сделали допущение о «не слишком больших скоростях». Теперь можно сказать, что мы имели в виду малость скоростей частиц по сравнению со скоростью света. Это было нужно нам для того, чтобы не возникло необходимости пользоваться более сложными (релятивистскими) формулами. Например, при скоростях заряженных частиц, близких к скорости света, уже нельзя записывать формулу для напряженности электрического поля в виде (1).

Так же, как и другие физические величины, например, скорости и ускорения частиц, силы, действующие на них, напряженность электрического поля и индукция магнитного поля зависят от того, в какой системе отсчета мы их рассматриваем (измеряем). Выше мы уже говорили, например, о том, что если магнитное поле существует в системе K, то из этого еще не следует, что оно сохранится в системе K'. Система K', которую мы рассматривали, двигалась со скоростью, равной скорости $\vec{v}$ интересовавшего нас заряда. И магнитное поле в системе K' отсутствовало. В общем случае и вектор $\vec{E}$, и вектор $\vec{B}$ *относительны*, то есть зависят от того, в какой системе отсчета находится наблюдатель с приборами, измеряющими эти величины.

Для нас существенно то, что при скоростях, малых по сравнению со скоростью света, электрическое поле изменяется мало. Количественной характеристикой этой малости как раз и служит отношение $(v/c)^2$.

Заметим, впрочем, что формула (8) оказывается справедливой и при скоростях, близких к скорости света. Поэтому для релятивистских частиц, движущихся со скоростью, лишь немногим меньшей скорости света, величины магнитных и электрических сил могут отличаться не очень сильно.

Подводя итог нашим вычислениям, еще раз подчеркнем, что для многих задач магнитное взаимодействие оказывается существенным, даже если оно мало по сравнению с электрическим.

Остановимся совсем кратко на других отличиях магнитного и электрического (электростатического) полей. Одно из этих отличий состоит в том, что линии действия электрических сил (силовые линии электростатического поля) имеют начало и конец. Они начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных. Работа при перемещении заряда между двумя фиксированными точками в электростатическом поле не зависит от формы и длины траектории, а работа, совершаемая при движении заряда по замкнутой траектории, равна нулю. Благодаря этому свойству электростатического поля каждая его точка характеризуется не только напряженностью, но и потенциалом.

Линии же магнитной индукции, в отличие от силовых линий электростатического поля, не имеют начала и конца. Они замкнуты и охватывают ток. Каждая точка магнитного поля характеризуется величиной магнитной индукции, но не потенциалом.

Сила, действующая на заряд в электростатическом поле, всегда направлена по касательной к силовым линиям. Если рассматривать в магнитном поле участки проводников с током или движущиеся заряженные частицы, то силы, действующие на них, направлены не по касательной к линиям индукции, а перпендикулярно к ним (сила Лоренца, закон Ампера). Сила в магнитном поле может вовсе не вызывать поступательного движения, а лишь поворот (рамка с током в однородном магнитном поле; движение заряда по окружности в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю).

Все сказанное говорит о том, что электростатическое поле во многом не похоже на магнитное. Связь электрических и магнитных полей вовсе не означает, что между ними не существует различий.

Заряд атомного ядра и периодическая система элементов Менделеева

Современные представления о строении атома возникли в 1911—1913 годах, после знаменитых опытов Резерфорда по рассеянию альфа-частиц. В этих опытах было показано, что α-частицы (их заряд положительный), попадая на тонкую металлическую фольгу, иногда отклоняются на большие углы и даже отбрасываются назад. Это можно было объяснить только тем, что положительный заряд в атоме сконцентрирован в ничтожно малом объеме. Если представить его в виде шарика, то, как установил Резерфорд, радиус этого шарика должен быть равен примерно 10^{-14}—10^{-15} м, что в десятки и сотни тысяч раз меньше размеров атома в целом ($\sim 10^{-10}$ м). Только вблизи столь малого по размерам положительного заряда может существовать электрическое поле, способное отбросить α-частицу, мчащуюся со скоростью около 20 000 км/с. Эту часть атома Резерфорд назвал атомным ядром.

Так возникла идея о том, что атом любого вещества состоит из положительно заряженного ядра и отрицательно заряженных электронов, существование которых в атомах было установлено ранее. Очевидно, что, поскольку атом в целом электрически нейтрален, заряд ядра должен быть численно равен заряду всех имеющихся в атоме электронов. Если обозначить модуль заряда электрона буквой e (элементарный заряд), то заряд $q_я$ ядра должен быть равен $q_я = Ze$, где Z — целое число, равное числу электронов в атоме. Но чему равно число Z? Чему равен заряд $q_я$ ядра?

Из опытов Резерфорда, позволивших установить размеры ядра, в принципе, можно определить и величину заряда ядра. Ведь электрическое поле, отбрасывающее α-частицу, зависит не только от размеров, но и от заряда ядра. И Резерфорд в самом деле оценил заряд ядра. По Резерфорду заряд ядра атома того или иного химического элемента примерно равен половине его относительной атомной массы A, умноженной на элементарный заряд e, то есть

$$Z = \frac{1}{2} A \text{ и } q_я = \frac{1}{2} Ae.$$

Но, как это ни странно, истинный заряд ядра был установлен не Резерфордом, а одним из читателей его статей и докладов — голландским ученым Ван-ден-Бруком (1870—1926). Странно потому, что Ван-ден-Брук по образованию и профессии был не физиком, а юристом.

Почему Резерфорд, оценивая заряды атомных ядер, соотносил их с атомными массами? Дело в том, что когда в 1869 году Д. И. Менделеев создал периодическую систему химических элементов, он расположил элементы в порядке возрастания их относительных атомных масс. И за истекшие сорок лет все привыкли к тому, что самая важная характеристика химического элемента — его относительная атомная масса, что именно она отличает один элемент от другого.

Между тем именно в это время, в начале XX века, с системой элементов возникли трудности. При исследовании явления радиоактивности был открыт ряд новых радиоактивных элементов. И для них в системе Менделеева как будто бы не было места. Казалось, что система Менделеева требовала изменения. Этим и был особенно озабочен Ван-ден-Брук. В течение нескольких лет им было предложено несколько вариантов расширенной системы элементов, в которой хватило бы места не только для неоткрытых еще стабильных элементов (о местах для них «позаботился» еще сам Д. И. Менделеев), но и для радиоактивных элементов тоже. Последний вариант Ван-ден-Брук опубликовал в начале 1913 года, в нем было 120 мест, а уран занимал клетку под номером 118.

В том же 1913 году были опубликованы результаты последних исследований по рассеянию α-частиц на большие углы, проведенных сотрудниками Резерфорда Гейгером и Марсденом. Анализируя эти результаты, Ван-ден-Брук сделал важнейшее открытие. Он установил, что число Z в формуле $q_я = Ze$ равно не половине относительной массы атома химического элемента, а его порядковому номеру. И притом порядковому номеру элемента в системе Менделеева, а не в его, Ван-ден-Брука, 120-местной системе. Система Менделеева, оказывается, не нуждалась в изменении!

Из идеи Ван-ден-Брука следует, что всякий атом состоит из атомного ядра, заряд которого равен порядковому номеру соответствующего элемента в системе Менделеева, умноженному на элементарный заряд, и электронов, число которых в атоме тоже равно порядковому номеру элемента. (Атом меди, например, состоит из ядра с зарядом, равным 29 *e*, и 29 электронов.) Стало ясно, что Д. И. Менделеев интуитивно расположил химические элементы в порядке возрастания не атомной массы элемента, а заряда его ядра (хотя он об этом и не знал). Следовательно, один химический элемент отличается от другого не своей атомной массой, а зарядом атомного ядра. Заряд ядра атома — вот главная характеристика химического элемента. Существуют атомы совершенно различных элементов, но с одинаковыми атомными массами (они имеют специальное название — изобары).

То, что не атомные массы определяют положение элемента в системе, видно и из таблицы Менделеева: в трех местах нарушено правило возрастания атомной массы. Так, относительная атомная масса у никеля (№ 28) меньше, чем у кобальта (№ 27), у калия (№ 19) она меньше, чем у аргона (№ 18), у иода (№ 53) меньше, чем у теллура (№ 52).

Предположение о взаимосвязи заряда атомного ядра и порядкового номера элемента легко объясняло и правила смещения при радиоактивных превращениях, открытые в том же 1913 году («Физика 10», § 103). В самом деле, при испускании ядром α-частицы, заряд которой равен двум элементарным зарядам, заряд ядра, а значит, и его порядковый номер (теперь обычно говорят — атомный номер) должен уменьшиться на две единицы. При испускании же β-частицы, то есть отрицательно заряженного электрона, он должен увеличиться на одну единицу. Именно в этом и состоят правила смещения.

Идея Ван-ден-Брука очень скоро (буквально в том же году) получила первое, правда косвенное, опытное подтверждение. Несколько позже правильность ее была доказана прямыми измерениями заряда ядер многих элементов. Понятно, что она сыграла важную роль в дальнейшем развитии физики атома и атомного ядра.

Кубическая парабола

(Начало см. на с. 10)

В качестве упомянутого дополнительного соотношения выберем такое, которое обращает в нуль второе слагаемое левой части, а именно $3uv=p$. После этого мы получаем соотношение $u^3+v^3=c$. Возводя соотношение $3uv=p$ в куб, получаем $u^3v^3=p^3/27$. Таким образом, нам известна сумма u^3 и v^3 и произведение u^3v^3. Следовательно, $z_1=u^3$ и $z_2=v^3$ является двумя корнями квадратного уравнения $z^2-cz+{}$ ${}+p^3/27=0$. Отсюда

$$z_1=u^3=\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}-\frac{p^3}{27}}. \qquad (45)$$

$$z_2=v^3=\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}-\frac{p^3}{27}}. \qquad (46)$$

Очень интересным является тот факт, что подкоренное выражение в (45), (46) отрицательно тогда и только тогда, когда уравнение (42) имеет три различных действительных корня. Таким образом, именно в случае трех действительных корней в промежуточных вычислениях появляются комплексные числа. Это обстоятельство исторически сыграло важную роль, показав, что рассмотрение комплексных чисел необходимо для получения результата в виде действительных чисел.

Теперь мы можем выписать саму формулу Кардано для решения уравнения (42)

$$x=\sqrt[3]{\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}+{}$$
$$+\sqrt[3]{\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}. \qquad (47)$$

Формула (47) дает выражение для всех трех решений уравнения (42) при подходящем выборе комплексных значений кубического корня.

Задачи-матрешки

И. Д. КУШНИР

В начале факультатива по геометрии Петр Иванович нарисовал на доске три окружности (рис. 1) и предложил решить такую задачу:

Три окружности одинакового радиуса R пересекаются в общей точке S и в точках M, N, P. Докажите, что точки M, N, P лежат на окружности того же радиуса R.

Подумали мы немного. Ничего не получается: не видно, как приступить к задаче. Тогда Петр Иванович поставил на стол маленькую матрешку и написал на доске:

Задача 1. *Внутри треугольника ABC дана такая точка H, что $\widehat{HAC}=\widehat{HBC}$, $\widehat{HBA}=\widehat{HCA}$, $\widehat{HCB}=\widehat{HAB}$. Тогда H — ортоцентр треугольника ABC, то есть точка пересечения его высот.*

Мы это доказали почти сразу. В обозначениях, которые появились в чертеже на доске (рис. 2), очевидно, $2(\alpha+\beta+\gamma)=180°$, откуда $\alpha+\beta+\gamma=90°$. Но тогда внешний угол AA_1B треугольника ACA_1 равен $(\alpha+\beta)+\gamma=90°$, значит, AA_1 — высота. Аналогично BB_1 и CC_1, и, стало быть, H — ортоцентр.

— Правильно,— сказал Петр Иванович, поставил рядом с первой матрешкой вторую, чуть побольше, а на доске написал:

Задача 2. *Точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника, лежит на его описанной окружности.*

По чертежу, нарисованному на доске (рис. 3), в котором D обозначает точку пересечения высоты AA_1 с описанной окружностью, мы быстро усмотрели равенства $\widehat{HBC}=\widehat{CAD}$ (так как каждый из этих углов составляет 90° вместе с углом $\widehat{B_1CB}$) и $\widehat{CAD}=\widehat{CBD}$ (углы опираются на общую дугу $\overset{\smile}{CD}$). Поэтому $\widehat{HBC}=\widehat{DBC}$ и точка D симметрична H относительно CB.

Тут на столе Петра Ивановича появилась третья матрешка, а на доске — такая запись:

Задача 3. *Радиус описанной окружности треугольника равен радиусу окружности, проходящей через две вершины и ортоцентр.*

На предыдущем чертеже (см. рис. 3) Петр Иванович дорисовал окружность, проходящую через точки C, H, B и отрезки CD и DB. С места ему стали говорить, что треугольники CHB и CDB конгруэнтны по предыдущей задаче, поэтому их описанные окружности — одинакового радиуса. Петр Иванович вторую матрешку спрятал в третью.

— А еще есть матрешки? — спросили мы.

— Есть,— ответил Петр Иванович, вынув самую маленькую матрешку,— но задача будет устная, и написал:

Задача 4. *Дуги окружностей равных радиусов, соединяющие две их точки пересечения, конгруэнтны.*

— Дуги, конечно, конгруэнтны, ведь они симметричны относительно прямой, проходящей через точки пересечения,— ответили мы (рис. 4).

— Ну, а теперь любой из вас должен решить первоначальную задачу про три окружности,— сказал Петр Иванович и... вызвал меня к доске.

Я начал говорить что-то невнятное, но тут прозвучал спасительный звонок. Тогда Петр Иванович достал пятую, самую большую матрешку, многозначительно вложил матрешки друг в друга и сказал:

— Чтобы к следующему разу все решили эту задачу. Дома я ее довольно быстро решил.*) А вы?

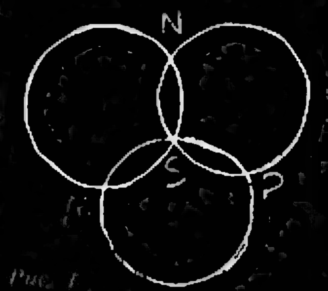


Рис. 1

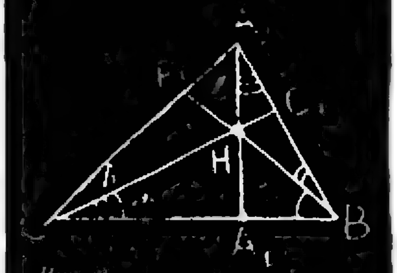


Рис. 2

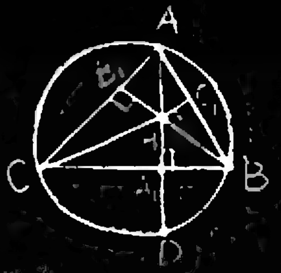


Рис. 3

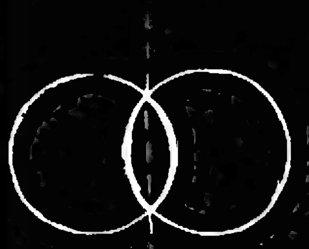


Рис. 4

---

*) Решение можно прочитать в разделе «Ответы, указания, решения».

Квант для младших школьников

Задачи

1. При делении числа $2 \cdot 3 = 6$ на 4 получаем в остатке 2, при делении числа $3 \cdot 4 = 12$ на 5 вновь получаем в остатке 2. Верно ли, что остаток от деления произведения двух последовательных чисел на число, следующее за ними, всегда равен 2?

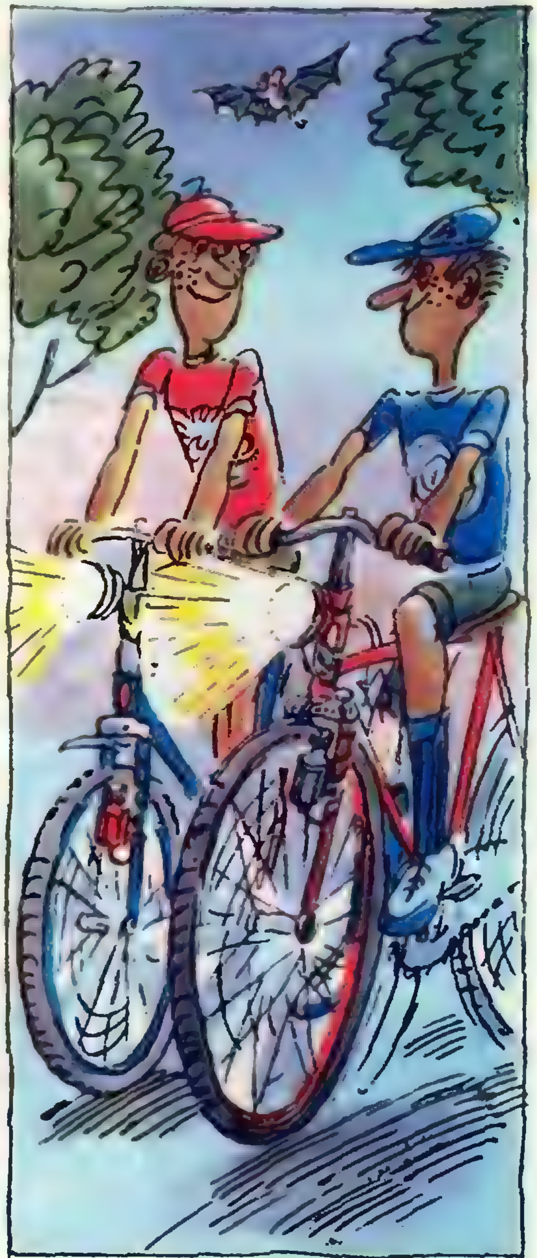
2. Два мальчика катаются на велосипедах поздно вечером. У одного из них велосипед с большими колесами, а у другого — с маленькими, но ездят они с одинаковой скоростью. У кого из них ярче горит фонарь, работающий от динамомашины на ободе колеса?

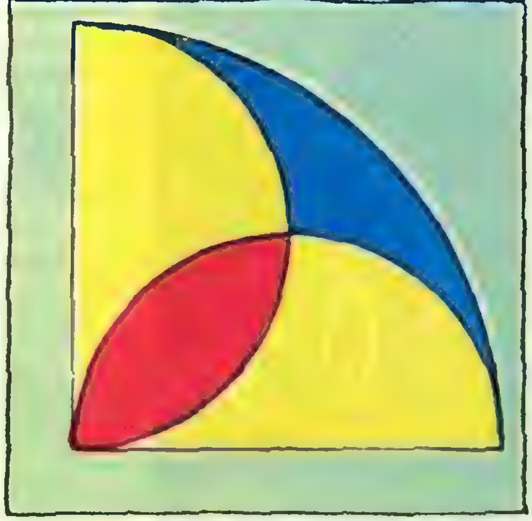
3. Существует ли трехзначное число, равное произведению своих цифр?

4. На радиусах четверти круга, как на диаметрах, построены полукруги (см. рисунок). Что имеет большую площадь: общая (красная) часть этих полукругов или (синяя) часть четверти круга, не покрытая ими?

5. Цифру 9, с которой начиналось трехзначное число, перенесли в конец числа. В результате получилось число на 216 меньше. Какое число было первоначально?

Эти задачи нам предложили:
Н. К. Антонович, С. В. Дворянинов, С. Н. Олехник, А. П. Савин, А. Г. Самосвит.





Решето Эратосфена

Академик А. Н. КОЛМОГОРОВ

Эта красивая форма решета Эратосфена*) заимствована из книги М. **Гарднера** *«Математические досуги»* (изд-во «Мир», 1972). Все не перечеркнутые (красным или синим) числа — простые, кроме числа 121. Объясните, почему!

Задача 1. *Чтобы получить список простых чисел, меньших 1000, надо «отсеять» числа, которые делятся на* 2, 3, 5, 7, 11,... *На каком простом числе можно при этом остановиться?*

Как изменится ответ для случая составления таблицы простых чисел, меньших 10 000?

Восклицательным знаком отмечены в таблице пары простых чисел «близнецов»**). В нашей таблице их десять.

Известно, что простых чисел бесконечно много. Но никто не знает, конечно или бесконечно множество пар близнецов.

Задача 2. *Первые две пары близнецов* (3, 5) *и* (5, 7) *имеют общий элемент* (5). *«Расстояние» между второй и третьей парой близнецов* (11, 13) *равно*

$$11 - 7 = 4.$$

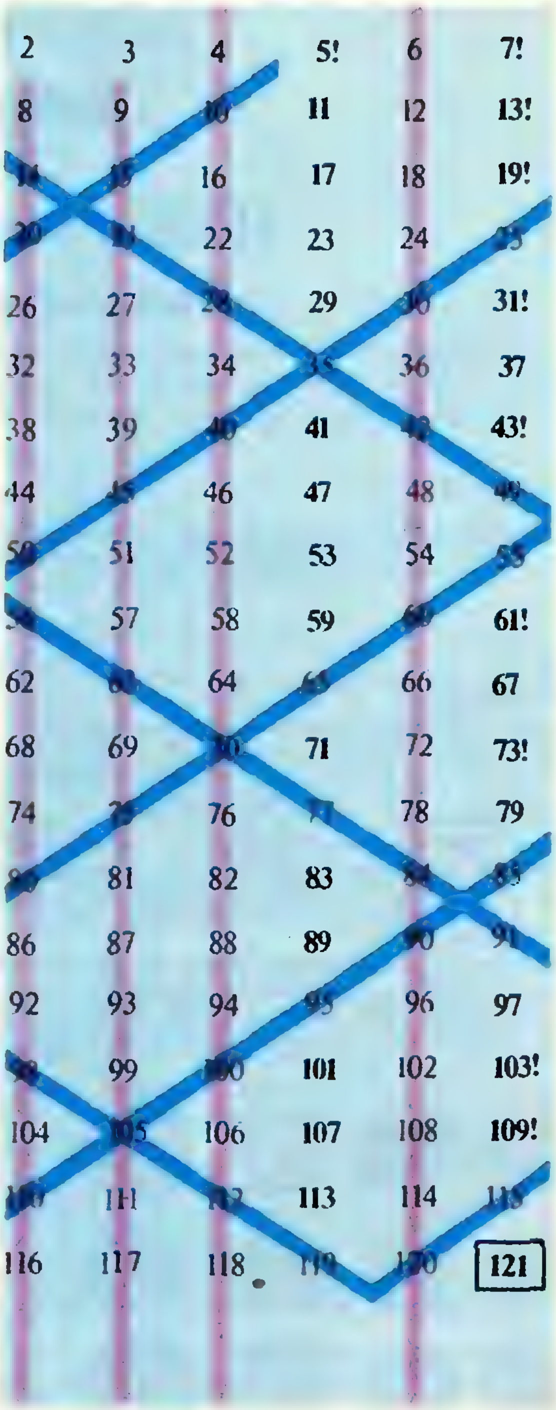
Расстояние между третьей и четвертой (17, 19)

$$17 - 13 = 4,$$

между четвертой и пятой (29, 31)

$$29 - 19 = 10.$$

Докажите, что далее расстояние между соседними парами близнецов никогда не будет меньше четырех.



2	3	4	5!	6	7!
8	9	10	11	12	13!
14	15	16	17	18	19!
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31!
32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43!
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61!
62	63	64	65	66	67
68	69	70	71	72	73!
74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97
98	99	100	101	102	103!
104	105	106	107	108	109!
110	111	112	113	114	115
116	117	118	119	120	$\boxed{121}$

---

*) См. «Квант», 1973, № 4, с. 71.

**) См. «Квант», 1973, № 5, с. 56.

Сколько воды в колбах?

Шесть прозрачных колб с водой расставлены в два параллельных ряда по три колбы в каждом. На рисунке 1 видны три передние колбы и на рисунке 2 — две правые боковые. Через прозрачные стенки колб просматриваются уровни воды в каждой видимой колбе и во всех колбах, стоящих за ней. Определите, сколько воды налито в каждую колбу.

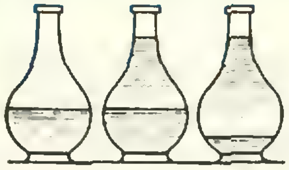


Рис. 1.

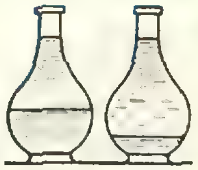


Рис. 2.

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из Задачника «Кванта». Ниже публикуются списки победителей конкурса «Задачник «Кванта» 1983 года.

В соответствии с решением оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады получают:

По математике

Я. БАБКИН — Петрозаводск, с. ш. № 30, 9 кл.
А. БАРАБАШ — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
С. ВЕЛЕСЬКО — Минск, с. ш. № 103, 8 кл.
К. ГАДЖИЕВ — с. Зод Арм. ССР, Зодская с. ш., 9 кл.
М. ГАРАЕВ — Физули, с. ш. № 2, 10 кл.
Р. ГЕНДЛЕР — Ташкент, с. ш. № 208, 7 кл.
З. ДЖАББАРОВ — Ташкент, с. ш. № 5, 10 кл.
З. ДЖАФАРОВ — с. Тьюркоба Аз. ССР, Тьюркобинская с. ш., 10 кл.
А. ДУЛУБ — Калинковичи, с. ш. № 7, 10 кл.
В. ЖУРАВЛЕВ — Гайворон, с. ш. № 2, 7 кл.
Л. ЗОСИН — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
П. КАСИНСКИЙ — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
О. КОЗЛОВСКИЙ — Москва, с. ш. № 444, 9 кл.
С. КОРШУНОВ — Целиноград, с. ш. № 1, 10 кл.
О. МАТВЕЕВ — Свердловск, с. ш. № 79, 10 кл.
А. МОЛОТКОВ — Ленинград, с. ш. № 366, 9 кл.
С. НАБИЕВ — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
С. НАЙДЕН — Днепропетровск, с. ш. № 43, 10 кл.
А. РАСУЛОВ — Баку, ФМШ № 1, 10 кл.
Г. САМАДАШВИЛИ — Тбилиси, с. ш. № 63, 10 кл.
М. ТЕЙТЕЛЬ — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
Д. ТЕРЕШИН — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
Д. ФЕДОТОВ — Новокузнецк, с. ш. № 97, 8 кл.
Е. ФИЛЕНКО — Родинское, с. ш. № 8, 10 кл.
Б. ФРИДМАН — Москва, с. ш. № 57, 9 кл.
А. ШНИРМАН — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
А. ЯРИН — Севастополь, с. ш. № 24, 10 кл.

По физике

В. АПАЛЬКОВ — Харьков, с. ш. № 16, 9 кл.
Э. БАГДАСАРЯН — Баку, с. ш. № 46, 10 кл.
В. БАРЗЫКИН — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 9 кл.
И. БЕРХИН — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
В. БРАЖНИКОВ — Запорожье, с. ш. № 28, 10 кл.
М. ГРИНБЕРГ — Красноярск, с. ш. № 42, 10 кл.
Г. ДОЛГОПЯТОВ — Донецк, с. ш. № 1, 10 кл.
М. ЗИМАНОВ — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
И. КАЛИНОВСКИЙ — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
Д. КУПЦОВ — Москва, спецшк. № 4, 10 кл.
С. ЛАУРИНАВИЧЮС — Мажейкий, с. ш. № 3, 11 кл.
Д. МАКАРОВ — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
К. МАКАРЧУК — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
И. ПИЛЬНИКОВ — Тамбов, ПТУ № 2
А. ПОГОРЕЛОВ — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
Г. САМАДАШВИЛИ — Тбилиси, с. ш. № 63, 10 кл.
В. САМОЙЛЕНКО — Находка, с. ш. № 10. 10 кл.
С. САХАРУК — Брест, с. ш. № 1, 10 кл.
А. СОЛОВЬЕВ — Куйбышев, с. ш. № 63, 10 кл.
Д. ТРЕТЬЯКОВ — Винница, с. ш. № 33, 10 кл.
Л. ФЕЛЬДМАН — Саратов, с. ш. № 13, 9 кл.
А. ЧУДНОВСКИЙ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Г. ЯЩИН — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.

* * *

В соответствии с решением редколлегии награждаются призами журнала «Квант»:

А. АБАНОВ — Красноярск, с. ш. № 170, 10 кл.
Р. АЛЕКСЕЕВ — ФМШ № 45 при ЛГУ, 9 кл.
А. АСТРЕЛИН — Новосибирск, с. ш. № 119, 10 кл.
А. БИРГЕР — Иваново, с. ш. № 6, 9 кл.
Г. ГОЧЕВ — Дубна, с. ш. № 9, 10 кл.
С. ГРЕБЕНЩИКОВ — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
А. КРАСНОВ — ФМШ № 165 при НГУ, 10 кл.
М. ЛЕВ — Свердловск, с. ш. № 130, 10 кл.
А. МАЛЕВАНЕЦ — ФМШ № 2 при КГУ, 9 кл.
Ф. НАЗАРОВ — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
А. САМОЙЛОВИЧ — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
С. СТРУКОВ — Воронеж, с. ш. № 85, 10 кл.
В. ХРЫЧИКОВ — Севастополь, с. ш. № 24, 10 кл.
С. ЧЕРНЫШЕВ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Л. ЭРДЕШ — Будапешт, гимназия им. Бержени
П. ЭТИНГОФ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.

задачник кванта

Задачи

M851—M855; Ф863—Ф867

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 мая 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта», № 3—84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M851, M852» или «Ф863». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M851. Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 1. На сторонах AB и AD выбраны точки P и Q так, что периметр треугольника APQ равен 2. Доказать, что $\widehat{PCQ}=45°$.

А. Б. Ходулев

M852. Пусть x, y, z — длины сторон треугольника. Докажите, что величина

$$\left|\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}\right|$$

меньше а) 1; б)* 1/8.

А. В. Ермилов

M853. Квадрат $ABCD$ вращается вокруг своего неподвижного центра. Найдите множество, которое описывает середина отрезка PQ, где P — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на неподвижную прямую l, а Q — середина стороны AB.

Й. Табов (Болгария)

M854. На переговорном пункте установлены автоматы для размена серебряных монет достоинством 10, 15 и 20 копеек, действующие так, как показано на рисунке 1. У Пети был 1 руб. 25 коп. серебряными монетами и он все их разменял в автоматах на медь. Вася, посчитав сколько каких монет стало у Пети, сказал:

— А я знаю, какие у тебя были серебряные монеты!

Узнайте это и вы.

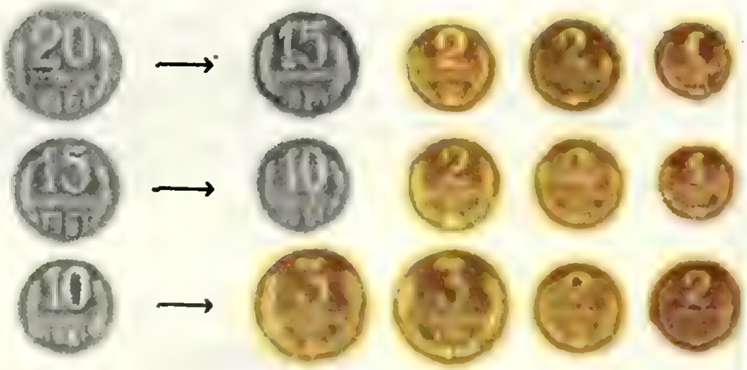


Рис. 1.

Б. И. Бегун

M855. Можно ли жесткий правильный тетраэдр с ребром 1 протащить сквозь обруч диаметра а) 1; б) 0,95; в) 0,9; г) 0,85?

В. В. Произволов

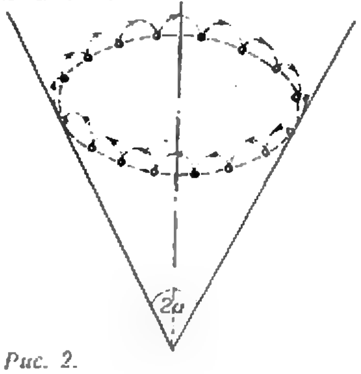


Рис. 2.

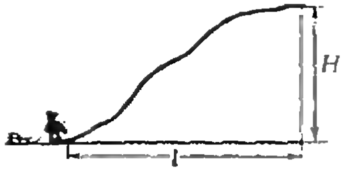


Рис. 3.

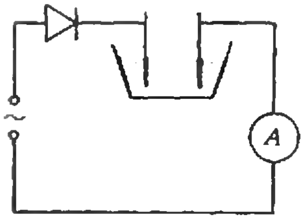


Рис. 4.

Ф863. В конической лунке с углом при вершине 2α прыгает шарик, упруго отражаясь от стенки лунки. Точки соударения шарика со стенкой лежат на одной и той же высоте (рис. 2); время от удара до удара постоянно и равно T. Чему равна средняя угловая скорость движения шарика вокруг оси лунки, если максимальная скорость шарика v лежит в диапазоне от $\frac{1}{2}gT$ до $gT/2\sin\alpha$?

О. Я. Савченко

Ф864. Мальчик медленно поднимается на снежную горку и тащит за собой на веревке санки. Веревка все время параллельна касательной к горке в той точке, в которой находится мальчик. Вершина горки расположена на высоте H и на расстоянии l от ее основания (рис. 3). Какую работу совершит мальчик при поднятии санок на горку? Масса санок m, коэффициент трения санок о снег μ.

А. И. Буздин

Ф865. Оцените размер атома ртути, если известны: σ — коэффициент поверхностного натяжения ртути (в единицах $\frac{\text{энергия}}{\text{площадь}}$), ϱ — плотность ртути, r — удельная теплота парообразования ртути.

Ю. Родионов, А. Яковлев

Ф866. Электролитическая ванна подключена через идеальный диод к сети переменного напряжения (рис. 4). Найти показания теплового амперметра (А), если известно, что за время $t=1$ ч на катоде выделяется $m=1{,}078$ г меди. Электрохимический эквивалент меди $k=0{,}33\cdot10^{-6}$ кг/Кл.

Б. А. Мукушев

Ф867. Представьте себе, что вы стоите перед большим листом толстого прозрачного стекла (например, перед стеклянной витриной). Каким образом можно определить толщину стекла, если доступа к его краям нет (скажем, края стекла замурованы в стены), и помещение за стеклом проникнуть нельзя, разбить стекло тоже нельзя? В вашем распоряжении имеются линейка, угольник, бумага, карандаш и карманный калькулятор для проведения расчетов.

М. В. Семенов

Problems

M851—M855; P863—P867

M851. The square $ABCD$ is of length 1. Points P and Q are chosen on sides AB and AD respectively so the perimeter of ABC is 2. Prove that $\widehat{PCQ}=45°$.

A. B. Khodulev

M852. Suppose x, y, z are the lengths of a triangle's sides. Prove that the number

$$\left|\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{x+z}+\frac{z-x}{z+x}\right|$$

is less than a) 1; b)* 1/8.

A. V. Ermilov

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it

to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than May 31st, 1984 to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант».

Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the worlds: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose and unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M853. The square $ABCD$ rotates about its fixed centre. Find the set of points described by the midpoint of the segment PQ, where P is the foot of the perpendicular drawn from D to a fixed line l and Q is the midpoint of side AB.

Y. Tabov (Bulgaria)

M854. Automats for making change exchange 10, 15 and 20 kopeck silver coins for copper coins as shown on the figure Рис. 1. Pete had 1 rouble 25 kopecks in silver coins which he entirely exchanged for copper ones by means of the automats. Pete's friend Vassia, having counted Pete's copper coins, said:

— I know what silver coins you had.

What were they?

B. I. Begun

M855. Is it possible to pull a rigid regular tetrahedron of edge 1 through a hoop of diameter a) 1; b) 0,95; c) 0,9; d) 0,85?

V. V. Proizvolov

P863. A small ball-bearing bounces elastically off the walls of a cone-shaped hole with summit angle 2α. The points where the ball-bearing bounces are all on the same height (see figure Рис. 2); the time between bounces is constant and equals T. What is the mean angular velocity about the axis of the trough of the ball-bearing if its maximal velocity v is in the interval from $\frac{1}{2}gT$ to $gT/2\sin\alpha$?

O. Ya. Savchenko

P864. A boy slowly climbs up a snowy hill pulling a sled behind him by means of a rope. The rope is always parallel to the tangent to the hill at the point where the boy is located. The top of the hill is at height H and distance l from its base (see figure Рис. 3). What work will the boy perform in pulling the sled to the top of the hill? The sled's mass is m, its friction coefficient on snow is μ.

A. I. Buzdin

P865. Estimate the size of a mercury atom if the coefficient of surface tension for mercury is σ (in units $\frac{\text{energy}}{\text{area}}$), the density of mercury is ϱ, the specific heat of vaporization is r.

Yu. Rodionov, A. Yakovlev

P866. An electrolytic bath is connected via an ideal diode to a source of alternating voltage (see figure Рис. 4). Find the showing of the calorific ammeter (A) if it is known that $m = 1.078$ gr of copper appear on the cathode in time $t = 1$ hour. The electrochemical equivalent of copper is $k = 0.33 \cdot 10^{-6}$ kg/c.

B. A. Mukushev

P867. Imagine that you are standing in front of a large pane of transparent glass (e. g. a glass store window). How can you determine the glass' thickness if there is no access to its edges (they are walled in, say) or to the inside of the glass, nor are you allowed to break the glass. In your possession you have a ruler, a right angle, paper, pencil and a pocket calculator for computations.

M. V. Semionov

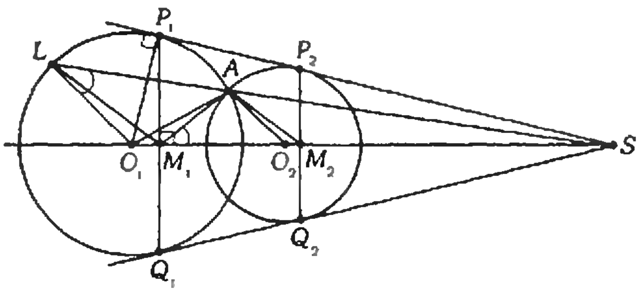
Решения задач

M836—M840; Ф847—Ф851

M836. *Пусть A — одна из точек пересечения двух окружностей с центрами O_1 и O_2, P_1P_2 и Q_1Q_2 — общие касательные, M_1 и M_2 — середины хорд P_1Q_1 и P_2Q_2 этих окружностей. Докажите равенство углов O_1AO_2 и M_1AM_2.*

Как это часто бывает, полезно начать решение с конца — последовательно преобразовывать доказываемое утверждение, заменяя его на эквивалентные, пока не получится утверждение, которое можно доказать непосредственно.

Очевидно, можно считать, что радиусы окружностей различны. При гомотетии с центром S, переводящей меньшую окружность в большую (см. рисунок), прямая O_2A перейдет в пря-



мую O_1L. Следовательно, они параллельны и $O_1\widehat{AO_2}=A\widehat{O_1}L$; аналогично, $M_1\widehat{AM_2}=A\widehat{M_1}L$. Таким образом, равенство углов $O_1\widehat{AO_2}=M_1\widehat{AM_2}$ эквивалентно следующим утверждениям:

$$A\widehat{O_1}L=A\widehat{M_1}L;$$

точки A, L, O_1, M_1 лежат на одной окружности;

$$O_1\widehat{L}A+A\widehat{M_1}O_1=180^\circ;$$

$$O_1\widehat{L}S=A\widehat{M_1}S;$$

треугольники SLO_1 и SAM_1 (с общим углом при вершине S) подобны;

$$\frac{|SA|}{|SO_1|}=\frac{|SM_1|}{|SL|}.$$

Для доказательства последнего равенства достаточно заметить, что $|SA|\cdot|SL|=|SP_1|^2=|SO_1|\cdot|SM_1|$ (первое равенство здесь — *свойство касательной и секущей* — следует из подобия треугольников P_1LS и AP_1S, второе — из подобия треугольников O_1P_1S и P_1M_1S).

А. М. Абрамов

◆

M837*. *Пусть a, b, c — целые положительные числа, каждые два из которых взаимно просты. Докажите, что наибольшее из целых чисел, которые не представимы в виде*

$$xbc+yca+zab$$

(где x, y, z — неотрицательные целые числа), равно

$$2abc-ab-bc-ca.$$

Удобно рассматривать сразу более общую задачу:

пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральные попарно взаимно простые числа. Назовем натуральное число u «красным», если его можно представить в виде

$$u=a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{x_1}{a_1}+\ldots+\frac{x_n}{a_n}\right), \qquad (1)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — целые неотрицательные числа, и «синим» — в противном случае. Каково наибольшее синее число?
(В нашей задаче $n=3$.)

Одно из самых коротких решений этой задачи опирается на следующие два утверждения:

1) любое целое число u допускает единственное представление (1), где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — целые числа, причем $0\leqslant x_2\leqslant a_2-1$, …, $0\leqslant x_n\leqslant a_n-1$, x_1 может быть любым (такое представление мы будем называть *стандартным*);

2) целое число u — красное тогда и только тогда, когда в его стандартном представлении $x_1\geqslant 0$.

Из последнего утверждения ясно, что наибольшее синее число m имеет стандартное представление с $x_1=-1$, $x_2=a_2-1$, … …, $x_n=a_n-1$, то есть

$$m=a_1a_2\ldots a_n\left(n-1-\frac{1}{a_1}-\ldots-\frac{1}{a_n}\right).$$

Докажем эти утверждения по индукции, начиная со случая $n=2$. В этом случае 1) превращается в такую очень полезную лемму (ниже $a_1=a$, $a_2=b$):

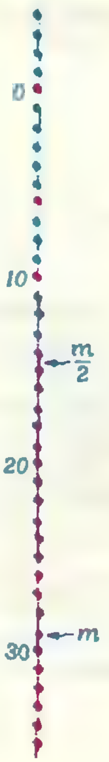
если натуральные числа a и b взаимно просты, то любое целое u единственным образом представляется в виде

$$u=bx+ay, \qquad (2)$$

где x и y — целые, $0\leqslant y\leqslant b-1$.

Для ее доказательства заметим, что все остатки от деления b чисел 0, a, $2a$, …, $(b-1)a$ на b различны (в противном случае оказалось бы, что какое-то число вида $(k-l)a$, где

$u=abc\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=$
$=bcx+cay+abz=$
$=c(bx+ay)+abz=$
$=cv+abz,$
где $v=bx+ay$



$0 \leqslant l < k \leqslant b-1$, делится на b, а это невозможно), и следовательно, ровно одно из них, ay, дает такой же остаток, как и число u, то есть $u-ay=bx$ при некоторых целых x и y, $0 \leqslant y \leqslant b-1$.

Утверждение 2) при $n=2$ почти очевидно: если число u красное, то есть имеет представление (2) с $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то и в его стандартном представлении коэффициент при b будет неотрицателен (если $y=qb+r$, где $q \geqslant 0$, $0 \leqslant r \leqslant b-1$, то $u=bx+ay=b(x+aq)+ar$).

Таким образом, в этом случае наибольшим синим числом будет $m=b\cdot(-1)+a\cdot(b-1)=ab-a-b$.

Покажем теперь, как с помощью этой же леммы сделать переход от $n=2$ к $n=3$ (тем самым задача М837 будет решена; в общем случае переход от n к $n+1$ совершается аналогично). Перепишем представление вида (1) числа u, как показано на полях. Поскольку c и ab взаимно просты, по лемме можно найти (причем единственным образом) целые v и z, $0 \leqslant z \leqslant c-1$, такие что $u=cv+abz$, а затем — x и y, $0 \leqslant y \leqslant b-1$, такие что $v=bx+ay$. Это доказывает утверждение 1) для $n=3$. Для доказательства 2) достаточно заметить, что красным u отвечают *красные v, а стандартному представлению u — стандартное* представление v, в котором $x \geqslant 0$.

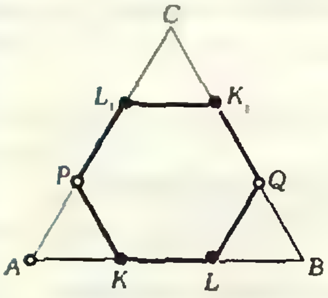
На рисунке отмечены красные и синие числа для $a=2$, $b=3$, $c=5$; здесь $m=29$. Видно, что они располагаются симметрично относительно точки $m/2$; если u — красное число, то $m-u$ — синее. Из нашего решения нетрудно вывести, что так будет и в общем случае (при любых a, b, c): красные числа — это всевозможные значения функции $u(x,y,z)=bcx+cay+abz$ на множестве точек пространства с целыми координатами (x, y, z), где $x \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant b-1$, $0 \leqslant z \leqslant c-1$, синие — ее значения на множестве $x \leqslant -1$, $0 \leqslant y \leqslant b-1$, $0 \leqslant z \leqslant c-1$. Эти множества симметричны, а функция u — линейная, поэтому и ее значения на *этих множествах расположены* симметрично.

Было бы интересно исследовать аналогичные задачи для представлений целых чисел в виде $Ax+By+Cz$ с любыми взаимно простыми коэффициентами A, B, C.

А. М. Абрамов,
Н. Б. Васильев

◆

М838. *Все точки, лежащие на сторонах правильного треугольника ABC, разбиты на два множества E_1 и E_2. Верно ли, что для любого такого разбиения в одном из множеств E_1 и E_2 найдется тройка вершин прямоугольного треугольника?*



Ответ: верно. *Доказательство* проведем от противного. Пусть точки множества E_1 окрашены синим цветом, множества E_2 — красным. Предположим, что не существует прямоугольного треугольника с одноцветными вершинами, и рассмотрим правильный шестиугольник, вписанный в треугольник ABC (см. рисунок). Каждые две его противоположные вершины должны быть окрашены по-разному — если, например, противоположные вершины P и Q синие, то любая из остальных четырех вершин должна быть красной, так как образует вместе с P и Q прямоугольный треугольник; но тогда любые три из этих красных точек образуют запрещенный одноцветный прямоугольный треугольник.

Ясно, что в таком случае найдутся две *соседние* разноцветные вершины шестиугольника. *Либо* эти две вершины, либо противоположные им (тоже разноцветные!) лежат на одной из сторон треугольника. Пусть для определенности на стороне AB лежат синяя вершина K и красная L, тогда противоположные им вершины K_1 и L_1 *будут красной и синей (см. рисунок)*. Но тогда в какой бы цвет ни была окрашена вершина A, один из прямоугольных треугольников AKL_1 и ALK_1 будет одноцветным. Противоречие.

Это рассуждение показывает, что даже множество из восьми точек — вершин шестиугольника и любых двух вершин треугольника — нельзя разбить на подмножества без прямоугольных треугольников.

Н. Б. Васильев, В. Н. Дубровский

◆

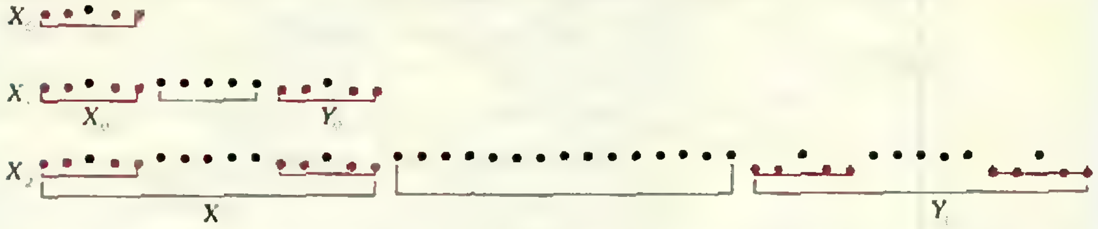
М839*. *Можно ли выбрать 1983 натуральных числа, не превосходящих 10^5, так, чтобы среди выбранных чисел не было ни одной тройки чисел, состав-*

Ответ: да, можно.

Для краткости договоримся называть подмножество натурального ряда «хорошим», если оно не содержит ни одной тройки последовательных членов арифметической прогрессии (иными словами, если ни одно число этого подмножества *ляющих арифметическую прогрессию (то есть ни одной тройки a, b, c, в которой $a+c=2b$)?*

не является средним арифметическим двух других). Докажем, что

из множества 1, 2,...,$5\cdot3^k$ ($k\geq0$) можно выбрать «хорошее» подмножество X_k, состоящее из $4\cdot2^k$ чисел.



На рисунке показаны первые шаги индуктивного построения нужного множества: $X_0=\{1,2,4,5\}$, а $X_{k+1}=X_k\cup Y_k$, где множество Y_k получается из X_k сдвигом на $2a_k$, a_k — наибольшее число в X_k. Таким образом, $a_{k+1}=3a_k$ и $a_k=5\cdot3^k$, то есть $X_k\subset\{1,2,...,5\cdot3^k\}$, кроме того, на каждом шаге количество чисел в нашем «хорошем» множестве удваивается, то есть X_k состоит из $4\cdot2^k$ чисел. Докажем по индукции, что все множества X_k «хорошие». Для X_0 это очевидно. Проверим, что среднее арифметическое двух чисел из X_{k-1} не входит в X_{k+1}. Поскольку по предположению индукции множество X_k, а с ним и Y_k, — «хорошее», можно считать, что одно из этих чисел, x, содержится в X_k, а другое, y, — в Y_k. Тогда $0<x\leq a_k$, $2a_k<y\leq3a_k$, поэтому $a_k<(x+y)/2<2a_k$, но числа от a_k+1 до $2a_k$ по построению не входят в X_{k+1}.

Остается заметить, что множество X_9 содержит $4\cdot2^9=2048>1983$ чисел, и все они не превосходят $a_9=5\cdot3^9=98415<10^5$.

А. М. Абрамов

◆

М840*. *а) Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то выполнено неравенство*

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq0.$$

Выясните, в каких случаях оно превращается в равенство.

б) Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a^3b+b^3c+c^3a\geq a^2bc+b^2ca+c^2ab.$$

Первый пункт этой задачи можно свести ко второму, поэтому решим сначала задачу б).

Домножив обе части неравенства на $a+b+c$, перепишем его в виде

$$(a^3b+b^3c+c^3a)(a+b+c)\geq abc(a+b+c)^2.$$

Первый сомножитель в левой части — это квадрат длины вектора $\vec{v}\,(x;y;z)$ с координатами $x=a\sqrt{ab}$, $y=b\sqrt{bc}$, $z=c\sqrt{ca}$, второй — квадрат длины вектора $\vec{u}\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ с координатами $x_1=\sqrt{c}$, $y_1=\sqrt{a}$, $z_1=\sqrt{b}$. В правой части, как легко видеть, стоит квадрат их скалярного произведения $(xx_1+yy_1+zz_1)^2$. Но для любых двух векторов $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2\leq|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ (это так называемое «неравенство Коши — Буняковского»).

Ясно, что равенство $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ возможно лишь тогда, когда векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ коллинеарны, то есть $\frac{a^3b}{c}=\frac{b^3c}{a}=\frac{c^3a}{b}$ или $a=b=c$.

Имеется и короткое прямое доказательство с помощью выделения полных квадратов:

$$\begin{aligned}a^3b+b^3c+c^3a-a^2bc-b^2ca-c^2ab&=\\=(a^3b-2a^2bc+c^2ab)+(b^3c-2b^2ca+a^2bc)&+\\+(c^3a-2c^2ab+b^2ca)&=\\=ab(a-c)^2+bc(b-a)^2+ca(c-b)^2&\geq0\end{aligned}$$

а) Приведем два решения.

Первое решение использует замену переменных $x+y=c$, $y+z=a$, $z+x=b$ (x, y, z — это отрезки, на которые стороны треугольника разбиваются точками касания вписанной окружности). Можно проверить, что после этой замены неравенство пункта а) приводится к виду

$$xy^3+yz^3+zx^3\geq x^2yz+y^2zx+z^2xy, \qquad (1)$$

а это неравенство, как мы доказали выше, справедливо при любых неотрицательных x, y, z.

При этом, чтобы не запутаться в выкладках и не выписывать всех членов разложения, можно использовать «симметричность» левой части неравенства пункта а) относительно цикли-

xy^3+yz^3+	2
$+zy^3-xz^3-$	0
$-x^2y^2-y^2z^2+2z^2x^2-$	0
$-2x^2yz+y^2xz-z^2xy$	-2

ческой замены $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$. Ей отвечает аналогичная замена R переменных x, y, z: $x \to y$, $y \to z$, $z \to x$, поэтому одночлены, получившиеся после раскрытия скобок в выражении

$$a^2b(a-b) = (y+z)^2(z+x)(y-x),$$

полезно сгруппировать по «типам», как это сделано на полях: к одному типу относятся одночлены, получающиеся друг из друга при циклической замене переменных R (на полях они выписаны в одну строку; подчеркнем, что попарные перестановки переменных не разрешаются — они меняют многочлен!). Ясно, что два других слагаемых $b^2c(b-c)$ и $c^2a(c-a)$ дадут другие одночлены тех же типов (их можно получить просто заменой R). Благодаря этому можно сразу указать, с каким коэффициентом войдут в результат одночлены каждого типа (синие цифры на полях).

В пункте б) мы показали, что равенство в (1), и значит, и в неравенстве а) достигается только при $x=y=z$, то есть при $a=b=c$ (для равностороннего треугольника).

Второе решение основано на искусной перегруппировке (и удачных переобозначениях). Найти ее гораздо труднее, чем в пункте б), потому что переменные a, b, и на сей раз связаны неравенством треугольника и это должно быть использовано.

Обозначим левую часть неравенства через $f(a,b,c)$. Поскольку $f(a,b,c)=f(b,c,a)=f(c,a,b)$, без ограничения общности можно доказывать неравенство $f(a,b,c)\geqslant 0$, считая, что b — средняя по длине сторона треугольника.

Предположим сначала, что $a\leqslant b\leqslant c$. Пусть $a=b-\alpha$, $c=b+\gamma$; тогда нужно доказывать неравенство $f(b-\alpha,b,b+\gamma)\geqslant 0$ при $b>0$, $\alpha\geqslant 0$, $\gamma\geqslant 0$ и при $b+\gamma<(b-\alpha)+b$, то есть $b>\alpha+\gamma$. Несложная, но объемистая выкладка показывает, что

$$f(b-\alpha,b,b+\gamma)=b\alpha(\alpha+\gamma)(b-\alpha-\gamma)+\gamma^2(b-\alpha)(b+\alpha+\gamma). \quad (2)$$

При указанных значениях переменных правая часть неотрицательна и обращается в нуль только при $\alpha=\gamma=0$, то есть $a=b=c$. Пусть теперь $a\geqslant b\geqslant c$, тогда в тех же обозначениях выражение (2) следует рассматривать при $\alpha\leqslant 0$, $\gamma\leqslant 0$ и $b>-(\alpha+\gamma)$, но и в этом случае оно, очевидно, неотрицательно.

А. М. Абрамов, Э. А. Ясиновый

◆

Ф847. *В объемный пучок положительных ионов, имеющий круглое сечение, в точке A влетает электрон, скорость которого параллельна оси симметрии пучка (рис. 1). Объемная плотность зарядов в пучке равна ρ, длина пучка l (длина пучка много больше его радиуса). При каких значениях скорости электрона он вылетит из пучка в точке B? Столкновения электрона с ионами не учитывать.*

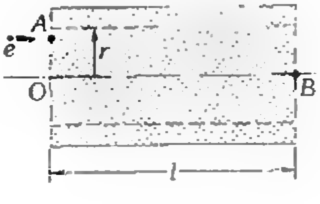


Рис. 1.

На электрон, летящий в пучке, действует электрическое поле, создаваемое ионами. Найдем, как зависит напряженность этого поля от расстояния до оси пучка.

Напряженность $\vec{E}(r)$ в точках, находящихся внутри пучка достаточно далеко от его торцов на расстоянии r от оси OB, можно представить как сумму

$$\vec{E}(r)=\vec{E}_1(r)+\vec{E}_2(r),$$

где $\vec{E}_1(r)$ — напряженность поля, создаваемого теми зарядами, которые находятся внутри цилиндра радиуса r, и $\vec{E}_2(r)$ — напряженность поля, создаваемого зарядами, находящимися вне этого цилиндра (см. рис. 1). Из соображений симметрии ясно, что вектор $\vec{E}_2(r)$ должен быть направлен вдоль радиуса пучка. Поскольку силовые линии внутри цилиндрической полости могут начинаться на положительных зарядах, и заканчиваться — на отрицательных, мы приходим к выводу, что $\vec{E}_2(r)=\vec{0}$. Более того, заряды, находящиеся вне цилиндра радиуса r, во всех точках области внутри цилиндра поля не создают.

Определим теперь напряженность $\vec{E}(r)=\vec{E}_1(r)$. Известно, что с точки зрения картины силовых линий напряженность поля определяется как число силовых линий, пронизывающих площадку единичной площади, перпендикулярную линиям. Следовательно, если мы сожмем заряд цилиндра радиуса r равномерно к оси цилиндра, то поля, создаваемые прежним распределением зарядов и новым «сжатым» распределением, вне цилиндра будут совпадать. Поэтому величину $\vec{E}_1(r)$ определим как напряженность поля бесконечной заряженной прямой на расстоянии r от нее.

Рассчитаем, какой должна быть линейная плотность зарядов на прямой. Заряд, находящийся после сжатии на отрезке длины Δl, равен $\sigma \cdot \Delta l$, где σ — линейная плотность заряда на прямой. Этот заряд должен равняться тому заряду, который находился внутри цилиндра радиуса r и высоты Δl, то есть

$$\sigma \cdot \Delta l = \varrho \cdot \Delta l \cdot \pi r^2.$$

Отсюда получаем:

$$\sigma = \varrho \pi r^2.$$

Найдем теперь напряженность поля, создаваемого бесконечной заряженной прямой с плотностью заряда σ. Выделим на прямой малый участок длины dx. Заряд этого участка равен $\sigma \cdot dx$. Напряженность поля, создаваемого этим участком в точке M, находящейся на расстоянии r от прямой, равна (рис. 2)

$$\Delta E = |\Delta \vec{E}| = \frac{\sigma \cdot dx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)}.$$

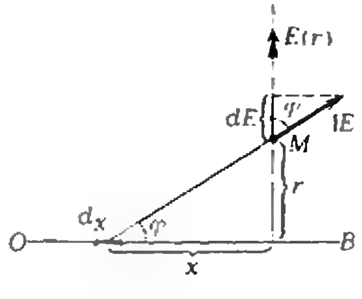


Рис. 2.

Из соображений симметрии ясно, что вектор $\vec{E}(r)$ должен быть в любой точке перпендикулярен прямой. Следовательно, вклад, который вносит в поле в точке M участок dx, равен

$$dE = \Delta E \cdot \cos\varphi = \frac{\varrho\pi r^2 \cdot dx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)} \frac{r}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\varrho r^3}{4\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}\,dx.$$

Полная напряженность поля в точке M представляет собой сумму таких вкладов, вносимых всеми участками прямой, то есть

$$E(r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dE = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\varrho r^3 dx}{4\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\varrho r}{2\varepsilon_0}.$$

Такова напряженность поля на расстоянии r от оси пучка в тех его точках, которые достаточно далеки от торцов пучка. Вблизи торцов поле «искажено». Учет этих искажений (краевых эффектов) достаточно сложен. Мы упростим задачу: будем считать, что точки A и B лежат внутри бесконечно длинного пучка ионов на расстоянии l (вдоль оси пучка) друг от друга.

Рассмотрим движение электрона внутри бесконечно длинного пучка ионов. Сила, действующая на электрон, когда он находится на расстоянии r от оси пучка, равна

$$F = \frac{e\varrho}{2\varepsilon_0} r = -\frac{|e|\varrho}{2\varepsilon_0} r$$

и направлена перпендикулярно оси пучка. Ускорение электрона в этом направлении —

$$a = \frac{F}{m}, \text{ или } r'' = -\frac{|e|\varrho}{2\varepsilon_0 m} r.$$

Из этого уравнения следует, что движение электрона в проекции на плоскость, перпендикулярную оси пучка, представляет собой гармонические колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 m}{|e|\varrho}}.$$

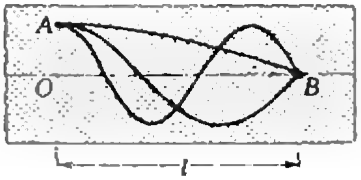


Рис. 3

В направлении оси пучка скорость электрона остается постоянной и равной той скорости, которую он имел в точке A.

На рисунке 3 приведено несколько возможных траекторий электрона, вылетающего из пучка в точке B. Очевидно, что время движения электрона в пучке при этом определяется условиями

$$t_1 = \frac{T}{4},\ t_2 = \frac{T}{4} + \frac{T}{2} = \frac{3T}{4},\ t_3 = \frac{3T}{4} + \frac{T}{2} = \frac{5T}{4} \text{ и т. д.,}$$

или, в общем виде,

$$t_n = (2n-1)\frac{T}{4} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

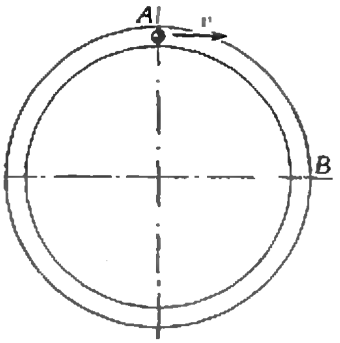
С другой стороны, $t_n = l/v_n$. Так что возможные значения скорости электрона определяются условием

$$v_n = \frac{l}{t_n} = \frac{4l}{(2n-1)T} = \frac{4l\sqrt{|e|\varrho}}{(2n-1)2\pi\sqrt{2\varepsilon_0 m}} =$$

$$= \frac{2l}{\pi(2n-1)}\sqrt{\frac{|e|\varrho}{2\varepsilon_0 m}} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

О. В. Фатьянов

Ф848. *По гладкому горизонтальному круговому желобу длины l катается шарик. Скорость шарика известна с точностью $\varepsilon = \pm 5\%$. При каких значениях v можно точно утверждать, что через время τ после того, как шарик находился в точке A (см. рисунок), его нет в точке B?*



Так как скорость шарика известна с точностью ε, то для любого момента времени можно указать не точку, а некоторый участок на окружности, внутри которого находится шарик. Передняя граница этого участка движется со скоростью $v + \varepsilon v = v(1+\varepsilon)$, а задняя — со скоростью $v(1-\varepsilon)$. Спустя время τ после того, как шарик был в точке A, длина участка будет $2v\varepsilon\tau$. Тот факт, что шарика в данный момент нет в точке B, означает, что точка B не попадает внутрь этого участка, то есть (см. рисунок)

$$2v\varepsilon\tau - \frac{3l}{4} < v(1+\varepsilon)\tau - nl < \frac{l}{4},$$

где n — число полных оборотов шарика по окружности за время τ. Отсюда находим

$$\frac{l\left(n - \frac{3}{4}\right)}{(1-\varepsilon)\tau} < v < \frac{l\left(n + \frac{1}{4}\right)}{(1+\varepsilon)\tau}.$$

Однако это не окончательный ответ. Участок, где может находиться шарик, «расползается» со скоростью $2\varepsilon v$. Поэтому через время $t = l/2\varepsilon v$ (когда участком будет вся окружность) положение шарика определить невозможно. За это время шарик сделает $n = vt/l = 1/2\varepsilon$ полных оборотов. Так что задача имеет смысл при $n < \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{2(1/20)} = 10$.

Ответ:

$$\frac{l\left(n - \frac{3}{4}\right)}{(1-\varepsilon)\tau} < v < \frac{l\left(n + \frac{1}{4}\right)}{(1+\varepsilon)\tau}, \text{ где } n = 1, 2, \ldots, 9.$$

Е. И. Рабкин

◆

Ф849. *Сухой термометр находящегося в комнате психрометра показывает температуру $t_1 = 18\,°C$, а влажный — $t_2 = t - \Delta t = 15\,°C$. Не пользуясь таблицей, определите относительную влажность воздуха в комнате. Давление насыщенного водяного пара при указанных температурах равно, соответственно, $p_1 = 15{,}5$ мм рт. ст. и $p_2 = 12{,}8$ мм рт. ст. Молярная теплота испарения воды — $L = 4{,}07 \cdot 10^4$ Дж/моль; теплоемкость воздуха равна $c = 20{,}8$ Дж/(моль · град) (при постоянном объеме).*

Обозначим парциальное давление паров в комнате $p_п$; тогда искомая относительная влажность —

$$\varphi = \frac{p_п}{p_1} 100\,\%.$$

Для нахождения $p_п$ воспользуемся законом сохранения энергии.

Выделим мысленно в комнате объем V_1, содержащий заданную массу сухого воздуха M и некоторое количество пара m_1, и переместим его к влажному термометру. Там объем, содержащий столько же сухого воздуха, обозначим V_2, а количество пара в этом объеме — m_2. Плотность воздуха в комнате практически повсюду одна и та же, так что такое перемещение не требует совершения работы какими-либо силами, кроме сил давления воздуха, а их работу мы учтем.

Работа сил давления —

$$A = p(V_1 - V_2).$$

Воздух охлаждается от температуры T_1 до температуры T_2, и его внутренняя энергия уменьшается на

$$\Delta U = c\nu \cdot \Delta T = c\frac{M}{\mu_в} \cdot \Delta T.$$

Уменьшением внутренней энергии пара при охлаждении явно можно пренебречь по сравнению с этой величиной, так как при этих температурах пара в воздухе мало ($p_п \ll p$).

При испарении «недостающей» воды поглощается тепло

$$\Delta Q = L\frac{m_2 - m_1}{\mu_п}.$$

Запишем баланс энергии:

$$p(V_1 - V_2) + c\frac{M}{\mu_в} \cdot \Delta T = L\frac{m_2 - m_1}{\mu_п}. \qquad (*)$$

Воспользовавшись уравнением Менделеева — Клапейрона, найдем:

$$V_1 = \frac{MRT_1}{(p - p_п)\mu_в} + \frac{m_1RT_1}{p_п\mu_п}, \quad m_1 = M\frac{p_п}{p}\,\frac{\mu_п}{\mu_в}.$$

$$V_2 = \frac{MR(T_1 - \Delta T)}{(p - p_2)\mu_в} + \frac{m_2R(T_1 - \Delta T)}{p_2\mu_п}, \quad m_2 = M\frac{p_2}{p}\,\frac{\mu_п}{\mu_в}.$$

Учитывая эти соотношения и пренебрегая при вычислениях малым членом порядка $\frac{\Delta T}{T}\frac{p_2}{p}$, получим:

$$V_1 - V_2 = \frac{MR}{p\mu_в}\left(\frac{T_1}{p}(p_п - p_2) + \Delta T\right).$$

Подставив это выражение в (*) с учетом того, что $\mu_п = \frac{m_2}{Mp_2}p\mu_в$, после упрощений получим:

$$p_п = p_2 - p\cdot\Delta T\cdot\frac{R+c}{RT_1+L}.$$

Таким образом, относительная влажность воздуха равна

$$\varphi = \frac{p_п}{p_1}100\% = \left(\frac{p_2}{p_1} - \frac{p\cdot\Delta T}{p}\cdot\frac{R+c}{RT_1+L}\right)100\%.$$

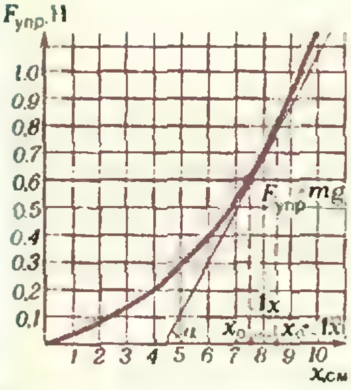
Подставляя числовые данные, находим:

$$\varphi \approx 73\%.$$

И. С. Солодовников

◆

Ф850. *На рисунке показана экспериментально полученная зависимость силы упругости пружины от ее длины. Найти период малых колебаний груза массы m = 60 г, подвешенного вертикально на этой пружине в поле тяжести.*



Прежде всего найдем положение равновесия груза. При равновесии

$$F_{упр}(x_0) = mg,$$

где x_0 — координата положения равновесия (и длина пружины в этом положении). Значение x_0 найдем графически, проведя прямую $F_{упр} = mg$ до пересечения с графиком $F_{упр}(x)$ (см. рисунок):

$$x_0 = 7{,}5\ см.$$

При смещении из положения равновесия на Δx (см. рисунок) на груз действует возвращающая сила

$$F(\Delta x) = F_{упр}(x_0 + \Delta x) - mg = F_{упр}(x_0 + \Delta x) - F_{упр}(x_0).$$

При малых Δx с хорошей точностью

$$F_{упр}(x_0 + \Delta x) - F_{упр}(x_0) = F'_{упр}(x_0)\cdot\Delta x = k(x_0)\cdot\Delta x,$$

где $k(x_0)$ — жесткость пружины, когда ее длина равна x_0. Геометрически этому приближению соответствует замена участка кривой $F_{упр}(x)$ прямой линией, то есть касательной, проведенной в точке $F_{упр}(x_0)$. Тангенс угла наклона этой касательной к оси x равен $k(x_0)$. Поэтому период малых колебаний груза равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k(x_0)}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\operatorname{tg}\alpha}}.$$

Из графика находим $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \frac{0{,}2}{0{,}01} = 20.$$

Таким образом,

$$T = 2\cdot 3{,}4\sqrt{\frac{60\cdot 10^{-3}}{20}}\ с \approx 3{,}4\ с$$

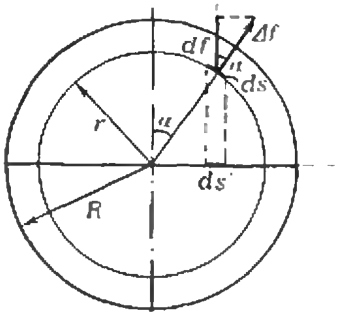
П. И. Комов

◆

Ф851. *Найти силу взаимодействия двух непроводящих половинок шара радиуса R, каждая из которых равномерно заряжена по объему с плотностью ϱ_1 и ϱ_2 соответственно. Диэлектрическую проницаемость материала шара считать равной единице.*

Сначала докажем тот факт, что сила взаимодействия заряженных половинок шара пропорциональна произведению плотностей зарядов, то есть $F \sim \varrho_1\varrho_2$.

Мысленно зафиксируем заряд первой половинки, а заряд второй изменим, например в 2 раза. На вторую половинку действует поле первой, а также собственное поле второй половинки, но суммарное действие этого второго поля равно нулю. Так как ϱ_2 изменилось в два раза, то и сила, действующая на вторую половинку со стороны поля первой, изменилась в два раза — ведь *в каждой точке $\vec{f} = \varrho\vec{E}\cdot dv$ ($\vec{E}$ — напряженность поля первой* половинки в данной точке, $\varrho\cdot dv$ — заряд элементарного объема около точки), то есть сила пропорциональна ϱ. Аналогично, зафиксировав ϱ_2 и меняя ϱ_1, найдем, что сила пропорциональна ϱ_1. Значит,



$$F \sim \varrho_1\varrho_2 = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\,\varrho_1\varrho_1 = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\,\varrho_2\varrho_2.$$

Из полученного соотношения видно, что для нахождения силы взаимодействия двух половинок с равными плотностями зарядов можно найти силу взаимодействия двух одинаковых половинок с одинаковой плотностью зарядов ϱ_1 (или ϱ_2), а затем умножить найденное значение на $k = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$ $\left(\text{или } \frac{1}{k} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)$.

Итак, найдем силу, действующую на полушарие с плотностью заряда ϱ_1 со стороны полушария с такой же плотностью заряда. Разобьем полушарие на множество слоев таких тонких, что их можно считать полусферами. В каждой точке полусферы напряженность электрического поля равна

$$E = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_1 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\varrho_1 r,$$

где r — радиус полусферы. Вертикальная проекция силы Δf, действующей на элемент поверхности полусферы, площадь которого равна ds, равна (см. рисунок)

$$df = E\varrho_1 \cdot ds \cdot dr \cdot \cos\alpha = \frac{\varrho_1^2 r}{3\varepsilon_0}\,ds' \cdot dr,$$

где dr — толщина сферического слоя, ds' — площадь проекции элемента ds на горизонтальную плоскость. Очевидно, что вертикальная проекция силы, действующей на всю полусферу, пропорциональна площади проекции полусферы на горизонтальную плоскость, то есть

$$f = \frac{\varrho_1^2 r}{3\varepsilon_0}\pi r^2\,dr.$$

Горизонтальная же проекция силы, действующей на полусферу, равна нулю.

Таким образом, сила взаимодействия двух полушарий с одинаковой плотностью заряда равна

$$F = \int_0^R \frac{\pi\varrho_1^2 r^3}{3\varepsilon_0}\,dr = \frac{\pi\varrho_1^2 R^4}{12\varepsilon_0}.$$

А чтобы найти силу взаимодействия двух полушарий с плотностями зарядов ϱ_1 и ϱ_2, надо полученное выражение умножить на $k = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$:

$$F' = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\,\frac{\pi\varrho_1^2 R^4}{12\varepsilon_0} = \frac{\pi R^4}{12\varepsilon_0}\,\varrho_1\varrho_2.$$

И. В. Гребнев

Из писем читателей

Постоянные читатели «Кванта» могли заметить изменение в традициях «Задачника Кванта», происшедшее за последний год. Решения большинства задач публикуются теперь всего лишь через три месяца после условий. (Решения остальных задач, как правило, входят в небольшие заметки, публикуемые в рамках «Задачника».) Это сокращение разрыва в публикации задач и их решений положительно оценено многими школьниками и учителями, но

Замечательное решение задачи M765 о триангуляции, совершенно отличное от авторского, предложил М. Концевич (Москва). В этой задаче требовалось доказать, что *для любого конечного множества точек B плоскости (не принадлежащих одной прямой) можно построить систему треугольников — триангуляцию* (с вершинами во всех точках *B* и только в них), *обладающую следующим свойством: описанная окружность каждого из них треугольников не содержит внутри себя точек B, причем для множества точек B общего положения* (когда никакие четыре из них не принадлежат одной окружности) *такая триангуляция единственна.*

Спроектируем нашу плоскость на сферу, касающуюся ее в точке *T* из диаметрально противоположной *T* точки *C*. Натянем на полученное из *B* множество точек сферы *B'* (и точку *C*) «резиновую пленку» — возьмем их *выпуклую оболочку*. Получится выпуклый многогранник с треугольными (в общем случае) гранями, причем плоскость каждой грани пересечет сферу по описанной вокруг грани окружности, и все вершины многогранника будут лежать по одну сторону от плоскости окружности *оно не позволяет редакции журнала учитывать при подготовке решений все письма читателей, касающиеся «Задачника». Наиболее интересные отклики читателей, дополняющие уже опубликованные решения, побудили нас вернуться к некоторым задачам. Мы надеемся сделать такой обзор одной из традиций «Задачника». В этом номере речь пойдет о нескольких задачах по математике.*

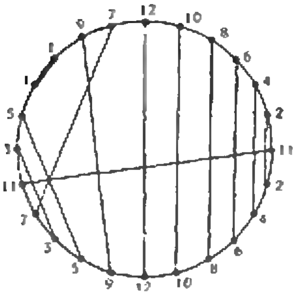
(это и есть условие выпуклости многогранника!). Спроектировав ребра многогранника обратно на плоскость, получим требуемую триангуляцию.

Здесь мы используем следующее свойство *стереографической проекции* (то есть проекции сферы из ее точки на плоскость, касающуюся ее в диаметрально противоположной точке): любая не проходящая через центр проекции окружность на сфере переходит в окружность на плоскости (см., например, «Квант», 1978, № 12, с. 51). Читатели, немного знакомые с четырехмерной геометрией, легко сообразят, как тем же способом решается пространственный вариант задачи М765.

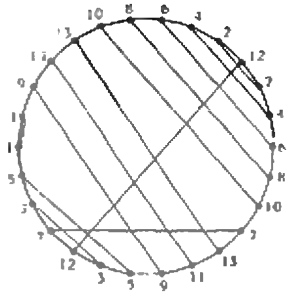
* * *

Автор задачи М748 *А. Кузьминых* и некоторые другие читатели обратили внимание на неточности в изложении решений этой задачи. Приведем краткое решение, в котором более четко выделена основная идея. Речь идет о таком утверждении (пункт б) задачи): *если несколько конусов в пространстве попарно не пересекаются, то их нельзя передвинуть так, чтобы они покрыли все пространство.* (Здесь конус — тело, полученное вращением угла, меньшего развернутого, вокруг биссектрисы.) Идея решения — рассмотреть множество *всех направлений* в пространстве. Будем каждому направлению сопоставлять луч с началом в фиксированной точке O. Еще лучше: возьмем сферу (скажем, радиуса 1) с центром в точке O — каждой ее точке M отвечает определенное направление OM в пространстве. Каждому конусу K отвечает «шапочка» на сфере — пересечение сферы с конусом K_O, полученным из K параллельным переносом вершины в точку O; при этом для любой точки M внутри K_O луч направления OM пересекает конус K по некоторому лучу, а для точки M вне K_O — не более чем по отрезку (быть может, вовсе не пересекает K); чтобы убедиться в этом, полезно провести плоскость через луч OM и вершину конуса K. Если два конуса в пространстве не пересекаются, то соответствующие им шапочки на сфере направлений также не могут иметь общих внутренних точек: для такой точки M луч OM должен был бы пересекаться с каждым из двух конусов по лучу, то есть конусы должны были бы иметь общий луч. Таким образом, шапочки для данных в условии конусов в сумме имеют площадь, меньшую площади сферы, поэтому как бы мы ни двигали конусы, шапочки не смогут покрыть сферу. Но для любой непокрытой ими точки M луч OM пересекается с каждым из (передвинутых) конусов не более чем по отрезку, так что конусы не покрывают пространство.

* * *



24 точки
n = 12
m = 3



26 точек
n = 13
m = 3

Наш читатель из Болгарии *Иван Топов* (София) получил окончательный результат, связанный с таким вопросом: *при каких натуральных $n>1$ можно $2n$ точек, делящих окружность на $2n$ равных дуг, соединить попарно хордами различной длины?* В решении задачи М789 («Квант», 1983, № 5, с. 46) из соображений четности было выведено, что при $n=4m+2$ и $n=4m+3$ это сделать нельзя, и высказывалась гипотеза, что при других n — можно; это и доказал И. Топов. Вот его построение. Для $n=4m$ занумеруем все $2n=8m$ точек по порядку (скажем, по часовой стрелке) числами от 1 до $4m$:

$$\underbrace{4m,\ 4m-2,\ 4m-4,\ \ldots,\ 4,\ 2}_{2m};\quad 4m-1;\quad \underbrace{2,\ 4,\ \ldots,\ 4m-2,\ 4m}_{2m};$$

$$\underbrace{4m-3,\ 4m-5,\ \ldots,\ 2m+3}_{m-2};$$

$$\underbrace{2m-1,\ \ldots,\ 5,\ 3}_{m-1};\quad 2m+1;\quad 4m-1;\quad \underbrace{3,\ 5,\ \ldots,\ 2m-1}_{m-1};\quad 1;\quad 1;$$

$$\underbrace{2m+3,\ \ldots,\ 4m-3}_{m-2};\quad 2m+1.$$

Тогда каждый номер $k\leqslant 4m$ будет приписан двум точкам, между которыми (по более короткой дуге окружности) стоит ровно $k-1$ точек. Аналогичным образом, для $n=4m+1$ годится нумерация: $4m-2,\ 4m-4,\ \ldots,\ 6,\ 2;\ 4m;\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 4m-2;\ 2m+1;\ 4m+1,\ 4m-1,\ \ldots$ $\ldots,\ 2m+3;\ 2m-1,\ \ldots,\ 5,\ 3;\ 2m+1;\ 3,\ 5,\ 2m-1;\ 1,\ 1;\ 2m+3,\ \ldots,\ 4m-1,$ $4m+1$. (См. рисунки для $m=3$.)

Н. Б. Васильев

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М806—М820, Ф818—Ф832, справились с задачами М809, М812, М813, М816 и Ф818, Ф819, Ф822, Ф828, Ф829. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

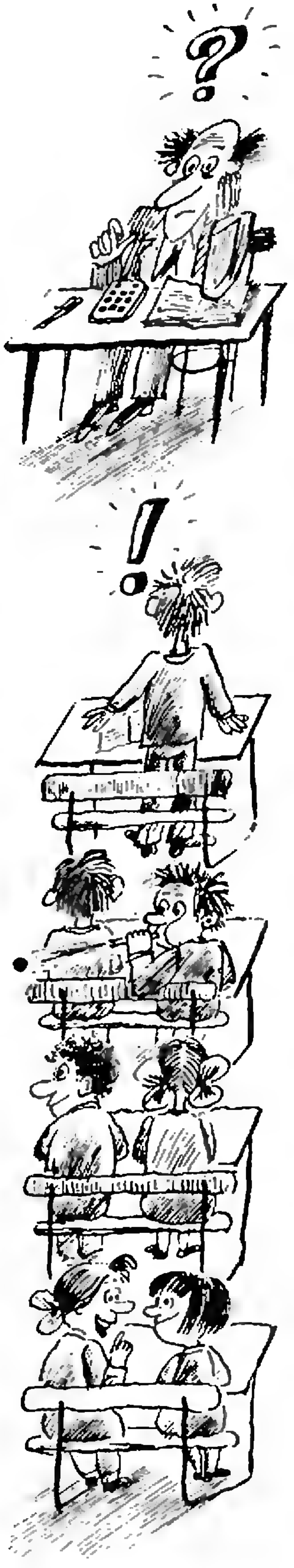
В. Акимов (Свердловск) 19, 20; *Р. Алексеев* (Ленинград) 14, 17, 19, 20; *А. Астрелин* (Новосибирск) 06, 07, 10, 14, 17—20; *Я. Бабкин* (Петрозаводск) 06, 14, 19; *Л. Байрак* (Белгород) 10, 14, 20; *Баланова* (Рига) 17; *А. Барабаш* (Киев) 14, 17, 19, 20; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 17—19; *Ю. Баркаган* (Пенза) 17, 19; *А. Барчунов* (Алма-Ата) 06; *Т. Батбаяр* (Дархан, МНР) 11; *А. Биргер* (Иваново) 06—08, 10, 14, 15, 17, 19, 20; *А. Богачев* (Хабаровск) 14; *А. Ванин* (Днепропетровск) 17; *С. Велесько* (Минск) 19; *А. Верницкий* (Свердловск) 19, 20; *Л. Вертгейм* (Новосибирск) 11, 14, 17, 19, 20; *А. Винничук* (Винница) 17; *И. Волков* (Минск) 06; *В. Волокитин* (Москва) 19; *К. Гаджиев* (с. Зод Арм. ССР) 11; *М. Гараев* (Физули) 06, 10, 11, 14, 17, 19; *Р. Гендлер* (Ташкент) 11, 17, 19; *Г. Гочев* (Дубна) 06, 14, 15; *Н. Григорьев* (Рыбинск) 19; *Я. Гроздева* (Бургас, НРБ) 17; *А. Губарев* (Фатеж) 17, 19; *О. Дарг* (Симферополь) 06; *З. Джаббаров* (Ташкент) 17; *З. Джафаров* (с. Тюркоба Аз. ССР) 06, 07, 14, 17, 19; *В. Дзюба* (Киев) 14, 17, 19; *Э. Емельянов* (Белгород) 06; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) 08; *П. Житный* (Ворошиловград) 17; *Д. Земляной* (Севастополь) 06, 17, 19; *П. Земцов* (Новосибирск) 14; *Л. Зосин* (Киев) 08, 14, 17, 19, 20; *А. Изаак* (Орск) 14; *Ю. Илясов* (Сизрань) 06; *С. Каганович* (Киев) 17; *Б. Капитонский* (Киев) 17, 19; *Д. Каунынбаев* (Алма-Ата) 17; *Ю. Коваль* (Киев) 17; *О. Козловский* (Москва) 14, 17, 19; *А. Коломийский (Винница)* 06, 07; *К. Колотук* (Киев) 11, 17; *А. Коротков* (Ленинград) 17, 19; *С. Коршунов* (Целиноград) 17; *Н. Курило* (с. Ольховка Харьковской обл.) 06; *А. Лазарев* (Москва) 19; *М. Лев* (Свердловск) 06, 07, 10, 14, 15, 17—19; *С. Литовченко* (Воронеж) 19; *А. Лукьянов* (Севастополь) 11, 14, 17, 20; *Макаров* (Севастополь) 11, 14, 19; *К. Макарчук* (Киев) 07, 18, 19; *А. Малеванец* (Киев) 06, 10, 14; *Е. Малеванец* (Киев) 17, 19, 20; *Д. Мамедов* (Гермутская с. ш. Аз. ССР) 06; *В. Маркин* (Тамбов) 17; *О. Матвеев* (Свердловск) 06, 07, 10; *Н. Мельник* (Гайсин) 06; *В. Михайлюк* (Киев) 06; *Е. Мишин* (Севастополь) 17; *П. Молочник* (Киев) 19; *А. Молотков* (Ленинград) 14, 19; *С. Набиев* (Алма-Ата) 17, 19; *Ф. Назаров* (Ленинград) 06, 07, 10, 14; *С. Найден* (Днепропетровск) 17, 19; *Л. Нестерова* (Свердловск) 19, 20; *В. Николаев* (Хабаровск) 14, 19, 20; *Т. Новикова* (Свердловск) 19, 20; *Т. Ойхберг* (Ленинград) 10, 14; *Р. Оруджев* (Баку) 06; *М. Осипова* (Владивосток) 17; *А. Петрунин* (Ленинград) 19, 20; *В. Пикулин* (Москва) 06; *Д. Подкопаев* (Винница) 06; *В. Поляковский* (Киев) 17; *В. Поярков* (Николаев) 06, 10; *А. Расулов* (Баку) 06; *С. Ромаш* (Ровно) 06; *Д. Рубленко* (Хмельницкий) 11; *Р. Рудченко* (Ворошиловград) 17; *Е. Рычков* (Красноярск) 10; *В. Сабиров* (Бердянск) 17, 19; *И. Савыков* (Первоуральск) 06; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) 06, 19, 20; *И. Святодух* (Красноармейск Донецкой обл.) 17; *А. Сергиенко* (Ленинград) 14, 17; *М. Скоробогатов* (Киев) 17; *И. Слуцкий* (Алма-Ата) 17, 19; *Г. Сливак* (Киев) 17; *С. Струков* (Воронеж) 06—08, 11, 14, 18—20; *Р. Сунник* (Киев) 17, 19; *В. Тартаковский* (Киев) 14; *М. Тейтель* (Киев) 06, 14, 17, 19, 20; *Д. Терешин* (Саратов) 10, 14, 17; *С. Токарь* (Киев) 17, 20; *Ю. Факторович* (Москва) 19; *Н. Федин* (Омск) 07; *Д. Федотов* (Новокузнецк) 14; *Е. Филенко* (Родинское) 06, 19, 20; *М. Флямер* (Протвино) 06; *Б. Фридман* (Москва) 14; *М. Холмянский* (Москва) 17, 19; *В. Хрычиков* (Севастополь) 06, 07, 11, 14, 17, 19; *С. Чернышев* (Александров) 06, 07; *С. Чичинский* (Днепропетровск) 17; *А. Шнирман* (Донецк) 06, 07, 10; *А. Шор* (Киев) 06, 07; *Л. Эрдёш* (Будапешт, ВНР) 06—08, 10, 11, 14, 15, 17—20; *П. Этингоф* (Киев) 06, 07, 14, 17—20; *А. Эфендиев* (Баку) 06; *Е. Юдицкий* (Киев) 19; *Г. Юшин* (Воронеж) 11, 14, 15; *А. Ярин* (Севастополь) 06, 11, 14, 17, 20.

Физика

А. Абанов (Красноярск) 20, 21, 23—26; *В. Апальков* (Харьков) 21, 25, 30; *Н. Асеев* (Харьков) 31; *Э. Багдасарян* (Баку) 25, 31, 32; *В. Байбиков* (Новосибирск) 23—27, 31, 32; *Н. Барановская* (Винница) 23—25; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 20, 21, 23—27, 30; *Е. Беспалов* (Курган) 20, 24—27, 30, 32; *М. Бияк* (Краснодар) 20, 24, 25; *В. Бражников* (Запорожье) 23, 26, 27, 30—32; *Н. Бурдейная* (Винница) 23—25; *В. Вангелов* (Бургас, НРБ) 23, 24; *И. Волков* (Минск) 24; *О. Гаврилов* (Киев) 23, 25; *М. Гаевский* (Воткинск) 20, 24, 25; *Е. Гисич* (Винница) 23—25; *В. Глаголев* (Тула) 21, 25; *П. Глазырин* (Воткинск) 24; *О. Голинский* (Тамбов) 23—25, 31; *Ю. Гордиенко* (Винница) 25; *С. Гребенщиков* (п. Черноголовка Московской обл.) 25, 30; *М. Гринберг* (Красноярск) 21, 23—27, 31, 32; *Г. Данелия* (Тбилиси) 25; *Л. Демидова* (Винница) 23—25; *Г. Долгопятов* (Донецк) 24, 25, 30—32; *Д. Ермошин* (Москва) 24, 25, 31; *О. Ефремов* (Воронеж) 24, 25, 30, 31; *Л. Захаров* (Самтредиа) 20; *А. Зеленюк* (Здолбунов) 24, 25; *М. Зиманов* (Алма-Ата) 25, 27; *С. Зинченко* (Краматорск) 20, 23—25, 31; *Э. Иванов* (Орджоникидзе) 25; *М. Имас* (Донецк) 20, 25, 26; *Т. Калатози* (Кутаиси) 23, 32; *И. Калиновский* (Киев) 23—25, 30; *В. Карасев* (Алма-Ата) 31; *Е. Качковская* (Винница) 23—25; *М. Козлов* (Москва) 23—25; *А. Коломейский* (Винница) 24, 25, 27; *Е. Королева* (Москва) 25; *С. Кравчук* (Киев) 24, 25; *А. Краснов* (Новосибирск) 24, 25, 31; *В. Краснов* (Чебоксары) 31; *Ю. Кремень* (Молодечно) 25, 27; *Д. Кузнецов* (Куйбышев) 20, 23, 25, 30—32; *И. Куличик* (Брест) 25, 26; *Д. Купцов* (Москва) 23—25, 30, 32; *Н. Кухаркин* (Москва) 20, 21, 25, 30; *А. Лапатинов* (Винница) 23—25; *С. Лауринавичюс* (Мажейкяй) 21, 23—25, 30—32; *И. Левин* (Донецк) 24—26; *Д. Лунц* (Саратов) 24, 25, 30, 31; *П. Лушников* (Москва) 25; *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.) 23—27, 30; *К. Макарчук* (Киев) 25, 31; *Л. Маркович* (Минск) 24—27; *О. Маров* (Канев) 25; *А. Мартюшенко* (Днепропетровск) 23—25; *П. Милютин* (Хабаровск) 25; *А. Михеев* (Кимры) 31; *С. Молчанов* (Саратов) 23—25, 30, 31; *К. Мосейчев* (Зеленоград) 25; *А. Найфонов* (Апатиты) 25, 32; *В. Никитин* (Одесса) 20, 25; *И. Новиков* (Обнинск) 25, 31; *Е. Пархименко* (Чернигов)

(Окончание см. на с. 54)

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ



Оценка за полугодие

Я подводил итоги полугодия в десятом классе. Прямо на уроке. Вычислял на микрокалькуляторе средний балл и округлял его до ближайшего целого числа. А если таких оказывалось сразу два, то в сторону последней в полугодии оценки, создавая таким путем видимость, что результат зависит не от произвола учителя, а от математических законов. После этого и зачитывал итоговую оценку.

Класс, привыкший к этой процедуре, не проявлял особого интереса к моим расчетам, и только Г., сидевший прямо передо мной на первой парте, время от времени поднимал голову и вытягивал шею, стараясь высмотреть, что там делается в журнале. Невольно я заглянул вперед в его графу — хотя там стояли только четверки и пятерки, четверок было больше, так что итог был однозначен. Встретившись с Г. глазами, я резко качнул головой вниз, показывая ему, чтобы он не отвлекался. И тут я заметил на его черновике расчеты, никак не соответствовавшие задаче, которую он должен был решать. Я собрался сделать ему замечание, но он опередил меня.

— У меня четыре выходит, да?

— Очевидно, — сказал я, гримасой показывая, что недоволен его нетерпеливостью.

— Это если считать *среднее арифметическое*, — вдруг сказал он. — А почему бы Вам не взять *среднее квадратическое?*

Класс оторвал головы от парт и насторожился.

— А геометрическое не хочешь? — спросил я, оправившись от неожиданности: ничего подобного за многие годы моей работы в школе не было — до Г. эта идея никому не приходила в голову.

— Не хочу, — сказал он. — Вы же ставите оценку по алгебре, а не по геометрии!

Класс засмеялся.

Возразить на этот довод было нечего, и я взялся за машинку, надеясь, что повышения на балл все же не случится. Но табло безжалостно высветило величину, большую, чем четыре с половиной.

— Твоя взяла, — сказал я, вздохнув, и тут же понял, что будет дальше.

— А нам?!!! — незамедлительно за моей мыслью возопил класс, но я уже сообразил, как выйти из положения... нужно было рискнуть.

— Хорошо, — сказал я, пристально глядя на Г., — только пеняйте на себя, если новое число будет ***меньше*** старого.

Г. открыл было рот... но не произнес ни слова. Класс колебался.

— Ну, кто смелый? — спросил я с интонацией, показывающей, что им лучше не рисковать.

Несколько человек принялись лихорадочно считать.

— А Вы скажите сперва, что такое среднее квадратическое... — жалобно сказали девочки с последней парты.

— Ну что ж, — сказал я не без облегчения, — выходит, что Г. честно заработал свои пять баллов: он-то не только знал, что это такое, но и знал, что оно ***всегда не меньше*** среднего арифметического, не говоря уже о том, что успел все рассчитать заранее.

Класс взвыл от огорчения.

— А вот пусть и докажет, что всегда не меньше, — мстительно сказал Д., редко упускавший случай подсадить удачливого товарища.

— Пусть докажет, раз он так!!! — торжествующе завопил класс.

— Ты слышал, чего требует народ? — спросил я.

Г. тяжело вздохнул, но делать было нечего. Он пошел к доске, взял мел, почесал им в затылке, написал неравенство... и после некоторой возни его доказал:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} > \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

На дом я ему задал выяснить, при каком наименьшем количестве оценок за полугодие может случиться такая история.

В. Э. Матизен

Магнитное поле и магнитные силы

Кандидат физико-математических наук
В. В. МОЖАЕВ

Всякое упорядоченное движение заряженных частиц, то есть электрический ток, создает в окружающем пространстве магнитное поле. Для количественного описания магнитного поля служит специальная физическая величина — вектор магнитной индукции $\vec{B}$. О том, как определяется модуль и направление этого вектора, подробно рассказано в школьном учебнике «Физика 9».

Существование магнитного поля можно обнаружить по его действию на ток (на движущиеся заряды). Сила $\vec{F}$, действующая на малый отрезок проводника Δl, по которому течет ток I (на элемент тока), со стороны магнитного поля с индукцией $\vec{B}$, составляющей угол α с элементом тока, определяется законом Ампера. Согласно этому закону, модуль магнитной силы (силы Ампера) равен

$$F=BI\Delta l\sin\alpha.$$

На заряд q, движущийся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, действует сила Лоренца $\vec{F}_L$. Ее модуль равен

$$F_L=qvB\sin\beta,$$

где β — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Направление и силы Ампера, и силы Лоренца определяется известным правилом левой руки.

В том случае, когда проводник с током имеет произвольную форму, мы должны разбить его на отдельные элементы, найти, согласно закону Ампера, силы, действующие на каждый элемент, и затем сложить их (векторно).

Теперь обсудим несколько конкретных задач, в которых рассматривается действие магнитного поля на проводники с током и на отдельные движущиеся заряды. Большинство этих задач предлагалось в разные годы на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Однородный провод, согнутый таким образом, что он образует три стороны квадрата, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, являющейся четвертой стороной этого квадрата (рис. 1, а). Рамка находится в постоянном однородном вертикальном магнитном поле. Если по проводу течет ток I_1, рамка отклоняется от вертикали на угол $\alpha_1=30°$. При какой силе тока I_2 угол отклонения будет $\alpha_2=60°$?*

На каждый участок проводника с током в магнитном поле действует магнитная сила, которую можно определить по закону Ампера. В начальный момент магнитная сила действует лишь на нижнюю сторону квадрата. Она создает вращающий момент, под действием которого рамка начнет поворачиваться относительно оси вращения. Это, в свою очередь, приведет к появлению момента сил тяжести, возвращающего рамку в первоначальное положение. Магнитные силы, действующие на боковые стороны квадрата, лежат в горизонтальной плоскости и поэтому вращающего момента не создают.

При некотором угле α_1 рамка будет находиться в положении равновесия (рис. 1, б). В этот момент алгебраическая сумма моментов всех сил, действующих на рамку, должна быть равна нулю:

$$F_м a\cos\alpha_1-mga\sin\alpha_1-2mg\frac{a}{2}\sin\alpha_1=0,$$

или

$$BI_1a^2\cos\alpha_1-2mga\sin\alpha_1=0.$$

Отсюда получим

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{BI_1a}{2mg}.$$

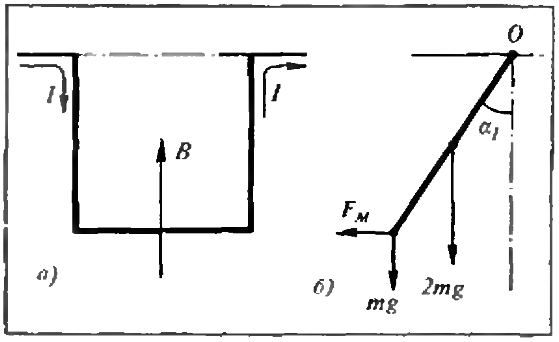


Рис. 1.

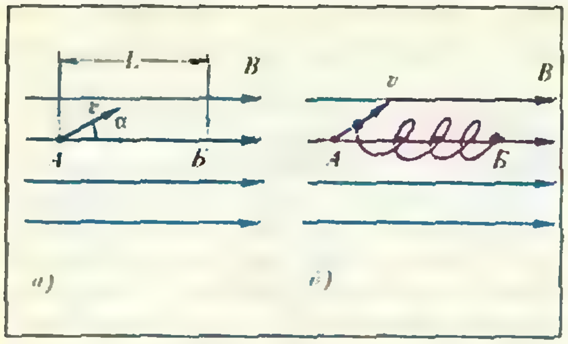


Рис. 2.

где a — длина стороны квадрата. Аналогично для второго случая найдем

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{B l_2 a}{2mg}.$$

Тогда

$$l_2 = l_1 \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = 3 l_1.$$

Задача 2. *Электрон влетает в однородное магнитное поле. В точке A он имеет скорость $\vec{v}$, которая составляет с направлением магнитной индукции поля угол α (рис. 2, а). При каких значениях модуля B магнитной индукции электрон окажется в точке Б? Заряд электрона e, масса m, расстояние $|AБ|$ равно L.*

На движущийся электрон со стороны магнитного поля действует сила Лоренца. Поскольку эта сила всегда направлена перпендикулярно вектору магнитной индукции, ее проекция на направление поля равна нулю. Следовательно, вдоль этого направления электрон будет двигаться с постоянной скоростью $v \cos \alpha$. В плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$, электрон будет двигаться по окружности с линейной скоростью, равной $v \sin \alpha$. Запишем уравнение движения электрона по окружности:

$$\frac{m v^2 \sin^2 \alpha}{R} = eBv \sin \alpha,$$

откуда найдем радиус окружности R и период обращения T:

$$R = \frac{mv \sin \alpha}{eB},$$

$$T = \frac{2\pi R}{v \sin \alpha} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

В целом траектория движения электрона будет иметь вид спирали, изображенной на рисунке 2, б (электрон поступательно движется вдоль направления поля и движется по окружности в плоскости, перпендикулярной полю).

Пусть при некотором значении B_n модуля магнитной индукции электрон окажется в точке Б. Время его движения от A к Б будет равно

$$\tau = \frac{L}{v \cos \alpha}.$$

За это время он должен будет совершить целое число n полных оборотов, то есть

$$\tau = nT,$$

или

$$\frac{L}{v \cos \alpha} = n \frac{2\pi m}{eB_n},$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ В результате получаем дискретный набор значений B_n, при которых электрон будет попадать в точку Б:

$$B_n = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{eL} n.$$

Задача 3. *Жесткая проволочная квадратная рамка с длиной каждой стороны a, сопротивлением R и массой m свободно падает в магнитном поле. Направление вектора магнитной индукции поля перпендикулярно плоскости рамки, а модуль меняется с высотой по закону $B(z) = B_0 - kz$, где B_0 и k — некоторые константы. Найдите установившееся значение скорости рамки.*

Пусть рамка в некоторый произвольный момент времени находится на высоте z (координата верхней стороны рамки) и имеет скорость v_z (рис. 3). На каждый свободный электрон рамки в этот момент будет действовать сила Лоренца: $\vec{f}_1$ на электроны верхней стороны квадрата ($f_1 = ev_z B(z)$) и $\vec{f}_2$ — на электроны нижней стороны ($f_2 = ev_z B(z+a)$). Силы, действующие на электроны боковых сторон, мы рассматривать не будем, так как они на движение рамки не влияют.

Под влиянием сил $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ электроны придут в упорядоченное движение вдоль рамки, то есть по рамке будет течь некоторый ток I. Поскольку $f_1 > f_2$, ток будет направлен по часовой стрелке. В свою

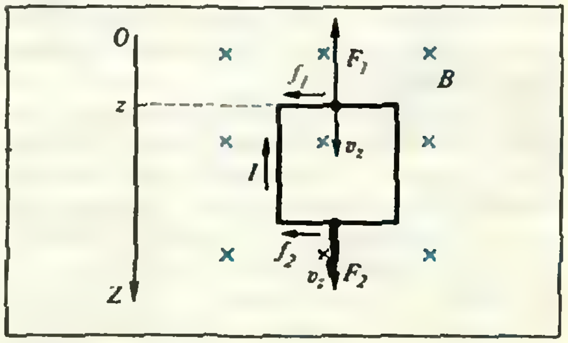


Рис. 3.

очередь, на рамку, по которой течет ток I, будут действовать силы Ампера (той же самой природы, что и силы Лоренца): $\vec{F}_1$ на верхнюю сторону рамки ($F_1 = B(z)Ia$) и $\vec{F}_2$ — на нижнюю сторону ($F_2 = B(z+a)Ia$).

Найдем силу тока I, который по закону Ома связан с электродвижущей силой индукции, возникающей в рамке, и сопротивлением рамки. ЭДС индукции в данном случае представляет собой работу силы Лоренца по перемещению единичного положительного заряда по замкнутому контуру рамки:

$$\mathscr{E}_i = \frac{A}{e} = \frac{f_1 a - f_2 a}{e} =$$

$$= \frac{ev_z B(z)a - ev_z B(z+a)a}{e} = v_z k a^2.$$

Тогда

$$I = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = \frac{v_z k a^2}{R}.$$

На рамку в целом при ее движении действуют три силы — сила тяжести $m\vec{g}$ и магнитные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. В установившемся режиме уравнение движения рамки будет иметь вид

$$m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0,$$

или

$$mg - B(z)Ia + B(z+a)Ia =$$

$$= mg - \frac{k^2a^4v_z}{R} = 0.$$

Отсюда найдем установившееся значение скорости рамки:

$$v_{z\,\text{уст}} = \frac{mgR}{k^2a^4}.$$

Задача 4*). *При прохождении электрического тока I через соленоид с длиной L, радиусом R и большим числом витков N внутри соленоида создается однородное магнитное поле с индукцией $B = \mu_0 NI/L$ (μ_0 — магнитная постоянная). Линии магнитной индукции параллельны оси соленоида. Определите величину тока, при которой произойдет разрыв обмотки соленоида, если предельная растягивающая нагрузка на проволоку равна $F_{\text{пр}}$.*

Прежде всего заметим, что в условии задачи не случайно говорится о большом числе витков соленоида, то есть подразумевается, что длина намотки много больше диаметра поперечного сечения соленоида. Только в этом случае можно считать, что магнитное поле внутри соленоида однородно, а индукцией поля вне соленоида можно пренебречь. Это означает, что внутри соленоида вблизи поверхности кольцевого витка с током вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости витка и равен $\mu_0 NI/L$, а с внешней стороны индукция равна нулю.

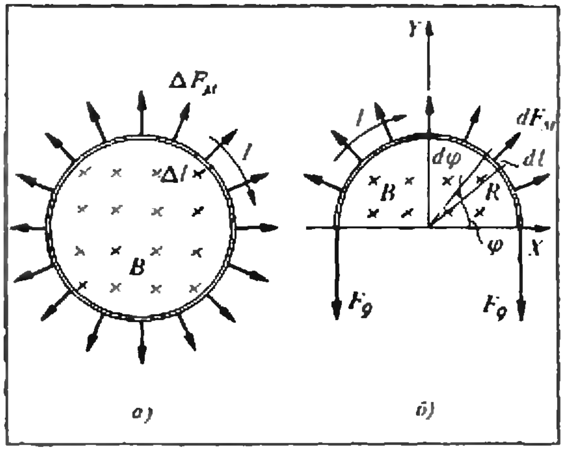


Рис. 4.

Теперь обратимся непосредственно к вопросу задачи. Очевидно, что разрыв обмотки соленоида может произойти в результате действия магнитного поля. Возникает вопрос: какое же значение магнитной индукции нужно взять, чтобы правильно вычислить силы, действующие на элементы витка с током? Большинство абитуриентов, решавших эту задачу, брали ошибочно всю величину индукции. На самом деле, поле как у внутренней, так и у внешней сторон витка соленоида представляет собой суперпозицию полей, создаваемых самим витком и всеми остальными витками. Пусть модуль индукции, создаваемой витком, равен B_1, а всех остальных витков — B_{N-1}. Используя принцип суперпозиции, можно записать:

$B_1 - B_{N-1} = 0$ — с наружной стороны,

$B_1 + B_{N-1} = \mu_0 \frac{NI}{L}$ — внутри соленоида.

Из этих равенств получаем, что $B_{N-1} = \mu_0 NI/(2L)$. Следовательно, индукция поля, в котором находится каждый виток, равна половине индукции поля в соленоиде. Именно это значение мы должны брать для расчета сил, действующих на элементы витка.

По закону Ампера на каждый небольшой элемент Δl витка с током I будет действовать магнитная сила, направленная перпендикулярно вектору магнитной индукции и элементу тока (рис. 4, а). Модуль ее равен

---

*) Это задача повышенной трудности.

$$\Delta F_{м} = \frac{1}{2}\, BI\Delta l.$$

Эти силы, направленные по радиусам витка, и будут вызывать растяжение проволоки витка. Для определения сил, возникающих в ответ на растяжение, удобно рассмотреть равновесие любой половинки кольца.

На рисунке 4, *б* показаны силы, действующие на полувиток. Это — магнитные силы и силы $\vec F_{д}$, возникающие при деформации. При равновесии сумма проекций всех сил на вертикальную ось должна быть равна нулю. Найдем проекцию суммарной магнитной силы. Некоторые из вас, наверное, встречались с аналогичными задачами и знают, что эта проекция равна силе, действующей на единицу длины витка, умноженной на величину проекции полуокружности, то есть на диаметр витка. Покажем это с помощью строгого расчета.

Выберем в качестве бесконечно малого элемента длины кольца участок dl, заключенный между двумя радиусами, проведенными под углами φ и $\varphi+d\varphi$ к оси X (см. рис. 4, *б*). Здесь $d\varphi$ — бесконечно малое приращение угла φ. Длина этого элемента будет равна $dl=Rd\varphi$, сила, действующая на него, равна

$$dF_{м} = \frac{1}{2}\, BIRd\varphi,$$

а проекция этой силы на ось Y —

$$dF_{мy} = \frac{1}{2}\, BIR \sin\varphi \cdot d\varphi.$$

Тогда проекция суммарной магнитной силы, действующей на весь полувиток, будет равна

$$F_{мy} = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\, BIR \sin\varphi \cdot d\varphi = -\frac{1}{2}\, BIR\,(\cos\pi - \cos 0) = BIR.$$

Разрыв обмотки соленоида, очевидно, произойдет при условии, что проекция суммарной магнитной силы будет больше или равна удвоенному значению предельной растягивающей нагрузки на проволоку:

$$BIR \geqslant 2F_{пр}, \text{ или } \frac{\mu_0 I^2 RN}{L} \geqslant 2F_{пр}.$$

Отсюда найдем искомое значение тока I:

$$I \geqslant \left(\frac{2F_{пр}L}{\mu_0 RN}\right)^{1/2}.$$

Упражнения

1. Металлическая штанга длины l и массы m подвешена на двух одинаковых упругих пружинах (жесткость каждой пружины k) в однородном магнитном поле с индукцией $\vec B$ (рис. 5). Вектор $\vec B$ перпендикулярен плоскости чертежа. На какую максимальную величину Δx_{max} сместится штанга от положения равновесия, если через нее пропустить короткий импульс тока силы I в течение промежутка времени τ? Смещением штанги за время τ пренебречь.

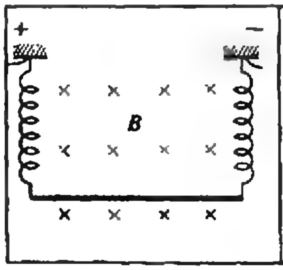


Рис. 5.

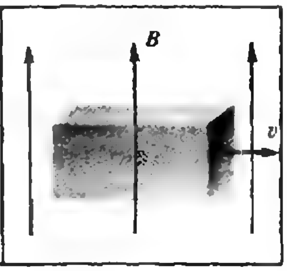


Рис. 6.

2. Пройдя ускоряющую разность потенциалов $U=3{,}52\cdot 10^3$ В, электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B=0{,}01$ Тл перпендикулярно линиям индукции и движется по окружности радиуса $R=0{,}02$ м. Вычислите отношение e/m заряда электрона к его массе.

3. Длинная и тонкая незаряженная пластинка из немагнитного металла движется с постоянной скоростью $v=11{,}3$ м/с в однородном магнитном поле с индукцией $B=1$ Тл. Векторы $\vec B$ и $\vec v$ взаимно перпендикулярны и параллельны плоскости пластинки (рис. 6). Определите поверхностную плотность σ электрических зарядов, возникающих на боковых плоскостях пластинки вследствие ее движения.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 49)

23—25, 30; *Г. Перельман* (Киев) 25; *А. Петренко* (Винница) 23, 25; *О. Петренко* (Кировское) 25; *И. Пильников* (Тамбов) 24—26; *А. Поляков* (Златоуст) 25, 31; *А. Попов* (Фролово) 30; *С. Рекун* (Винница) 23, 24; *Ю. Рожь* (Борисполь) 25; *М. Рудык* (Винница) 23—25; *Д. Русинов* (Ленинград) 23, 25, 32; *М. Савченко* (Белгород) 24, 25; *И. Савыков* (Первоуральск) 21, 24—26, 30; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) 24, 25, 31; *А. Самойлович* (Донецк) 21, 23—26, 30, 31; *С. Сахорук* (Брест) 25, 26; *И. Сегаль* (Сумы) 23—25; *М. Скорик* (Киев) 20, 24—26, 31; *М. Скоробогатов* (Киев) 30, 31; *И. Соколовский* (Покров) 25; *А. Соловьев* (Куйбышев) 20, 23—25, 31, 32; *Б. Сулейманов* (Баку) 25; *А. Сурков* (Ленинград) 25; *И. Тетко* (Кодыма) 25; *В. Томчук* (Винница) 23, 25; *Д. Третьяков* (Винница) 23—25; *Н. Федин* (Омск) 21, 23—25, 31; *Л. Федичкин* (Москва) 23—25; *Л. Фельдман* (Саратов) 24, 25, 31, 32; *М. Флямер* (п. Протвино Московской обл.) 25; *С. Цонев* (София, НРБ) 23, 25; *А. Черепнин* (Винница) 21; *И. Чечеткин* (Киев) 25, 31; *А. Чудновский* (Киев) 25, 31; *И. Шендерович* (Северодвинск) 25, 31, 32; *А. Шнирман* (Донецк) 23—27, 31; *И. Штрайх* (Винница) 23—25; *И. Эльберти* (Киев) 24; *О. Юдин* (Ленинград) 25; *Г. Ящин* (п. Черноголовка Московской обл.) 25, 31.

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1983 году.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}\cdot\log_3(x-2)=0.$$

2. Найдите критические точки функции

$$f(x)=(2x-1)\cdot\sqrt[3]{x-a}.$$

3. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит равнобедренный треугольник ABC, у которого $|AB|=|AC|$, $\widehat{A}=2\alpha$ и высота AD имеет длину h. Боковая грань BB_1C_1C — прямоугольник, плоскость которого составляет с плоскостью основания призмы угол величины φ. Через точку A_1 проведена плоскость, перпендикулярная ребру AA_1 и пересекающая призму. Найдите объемы многогранников, на которые секущая плоскость разбивает призму, если $|BB_1|=b$.

4. Набор одинаковых альбомов и одинаковых книг стоит 40 руб., причем цена альбома 2 руб., а книги — 3 руб. Если бы цена альбома была k руб., книги — 3 руб., то весь набор стоил бы 39 руб. Сколько альбомов и сколько книг в наборе, если известно, что книг в нем не меньше, чем альбомов?

Вариант 2

1. Разность между произведением двадцать первого и тринадцатого членов арифметической прогрессии и произведением четырнадцатого и двадцать второго членов этой же прогрессии равна p. Определите разность этой прогрессии, если сумма ее шестнадцатого и девятнадцатого членов равна q.

2. Плоскость, проходящая через точку A бокового ребра PQ правильной треугольной пирамиды $PQRT$ и параллельная ребру TR, пересекает пирамиду так, что сечением является треугольник, все внутренние углы которого имеют одинаковую величину. Найдите площадь этого треугольника, если известно, что апофема боковой грани пирамиды равна k, боковая грань PTR составляет с плоскостью основания угол величины φ и $|AQ|=|0{,}75|AP|$.

3. Найдите интервалы монотонного возрастания функции

$$f(x)=(c-3)\cdot5^x-(3c+4)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x+7.$$

4. Решите уравнение

$$\cos^3\frac{x}{3}\cdot(2\cos x-\sin 2x)=$$

$$=\left(3\sin x-\frac{5}{6}\sin^2 x\right)\cdot\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{3}\right).$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. На грань призмы, образующей угол $\alpha=30^\circ$ с горизонтом, положили груз (рис. 1). Коэффициент трения между грузом и призмой $\mu=0{,}35$. С каким ускорением нужно двигать призму вдоль оси X, чтобы груз не скользил относительно призмы ни вверх, ни вниз?

2. Два груза одинаковой массы укреплены на концах легкого стержня, согнутого под прямым углом (рис. 2). Вершина угла является осью вращения, $l_1=40$ см, $l_2=30$ см. Стержень выводят из положения равновесия так, что груз, укрепленный на l_2, оказывается под осью вращения, а затем отпускают. Определите угловую скорость системы в момент, когда l_1 занимает вертикальное положение.

3. Пластилиновый шар бросают со скоростью $v_0=10$ м/с под углом $\alpha=60^\circ$ к горизонту по направлению к вертикальной стенке, расположенной на расстоянии $l=6{,}3$ м от точки бросания. Шар прилипает к стенке. Считая, что вся кинетическая энергия шара пошла на его нагревание, найдите приращение температуры шара. Удельная теплоемкость пластилина $c=2{,}5\times10^3$ Дж/(кг · К).

4. В трубке, запаянной с одного конца, находится столбик ртути длиной $l=0{,}3$ см. Трубку вращают в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через ее закрытый конец. При какой угловой скорости вращения ртуть достигнет открытого конца, если в неподвижной горизонтальной трубке она находится на расстоянии $d=64$ см от закрытого конца? Длина трубки $b=80$ см. Внешнее давление $p_0=100$ кПа. Температура постоянна. Плотность ртути $\varrho=13{,}6\cdot10^3$ кг/м^3. Капиллярными эффектами пренебречь.

5. Небольшой шарик массы $m=10$ мг, несущий электрический заряд $q=-0{,}4$ мкКл, вначале удерживают у поверхности одной из двух заряженных вертикальных пластин (а именно — у отрицательно заряженной), отстоящих друг от друга на расстоянии $d=6$ см (рис. 3). Затем шарик отпускают без начальной скорости. Найдите работу, которую совершит над шариком сила тяжести за время его движения к положительно заряженной пластине, если разность потенциалов между пластинами $U=10$ В.

6. Электромотор с сопротивлением обмоток $R=2$ Ом подключен к генератору с ЭДС

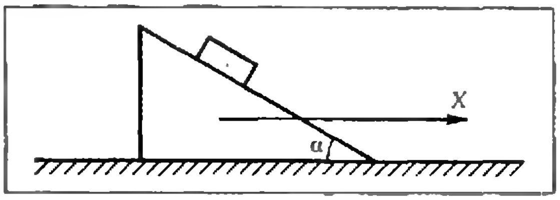


Рис. 1.

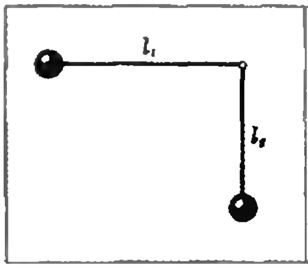


Рис. 2.

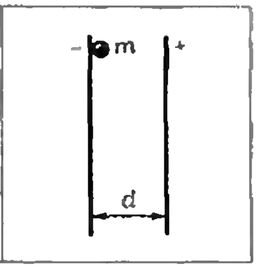


Рис. 3.

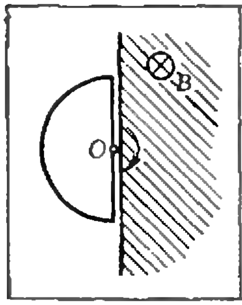


Рис. 4.

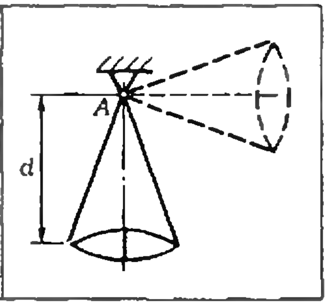


Рис. 5.

$\mathscr{E} = 240$ В и внутренним сопротивлением $r = 4$ Ом. При работе мотора через его обмотки проходит ток $I = 10$ А. Найдите КПД электромотора. Сопротивление подводящих проводов пренебрежимо мало.

7. Из электронной пушки, ускоряющее напряжение в которой $U = 600$ В, вылетает электрон и попадает в магнитное поле с индукцией $B = 1{,}2$ Тл. Линии магнитной индукции составляют угол $\alpha = 30°$ с направлением скорости электрона. Найдите ускорение электрона в магнитном поле. Удельный заряд электрона $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{-11}$ Кл/кг.

8. Контур, ограничивающий полукруг радиусом $r = 0{,}1$ м, находится на границе однородного магнитного поля с индукцией $B = 0{,}1$ Тл (рис. 4). Контур начали вращать с постоянной угловой скоростью $\omega = 100$ с$^{-1}$ вокруг оси O, перпендикулярной плоскости рисунка. Сопротивление контура $R = 0{,}314$ Ом. Найдите количество теплоты, выделяющееся в контуре за один оборот.

9. Маленькая линза с фокусным расстоянием $F = 20$ см подвешена в точке A на нитях так, что расстояние от точки A до оптического центра линзы равно $d = 25$ см (рис. 5). Подвес отклоняют до горизонтального положения, затем отпускают. С каким ускорением будет двигаться изображение точки A в линзе в момент, когда линза проходит нижнее положение?

10. Протон, летящий горизонтально со скоростью $v_0 = 4{,}6 \cdot 10^4$ м/с, сталкивается с неподвижным свободным атомом гелия. После удара протон отскакивает назад со скоростью $1/2 v_0$, а атом переходит в возбужденное состояние. Вычислите длину волны света, который излучает атом гелия, возвращаясь в первоначальное состояние.

Публикацию подготовили
Л. Ф. Калиниченко, А. И. Руденко, В. Е. Чижов

Московский институт стали и сплавов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите сумму членов бесконечной геометрической прогрессии 3, —1, 1/3, —1/9, ...

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1.$$

3. Решите уравнение

$$\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_2 x))) = \frac{1}{2}.$$

4. Преобразуйте и вычислите

$$\cos\frac{\pi}{8}\left(\lg\frac{5\pi}{16} + \lg\frac{3\pi}{16}\right).$$

5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x > 4^{\frac{x}{x-1}} \\ -5 < x < 10. \end{cases}$$

В ответе запишите количество целых чисел, удовлетворяющих этой системе.

6. Решите уравнение

$$\cos \pi x \cdot \sin 7\pi x = \cos 3\pi x \cdot \sin 5\pi x.$$

В ответе запишите количество корней уравнения, принадлежащих отрезку $[0{,}1; 0{,}9]$.

7. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса 2. Найдите площадь трапеции, если длина боковой стороны равна 10.

8. При перемножении двух натуральных чисел, одно из которых на 10 больше другого, ученик ошибся, уменьшив произведение на 5 единиц. При делении полученного произведения на меньший из множителей он получил в частном 37, а в остатке 23. Найдите больший множитель.

9. На окружности радиуса 2 дана точка A. Хорда BC проведена параллельно касательной к окружности в точке A так, что площадь треугольника ABC наибольшая. Найдите расстояние от точки A до хорды BC.

10. Металлический шар радиуса $5\sqrt[3]{2}$ перелит в конус, площадь боковой поверхности которого в 3 раза больше площади основания. Найдите высоту конуса.

Вариант 2

1. Вычислите $\sqrt[12]{81^6 \cdot (0{,}064)^4}$.

2. Диаметр CD параллелен хорде AB той же окружности. Найдите длину этой хорды, если $|AC| = 3$, $|BC| = 4$.

3. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если его катеты являются корнями уравнения $x^2 - 7x + 12 = 0$.

4. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите *отношение* площади боковой поверхности конуса к площади его основания.

5. Вычислите $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{3}{5}$.

6. Решите неравенство

$$\log_2 \log_4 x + \log_4 \log_2 x \leqslant 2.$$

В ответе запишите длину промежутка, являющегося множеством решений неравенства.

7. Решите уравнение $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$.

В ответе запишите (в градусах) наименьший положительный корень этого уравнения.

8. Найдите $f'(2)$, если

$$f(x) = \frac{27 \cdot \ln(2x^2-7)}{4x^3-5} + 7x - 2.$$

9. Решите неравенство

$$3^{\frac{6x+3}{x}} > \sqrt[4]{27^{\frac{2x+1}{x}}}$$

В ответе запишите произведение целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

10. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 3\sqrt{3} \cdot \sin x \cdot \sin 2x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Каким был бы период обращения искусственного спутника Земли по круговой орбите, если бы он был удален от поверхности Земли на

расстояние, равное земному радиусу ($R_З=6370$ км)?

2. С какой наименьшей высоты должен скатываться велосипедист, не вращая педалей, чтобы проехать по дорожке, имеющей форму «мертвой петли» радиусом $R=4$ м, не отрываясь от дорожки в верхней точке петли?

3. Мяч, упавший с высоты $h=1$ м, два раза ударяется о наклонную плоскость. Расстояние между точками удара мяча $l=4$ м. Считая удар абсолютно упругим, определите угол наклона плоскости к горизонту.

4. Сосуд кубической формы с ребром $a=10$ м до краев наполнен водой. Определите силу давления воды на боковую поверхность сосуда при нормальном атмосферном давлении.

5. Давление воздуха в сосуде было равно $p_0=1{,}01\cdot10^5$ Па. После трех ходов откачивающего поршневого насоса давление воздуха упало до значения $p=2$ кПа. Определите отношение объема сосуда к объему цилиндра поршневого насоса. Температуру воздуха в процессе откачки считать постоянной.

6. Два литра воды нагрелись в электрическом чайнике от $t_1=0$ °C до $t_2=100$ °C в течение $\tau=29$ мин. Мощность чайника $P=600$ Вт. Определите коэффициент полезного действия нагревателя в чайнике, считая, что удельная теплоемкость воды $c=4190$ Дж/(кг · К).

7. Когда ключ K замкнут, сопротивление схемы, изображенной на рисунке 1, равно $R_1=80$ Ом. Определите сопротивление схемы, когда ключ разомкнут.

8. Определите время, в течение которого при электролизе раствора медного купороса на электроде выделится $m=0{,}1$ г меди. Ширина катодной пластины $a=5$ см, глубина ее погружения в электролит $h=10$ см. Наибольшая допустимая плотность тока $j=100$ А/м^2.

9. Проволочное кольцо радиусом $r=0{,}1$ м лежит на столе. Какой заряд протечет по кольцу, если его перевернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца $R=1$ Ом. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B=0{,}5\cdot10^{-4}$ Тл.

10. Изображение небольшого предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси рассеивающей линзы, в два раза меньше поперечного размера самого предмета. Если предмет передвинуть на расстояние $l=10$ см ближе к линзе, то изображение станет в 1,5 раза меньше предмета. Определите модуль фокусного расстояния линзы.

Вариант 2

1. Человек тянет за собой с постоянной скоростью санки массой $m=20$ кг с помощью веревки, составляющей угол $\alpha=30°$ с горизонтом. Коэффициент трения между санками и горизонтальной поверхностью $\mu=0{,}05$. Определите силу натяжения веревки.

2. Тело массой $m=1$ кг, брошенное с вышки в горизонтальном направлении со скоростью $v_0=20$ м/с, упало на Землю через $t=3$ с. Определите кинетическую энергию тела в момент удара о Землю.

3. К концам горизонтального стержня длиной $l=0{,}8$ м и массой $m=2$ кг подвешены два груза: слева массой $m_1=1$ кг, справа — $m_2=3$ кг. На каком расстоянии со стороны большей массы следует подпереть стержень, чтобы он остался в равновесии?

4. Звук удара камня о дно ущелья слышен наверху через $t=10$ с после начала падения. Определите глубину ущелья, если скорость звука $v=340$ м/с.

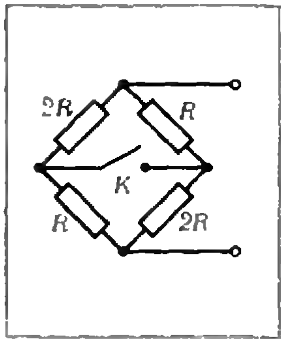


Рис. 1.

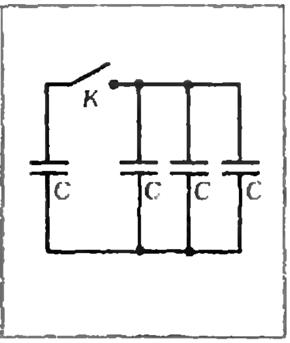


Рис. 2.

5. Какая масса воздуха выйдет из комнаты объемом $V=50$ м^3 при повышении температуры от $T_1=250$ К до $T_2=300$ К при нормальном атмосферном давлении? Молярная масса воздуха $M=29\cdot10^{-3}$ кг/моль.

6. Относительная влажность воздуха в комнате объемом $V=40$ м^3 равна $\varphi=70$ %. Определите массу водяных паров в комнате, если температура $t=20$ °C, а давление насыщенного пара при этой температуре $p_н=2330$ Па.

7. В схеме, приведенной на рисунке 2, первый конденсатор заряжен до энергии $W_0=1$ Дж. Найдите энергию всей системы конденсаторов после замыкания ключа K.

8. Расстояние между двумя точечными зарядами $q_1=64\cdot10^{-9}$ Кл и $q_2=-48\cdot10^{-9}$ Кл равно $l=10$ см. Определите модуль напряженности поля в точке, удаленной на $l_1=8$ см от первого заряда и на $l_2=6$ см — от второго.

9. Источник тока с ЭДС $\mathcal{E}=50$ В и внутренним сопротивлением $r=1{,}2$ Ом должен питать дуговую лампу с сопротивлением $R=6$ Ом, требующую для нормального горения напряжение $U=30$ В. Определите величину дополнительного сопротивления.

10. Изображение слайда, имеющего поперечный размер $h=32$ мм и расположенного перед линзой на расстоянии $d=10{,}5$ см, имеет на экране поперечный размер $h'=64$ см. Определите фокусное расстояние линзы.

Публикацию подготовили
В. И. Башкиров, О. Т. Малючков,
Б. Г. Разумейко, А. Г. Токаев

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростив выражение для $f(x)$, найдите $f'(x)$, если

$$f(x)=\left[\frac{1-0{,}5\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{2-2\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}-\frac{2-3\sqrt{x}+0{,}75x}{1-1{,}5\sqrt{x}+0{,}5x}-\frac{10^{\lg\sqrt{x}+\lg(1+\sqrt{x})}}{1-x}\right]^{-1}.$$

2. Решите уравнение

$$\left(2^{3+6\sqrt{0{,}1x+1}}\right)^{1/(1+\sqrt{0{,}1x+1})}=(0{,}5)^{-0{,}2x/(1+\sqrt{0{,}1x+1})}.$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=4x-\frac{15x^2}{4}-\frac{x^3}{3}$$

на отрезке $[0{,}5;\ 1]$ и постройте ее график на указанном отрезке.

4. Найдите все корни уравнения

$$\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2\left(\frac{25\pi}{6}\right),$$

удовлетворяющие неравенству

$$\lg\left(x-\sqrt{2x+24}\right)>0.$$

5. Около круга описана трапеция, боковые стороны которой образуют с ее большим основанием углы α и β. Определите площадь круга, если площадь трапеции равна Q.

Вариант 2

1. Упростив выражение для $f(x)$, найдите $f'(x)$, если

$$f(x)=\left\{2x^{-1}\left[\left(\frac{0{,}25x^2-1}{x}\right)^2+1\right]^{1/2}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{(0{,}5)^{-2\log_2(1+0{,}25x^2)}}+\left(\frac{\sqrt[8]{0{,}25x^2}}{\sqrt[4]{-8x+1}}\right)^{-1}\right\}^4.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(x+1)^4-16^{-y}+15=0,\\(x+1)^3\cdot 2^{-y}-(x+1)\cdot 8^{-y}+6=0.\end{cases}$$

3. Найдите промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=x^3-0{,}15x^2-0{,}06x-3$ и постройте ее график.

4. Найдите все корни уравнения

$$3\operatorname{tg}x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}^2\frac{4\pi}{3}=0,$$

удовлетворяющие неравенству

$$1+\log_2 x<2\log_{\sqrt{4}}(x+1)^{2/3}.$$

5. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция. Диагональ трапеции равна l и образует с основанием угол α. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна h.

Задачи устного экзамена

1. Чему равен $\lg(ab)$, если $a<0$ и $b<0$?

2. Докажите, что для всех α и β таких, что $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \beta\neq\pi l\ (k,l\in Z)$,

$$|\sin\alpha+\cos\beta|<|1+\sin\alpha\cdot\cos\beta|.$$

3. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt{-1+\frac{1}{x}}.$$

4. Исследуйте на четность-нечетность функцию $f(x)=\log_{0,5}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

5. Постройте график функции

а) $y=2^{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x}$;

б) $y=10^{\log_{0,1}(\sin^2\sqrt{x}-\cos^2\sqrt{x})}$.

6. Решите уравнение

$$\sin 18x+\cos 18x=\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{7\pi}{20}$$

7. Решите неравенство

$$\cos x\geqslant\sqrt{y^2+1}.$$

8. Дана прямая (MN) и две точки A и B, лежащие по одну сторону от этой прямой. Постройте точку P, лежащую на прямой (MN), так, чтобы сумма $|AP|+|BP|$ была наименьшей.

9. Даны угол ABC и точка P внутри этого угла. На стороне $[BA)$ найдите точку, равноудаленную от точки P и стороны $[BC)$.

10. Можно ли в окружность вписать трапецию, боковые стороны которой имеют разные длины?

Физика

На одних факультетах экзамен по физике проводится в письменной форме, на других — в устной.

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сила тока. Условия возникновения электрического тока. Закон Ома для участка цепи. Напряжение и сопротивление, единицы измерения.

2. Уединенный металлический шар радиуса R имеет заряд Q. Постройте график зависимости напряженности E электростатического поля в точках на оси r в зависимости от величины r (рис. 1).

3. Луч света, распространяясь в воздухе, падает на плоскую стеклянную пластинку с показателем преломления $n=1{,}5$. Определите величину угла α падения луча, при котором отраженный от пластинки луч будет перпендикулярен преломленному лучу.

4. С каким максимальным ускорением a можно перемещать брусок массы m по горизонтальной поверхности, если веревка, за которую тянут брусок, выдерживает максимальное натяжение T? Коэффициент трения бруска о поверхность равен μ. Веревку тянут в направлении, составляющем угол α с горизонтальной поверхностью.

5. Нагретое до температуры $t_1=100$ °C тело опустили в сосуд с водой, и при этом температура воды повысилась от $t_2=20$ °C до $t_3=30$ °C. Какой станет температура воды t_4, если в нее одновременно с первым опустить еще одно такое же тело, нагретое до $t_5=50$ °C?

Вариант 2

1. Электрическое поле. Силовая характеристика поля. Напряженность поля точечного заряда. Поле сферы. Силовые линии электрического поля. Однородное электрическое поле.

2. При своем движении положительный заряд попадает в однородное магнитное поле, занимающее ограниченную область пространства (рис. 2). Нарисуйте возможные виды траектории движения заряда.

3. Тонкая линза с фокусным расстоянием $F=0{,}1$ м создает на экране изображение предмета, увеличенное в $\Gamma=5$ раз. Определите расстоянии d от предмета до линзы и f от линзы до экрана.

4. В цилиндре под невесомым поршнем находится газ, занимающий объем V и имеющий температуру T. Определите работу A, которую произведет газ, если его нагреть на Δt градусов. Атмосферное давление постоянно и равно p_0. Трением поршня о цилиндр пренебречь.

5. Два тела с массами $m_1=1$ кг и $m_2=2$ кг движутся по взаимно перпендикулярным направлениям со скоростями, равными $v_1=10$ м/с и $v_2=15$ м/с соответственно. После соударения первое тело остановилось. Какое количество теплоты Q выделилось при ударе?

Задачи устного экзамена

1. По наклонной плоскости снизу вверх пускают тело с начальной скоростью $v_0=2$ м/с. Поднявшись на некоторую высоту, тело соскальзывает

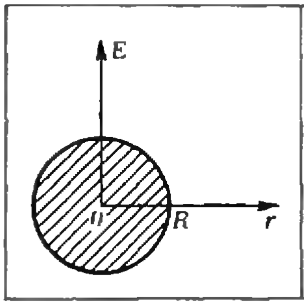


Рис. 1.

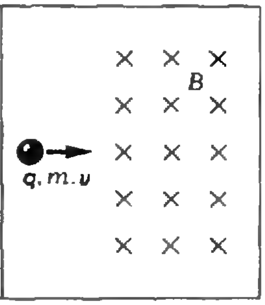


Рис. 2.

по тому же пути вниз. Какова будет скорость v тела, когда оно вернется в исходную точку? Коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu=0{,}4$. Угол наклона плоскости к горизонтали $\alpha=30°$.

2. Плоский конденсатор с площадью пластин $S=10^{-3}$ м^2 и расстоянием между пластинами $d=1$ мм заряжен зарядом $Q=10^{-8}$ Кл. Конденсатор заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=10$. Определите напряженность E и энергию W электрического поля конденсатора. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$ Ф/м.

3. Рентгеновская трубка, работающая под напряжением $U=50$ кВ и потребляющая ток $I=10^{-3}$ А, излучает в секунду $N=2\cdot10^{13}$ фотонов со средней длиной волны $\lambda=10^{-10}$ м. Определите КПД трубки η. Постоянная Планка $h=6.63\times10^{-34}$ Дж · с, скорость света $c=3\cdot10^8$ м/с.

Публикацию подготовили
В. Ф. Сафонов, В. Л. Чудов

Ответы, указания, решения

Ошибки в геометрических доказательствах

Если ваше возражение состоит в том, что биссектриса и срединный перпендикуляр пересекаются вне треугольника ABC, но точки P и Q лежат на его сторонах (рис. 1), то вы не правы. Как и раньше, $|AN|=|NC|$ и $|NP|=|NQ|$. Поэтому треугольники ANP и CNQ конгруэнтны и $\angle NAP=\angle NCQ$. Кроме того, $\triangle ANC$ равнобедренный, поэтому $\angle NAM=\angle NCM$. Вычитая из равных углов равные, мы получаем, что $\angle BAC=\angle BCA$, то есть $\triangle ABC$ — равнобедренный.

На самом же деле в общем случае срединный перпендикуляр и биссектриса пересекаются в точке N вне треугольника, а перпендикуляры из точки N на стороны BA и BC обязательно располагаются так, что один из них попадает на саму сторону, а другой — на продолжение другой стороны (рис. 2). В этом случае $\triangle APN$ — по-прежнему равен $\triangle CNQ$ и $\angle NAP=\angle NCQ$. Кроме того, $\angle NAM=\angle NCM$. Однако в этом случае $\angle BAC=\angle NAP-\angle NAM$, а $\angle BCA=180°-(\angle NCQ+\angle NCM)$. Отсюда, конечно, не следует равенство углов BAC и BCA.

Однако такое объяснение не должно вас удовлетворить. Ведь нужно доказать, что расположение частей в треугольнике такое, как на рисунке 2 (или «обратное»: $Q\in[BC]$, $P\notin[AB]$. Приведем это доказательство.

Опишем вокруг треугольника ABC окружность и предположим, что $|AB|>|BC|$. По свойству вписанных углов биссектриса угла B пересекает дугу AC в ее середине. Через ту же середину проходит и срединный перпендикуляр к отрезку AC. Следовательно, точка N — середина дуги AC. Поскольку $|AB|>|BC|$, $\overset{\smile}{AB}>\overset{\smile}{BC}$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства равные дуги $\overset{\smile}{AN}$ и $\overset{\smile}{NC}$, мы получим неравенство $\overset{\smile}{BAN}>\overset{\smile}{BCN}$. Следовательно, дуга $\overset{\smile}{BAN}$ больше полуокружности, а дуга $\overset{\smile}{BCN}$ — меньше. Следовательно, $\angle NCB$ тупой, а $\angle NAB$ — острый. Поэтому точка Q лежит на продолжении стороны BC, а точка P — на стороне AB.

1. Мы безо всяких оснований предположим, что сумма углов треугольника является постоянной величиной и не зависит от самого треугольника. В действительности, в геометрии Лобачевского, в которой не выполнена аксиома параллельности, сумма углов любого треугольника меньше, чем 180°, и разность между 180° и суммой углов треугольника пропорциональна его площади. Тем самым, чем ближе сумма углов треугольника к 180°, тем меньше его площадь.

2. Проведите наше «доказательство» на чертеже, данном в рисунке 3.

3. Мы правильно доказали, что отрезки A_iA_{i+1} и B_iB_{i+1} не пересекаются. Однако при $i\neq j$ отрезки A_iA_{i+1} и B_jB_{j+1} могут пересечься.

4. Если большая окружность катится без проскальзывания, то меньшая окружность обязательно будет проскальзывать. Поэтому отрезок не будет равен длине меньшей окружности.

5. Последовательность волнообразных линий действительно неограниченно приближается к отрезку. Однако из этого не следует, что последовательность их длин стремится к длине отрезка AB.

6. Мы молчаливо предполагали, что маленький сферический треугольник развернут на плоскость, и применили формулу для вычисления площади плоского треугольника. В действительности, никакой сферический треугольник не может быть развернут на плоскость. В нашем случае это следует из того, что у сферического треугольника — два прямых угла, а у плоского треугольника этого быть не может.

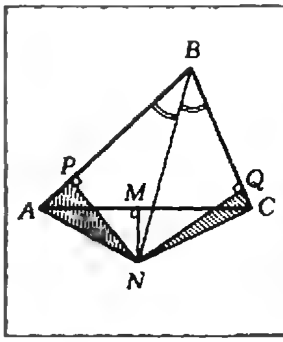


Рис. 1.

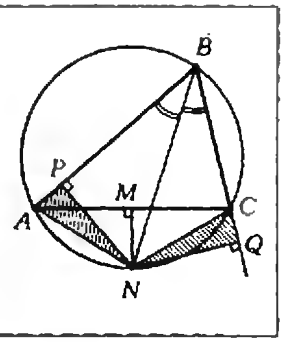


Рис. 2.

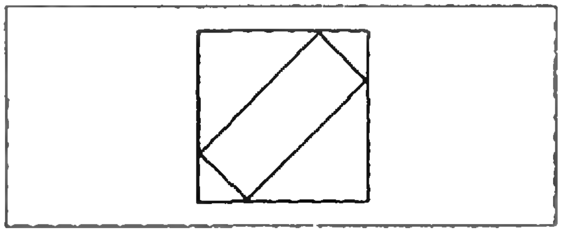


Рис. 3.

Задачи-матрешки

Соединим между собой точки M, N, P, S (рис. 4). В силу задачи 4 углы α, β, γ соответственно равны α', β', γ', поэтому, по задаче 1, S — орто-

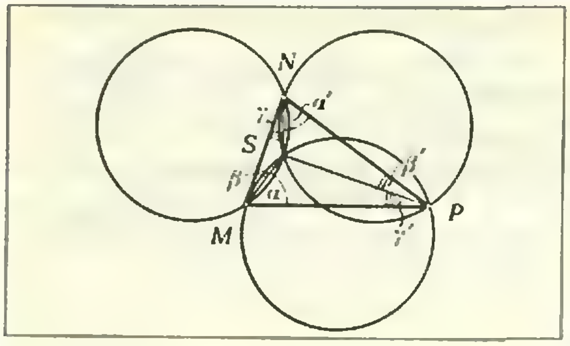


Рис. 4.

центр треугольника NMP. Но тогда по задаче 3 окружность, описанная около NMP, имеет тот же радиус, что любая из трех данных окружностей, то есть R*).

Магнитное поле и магнитные силы

1. $\Delta x_{max}=IBl\tau/\sqrt{2km}$.
2. $e/m=2U/(RB^2)\approx1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.
3. $\sigma=\varepsilon_0 vB\approx10^{-10}$ Кл/м^2 (здесь $\varepsilon_0=8{,}85\times\times10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная).

Московский инженерно-физический институт

Математика

Вариант 1

1. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k\ (k\in\mathbb{N})$.

2. $x=\frac{4}{5}a+\frac{1}{10}$ при $a<\frac{1}{2}$; если $a>\frac{1}{2}$, критических точек нет.

3. Пусть V_1 — объем многогранника, одним из ребер которого является $[B_1C_1]$, V_2 — объем второго многогранника. Тогда при $h\cdot\cos\varphi<b$

$$V_1=\frac{1}{3}h^3\cdot\sin2\varphi\cdot\operatorname{tg}\alpha,$$

$$V_2=\frac{1}{3}h^2\cdot\sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\alpha(3b-2h\cdot\cos\varphi);$$

при $h\cdot\cos\varphi>b$

$$V_1=\frac{1}{3}b\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\operatorname{tg}\alpha(3h^2\cdot\cos^2\varphi-b^2),$$

$$V_2=b^3\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Указание. Пусть D и D_1 — середины, соответственно, отрезков BC и B_1C_1, D_2 — точка, в которой сечение пересекается с ломаной ADD_1. Тогда: если $0<h\cdot\cos\varphi<b$, то $D_2\in[DD_1]$ (рис. 5, *а*); если $h\cdot\cos\varphi>b$, то $D_2\in[AD]$ (рис. 5, *б*). Если $h\cdot\cos\varphi=b$, то $D_2=D$ и оба ответа совпадают. При $\varphi=\pi/2$ плоскость сечения совпадает с $(A_1B_1C_1)$.

4. 2 альбома и 12 книг или 5 альбомов и 10 книг. Указание. Если x — число альбомов, y — число книг, то $x\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{N}$. Кроме того, число k имеет после десятичной запятой не больше двух знаков.

Вариант 2

1. $-p/q$ при $q\neq0$, любое число при $p-q=0$, нет решений при $p\neq0$, $q=0$.

2. При любом $\varphi\in]0;\pi/2[$ имеется 2 треугольника, удовлетворяющих требованиям задачи. Один из них — это треугольник, плоскость которого параллельна (QRT) ($\triangle AR_1T_1$ на рисунке 6); его площадь равна $\frac{48\sqrt3}{49}k^2\cdot\cos^2\varphi$. При $\varphi\in]0;\arccos1/5]$ плоскость второго нужного треугольника пересекается с (QRT) внутри $\triangle QRT$ ($\triangle AR_2T_2$ на рисунке 6); его площадь равна

$$\frac{3\sqrt3}{784}k^2\cdot\frac{(1+3\cos^2\varphi)^2}{\cos^2\varphi}.$$

При $\varphi=\arccos1/5$ второй нужный треугольник — это $\triangle ART$; его площадь равна $\frac{3\sqrt3}{25}k^2$. При $\varphi=\in]\arccos1/5;\pi/2[$ плоскость второго нужного треугольника пересекается с (PRT) внутри $\triangle PRT$ и не параллельна (QRT) ($\triangle AR_3T_3$ на рисунке 6); его площадь равна

$$\frac{48\sqrt3}{49}k^2\cdot\frac{(1+3\cos^2\varphi)^2\cdot\cos^2\varphi}{(1+9\cos^2\varphi)^2}.$$

3. При $c\leqslant-4/3$ таких интервалов нет при $-4/3<c<3$ f возрастает на $\left]-\infty;\ \frac{1}{2}\log_5\frac{3c+4}{3-c}\right[$, при $c\geqslant3$ f возрастает на $\mathbf{R}$.

4. $x_1=\frac{3}{2}\pi+3\pi k$, $x_2=-\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}\pm$ $\pm\arccos\left(1-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)+2\pi l\ (k,l\in\mathbf{Z})$.

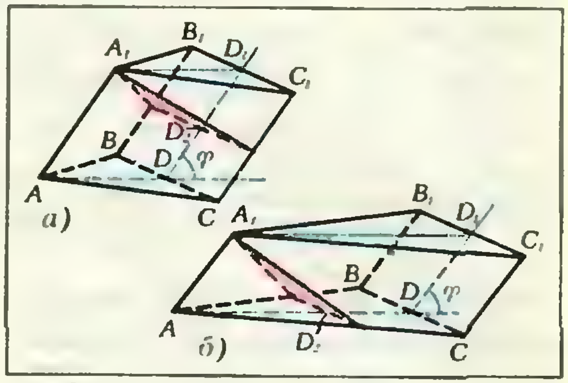


Рис. 5.

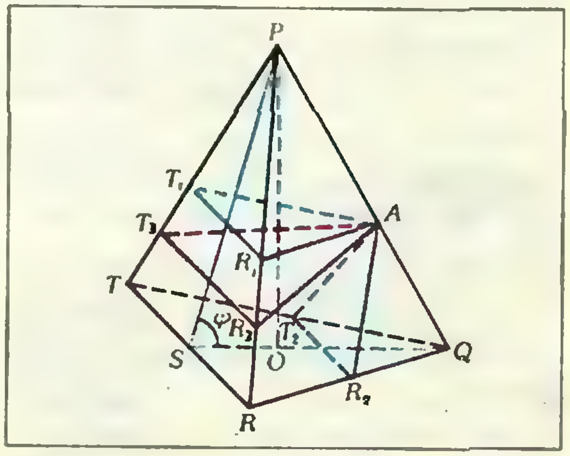


Рис. 6.

---

*) Обратите внимание на следующую логическую тонкость. Для решения нашей задачи не требуется уметь доказывать существование ортоцентра в общем случае (то есть доказывать, что все три высоты произвольного треугольника пересекаются в одной точке). Мы лишь устанавливаем, что треугольник MNP имеет ортоцентр S, но этот треугольник строился определенным образом: заранее не очевидно, что произвольный треугольник может быть так построен.

Указание. Воспользуйтесь равенством $2\cos x - \sin 2x - 3\sin x + \frac{5}{6}\sin^2 x =$

$$= \frac{1}{6}\left[(2\cos x - 3\sin x)^2 + 6(2\cos x - 3\sin x) - 4\right].$$

Физика

1. Рассмотрим два предельных случая: 1) когда груз уже не скользит вниз по призме; 2) когда груз еще не движется вверх относительно призмы. Силы, действующие на груз в обоих случаях, показаны на рисунке 7, *а* и *б*. Это — сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции призмы $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$ ($F_{тр} = \mu N$). Обозначим ускорения призмы, а значит и груза, в первом и во втором случаях через $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ соответственно. Спроектируем силы и ускорения на горизонтальную и вертикальную оси координат и запишем для груза соответствующие уравнения движения. Для случая 1) получим:

$$N\sin\alpha - \mu N\cos\alpha = ma_1,$$
$$N\cos\alpha + \mu N\sin\alpha - mg = 0,$$

откуда

$$a_1 = g\,\frac{\operatorname{tg}\alpha - \mu}{1 + \mu\operatorname{tg}\alpha} = 4\ \text{м/с}^2.$$

Аналогично для случая 2)

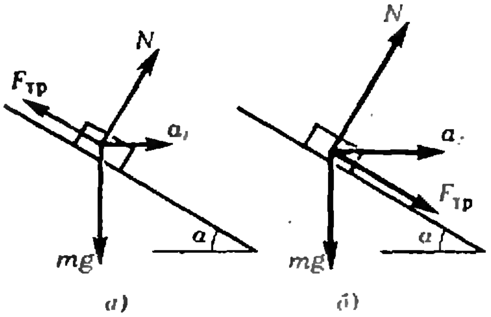
$$N\sin\alpha + \mu N\cos\alpha = ma_2,$$
$$N\cos\alpha - \mu N\sin\alpha - mg = 0,$$

и

$$a_2 = g\,\frac{\operatorname{tg}\alpha + \mu}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha} = 11{,}5\ \text{м/с}^2.$$

Таким образом, призму надо двигать с ускорением $\vec{a}$ таким, чтобы

$$4\ \text{м/с}^2 = a_1 < a < a_2 = 11{,}5\ \text{м/с}^2.$$



а) *б)*

Рис. 7.

2. Из закона сохранения энергии

$$\frac{m\omega^2(l_1^2 + l_2^2)}{2} = mg(l_1 - l_2)$$

находим угловую скорость ω системы:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(l_1 - l_2)}{l_1^2 + l_2^2}} \approx 2{,}8\ \text{с}^{-1}.$$

3. Скорость шара v в момент удара в стенку можно найти из кинематических соотношений

$$v^2 = (v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2,$$
$$l = v_0\cos\alpha \cdot t.$$

Тогда из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = cm\Delta T$$

найдем приращение ΔT температуры шара:

$$\Delta T = \frac{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gl/(v_0\cos\alpha))^2}{2c} \approx$$
$$\approx 8 \cdot 10^{-3}\ \text{К}.$$

4. Запишем для столбика ртути второй закон Ньютона:

$$m\omega^2 b = p_0S - pS.$$

Здесь $m = \rho lS$ — масса ртути, ω — угловая скорость вращения трубки, b — радиус окружности, по которой движется капелька ртути (l по сравнению с b можно пренебречь), S — площадь сечения трубки и p — давление воздуха в трубке, которое находим из закона Бойля — Мариотта $p_0dS = pbS$. Отсюда получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{p_0}{\rho lb}\left(1 - \frac{d}{b}\right)} \approx 25\ \text{с}^{-1}.$$

5. Работа силы тяжести равна

$$A = mgh,$$

где $h = gt^2/2$ — высота падения шарика. Время t найдем, рассмотрев движение шарика в электрическом поле:

$$d = \frac{at^2}{2},\quad a = \frac{qU}{md}.$$

Тогда окончательно

$$A = \frac{(mgd)^2}{qU} \approx 8{,}6\ \text{мкДж}.$$

6. КПД электромотора равен отношению его механической мощности к мощности, потребляемой мотором от генератора. Согласно закону сохранения энергии, полная мощность $\mathcal{E}I$, расходуемая генератором, складывается из механической мощности $P_м$ электромотора и тепловой мощности $I^2(R + r)$, выделяющейся в моторе и генераторе:

$$\mathcal{E}I = P_м + I^2(R + r).$$

Отсюда

$$P_м = \mathcal{E}I - I^2(R + r).$$

Мощность, потребляемая электромотором, равна

$$P_п = UI = (\mathcal{E} - Ir)I.$$

Поэтому КПД мотора

$$\eta = \frac{P_м}{P_п} = 1 - \frac{IR}{\mathcal{E} - Ir} = 0{,}9 = 90\ \%.$$

7. В электрическом поле электрон приобретает кинетическую энергию

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

В магнитном поле сила Лоренца сообщает электрону ускорение

$$a = \frac{eBv\sin\alpha}{m} = B\sin\alpha \cdot \sqrt{2U(e/m)^3} \approx$$
$$\approx 1{,}5 \cdot 10^{18}\ \text{м/с}^2.$$

8. Возникающая в контуре ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \frac{Br^2\omega}{2}$$

вызывает в контуре ток

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{Br^2\omega}{2R}.$$

За один оборот контура в нем выделяется количество теплоты

$$Q = I^2RT = I^2R\,\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi B^2r^4\omega}{2R} \approx 5 \cdot 10^{-4}\ \text{Дж}.$$

9. По формуле линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

находим расстояние f от изображения точки A до линзы:

$$f = \frac{dF}{d - F}.$$

В момент прохождения нижнего положения линза движется со скоростью $v=\sqrt{2gd}$ по окружности радиуса d, а изображение — со скоростью $v'=v(d+f)/d$ по окружности радиуса $d+f$. Поэтому ускорение изображения равно

$$a=\frac{v'^2}{d+f}=2g\frac{d}{d-F}=100 \text{ м/с}^2.$$

10. Запишем для системы протон — атом гелия законы сохранения импульса и энергии:

$$mv_0=-mv_0/2+Mv,$$
$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_0^2}{8}+\frac{Mv^2}{2}+W,$$

где $m=1$ а.е.м. $=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг — масса протона, $M=4$ а.е.м. — масса атома гелия, W — энергия возбуждения атома. Отсюда найдем

$$W=\frac{3}{8}mv_0^2\left(1-\frac{3m}{M}\right).$$

Возвращаясь в первоначальное состояние, атом излучает квант света, энергия которого равна энергии возбуждения:

$$h\nu=W,$$

откуда длина волны излучаемого света

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{hc}{W}=\frac{8hc}{3mv_0^2(1-3m/M)}\approx0{,}6\cdot10^{-6} \text{ м}.$$

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. $2\frac{1}{4}$. **2.** $\{-1\}$. **3.** $\{2\}$. **4.** 2. **5.** 9. **6.** 5. **7.** 40. **8.** 38. **9.** 3. **10.** 20.

Вариант 2

1. 3,6. **2.** 1,4. **3.** 1. **4.** 2. **5.** 0,64. **6.** 15. **7.** 72. **8.** 15. **9.** 24. **10.** 4.

Физика

Вариант 1

1. $T=4\pi\sqrt{2R_з/g}\approx14200$ с.

2. $h_{\min}=5R/2=10$ м.

3. $\alpha=\arcsin\frac{l}{8h}=30^\circ$.

4. $F_д=4a^2(p_0+\varrho ga/2)\approx6\cdot10^7$ Н (здесь $p_0=1{,}01\cdot10^5$ Па — нормальное атмосферное давление, $\varrho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).

5. $\frac{V_c}{V_ц}=\frac{1}{\sqrt[3]{p_0/p}-1}\approx0{,}37$.

6. $\eta=\frac{cm(t_2-t_1)}{P\tau}\approx80\,\%$ (здесь $m=2$ кг — масса двух литров воды).

7. $R_2=9R_1/8=90$ Ом.

8. $t=\frac{mFn}{Mjah}\approx600$ с ≈10 мин (здесь $F=96500$ Кл/моль — постоянная Фарадея, $M=64\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса меди, $n=2$ — валентность меди).

9. $q=2\pi r^2B/R=3{,}14\cdot10^{-6}$ Кл.

10. $F=2l=20$ см.

Вариант 2

1. $F=\frac{\mu mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\approx11$ Н.

2. $E_k=m(v_0^2+g^2t^2)/2\approx650$ Дж.

3. $x=\frac{l(m_1+m/2)}{m_1+m_2+m}\approx0{,}27$ м.

4. $h\approx390$ м (глубина ущелья определяется из уравнения $t=\sqrt{2h/g}+h/v$).

5. $m=\frac{p_0VM}{R}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)\approx11{,}6$ кг (здесь $p_0=1{,}01\cdot10^5$ Па — нормальное атмосферное давление).

6. $m=\frac{MV\varphi p_н/100\,\%}{RT}\approx0{,}48$ кг (здесь $M=18\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воды).

7. $W=W_0/4=0{,}25$ Дж.

8. $E=k\sqrt{\left(\frac{q_1}{l_1^2}\right)^2+\left(\frac{q_2}{l_2^2}\right)^2}=15\cdot10^4$ В/м (здесь $k=9\cdot10^9$ Н·м^2/Кл^2).

9. $R_а=\mathscr{E}R/U-(R+r)=2{,}8$ Ом.

10. $F=\frac{d}{1+h/h'}\approx10{,}4$ см.

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

2. $\left\{12\frac{1}{2}\right\}$. Указание. Сделайте подстановку $\sqrt{0{,}1x+1}=t$.

3. $\max\limits_{[0,5;\,1]}f(x)=f(0{,}5)=1\frac{1}{48}$, $\min\limits_{[0,5;\,1]}f(x)=f(1)=-\frac{1}{12}$.

4. $x_1=\pi k$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi l$ $(k,\ l=3,\ 4,\ 5,\ \ldots)$. Указание. Воспользуйтесь формулой $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$.

5. $\frac{\pi Q\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2(\sin\alpha+\sin\beta)}$.

Вариант 2

1. При $x<0$, $f'(x)=2x^{-2}$. Указание. В данном случае $\sqrt{x^2}=-x$.

2. $\{(0;\ -1)\}$. Указание. Сделав подстановку $x+1=u$, $2^{-y}=v$, разделите первое уравнение на второе; затем сделайте подстановку $u/v=t$.

3. f возрастает на $]-\infty;\ -0{,}1]$ и на $[0{,}2;\ +\infty[$, убывает на $[-0{,}1;\ 0{,}2]$; $x=-0{,}1$ — точка максимума, $f(-0{,}1)=-2{,}9965$, $x=0{,}2$ — точка минимума, $f(0{,}2)=-3{,}01$.

4. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

5. $\frac{1}{3}l^2h\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

Задачи устного экзамена

1. $\lg(-a)+\lg(-b)$. **2.** Указание. Задача равносильна следующей: докажите, что для всех a, b таких, что $|a|<1$, $|b|<1$, имеем $|a+b|<|1+ab|$.

3. $[0;\ 1]$. **4.** Нечетная. 5. Указание. Не забудьте про область определения! **6.** $\varnothing$. Указание. $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{20}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{10}\right)>1$. **7.** $\{(2\pi k;\ 0)\}$

($k \in Z$). Указание: $\sqrt{y^2+1} \geqslant 1$. **8.** Указание. Рассмотрите точку, симметричную точке A относительно (MN). **9.** Решение. Из произвольной точки $M_1 \in [BA)$ опустим перпендикуляр $[M_1N_1]$ на $[BC)$. Пусть $P_1 = \text{Окр}(M_1, |M_1N_1|) \cap \cap [BP)$. Из точки P проведем прямую, параллельную (M_1P_1). Тогда точка пересечения этой прямой и $[BA)$ — искомая. Замечание. Искомых точек — две. **10.** Нет.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

2. См. рис. 8.

3. $\alpha = \operatorname{arctg} n \approx 56^\circ 20'$.

4. $a = \dfrac{T(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg}{m}$.

5. $t_4 = \dfrac{t_3(t_1+t_5) - t_2(t_3+t_5)}{t_1+t_3-2t_2} \approx 32{,}2\ ^\circ\text{C}$.

Вариант 2

2. См. рис. 9.

3. $d = (\Gamma+1)F/\Gamma = 0{,}12$ м; $f = (\Gamma+1)F = 0{,}6$ м.

4. $A = p_0 V\Delta t/T$.

5. $Q = \dfrac{m_1 v_1^2}{2}\left(1 - \dfrac{m_1}{m_2}\right) \approx 25$ Дж.

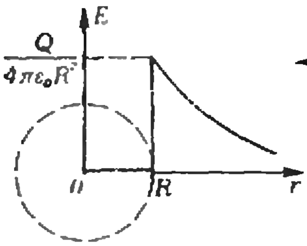


Рис. 8.

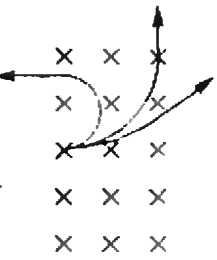


Рис. 9.

Задачи устного экзамена

1. $v = v_0\sqrt{\dfrac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} \approx 0{,}84$ м/с.

2. $E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon S} \approx 1{,}13 \cdot 10^5$ В/м; $W = \dfrac{Q^2 d}{2\varepsilon_0\varepsilon S} \approx 5{,}65 \times 10^{-7}$ Дж.

3. $\eta = \dfrac{Nhc}{\lambda UI}\,100\,\% \approx 0{,}08\,\%$.

Сколько воды в колбах?
(см. с. 35)

В первом ряду (слева направо) стоят две наполовину заполненные и одна полная колбы, во втором ряду — пустая, полная и почти пустая.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 1)

1. Если «числовая часть» номера $ab - cd$, то условие задачи запишется в виде $10a+b+c+ +d = a+b+10c+d = 100$. Из первого равенства следует $a = c$; теперь второе равенство перепишется в виде $11a+b+d = 100$. Ясно, что число a может равняться лишь 8 или 9. При $a = 9$ $b+d = 1$; следовательно, в этом случае имеем 2 решения: 90—91 и 91—90. Если $a = 8$, то $b+d = 12$, и получаем еще 7 решений: 83—89, 84—88, 85—87, 86—86, 87—85, 88—84 и 89—83.

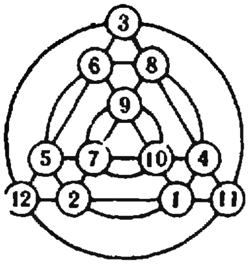


Рис. 10.

2. Ответ:

$$\begin{array}{r} \times\ 5734 \\ 5327 \\ \hline 40138 \\ 11468 \\ 17202 \\ 28670 \\ \hline 30545018 \end{array}$$

3. Ответ приведен на рис. 10. Можно также поменять числа на внутренней и внешней окружностях.

4. Количество орехов у Кости может быть любым натуральным числом, делящимся на 3.

5. Вблизи огня образуются конвекционные потоки воздуха, направленные навстречу пламени. Объясняется это следующим образом: нагреваясь над огнем, воздух становится легче и вытесняется вверх притекающим со всех сторон холодным воздухом. Если встречный огонь зажечь в тот момент, когда пожар приблизится достаточно близко, то воздушные течения заставят встречный огонь распространяться навстречу пожару. В этом и состоит «секрет» тушения пожара описанным в задаче способом.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 2)

1. Если обозначить через x первоначальное количество спичек в коробке, то можно написать следующее уравнение: $[(2x-8)\cdot 2 - 8] \times \times 2 - 8 = 0$, откуда $8x = 56$, $x = 7$.

2. Ответ. $K = 9$, $A = 1$, первый сомножитель равен 12345679.

Решение. Заметим, что A меньше, чем K, иначе частное от деления произведения на K имело бы не 8, а 9 знаков. Но квадрат однозначного числа оканчивается на число, меньшее его, лишь для чисел 8 и 9. Если $K = 8$, то $A = 4$, но число 44444444 не делится на 8. Если $K = 9$, то $A = 1$, а число 111111111 при делении на 9 дает число 12345679.

3. Точка A лежит на прямой BC между точками B и C.

4. Длина тропинки равна либо 4,9 км, либо 3,1 км, в зависимости от того, в какую сторону ехал Саша (это не оговорено в условии задачи). Если бы длина тропинки равнялась 4,9 км, то Гриша потратил бы на дорогу в одну сторону 0,49 часа плюс время разговора. Но уже 0,49 часа больше 24 минут, значит, длина тропинки равна 3,1 км и время движения Гриши по ней равно 0,31 часа или 18 мин 36 с. Отсюда время разговора равно 24 мин — 18 мин 36 с = = 5 мин 24 с.

5. Сначала заметим, что скорость вытекания воды уменьшается с уменьшением высоты уровня жидкости и зависит только от этой высоты. Выделим в каждом сосуде по два слоя жидкости одинаковой толщины — один на высоте h от дна, другой на высоте $H - h$ (рис. 11). Из симметрии видно, что суммы объемов двух слоев для обоих сосудов одинаковы. Рассмотрим суммарное

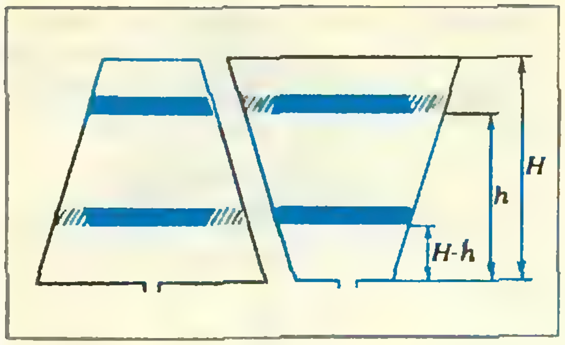


Рис. 11.

время выливания воды в обоих слоях для каждого из сосудов. Время выливания воды, отмеченной на рисунке голубым цветом, будет для обоих сосудов одинаково, в заштрихованная часть воды в первом сосуде будет выливаться с меньшей скоростью, чем во втором, поскольку эта часть будет выливаться при меньшей высоте уровня жидкости. Поэтому из первого сосуда вода вытечет позже, чем из второго.

Шахматная страничка
(см. «Квант», 1983, № 12)

Задание 23 (В. Корольков, 1950 г.). **1. Кс3+** Нельзя 1. С:е8 — 1...Кр:d1 2. C:d7 а3 3. Се6 С:g5, и за проходную пешку белым придется отдать слона. **1...Крd3.** После 1...Крd2 2. Ке4+ Крс2 3. С:е8 а3 4. Сf7 Крb2 5. Крf5 Се7 6. Крg6 Сf8 7. Кg3 а2 8. С:а2 Кр:а2 9. Крf7 Сd6 10. Кf5 Се5 11. К:g7 d5 12. Кf5 d4 13. К:d4 белые даже выигрывают. **2. К:а4.** В случае 2. Ке4 а3 3. С:е8 а2 4. Кс5+ Крс3 5. Кb3 Кр:b3 6. Сf7+ Крb2 7. С:а2 Кр:а2 черные остаются с лишней фигурой. **2...d6+.** После 2...g6 3. С:g6 С:g6 4. Кс5+ черные теряют последнюю пешку. **3. Кр:d6 С:а4.** Итак, черные остались с лишней фигурой, но выиграть не удастся. **4. Кре6 С:g5 5. Крf7 Сf6 6. g5 Сс3 7. Крg8 Кре4 8. Сf7! Крf5 9. g6 Крg5 10. Крh7 Сс2 11. Се8 Сd3 12. Сf7.** Позиционная ничья, черные не могут усилить свою позицию.

Задание 24 (В. Корольков, 1951 г.). **1. f7 Ла6+ 2. Са3! Л:а3+ 3. Крb2 Ла2+! 4. Крс1!** После 4. Крс3? Лс2+! белому королю не уйти от преследования. **4...Ла1+ 5. Крd2 Ла2+ 6. Кре3 Ла3+ 7. Крf4 Ла4+ 8. Крg5 Лg4+! 9. Крh6! Лg8 10. Ке7! Се6 11. fgФ+ С:g8 12. Кg6**×.

Головоломка с шарами
(см. «Квант», 1984, № 2, 4-я с. обложки)
Ответ показан на рисунке 12.

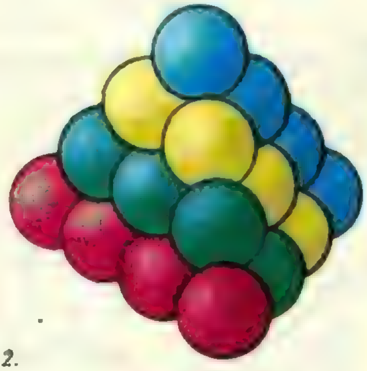


Рис. 12.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: М. И. Башмаков, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров,
Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили
М. Б. Дубах, В. С. Коваль, Ю. В. Котов,
А. И. Клименов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров,
Н. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина
Фото А. Н. Виленкина, С. Козлова (фотохроника ТАСС)

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

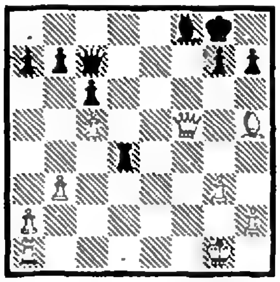
103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54
Сдано в набор 19.1.84 Подписано к печати 21.2.84
Печать офсетная. Усл. кр.-от. 24,85
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,59. Т-00234
Тираж 178248 экз. Цена 40 коп. Заказ 57

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ПЕРЕКРЫТИЕ

В предыдущих выпусках мы ознакомились с несколькими тактическими приемами геометрического характера — связкой, рентгеном, перегрузкой фигур. На очереди еще один: перекрытие. Представьте себе, что ваша дальнобойная фигура (ферзь, ладья или слон) надежно защищает другую фигуру или держит под обстрелом какое-нибудь важное поле. Внезапно на той самой линии, по которой происходит это действие, появляется неприятельская фигура, перекрывающая дальнобойной фигуре путь к своей «подопечной». Дело может кончиться очень печально.

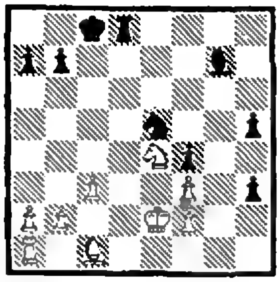


Рети — Боголюбов
(Нью-Йорк, 1924 г.)

Комбинация, которая последовала в этой позиции, своим изяществом напоминает этюд и поэтому является одной из самых популярных во всей шахматной истории!

1. Лf1 Лd8 (1...Фd8 2. Фf7+ Крh8 3.Ф:f8+) **2.Сf7+ Крh8 3.Се8!!** Фантастический ход, сделанный с одной-единственной целью — перекрыть дорогу черной ладье к своему слону. Черные сразу сдались. В случае 1...Фе7 выигрывало другое, не менее красивое перекрытие: 2.Сf7+ Крh8 3.Сd5!! g6 4.Ф:f8+ Ф:f8 5.Л:f8+ Крg7 6.Лg8+ и слон уходит из-под боя.

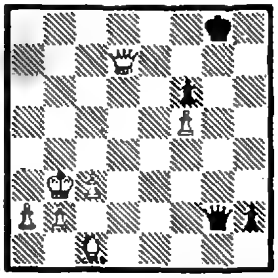
В отличие от рентгена, при котором одна фигура воздействует на другую сквозь преграды, в теме перекрытия все наоборот — внезапно появляется преграда и сфера действия фигуры существенно сужается.



Катаев — Марков
(Москва, 1977 г.).

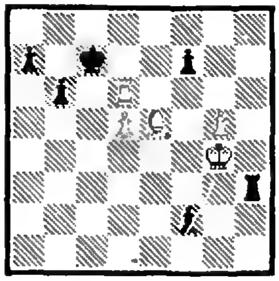
На первый взгляд, черная пешка «h» не опасна — после 1...h2 2.С:f4 она гибнет, поскольку поле h1 в распоряжении белой ладьи. Однако можно создать преграду к этому полю: **1...Лd1!!** Белые сдались, на 2.Кр:d1 уже решает 2...h2.

Следующие две диаграммы в «Кванте» уже были (в № 7 за 1982 год), но они хорошо иллюстрируют тему перекрытия, и мы решили их повторить.



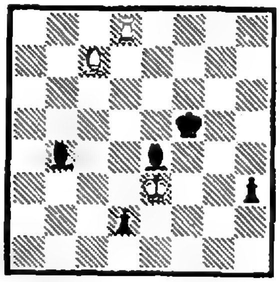
Симагин — Бронштейн
(Москва, 1947 г.)

Вечный шах у белых есть, и вроде на большее рассчитывать не приходится, ведь черная пешка вот-вот станет вторым ферзем. **1.Сg5!!** Перекрывая связь между неприятельским ферзем и королем, белые достигают заветной цели. Теперь после 1...Ф:g5 они дают два шаха и забирают пешку h2, а на 1...fg следует 2.f6 с неизбежным матом. Остается **1...h1Ф** и белые используют преграду между королем и ферзем «g» в свою пользу. **2.Фе8+ Крg7 3.Фg6+ Крf8 4.Ф:f6+ Крg8 5.Фd8+ Крg7 6.Фе7+ Крg8 7.Фе8+.** Черные сдались, мат неизбежен: 7...Крg7 8.f6+ Крh7 9.Фf7+ Крh8 10.Фg7×.



Кобленц — Моисеев
(Рига, 1955 г.)

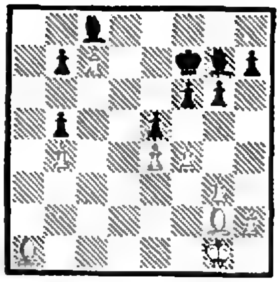
Ход черных, и их пешка может превратиться в ферзя. Однако после 1...h1Ф 2.Лf6 эта акция не увенчается успехом. В то же время у противника лишняя фигура, и необходимы решительные меры. **1...f5+!!** Неожиданный способ смешать планы белых по линии «f». После 2.gf (2.Кр:f5 f1Ф+) собственная пешка преграждает дорогу ладье к полю f6. Безнадежно и 2.Кр:h3 f1Ф+ 3.Крh4 Фе1+ 4.Сg3 Фh1+. Поэтому белые сдались.



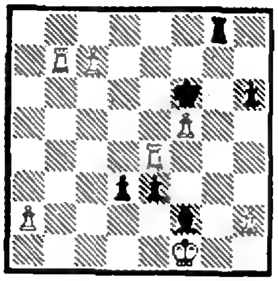
Ненароков — Григорьев
(Москва, 1923 г.)

Обе пешки черных застопорены, и налицо все признаки ничьей. Но известный шахматный композитор находит чисто этюдное решение. **1...Сd6!!** Выясняется, что либо слон перекроет дорогу ладье к пешке «d» — 2.С:d6 d1Ф, либо ладья слону и пешке «h» — 2.Л:d6 h2. Белые сдались. Классический пример на тему перекрытия!

Конкурсные задания

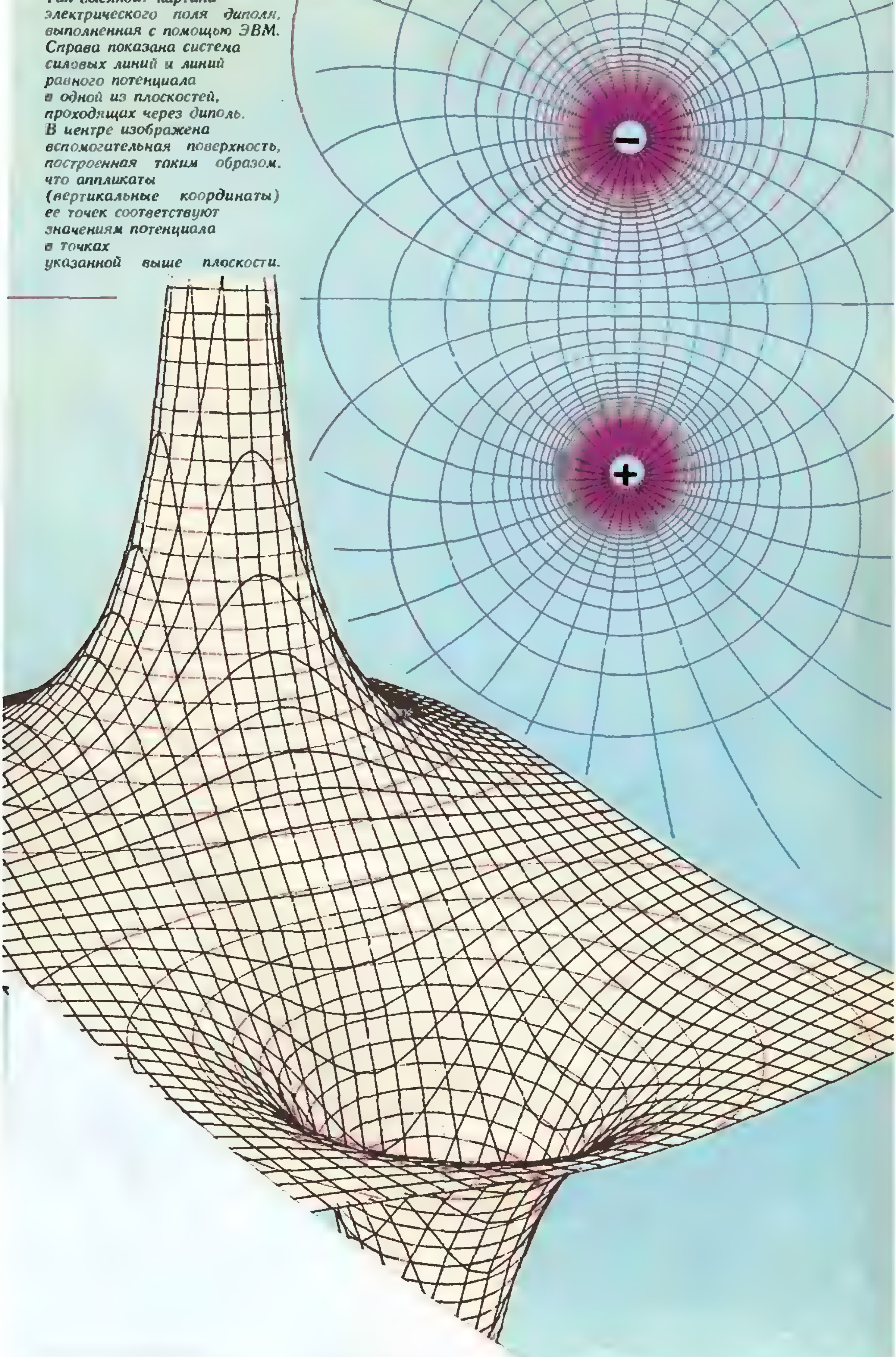


5. Белые начинают и выигрывают.



6. Ход белых. Могут ли они спастись?

Срок отправки решений — 25 мая 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 5, 6»).



Так выглядит картина электрического поля диполя, выполненная с помощью ЭВМ. Справа показана система силовых линий и линий равного потенциала в одной из плоскостей, проходящих через диполь. В центре изображена вспомогательная поверхность, построенная таким образом, что аппликаты (вертикальные координаты) ее точек соответствуют значениям потенциала в точках указанной выше плоскости.

Цена 40 коп.

Индекс 70465

10-31

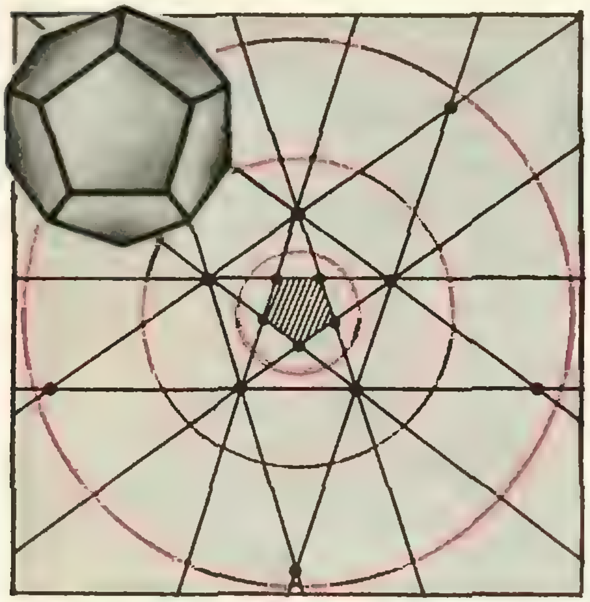
Эти причудливые шарообразные фигуры сделаны из тонкого картона без клея. Они составлены из 12 одинаковых кругов, предварительно разрезанных специальным образом. Круги можно раскрасить. Такие игрушки, подвешенные на нитках, будут стремительно и красиво вращаться от легкого дуновения ветра.

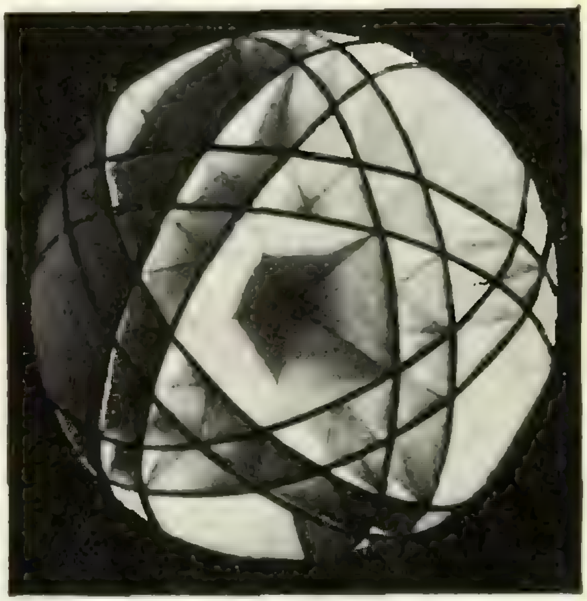
Какова геометрия этих фигур?

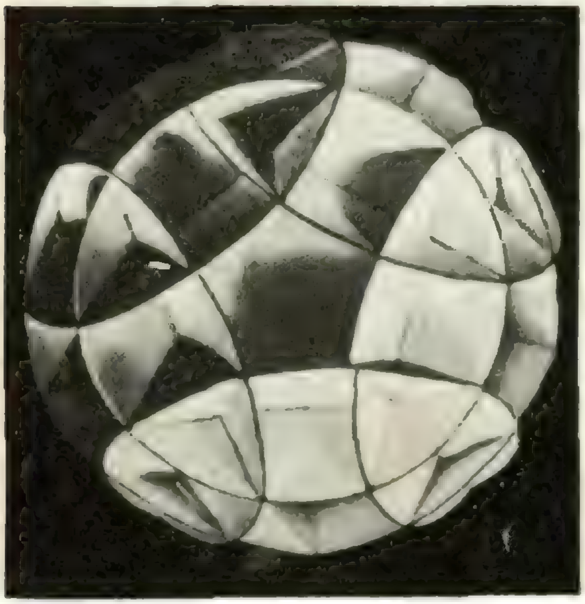
Продолжим грани додекаэдра, показанного на рисунке слева вверху. Получится сложная конфигурация из 12 плоскостей в пространстве. Выберем одну из этих плоскостей. Ее пересекают 10 других плоскостей, а одна ей параллельна. Получается 10 линий пересечения — они изображены на чертеже. На нем же штриховкой выделена грань додекаэдра — часть выбранной плоскости. Проведем сферу с центром в центре додекаэдра. Наши 12 плоскостей высекают на ней своеобразную сеть из 12 окружностей. Такие сети окружностей отчетливо видны на трех картонных моделях. Сети получаются разные, если менять размеры додекаэдра, сохраняя радиус сферы неизменным.

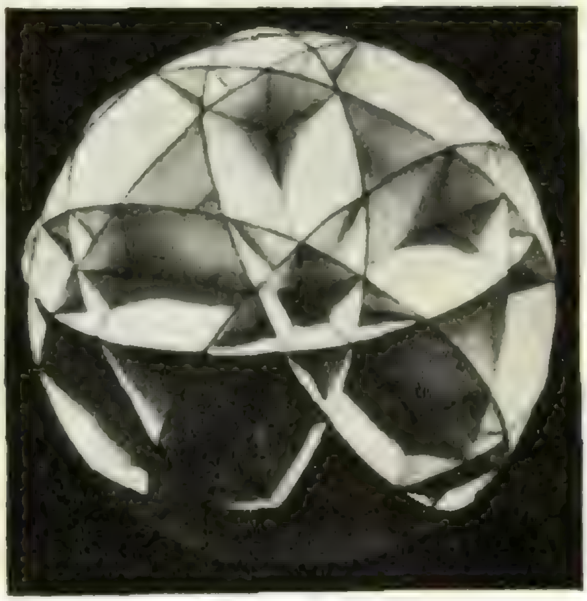
Подобные модели используются в архитектуре при поисках новых форм.

О. Я. БОДНАР









НОМЕР
4

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант **4** **1984**

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

	В НОМЕРЕ:	**IN THIS ISSUE:**
2	Исследования космоса продолжаются	The study of outer space continues
4	*А. А. Рузмайкин.* О природе космического магнетизма	*A. A. Ruzmaikin.* On the nature of cosmic magnetism
11	*В. В. Рождественский.* Умеете ли вы считать?	*V. V. Rozhdestvenski.* Do you know how to count?
	Новости науки	**Science news**
16	*А. Я. Паршин.* Волны кристаллизации	*A. Ya. Parshin.* Crystalization waves
17	Наука-83	Science-83
	Математический кружок	**Mathematics circle**
18	*М. Б. Балк, В. Г. Болтянский.* Центр тяжести облегчает решение	*M. B. Balk, V. G. Boltyanski.* Centre of mass helps solving
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
23	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
26	*Б. С. Эппель.* Дифференцирование сложной функции	*B. S. Eppel.* The chain rule
28	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school-children**
29	Задачи	Problems
30	*Б. А. Розенфельд.* Откуда произошли названия геометрических фигур?	*B. A. Rozenfeld.* Where did the names of geometric figures come from?
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
32	Задачи М856 — М860, Ф868 — Ф872	Problems M856 — M860; P868 — P872
35	Решения задач М841 — М845; Ф852 — Ф857	Solutions M841 — M845; P852 — P857
	Игры, головоломки	**Games and puzzles**
42	*А. В. Бялко.* Цепочка с бегущим кольцом	*A. V. Byalko.* A chain with a running link
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
46	*С. М. Козел, А. А. Шеронов.* Теплоемкость идеального газа	*S. M. Kozel, A. A. Sheronov.* Heat capacity of ideal gazes
	Информация	**Information**
52	Заочная физическая школа при МГУ	Moscow university physics correspondence school
53	**Варианты вступительных экзаменов**	**College entrance examination problems**
57	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Наша обложка *(41)*	**Our cover page** *(41)*
	Смесь *(44, 45, 49, 50, 51)*	**Miscellaneous** *(44, 45, 49, 50, 51)*
	Шахматная страничка Четвертый чемпионат мира среди ЭВМ *(3-я с. обложки)*	**The chess page** Fourth world computer chess championship *(3rd cover page)*

Снимок, который воспроизведен на первой странице обложки, сделан космонавтами А. С. Иванченковым и В. В. Коваленком. Такой они увидели Землю через широкоугольный визир ориентации орбитальной станции «Салют 6»

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1984

12 апреля — День космонавтики

Исследования космоса продолжаются

Каждый год приносит советской науке новые успехи в исследовании космоса. Немало было сделано в этой области и в прошлом году.

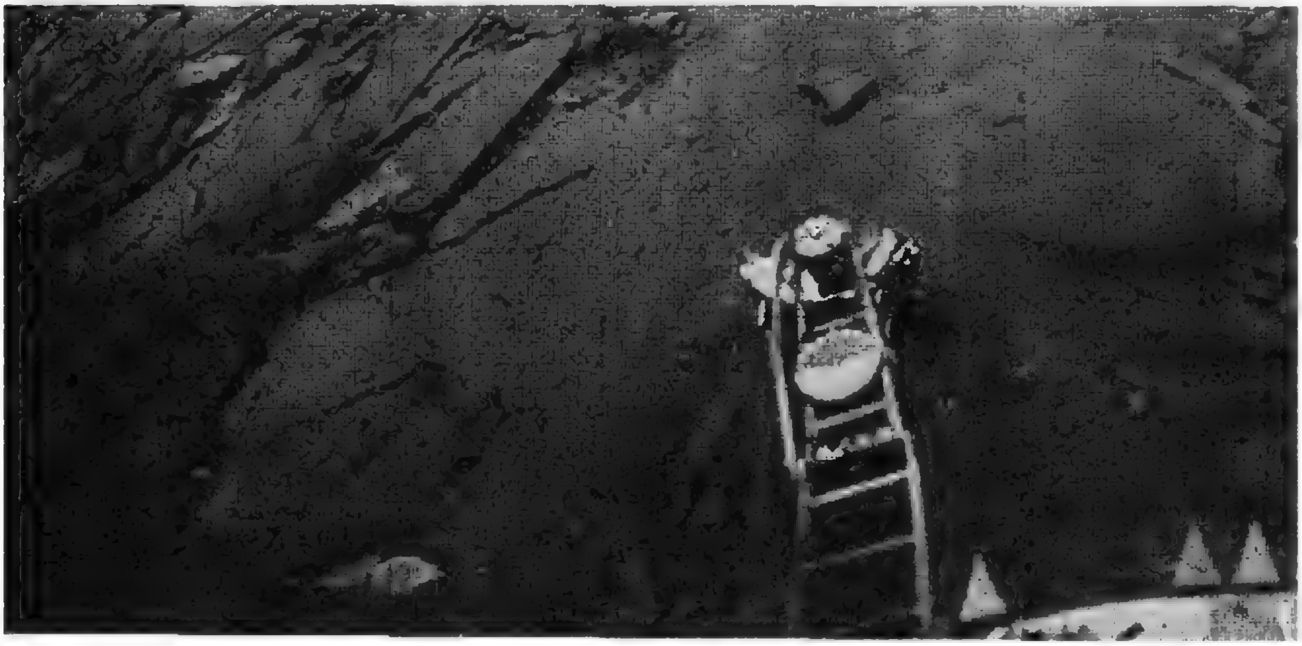
150 суток работали на борту орбитальной станции «Салют-7» космонавты Владимир Ляхов и Александр Александров. Они, в частности, выполнили обширную программу исследований природных ресурсов Земли, по которой совместно с космонавтами работали экспедиции на специальных судах, самолетах, наземных станциях. Например, в сентябре 1983 года был проведен комплексный эксперимент «Интеркосмос — Черное море», в ходе которого одновременно осуществлялось «многоэтажное» наблюдение за состоянием моря и атмосферы над ним на различных глубинах и высотах.

Выдающимся достижением является установка на станции «Салют-7» дополнительных солнечных батарей, которые значительно улучшили снабжение станции энергией. Это большой шаг на пути к будущим монтажным работам по сборке сложных технических сооружений в космосе. На приведенном вверху снимке вы видите космонавта А. Александрова во время повторного выхода в открытый космос.

Изучение разнообразных технологических процессов в условиях невесомости и глубокого вакуума, выполненное на станциях «Салют-6» и «Салют-7» при длительных космических полетах, позволяет приступить к производству ценных полупроводниковых материалов, кристаллов с необычными свойствами, новых лекарственных веществ.

Успешно продолжались исследования планеты Венеры. В прошлые годы были получены очень ценные для планетологии сведения о составе и строении венерианской атмосферы, а затем и о поверхности этой планеты в экваториальном поясе (на фотографии внизу воспроизведена панорама участка поверхности Венеры, полученная со спускаемого аппарата станции «Венера-14»). Оказалось, что поверхность планеты нагрета до 460 °С. Атмосфера Венеры в основном состоит из углекислого газа и азота и оказывает на поверхность планеты давление, равное 90 атм.

В 1983 году на орбиты спутников Венеры вышли две советские косми-



ческие станции «Венера-15» и «Венера-16». Они намного сложнее своих предшественниц. Обе станции имеют радиолокационные установки бокового обзора, позволяющие изучать рельеф поверхности планеты в ранее недоступных полярных областях. Таким образом, в недалеком будущем наша наука будет располагать детальной картой поверхности Венеры во всех ее районах. Из того, что мы уже знаем об этой планете, следует, что у нее есть массивные горные цепи, а высота гор достигает иногда 13 километров, что намного выше Эвереста.

Станции «Венера-15» и «Венера-16» оснащены также аппаратурой, позволяющей регистрировать тепловое излучение различных слоев венерианской атмосферы, расположенных выше облачного слоя, на высотах от 65 до 95 километров над поверхностью планеты. Именно на этих высотах возникает так называемый «парниковый эффект» — поглощение атмосферой значительной части тепла, уходящего с поверхности Венеры в космическое пространство. Он-то и приводит к дополнительному нагреванию планеты. Существует предположение, что аналогичный эффект может возникнуть и в атмосфере Земли под влиянием продуктов сжигания органического топлива. Это может привести к нежелательным изменениям нашего климата. Изучение этого явления представляет большой интерес для метеорологов и климатологов.

Эксперимент по исследованию температуры разных слоев атмосферы Венеры подготовлен советскими учеными совместно с учеными из ГДР.

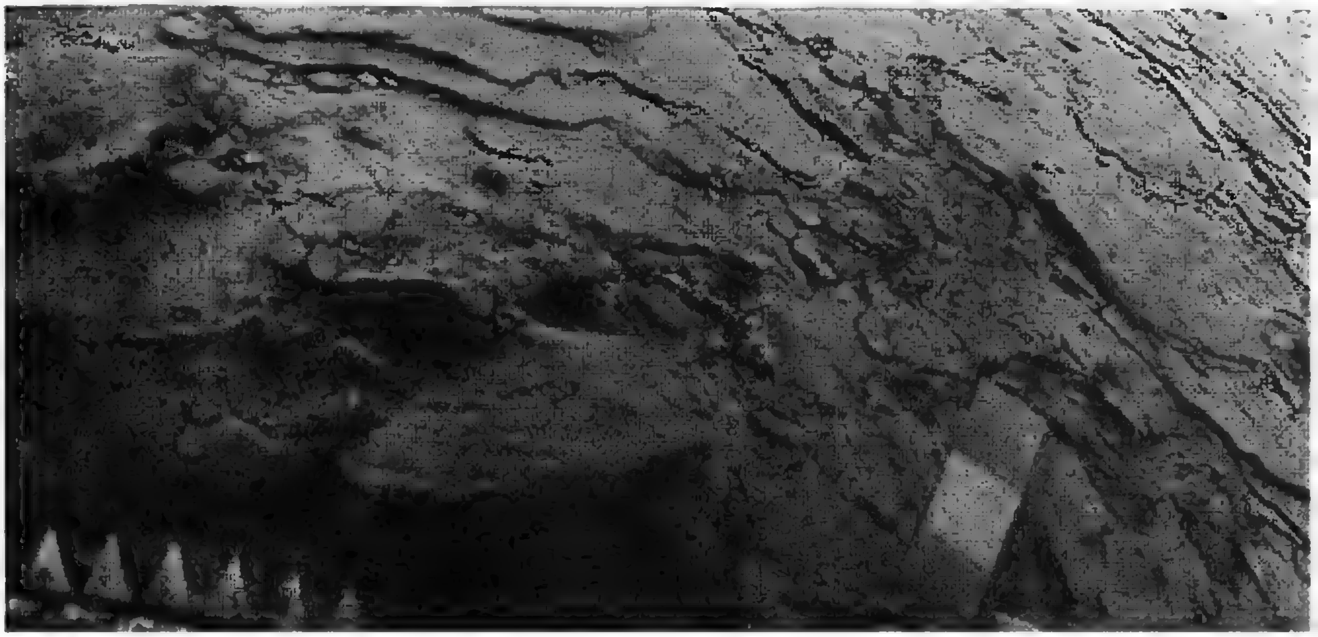
В 1983 году были произведены запуски советских космических обсерваторий «Астрон» и «Прогноз-9», предназначенных для исследования далеких глубин Вселенной. «Астрон» оснащен самым крупным оптическим телескопом, вынесенным за пределы земной атмосферы. Телескоп детально исследует звезды различных типов, а также далекие галактики и квазары. Обнаружены звезды, в атмосфере которых в сотни раз больше урана, свинца и вольфрама, чем в атмосфере Солнца. Зарегистрировано несколько галактик с необычайно высоким уровнем ультрафиолетового излучения.

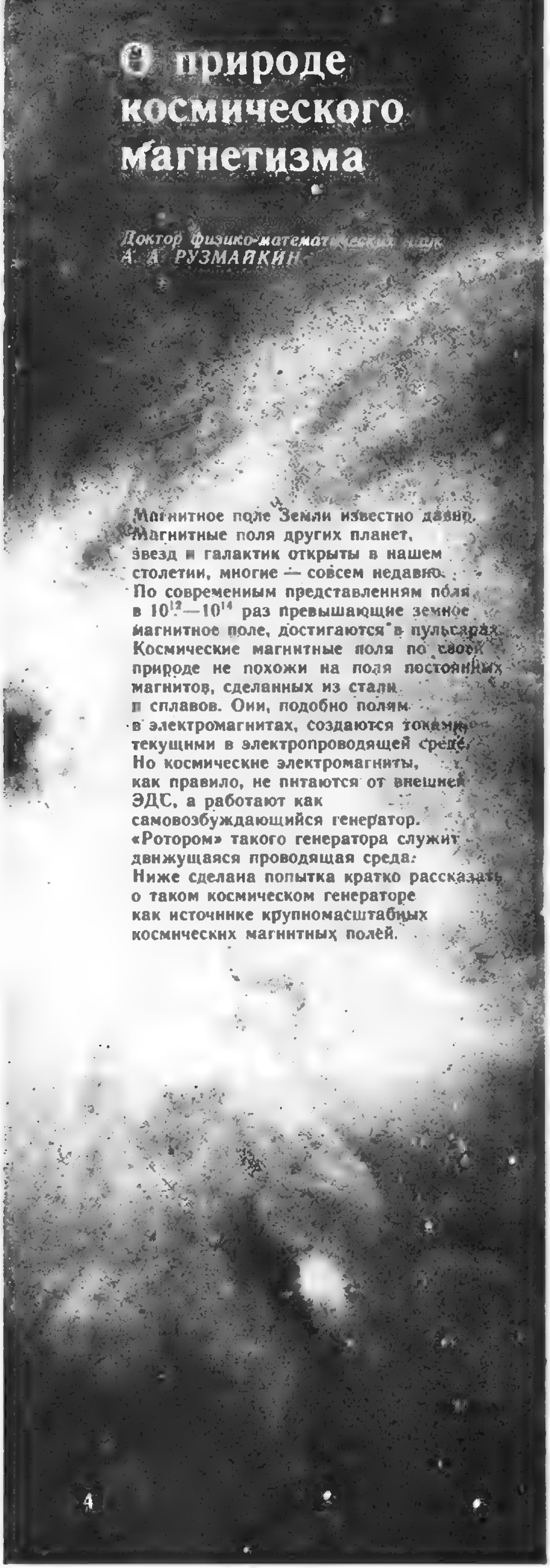
Успешно функционирует и установленный на «Астроне» рентгеновский телескоп. Он используется для исследования сверхновых звезд, а также вспыхивающих рентгеновских звезд — барстеров*). Этот телескоп позволил впервые зарегистрировать эффект «включения» источника рентгеновских лучей в созвездии Геркулеса.

Нынешняя администрация США неоднократно объявляла о своем стремлении перенести и без того чудовищно опасную гонку вооружений в космическое пространство, о подготовке будущих «звездных войн» против социалистических государств. Советский Союз ведет активную борьбу за запрещение размещения каких-либо видов оружия в околоземном космическом пространстве. Мы за мирный космос, изучаемый совместными усилиями ученых разных стран.

---

*) См. «Квант», 1983, № 8.





О природе космического магнетизма

Доктор физико-математических наук А. А. РУЗМАЙКИН

Магнитное поле Земли известно давно. Магнитные поля других планет, звезд и галактик открыты в нашем столетии, многие — совсем недавно. По современным представлениям поля в 10^{12}—10^{14} раз превышающие земное магнитное поле, достигаются в пульсарах. Космические магнитные поля по своей природе не похожи на поля постоянных магнитов, сделанных из стали и сплавов. Они, подобно полям в электромагнитах, создаются токами, текущими в электропроводящей среде. Но космические электромагниты, как правило, не питаются от внешней ЭДС, а работают как самовозбуждающийся генератор. «Ротором» такого генератора служит движущаяся проводящая среда. Ниже сделана попытка кратко рассказать о таком космическом генераторе как источнике крупномасштабных космических магнитных полей.

Магнитные поля в природе

Хорошо известно, и это указано в учебнике физики, что магнитное поле создается электрическими токами. Исторически же люди познакомились с магнитным полем на примере постоянного магнита. Вспомните, как железные опилки эффектно очерчивают линии поля. Линии магнитного поля всегда замкнуты. Простое наблюдение показывает, что стрелка компаса ориентируется по касательной к линиям магнитного поля. В частности, так было обнаружено магнитное поле Земли.

С помощью современных космических аппаратов, снабженных более чувствительными, чем компас, приборами, удалось обнаружить магнитные поля и у некоторых других планет — Меркурия, Марса, Юпитера и Сатурна. Например, магнитное поле Марса было впервые зарегистрировано магнитометрами советской космической станции Марс-3. Магнитная индукция этого поля составляет $6 \cdot 10^{-8}$ Тл у экватора планеты. Самым сильным оказалось магнитное поле Юпитера ($4 \cdot 10^{-4}$ Тл у экватора, то есть примерно в 10 раз больше земного).

В начале нашего века было открыто магнитное поле Солнца.

Солнце — лишь рядовая звезда в звездном мире. Поэтому не удивительно, что магнитные поля обнаружились и у других звезд. При этом у некоторых из них поля оказались в десятки тысяч раз сильнее солнечного.

Магнитное поле существует также в межзвездной среде. Это вовсе не поле, созданное самими звездами. Поле звезды убывает при удалении от нее столь быстро (обычно обратно пропорционально кубу расстояния), что не «дотягивается» даже до соседней звезды. А в Галактике (гигантский звездно-газовой системе, видимой ночью в виде полосы Млечного пути) магнитное поле имеет огромную протяженность, значительно превышающую расстояние между звездами. Магнитная индукция этого поля мала — около 10^{-10} Тл.

С открытием космического магнетизма встал вопрос о причинах его происхождения. В космосе очень мало твердых тел, физические процессы протекают в жидкой или газообразной среде, состоящей из электронов, положительно заряженных ионов, а также нейтральных атомов и молекул. Земное магнитное поле (рисунок 1,*а*) создается движением вещества (расплавленное железо с примесью углерода, серы, кремния) в жидкой оболочке ядра Земли (это сферический слой, заключенный между 0,19 и 0,55 радиуса Земли). В газообразных звездах (таких, как наше Солнце) магнитное поле генерируется во внешней частично ионизованной оболочке толщиной около 1/10 радиуса звезды.

Итак, космические магнитные поля создаются токами, протекающими в электропроводящей среде. Похожим образом создаются поля в катушке электромагнита (рисунок 1, *б*). Но для поддержания тока в электромагните нужен внешний источник энергии. Между тем в космических условиях «батарейные» ЭДС, действующие за счет химических или тепловых эффектов, обычно слабы или вообще отсутствуют. Основным источником магнитных полей в космических условиях служит движение самой проводящей среды.

Космические магнитные поля отличаются непостоянством. Например, крупномасштабное поле Солнца почти периодически изменяет свою полярность через каждые 11 лет. С этими изменениями связана цикличность солнечной активности, которая проявляется в виде темных пятен, солнечной короны, вспышек и других явлений. В последние годы циклы активности обнаружены у многих звезд. Близкое нам магнитное поле Земли также оказалось непостоянным. Через большие промежутки времени — примерно в двести тысяч лет — оно меняет свое направление на 180°: северный магнитный полюс становится южным и наоборот.

Почему изменяется магнитное поле в проводящей среде

Электрическое поле, создаваемое зарядом, исчезает, если этот заряд нейтрализовать зарядом противоположного знака. В плазме, состоящей из равного количества движущихся положительных и отрицательных зарядов, любой избыток заряда одного знака, случайно появляющийся в какой-нибудь области, быстро нейтрализуется. Ясно, что время нейтрализации электрического поля тем короче, чем больше электропроводность плазмы. Магнитное поле в плазме создается движущимися зарядами, то есть электрическими токами. Очевидно, с изменением тока будет меняться поле.

Обсудим вначале, как изменяются токи не в плазме, а в обычных металлических проводах, которые имеются в каждой комнате.

Рассмотрим виток радиуса r провода поперечного сечения πl^2 с удельным сопротивлением ρ (Ом • м). Пусть сначала виток подключен к батарее и в нем течет ток I (А), который создает в пространстве вокруг витка магнитное поле B (Тл). Максимальное поле достигается в центре витка. Оно перпендикулярно его плоскости и равно по величине $B_{\max} \approx I/2r$. Магнитную энергию этой системы можно оценить как $W \approx \mu_0 \frac{B^2_{\max}}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ (Дж) $(\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн • м). Отключим источник то-

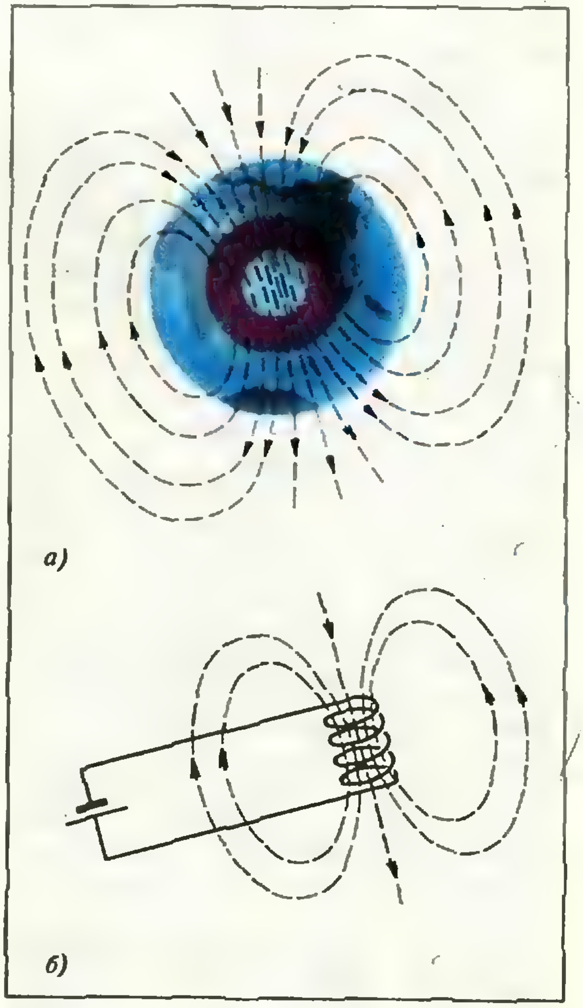


Рис. 1. Магнитное поле Земли (а) внешне сходно с полем постоянного магнита. Однако природа этих полей различна. Магнетизм магнита объясняется сложными квантовыми свойствами частиц, входящих в состав твердого тела. Магнитное поле Земли создается электрическими токами, текущими в жидком ядре. В этом плане земное поле подобно полю электромагнита (б).

ка, сохранив цепь замкнутой. На первый взгляд, ток немедленно прекратится вследствие сопротивления проводника R. Однако в действительности ток исчезнет не мгновенно. Темп его затухания определит быстрота джоулевых потерь $N = I^2R$ (Дж/с). Ток поддерживает запасенная вокруг витка магнитная энергия. (Отметим, что магнитная энергия намного больше кинетической энергии носителей тока — электронов.) Эта энергия исчерпывается за время

$$\tau \approx \frac{W(\text{Дж})}{N(\text{Дж/с})} \sim 10^{-6}\,\sigma l^2\ (\text{с}),$$

где $\sigma = 1/\varrho$ — проводимость материала витка.

Оценим величину времени затухания поля τ для медного провода с радиусом поперечного сечения $l = 1$ см. Проводимость меди составляет около $6 \cdot 10^7$ (Ом · м)$^{-1}$. Получим, что τ меньше сотой доли секунды.

Обратимся теперь к космической плазме. Ее электропроводность обычно такая же, как у плохих металлов, но размеры областей, занятых токами, гигантские. В этом случае характерное время изменения поля становится очень большим. Например, в верхней оболочке Солнца электропроводность плазмы составляет около 10^6 (Ом · м)$^{-1}$ (при комнатных температурах примерно такую же имеют ртуть, нихром и висмут). Радиус Солнца равен $\sim$ 700 тыс. км, то есть $7 \cdot 10^8$ м. Следовательно, время исчезновения поля, создаваемого токами, текущими в оболочке размером в 1/10 радиуса, равно по порядку величины 10^{15} с, или около 100 млн. лет! Разумеется, оценка весьма приближенная. Но сравните с с долями секунды для медного проводника. Выходит, что привычное электрическое сопротивление практически не изменяет однажды созданные крупномасштабные магнитные поля. Как же тогда объяснить, что, скажем, солнечное магнитное поле изменяется за более короткий промежуток времени — 11 лет?

Причина в том, что среда движется. Движение среды, в которой имеются свободные положительные и отрицательные заряды, эквивалентно движению проводника. В учебнике «Физика 9» показано, что движение проводника в магнитном поле сопровождается появлением электродвижущей силы, и, если концы такого проводника замкнуть, в цепи возникнет ток. Этот вторичный ток сам создает магнитное поле, которое, складываясь с первоначальным полем, изменяет его. Замечательно, что в результате такого изменения в идеально проводящей плазме, сопротивление которой равно нулю, суммарный магнитный поток $\Phi = BS$ (S — площадь контура) должен оставаться неизменным. Это значит, что магнитное поле, создаваемое движущимся проводником, как бы перемещается вместе с ним. Такое поле принято называть *вмороженным в плазму магнитным полем*. Наглядно можно себе представить магнитное поле в движущейся проводящей среде, глядя на поведение легкой нити, брошенной в поток: нить не только переносится, но и растягивается, если частицы, движущиеся в потоке, удаляются друг от друга.

При вмороженности движение плазмы как единого целого переносит магнитные линии. Движения же одних частей плазмы относительно других деформируют магнитные линии: растягивают и изгибают их. Магнитная линия, которая первоначально проходила через две близкие частицы плазмы, будет и в дальнейшем проходить через эти же частицы, то есть следовать за их перемещениями (рисунок 2). Количество магнитных линий, пронизывающих любую площадку, охватываемую замкнутым контуром из движущихся жидких частиц, остается неизменным (при $\varrho = 0$). Магнитная индукция B поля может возрастать при деформациях, когда сближаются участки с одинаковым направлением поля, и ослабляться при сближении участков с противоположным направлением поля. Это видно из

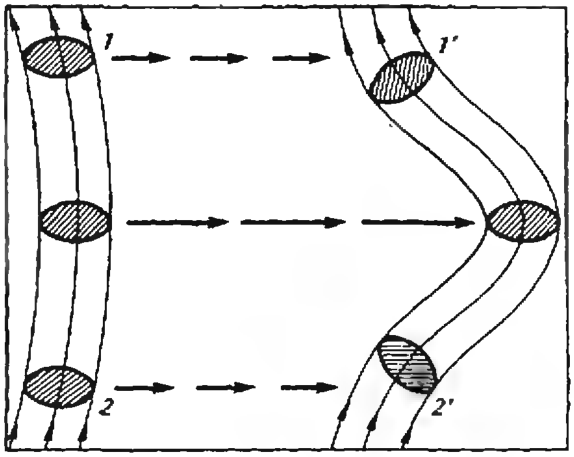


Рис. 2. Изменение магнитного поля при перемещении частиц идеально проводящей плазмы из положения 1 — 2 в положение 1' — 2'.

равенства $B=\Phi/S$: если Φ сохраняется неизменным, то B меняется обратно пропорционально S.

Самый простой способ усилить вмороженное магнитное поле состоит в сжатии слоя плазмы (то есть в уменьшении значения S). Эта идея используется для простейшего объяснения гигантских магнитных полей пульсаров. Пульсар представляет собой компактную нейтронную звезду с радиусом r порядка 10 км. Если предположить, что нейтронная звезда получилась путем сжатия обычной звезды с радиусом r_0 около 1 млн км, то, значит, в процессе сжатия ее радиус уменьшился в 10^5 раз. Сохранение магнитного потока означает, что

$$\pi r_0^2 B_0 = \pi r^2 B,$$

где B_0 — поле исходной звезды, B — поле пульсара. Следовательно, при сжатии поле усиливается в $(r_0/r)^2=10^{10}$ раз. Поэтому скромное магнитное поле обычной звезды с магнитной индукцией, скажем, 0,01 Тл превращается в поле с магнитной индукцией 10^8 Тл.

С другой стороны, движения плазмы приводят к искривлению и запутыванию магнитных линий. А для мелкомасштабных полей, как мы видели, становятся существенными джоулевы потери.

Оказывается, могут существовать такие движения плазмы, что эффект усиления крупномасштабного поля преобладает или по крайней мере не уступает ослаблению. В этом случае движущаяся плазма работает как генератор.

Такую машину естественно назвать «динамо» (генератор в свое время называли динамо-машиной). Действие динамо-машины обычно демонстрируют на примере рамки с током, вращающейся в поле магнита.

Гидромагнитное динамо

Динамо в проводящей среде, о котором мы ведем речь, должно, в отличие от технического генератора, работать без проводов, обмоток, а главное — без внешнего магнитного поля, которое в обычном генераторе обязано быть*). Поскольку источником энергии в этом динамо служат только гидродинамические движения плазмы, его назвали «гидромагнитным». Для запуска гидромагнитного динамо нужно только слабое начальное магнитное поле. Обычно слабые поля существуют благодаря различным эффектам взаимодействия между собой заряженных частиц плазмы.

Идея объяснения магнитных полей Земли и Солнца с помощью гидромагнитных движений была выдвинута известным английским физиком Дж. Лармором в 1919 году. Но возможно ли самовозбуждающееся гидромагнитное динамо, «работающее» без внешних источников ЭДС? Положительный ответ на этот вопрос лучше всего иллюстрирует наглядный пример, впервые продемонстрированный в 1971 году академиком Я. Б. Зельдовичем участникам симпозиума в Кракове.

Возьмем кольцевой жгут, состоящий из отдельных колечек-резиночек (рисунок 3, *а*). Пусть резиночки жгута имитируют магнитные линии, имеющие одинаковое направление (его удобно пометить стрелочками). Свернем жгут в восьмерку (рисунок 3, *б*), наложим одно кольцо восьмерки на другое и растянем удвоенный жгут до прежнего размера (рисунок 3, *в*). Обратите внимание на направления стрелок; они одинаковы. Таким образом, количество магнитных линий, проходящих через любое поперечное сечение жгута, удвоилось. Повторяя процедуру складывания и растяжения, можно всякий раз удваивать количество магнитных линий в жгуте, пока этому не помешает упругость резины. Заметьте, что стартовав из какой-нибудь точки первоначального жгута, можно было вернуться в ту же точку, обойдя один круг. После удвоения возвращение в ту же точку требует уже двух обходов по окружности. Тем самым удвоенный жгут не вполне эквивалентен исходному. Чтобы избавиться от этого, можно всякий раз разрезать жгут в точке сгиба восьмерки и сшивать освободившиеся окружности, складывая их затем в один удвоенный жгут, эквивалентный исходному.

В природных условиях операция удвоения может выполняться движениями среды, в которую «вморожено» слабое начальное магнитное поле. Нетрудно представить себе движения такого

---

*) В современных больших генераторах ток, создающий поле, берется от самого генератора — в этом смысле сходство большое. Однако расположение обмоток и конструкции таких генераторов придуманы человеком. Может ли Природа, не используя изоляционных материалов, добиться того же эффекта — вот в чем вопрос!

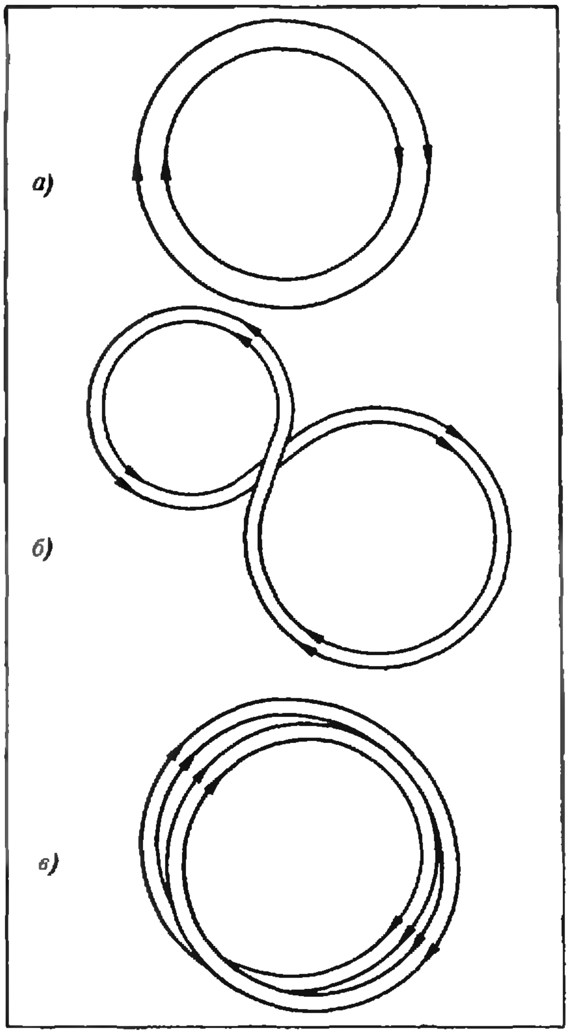


Рис 3 Удвоение жгута магнитных линий

рода — скажем, последовательные повороты вокруг взаимно перпендикулярных осей и растяжения.

Процедуру устранения неэквивалентности удвоенного жгута исходному может проделывать электрическое сопротивление: джоулевы потери приводят к сглаживанию и отсоединению магнитных линий в местах наибольшего скручивания. Сопротивление помешает также жгуту сделаться сколь угодно малым в поперечнике после многих растяжений, которые имеют место в каждом акте удвоения. Сопротивление будет удерживать диаметр жгута почти постоянным.

Описанный пример генератора прост и нагляден. Но станет ли Природа работать таким образом? Ведь для этого движение проводящей среды должно быть организовано особым образом.

Посмотрим, какие движения совершает среда в космических условиях.

Неоднородное вращение

Простейшее движение, характерное для всех планет, звезд и галактик,— вращение. Однако, если все части тела вращаются с одинаковой угловой скоростью, то есть вращение однородно, то и магнитные линии будут вращаться с телом, оставаясь практически неизменными. Для изгибов, растяжений и переворотов линий нужны относительные движения соседних частиц плазмы, то есть вращение должно быть неоднородным. Ясно, что твердые тела вращаются однородно, иначе они разрушаются. Жидкое или газообразное тело способно совершать и неоднородное вращение. Наблюдения за Солнцем показали, что экваториальные части нашей звезды совершают полный оборот на несколько суток быстрее, чем околополярные области. Косвенные данные указывают на то, что внутренние, непосредственно не наблюдаемые, области Солнца вращаются еще быстрее. Неоднородно вращается газовый диск Галактики: за одно и то же время его внутренние части делают больше оборотов, чем внешние.

Чтобы наглядно представить себе неоднородное вращение, вообразите, что перед вами несколько концентрических кругов каруселей (рисунок 4, *а*). Те, что ближе к центру, крутятся, скажем, быстрее каруселей, расположенных дальше от центра.

Посадим на карусели по нескольку человек, так, чтобы все они расположились вдоль одного диаметра. Дадим им в руки резиновую веревку, закрепленную на концах диаметра и имитирующую магнитную линию, и включим вращение. Легко убедиться, что за несколько оборотов резиновая веревка (магнитная линия) скрутится в спираль (рисунок 4, *б*). Первоначально линия располагалась вдоль диаметра, теперь она стала близка к окружности. Таким образом, неоднородное вращение сделало из радиального магнитного поля поле, направленное почти вдоль азимута.

Можно в качестве исходной взять магнитную линию, которая «провисает» сверху вниз и изогнута в сторону вращения. В этом случае закручивание приведет к образованию двух колец с противоположно направленным полем. Одно из колец будет расположено выше каруселей, другое — ниже. Но, как и в предыдущем случае, встает задача поддержания исходного радиального поля.

Не помогут ли другие движения? Нельзя ли организовать что-то похожее на восьмерку?

Спиральность

Для космической среды типично хаотическое, запутанное, как говорят, турбулентное движение. Такое движение мы видим, наблюдая, скажем, течение воды в горной речке или вблизи водоворота. Свойственно оно и окружающему нас воздуху. Именно благодаря хаотическим движениям воздуха в нем быстро распространяются, например, дым сигареты или запах духов.

В силу своей хаотичности, «неорганизованности» турбулентные движения электропроводящей среды (плазмы) обычно быстро запутывают и измельчают любое магнитное поле. Однако в космических условиях турбулентность обладает некоторым «организованным» свойством.

Представим себе вместо реального турбулентного течения совокупность отдельных вихрей-винтов, сочетающих поступательное движение с вращением вокруг своей оси. Пусть часть из них имеет правовинтовое вращение, а часть — левовинтовое.

Спиральное движение вихря способно поднять у магнитной линии петлю, похожую на греческую букву омега (рисунок 5), и затем повернуть ее. Однако вихри правовинтовой и левовинтовой закрутки дадут петли с противоположным направлением поля. Спрашивается: каков будет эффект воздействия большой совокупности вихрей с различной закруткой, то есть реального турбулентного течения?

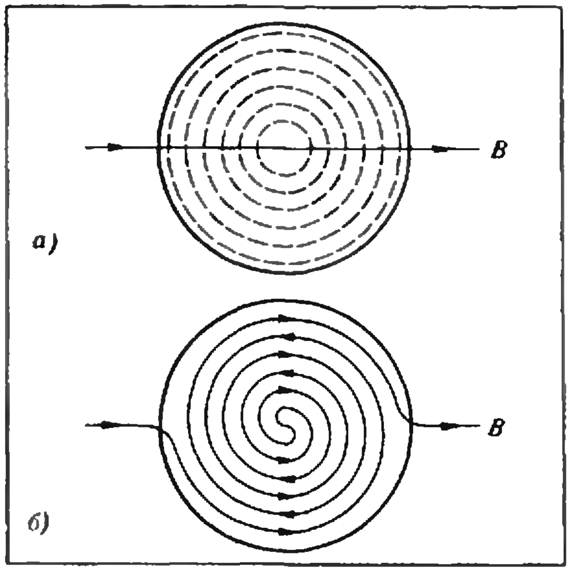


Рис. 4. За несколько оборотов неоднородно вращающегося тела горизонтальная магнитная линия превращается в спираль

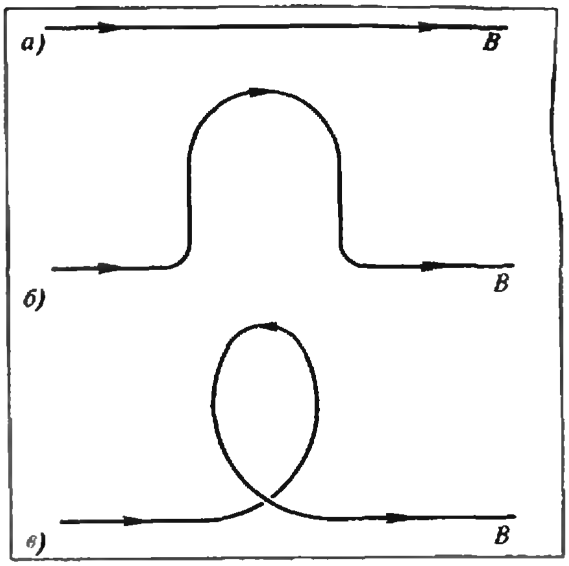


Рис. 5. Спиральное движение среды вытягивает магнитную линию (а) в петлю (б) и разворачивает эту петлю (в). Создается ток, параллельный полю.

В однородной ситуации число правовинтовых и левовинтовых вихрей одинаково. Такая совокупность винтов обладает свойством зеркальной симметрии. В самом деле, поставим в любом месте зеркало и посмотрим на отражение вихрей: в зеркале правовинтовые вихри переходят в левовинтовые и наоборот. Но поскольку число правовинтовых вихрей было равно числу левовинтовых, то картина в целом останется неизменной.

Теперь вспомним, что космические тела вращаются. Представим себе такую ситуацию. В слое жидкости плотность у дна больше, чем у поверхности; весь слой вращается вокруг некоторой оси, проходящей через него. В этом слое имеются вихри (и право-, и левовинтовые). Как они будут себя вести?

Каждый вихрь вращается «сам по себе» и, кроме того, может подниматься или опускаться в слое. Любой поднимающийся вихрь будет расширяться подобно пузырю, попадающему в более разреженную среду. Возникающее таким образом боковое движение (рисунок 6) будет отклоняться от чисто радиального из-за общего вращения слоя (подобно тому, как отклоняется от радиального курса человек, идущий по

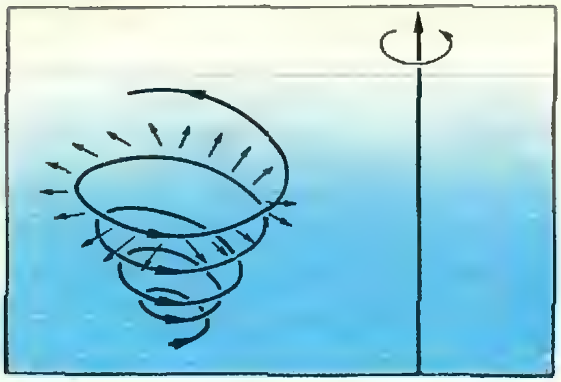


Рис. 6. Вращающийся слой плазмы с уменьшающейся вверх плотностью. Вращение слоя как целого сообщает дополнительную угловую скорость поднимающемуся и раздувающемуся вихрю.

вращающемуся кругу). А это значит, что вихрю сообщается еще одно дополнительное вращение, вызванное общим вращением слоя.

Очевидно, этот эффект воздействия общего вращения одинаков для всех поднимающихся вихрей — и право-, и левовинтовых. На опускающиеся и потому сжимающиеся вихри общее вращение действует в противоположную сторону, но знак винта будет тем же, что и у поднимающихся вихрей. В итоге, *действие общего вращения на совокупность вихрей в неоднородном слое приведет к тому, что станет больше винтов того знака, который диктуется общим вращением.* Но ситуация с преобладанием, скажем, левовинтовых вихрей над правовинтовыми, как легко проверить, уже не будет обладать свойством зеркальной симметрии.

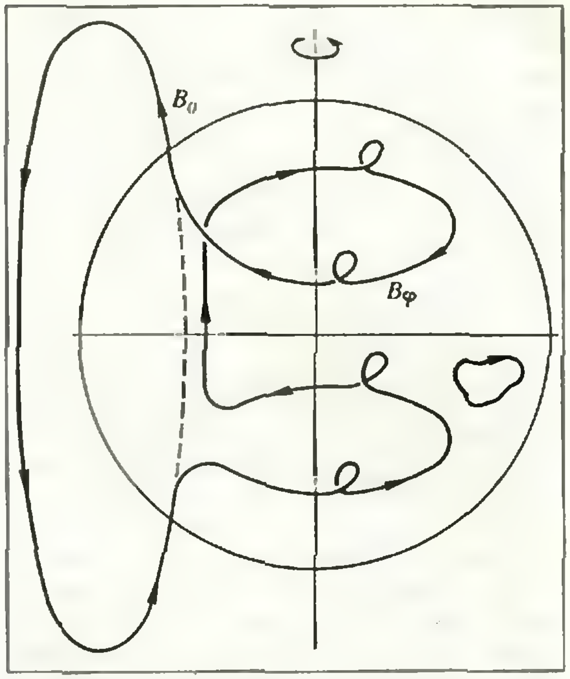


Рис. 7. Совместное действие на магнитное поле неоднородного вращения и спиральных движений. Вращение из исходного поля (B_0) накручивает азимутальное поле (B_φ). Спиральные движения поднимают петли этого поля, они открываются, поворачиваются, растягиваются и сливаются, давая новое поле, направленное параллельно или антипараллельно исходному полю B_0.

Такую турбулентность называют спиральной. *Несмотря на ее хаотичность, здесь в среднем имеется некоторая дополнительная закрутка.* Спиральность и есть то организованное свойство, которым отличается турбулентность во вращающихся неоднородных по плотности космических телах (в ядрах планет, в звездах и галактиках).

Обычно спиральная турбулентность в космических телах действует совместно с неоднородным вращением. Как мы видели (рисунок 4), неоднородное вращение превращает поле, направленное по диаметру, в поле, направленное почти по азимуту, точнее — по спирали. Спиральная турбулентность поднимает у азимутального поля много петель и поворачивает их в различные стороны (рисунок 7). Но поскольку винты одного знака преобладают, то после сложения петель останется некоторое общее радиальное поле определенного направления. Если новое радиальное после совпадает по направлению с первоначальным, то происходит усиление поля. Когда направление получающегося поля *противоположно исходному,* то возможно «обращение» поля. Это позволяет объяснить явление повторяющихся обращений направления поля, которые наблюдаются на Солнце и других звездах. Заметим, что в случае с восьмеркой мы получили динамо с непрерывным усилением магнитного поля без обращений.

Не следует упускать из виду, что гидромагнитное динамо работает в условиях сильного турбулентного запутывания и уничтожения магнитных линий. Таким образом, рост или поддержание поля происходят на фоне непрерывного рождения новых и отмирания старых магнитных полей.

Гидромагнитное динамо широко используется для описания магнитных полей звезд, планет и галактик. В частности, гидромагнитное динамо является, по-видимому, основным «двигателем» повторяющейся солнечной активности.

Умеете ли вы считать?

В. В. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ

Последние десятилетия характеризуются бурным развитием и распространением вычислительной техники. Электронные вычислительные машины, настольные, карманные и прочие счетные устройства позволяют значительно сократить время всевозможных расчетов. И порой от школьников можно услышать, что «уметь считать» сейчас вообще не нужно. Но как это ни парадоксально, наиболее эффективную помощь техника оказывает именно тому, кто умеет грамотно вычислять.

Мы попробуем показать читателю трудности, возникающие при практических расчетах, а также дать некоторые советы, как с ними справляться.

Озадачивающие примеры

Пример 1. При вычислении на настольной вычислительной машинке выражения $x=1/3\cdot 3/5\cdot 5/7\cdot 7/8\cdot 8$ с точностью до двух цифр после запятой вместо ожидаемой единицы получается $x=0{,}88$. Если же вычислять $1/8\cdot 8/7\times 7/5\cdot 5/3\cdot 3$, то получится 0,90.

Пример 2. При сложении на ЭВМ чисел $1+1/2+1/3+1/4+\ldots+1/250\,000$ с пятью знаками после запятой слева направо получается 12,88777, а справа налево получается 12,95821; мы видим, что разница в ответах больше, чем каждое из большинства слагаемых.

Пример 3. Приближенное значение $\sqrt{290}$ равно 17,029 (ошибка меньше 0,0004). При вычислении дроби $1/(\sqrt{290}-17)$ с тремя цифрами после запятой получается 34,483. Однако если дробь преобразовать к виду $\sqrt{290}+17$, то результат сложения будет 34,029, с ошибкой меньшей 0,0004. Стало быть, ответ 34,483 гораздо грубее.

Пример 4. Решением системы

$$\begin{cases} x+5y=17, \\ 1{,}5x+7{,}501y=25{,}503 \end{cases}$$

является пара чисел (2; 3). Если изменить число 25,503 всего на 0,003 —

$$\begin{cases} x+5y=17, \\ 1{,}5x+7{,}501y=25{,}5, \end{cases}$$

то решением будет пара (17; 0). Если же в исходной системе число 7,501 заменить на 7,499 —

$$\begin{cases} x+5y=17, \\ 1{,}5x+7{,}499y=25{,}503, \end{cases}$$

то решением будет (32; —3).

Подобные примеры могут смутить начинающего вычислителя. Чтобы правильно ориентироваться в похожих ситуациях, нужно знать:

1) какие бывают ошибки и откуда они берутся,

2 как количественно характеризовать ошибку,

3) как грамотно организовать вычисления.

Классификация ошибок

Ошибки можно разделить на три типа*).

1) Ошибки, содержащиеся в исходной информации. Исходными данными во всякой задаче обычно служат либо часто встречающиеся константы, либо величины, полученные в результате измерений. Но любой измерительный прибор обладает какой-то определенной разрешающей способностью. Например, на торговых весах невозможно уловить разницу в 1 г, так что, уплатив за 100 г масла, вряд ли стоит верить, что вы получите ровно 100 г, а не 101 г или 99 г. Ошибки измерений могут возникнуть также из-за неверного снятия показания прибора либо в результате грубого просмотра.

Исключая два последних источника ошибок, вызванных субъективными причинами, остается, тем не менее, принять тот факт, что ошибки в исходных данных неизбежны и обусловлены точностью измерительного прибора. *Никакие манипуляции с исходными данными не позволят гарантировать, что результат обладает большей точностью, чем данные*. Утверждения вроде следующего: «площадь нарисованного на бумаге круга, радиус которого измерялся линейкой, равна 3206,9569 мм^2», — по меньшей мере наивны.

2) Ошибки округления. Эти ошибки тесно связаны со спецификой приближенного счета. Дело в том, что никакое вычислительное «средство», будь то ЭВМ или человек, не может производить арифметические операции с бесконечными последовательностями. Таким образом, все данные и промежуточные результаты должны быть записаны при помощи ограниченного набора цифр и, следовательно, как правило, неточны.

3) Ошибки ограничения. Очень многие вычисления описываются как бесконечная или астрономически большая последовательность уточнений результата. Естественно, приходится обрывать такой процесс в какой-то момент и довольствоваться последним полученным приближением. Примером может служить процесс вычисления $\sqrt{a}$ методом последовательных приближений:

$$x_1=(a+1)/2,\ \ldots,\ x_{n+1}=(a/x_n+x_n)/2,\ldots$$

Итак, мы видим, что ошибки неизбежны. Значит, необходимо уметь их количественно оценивать, чтобы получать результаты с необходимой точностью.

Распространение ошибок

Поскольку каждый вычислительный процесс в конечном счете сводится к выполнению четырех арифметических действий, посмотрим, что происходит с ошибками при выполнении этих действий.

Для простоты будем считать все рассматриваемые величины (которые могут быть исходными данными, промежуточными или конечными результатами вычислений) положительными. Их точные значения будем обозначать $\underline{x}$, $\underline{y}$, ..., соответствующие приближенные — x, y, ...

Характеристиками точности приближения служат *абсолютная ошибка* (или погрешность) $\Delta_x=\underline{x}-x$ и *относительная ошибка* $\omega_x=\Delta_x/x$. В таблице 1 собраны формулы, выражающие зависимость абсолютной и относительной ошибок результатов арифметических действий от ошибок данных (проверьте эти формулы самостоятельно!).

При практических измерениях и расчетах точные значения абсолютной и

---

*) О различных источниках ошибок, возникающих при обработке экспериментальных данных, и о том, что получается, если ими пренебрегать, рассказывалось также в статье А. Н. Зайделя «Обман или заблуждение?» («Квант», 1983, № 5, с. 24)

Таблица 1

Абсолютная ошибка	Относительная ошибка
$\Delta_{x+y}=\Delta_x+\Delta_y$	$\omega_{x+y}=\frac{x}{x+y}\omega_x+\frac{y}{x+y}\omega_y$
$\Delta_{x-y}=\Delta_x-\Delta_y$	$\omega_{x-y}=\frac{x}{x-y}\omega_x-\frac{y}{x-y}\omega_y$
$\Delta_{x\cdot y}=x\Delta_y+y\Delta_x+\Delta_x\Delta_y$	$\omega_{x\cdot y}=\omega_x+\omega_y+\omega_x\omega_y$
$\Delta_{x/y}=\left(\frac{\Delta x}{y}-\frac{x}{y}\,\frac{\Delta y}{y}\right):\left(1+\frac{\Delta y}{y}\right)$	$\omega_{x/y}=(\omega_x-\omega_y)\,\frac{1}{1+\omega_y}$

относительной ошибок бывают неизвестны (потому что неизвестны точные значения рассматриваемых величин). Однако, зная точность измерительных приборов, правила, по которым производилось округление промежуточных результатов и т. п., обычно можно гарантировать, что абсолютная или относительная ошибки не превосходят по модулю некоторых величин — *границ* этих ошибок. Если заданы границы ошибок для величин x и y, то из формул таблицы 1 нетрудно получить границы ошибок для $x+y$, $x-y$, xy и x/y (см. таблицу 2, в которой предполагается, что $|\Delta_x|<\Delta_1$, $|\Delta_y|<\Delta_2$, $|\omega_x|<\omega_1$, $|\omega_y|<\omega_2$).

Таблица 2

Граница абсолютной ошибки	Граница относительной ошибки
$\lvert\Delta_{x+y}\rvert<\Delta_1+\Delta_2$	$\lvert\omega_{x+y}\rvert<\frac{x}{x+y}\omega_1+\frac{y}{x+y}\omega_2$
$\lvert\Delta_{x-y}\rvert<\Delta_1+\Delta_2$	$\lvert\omega_{x-y}\rvert<\frac{x}{\lvert x-y\rvert}\omega_1+\frac{y}{\lvert x-y\rvert}\omega_2$
$\lvert\Delta_{x\cdot y}\rvert<x\Delta_2+y\Delta_1+\Delta_1\Delta_2$	$\lvert\omega_{x\cdot y}\rvert<\omega_1+\omega_2+\omega_1\omega_2$
$\lvert\Delta_{x/y}\rvert<\frac{y\Delta_1+x\Delta_2}{y^2}:\left\lvert 1+\frac{\Delta y}{y}\right\rvert$	$\lvert\omega_{x/y}\rvert<(\omega_1+\omega_2)\times\left\lvert\frac{1}{1+\omega_y}\right\rvert$

В этой таблице особняком стоит формула для абсолютной ошибки частного $\Delta_{x/y}$: в нее входит сама ошибка Δ_y, а не ее граница Δ_2, поэтому $|\Delta_{x/y}|$ может оказаться большим при $\Delta_y<0$, даже если Δ_1 и Δ_2 малы.

Анализ примеров

Попробуем сейчас понять, чем объясняются «странности», с которыми мы столкнулись в приведенных в начале статьи примерах.

Пример 1. По правилам обычной арифметики в произведении дробей $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{1}$ можно, не меняя результата, как угодно переставить числители, а также знаменатели. Из нашего примера видно, что в арифметике приближенных вычислений это уже неверно. Чтобы понять, как возникает расхождение в результатах, возьмем совсем простой пример — вычислим двумя способами выражение $(1\cdot3)/3$ (с точностью до двух знаков после запятой). Имеем

$$1{,}0\times3{,}0=3{,}0,\quad 3{,}0\times3{,}0=1{,}0,$$

но, с другой стороны,

$$1{,}0/3{,}0=0{,}33,\quad 0{,}33\times3{,}0=0{,}99.$$

Если арифметических действий много, то разница в ответах может быть еще большей.

Пример 2 показывает, что результат приближенного сложения нескольких чисел может зависеть от порядка, в котором оно производится. Рассмотрим более наглядный пример. Пусть надо вычислить сумму

$$100+\underbrace{0{,}1+0{,}1+\ldots+0{,}1}_{2000\ \text{раз}},$$

округляя все результаты до трех значащих цифр. (Напомним, что *значащими* называются все цифры в записи числа, начиная с первой слева ненулевой; скажем, в числах 0,017 и 1,7 — по две значащие цифры, в числе 170 — три.) Если вести сложение слева направо, то сначала получим $100+0{,}1=100{,}1$ и после округления опять 100; этот результат, очевидно, не изменится и в дальнейшем. При сложении справа налево получим последовательно: $0{,}1+0{,}1=0{,}2$, $0{,}2+0{,}1=0{,}3$, ... $99{,}9+0{,}1=100$. Следующая тысяча слагаемых результата не изменит, а при последнем сложении получим $100+100=200$. Это уже лучше, но все еще далеко от точного ответа 300, получить который можно сложив тысячу чисел 0,1, потом еще тысячу 0,1 и затем три полученные сотни. Этот пример делает достаточно понятным следующее практическое правило:

суммирование большого числа слагаемых должно быть организовано так, чтобы на каждом шагу складывались по возможности близкие числа.

Чтобы скрупулезно следовать этому правилу, пришлось бы перебирать очень много разных вариантов суммирования. Обычно поступают проще: располагают все слагаемые по возрастанию и складывают их последовательно от наименьшего к наибольшему. Можно доказать, что этот способ лучше любого другого, если не расставлять скобок (не разбивать слагаемые на группы).

Пример 3. В этом примере первый, «плохой», способ счета дает значительную ошибку по двум причинам: сначала мы находили *разность близких чисел* $\sqrt{290}$ и 17, а затем *делили* (единицу) *на эту малую разность*. Очевидно, относительная ошибка разности близких чисел x и y может оказаться гораздо больше, чем их собственные ошибки ω_x и ω_y, а при делении на малое число может сильно вырасти абсолютная ошибка (см. формулы для ω_{x-y} и $\Delta_{x/y}$ в таблице 1). Поэтому

следует по возможности избегать вычитания близких чисел и деления на малые числа.

Пренебрежение этими правилами порой приводит к неприятностям даже в самых, казалось бы, безобидных ситуациях. Попробуем, например, решить квадратное уравнение $x^2+9{,}9x-1=0$, округляя все результаты до двух значащих цифр. Найдем дискриминант: $D=9{,}9^2+4=102{,}01$; после округления получим $D=100$. Если вычислять корни по обычной формуле для решения квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ $(x_{1,2}=(-p\pm\sqrt{D})/2)$ мы получим $x_1=(-9{,}9+10)/2=0{,}05$, $x_2=-9{,}95\approx-10$. Корень x_2 (после округления) совпал со своим точным значением, но x_1 отличается от точного значения 0,1 в 2 раза! При вычислении x_1 вычитались близкие числа 10 и 9,9 и их верные цифры просто взаимно уничтожались. Избежать ошибки здесь можно, заменив выражение $(-p+\sqrt{D})/2$ равным ему выражением $-2q/(p+\sqrt{D})=-2/(9{,}9+10)\approx0{,}1$, не содержащим разности близких чисел. (Но заметим, что при вычислении по этой формуле корня x_2 получается $x_2=-20$!)

Пример 4 иллюстрирует ситуацию, когда очень маленькая разница в исходных данных (коэффициентах системы линейных уравнений) ведет к очень большой разнице в ответах. Если в рассмотренных системах мы не можем гарантировать правильность *всех* цифр коэффициентов, то нельзя доверять ни одной цифре ответов. Как возникла эта ситуация? Дело в том, что вторые уравнения всех трех систем с высокой точностью совпадают с уравнением $1{,}5x+7{,}5y=25{,}5$, которое просто эквивалентно первому уравнению $x+5y=17$. С геометрической точки зрения все эти уравнения задают близкие прямые. Но ясно, что одна прямая может быть очень близка к другой и при этом пересекать ее в любой заданной точке. Поэтому при «малом шевелении» одной из двух «почти совпадающих» прямых точка их пересечения может сдвинуться весьма значительно. С алгебраической же точки зрения неустойчивость решений наших систем относительно изменений коэффициентов объясняется тем, что при нахождении неизвестных нам неизбежно придется делить на малый знаменатель. А это, как мы видели, ведет к большим ошибкам.

Какие же можно сделать выводы? Прежде всего, нужно ясно понимать, что даже хорошая точность исходных данных еще не гарантирует столь же хорошую точность результата. При этом результат может зависеть от способа вычисления и даже от порядка выполнения операций. Таким образом,

одной из главных задач при приближенных вычислениях является задача о выборе наилучшей последовательности вычислений.

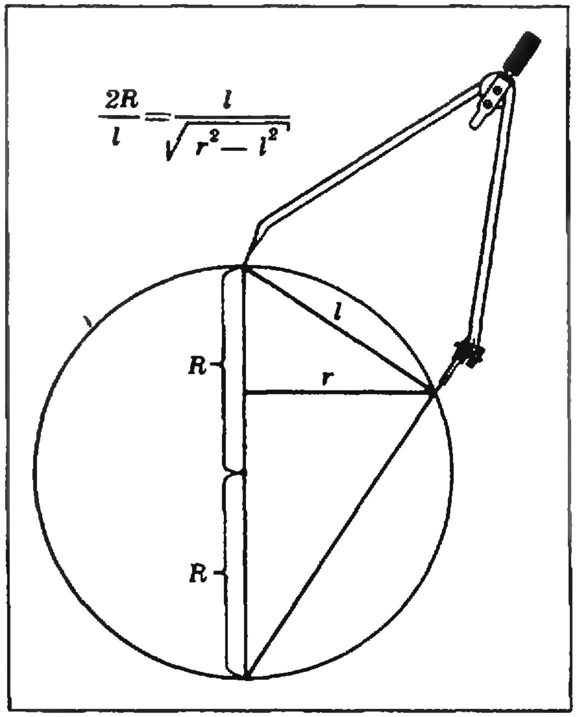
Продумывая последовательность вычислений, кроме уже приведенных правил, нужно учитывать и то, что каждая операция может вносить свою ошибку округления. Поэтому дадим еще один совет:

старайтесь свести к минимуму число операций.

Две практические задачи

Задача 1. На бумаге нарисован параллелограмм. Требуется найти его площадь и оценить ошибку. (В нашем распоряжении имеются линейка, циркуль и транспортир).

Известны две формулы для площади параллелограмма: $S=ab\sin\alpha$ и $S=ah$ (a, b — его стороны, α — угол между ними, h — высота, опущенная на сторону a). Ясно, что лучше взять вторую формулу, потому что она требует на одно измерение и на одну арифметическую операцию меньше, чем первая,



к тому же в первой формуле нужно находить $\sin\alpha$. (Правда, построение высоты циркулем и линейкой тоже вносит некоторую погрешность, но на общую ошибку она влияет мало.) Допустим, что измерения дали такие результаты: $a=20{,}2$ см, $h=11{,}3$ см. Поскольку они проводились линейкой, $|\Delta_a|<0{,}1$ см, $|\Delta_h|<0{,}1$ см, а относительные ошибки не превосходят 0,01.

Умножая a на h, получаем $S=228{,}26$ см^2. При этом можно гарантировать, что найденное число отличается от истинного не более чем на $20{,}2\cdot 0{,}1+11{,}3\cdot 0{,}1+0{,}1^2=3{,}16$ (см^2) (см. формулу для $|\Delta_{xy}|$ в таблице 2). Это может показаться удивительным — ошибка в 0,1 см в исходных данных приводит к ошибке, большей 3 см^2 в результате! Но именно такова разница между площадями в двух предельных случаях: $a=20$ см, $h=11{,}2$ см и $a=20{,}3$ см, $h=11{,}4$ см.

Задача 2. Имея в распоряжении циркуль и линейку (с делениями), найти площадь поверхности бильярдного шара.

Найдем сначала радиус шара R. Для этого нарисуем на шаре циркулем окружность и отметим на ней три точки A, B, C. Измеряя циркулем попарные расстояния между этими точками, перенесем этот треугольник на плоскость и опишем около него окружность. Пусть r — радиус этой окружности, а l — исходный раствор циркуля (см рисунок). Легко видеть, что тогда $R=l^2/2\sqrt{l^2-r^2}$, то есть искомая площадь равна

$$S=4\pi R^2=\frac{\pi l^2}{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}.$$

Проанализируем эту формулу. Если r близко к l (то есть раствор циркуля мал по сравнению с размерами шара), в знаменателе будет стоять разность близких чисел. Поэтому ошибка результата может быть очень большой. Значит, нужно постараться, чтобы радиус окружности как можно больше отличался от l. Этого легко добиться для бильярдного шара (особенно, если циркуль с кривыми ножками). Но если шар большой, получить заслуживающий доверия результат обычным циркулем практически невозможно.

Например, при $l=6{,}0$ см, $r=3{,}0$ см получаем $S=48$ см^2, причем $|\Delta_S|<2{,}2$ см^2, если граница абсолютной ошибки измерений составляет 0,1 см, — это вполне удовлетворительная точность. Но допустим, что измерения на большом шаре дали результаты $l=6{,}3$ см, $r=6{,}0$ см и, соответственно, $S=427$ см^2. Тогда при изменении данных на 0,1 см получим для $l=6{,}2$ см, $r=6{,}1$ см — $S=1201$ см^2, а для $l=6{,}4$ см, $r=5{,}9$ см — $S=273$ см^2. Следовательно, приближение $S=427$ см^2 в этом случае очень и очень грубое и находить таким способом площадь поверхности большого шара нельзя. Нужно либо найти циркуль побольше, либо заменить линейку и циркуль более точными инструментами, либо... придумать другой способ вычисления радиуса.

Упражнения

1. Всегда ли верны следующие равенства в арифметике приближенных вычислений:

а) $(a+b)-c=a+(b-c)=(a-c)+b$,
б) $(ab)/c=a(b/c)=(a/c)b$, в) $(a-b)c+ac-bc$,
г) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$?

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}11{,}04x-10{,}49y=1,\\10{,}49x-10{,}04y=0,\end{cases}$$

округлив коэффициенты: а) до двух, б) до трех значащих цифр. Сравните результаты с ответом, полученным при вычислениях с четырьмя значащими цифрами.

3. Придумайте в примере 1 наихудшую последовательность вычислений.

Литература

1. Иванова Т. П., Пухова Г. В. Программирование и вычислительная математика. — М.: Просвещение, 1978.

2. Мак-Кракен Д., Дори У. Численные методы и программирование на фортране. — М.: Мир, 1977.

Волны кристаллизации

Кандидат физико-математических наук
А. Я. ПАРШИН

Можно ли на поверхности твердого тела возбудить волны, подобные обычным волнам на воде? Поверхность жидкости, как мы знаем, может перемещаться и испытывать колебания просто благодаря текучести. В твердом теле такой процесс невозможен (на то оно и твердое!). Однако можно, оказывается, заставить двигаться поверхность твердого тела, например кристалла, оставляя само тело неподвижным. Для этого достаточно, чтобы кристалл рос или плавился — при этом его поверхность непрерывно перемещается, хотя само вещество в объеме кристалла остается совершенно неподвижным.

Но означает ли это, что таким путем можно возбудить свободные колебания поверхности кристалла, обусловленные периодической сменой процессов плавления и кристаллизации? Представьте себе, например, плоскую поверхность кристалла льда, находящегося в *равновесии* с водой при температуре 0 °С. Что произойдет, если в каком-то месте нарушить равновесие, сделав на поверхности лунку (или выступ)? Возникнут ли при этом волны кристаллизации — плавления, аналогичные волнам, образуемым упавшим в воду камнем?

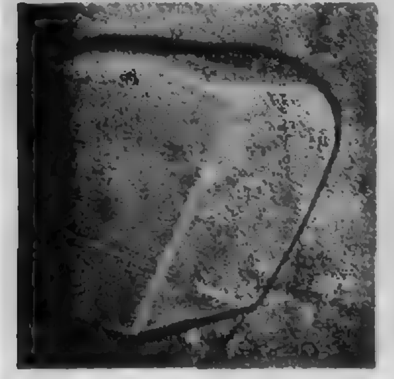
Оказывается — нет, в обычных веществах это невозможно. Дело в том, что интересующие нас волны, как и вообще любые свободные колебания, могут существовать только в условиях, когда необратимые потери энергии достаточно малы. Эти потери вызывают затухание колебаний, энергия колебаний при этом переходит в тепло. Если потери велики, движение становится апериодическим, то есть колебаний вообще не возникает. Рост и плавление обычных кристаллов всегда сопровождается очень *большими потерями* энергии (вызванными, главным образом, большим значением удельной теплоты плавления). Поэтому в нашем воображаемом эксперименте вместо волн кристаллизации мы наблюдали бы лишь очень медленное зарастание первоначальной лунки.

И все-таки волны кристаллизации существуют! Правда, их удается наблюдать лишь при температурах, близких к абсолютному нулю (ниже 1 К) и только в гелии — веществе, совершенно уникальном по своим физическим свойствам. Эти свойства — тема для очень обстоятельного разговора, здесь же мы лишь упомянем о двух из них, имеющих самое прямое отношение к вопросу о волнах кристаллизации.

Во-первых, гелий — единственное вещество, которое может оставаться в жидком состоянии вплоть до абсолютного нуля и кристаллизуется лишь при повышенных давлениях (выше 25 атм). Во-вторых, рост и плавление кристаллов гелия при очень низких температурах сопровождается ничтожными потерями энергии, причем чем ниже температура, тем потери меньше. Поэтому кристаллы гелия могут расти и плавиться с фантастическими, по обычным меркам, скоростями и, что очень важно, даже при чрезвычайно слабых внешних воздействиях. А это и есть главное условие, необходимое для существования волн кристаллизации.

Посмотрите на кристаллик гелия, изображенный на фотографии. Кристаллик размером около 3 мм, выращенный при температуре 0,5 К, висит на стенке экспериментальной камеры, «прицепившись» к ней своим левым боком. Со всех остальных сторон он окружен жидким гелием под давлением 25 атм. *Возбудить волны кристаллизации* на таком кристаллике столь же просто, как возбудить волны в стакане воды — для этого достаточно чуть потрясти камеру. Именно такой момент зафиксирован на фотографии.

Любопытно, что не вся поверхность кристалла обладает способностью к сверх*быстрой кристаллизации*. Участки, определенным образом ориентированные относительно кристаллографических осей (в настоящее время известны три такие «особые» ориентации), выглядят как идеально плоские грани и остаются совершенно неподвижными, то есть ведут себя как поверхность обычного кристалла, имеющего естественную огранку. Кстати, наличие этих «особых» граней наглядно подтверждает, что мы действительно имеем дело с кристаллом, причем с кристаллом высокого качества. Все остальные участки поверхности скруглены и быстро колеблются при малейшем внешнем воздействии (в данном случае период колебаний порядка 0,01 с, а их амплитуда ~ 0,1 мм).



15 апреля - День советской науки

XX век   время бурного развития науки; время, когда судьбу научного исследования решает не гениальный ученый-одиночка в окружении самодельных приборов, а целый научный коллектив, оснащенный сложной аппаратурой, изготовленной многими отраслями промышленности на основе самой совершенной технологии. Организованная СССР серия специализированных международных выставок «Аппаратура и приборы для научных исследований» была призвана продемонстрировать современный уровень оснащенности лабораторий ученых. С 6 по 20 сентября прошлого года в Москве в парке Сокольники и на Красной Пресне проходила III выставка из этой серии — «Наука-83». В ней приняли участие 20 стран.

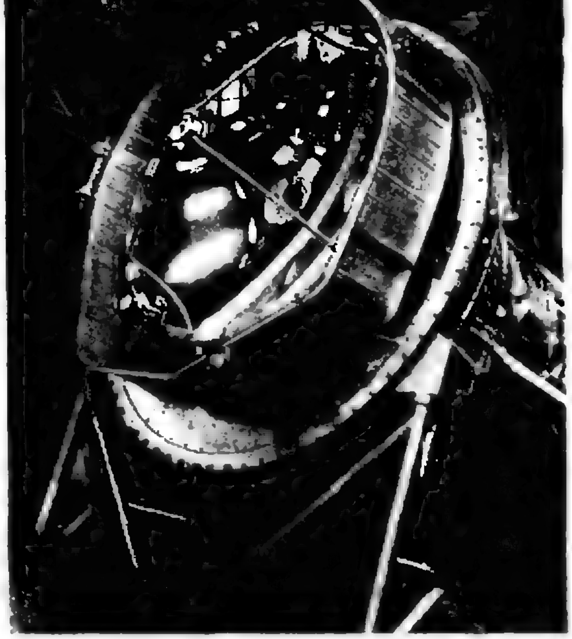
Несмотря на сложности международной обстановки, выставка способствовала широкому обмену достижениями и опытом, послужила дальнейшему прогрессу науки и техники и создала благоприятные условия для укрепления научно-технического сотрудничества и расширения торгово-экономических связей между многими странами мира.

Впервые для демонстрации успехов, достигнутых нашей страной в области разработки и производства аппаратуры и приборов для научных исследований, был организован отдельный павильон Советского Союза. Экспозиция СССР состояла из 730 экспонатов, половина из которых демонстрировалась в действии.

Здесь приводятся фотографии трех экспонатов, демонстрировавшихся на выставке.

В. М. Каслин

Рефрижератор КР-81 для получения сверхнизких температур (0,36 К) с помощью гелия-3 (^{3}He). В нем впервые использован для ожижения гелия-3 метод адиабатического расширения, что позволило отказаться от громоздких насосных систем и создать компактный портативный прибор, который можно использовать в космических аппаратах, аэростатах и т. п.



Бортовой субмиллиметровый телескоп БСТ-1М   уникальное инженерно-техническое сооружение, оснащенное самым большим для таких телескопов зеркалом (диаметр 1,5 м) и автономной системой охлаждения (до гелиевых температур) рефрижераторного типа. Он предназначен для проведения астрофизических и аэрономических исследований с борта орбитальной пилотируемой станции «Салют-6» в областях спектра 60—130 и 300—1000 мкм и на ультрафиолетовой линии 0,256 мкм. В этой области спектра можно получать информацию о процессах, происходящих в верхних слоях земной атмосферы. С другой стороны, эта область спектра интересна также тем, что позволяет изучать холодные газовые космические облака — возможные места образования звезд.

Газоанализатор на кислород типа ГМ-6А предназначен для определения кислорода в смеси газов при очень малом его относительном содержании (порядка 10^{-5}). Этот прибор основан на явлении изменения теплопроводности кислорода под действием магнитного поля. Аналогичные эффекты в других газах приблизительно в миллион раз меньше. Отсюда, в частности, появилась возможность с успехом использовать такие приборы для быстрого определения степени негерметичности вакуумных объемов путем определения скорости натекания в них атмосферного воздуха (в котором содержится около 20 % кислорода). При использовании традиционных, неизбирательных к кислороду вакуумметров для получения правильных результатов приходится дожидаться прекращения газоотделения с внутренних поверхностей объемов, которое обычно довольно велико (особенно за счет легкоконденсируемых веществ, в частности, паров воды). Разработанный прибор аналогов в мире не имеет. Он вызывает большой интерес и находит все большее применение в народном хозяйстве.

$\frac{|A_1Z|}{|A_2Z|}=\frac{m_2}{m_1}$

Центр тяжести облегчает решение

Кандидат физико-математических наук
М. Б. БАЛК,
член-корреспондент АПН СССР
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

Решения многих геометрических задач можно получить, привлекая свойства центра масс (или, как еще говорят, «барицентра») системы материальных точек. Эти «барицентрические» решения используют понятия, заимствованные из механики: масса, материальная точка, центр масс, правило рычага, и опираются на наглядные физические соображения. Как говорил выдающийся французский математик и физик А. Пуанкаре (1854—1912), эти соображения, «во-первых, дают нам предчувствие решения, и, во-вторых, подсказывают правильный ход рассуждений». Вместе с тем «барицентрические решения» являются, как мы увидим, математически совершенно строгими.

Материальной точкой будем называть пару (A, m), где A — произвольная точка, а m — действительное число («масса», которая «сосредоточена» в точке A). Заметим, что в математических приложениях число m можно считать не только положительным (как в механическом понимании массы), но и отрицательным. Чтобы не писать лишних скобок, условимся материальную точку (A, m) обозначать через mA.

Теорема (о центре масс). *Пусть задана система материальных точек*

$$m_1A_1,\ m_2A_2,\ \ldots,\ m_nA_n \qquad (1)$$

с ненулевой суммарной массой $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$. *Тогда существует единственная точка* Z, *удовлетворяющая условию* (рис. 1)

$$m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{ZA_n} = \vec{0}. \quad (2)$$

Эта точка Z *называется центром масс (или барицентром) системы* (1).

Доказательство. Фиксируем произвольную точку O. Равенство (2) равносильно соотношению

$$m_1(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OZ}) + m_2(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OZ}) + \ldots + m_n(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OZ}) = \vec{0},$$

то есть соотношению

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\overrightarrow{OZ} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OA_n}, \quad (3)$$

или, что то же самое, соотношению

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{m}(m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OA_n}). \quad (4)$$

Так как вектор, стоящий в правой части равенства (4), известен (поскольку точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, O и числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ заданы), то точка Z, удовлетворяющая соотношению (4) (а значит, и соотношению (2)), существует и определена однозначно.

Следствие. *Пусть* Z — *центр масс системы материальных точек* (1). *Тогда для любой точки* O *справедливы равенства* (3) *и* (4). *Обратно, если для какой-либо одной точки* O *справедливо равенство* (3) (*или* (4)), *то* Z — *центр масс системы* (1).

Это непосредственно вытекает из того, что равенства (2), (3) и (4) равносильны.

Другим важным следствием теоремы о центре масс является архимедово

Правило рычага. *Если* m_1 *и* m_2 — *положительные массы, расположенные в точках* A_1 *и* A_2, *то их барицентр* Z *находится на отрезке* A_1A_2 *и делит его обратно пропорционально массам, то есть*

$$|A_1Z| : |A_2Z| = m_2 : m_1.$$

Доказательство. Согласно формуле (2),

$$m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} = \vec{0}.$$

Это равенство означает, что векторы $m_1\overrightarrow{ZA_1}$ и $m_2\overrightarrow{ZA_2}$ имеют одинаковые длины (и противонаправлены). Значит, $m_1|ZA_1| = m_2|ZA_2|$,

откуда

$$|A_1Z| : |A_2Z| = m_2 : m_1.$$

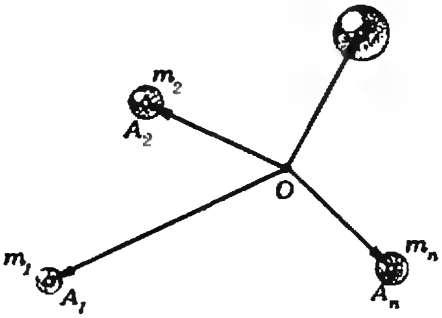


Рис. 1

Задачи

1. Докажите, что центр масс материальных точек m_1A_1 и m_2A_2 $(m_1 + m_2 \neq 0)$ в том и только в том случае расположен в середине отрезка A_1A_2, когда $m_1 = m_2$.

2. Дано, что $\overrightarrow{A_0A_1} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_4A_5} \neq \vec{0}$. При каком m барицентр материальных точек $3A_0$ и mA_5 располагается в точке A_3? При каком p барицентр материальных точек $3A_0$ и pA_2 располагается в точке A_5?

3. Дано, что $\overrightarrow{BM} = (0{,}7)\overrightarrow{BA}$. Какими массами следует загрузить точки A и B, чтобы барицентром двух получившихся материальных точек оказалась точка M?

4. В вершинах параллелограмма $ABCD$ расположены такие массы m_A, m_B, m_C, m_D (с ненулевой суммарной массой), что центр масс получающихся четырех материальных точек совпадает с центром параллелограмма. Докажите, что $m_A = m_C$ и $m_B = m_D$.

5. Докажите, что если в трех вершинах A, B, C параллелограмма $ABCD$ поместить массы 1, —1, 1, то их барицентром будет четвертая вершина.

6. В вершинах A, B, C параллелограмма $ABCD$ помещены массы m_1, m_2, m_3. Докажите, что барицентр этих трех материальных точек совпадает с барицентром трех других материальных точек: $(m_1 + m_2)A$, $(m_2 + m_3)C$, $-m_2D$.

7. Пусть (1) — система материальных точек (на плоскости или в пространстве) и f — такое перемещение (плоскости или пространства), при котором система (1) переходит в себя, то есть система материальных точек $m_1f(A_1)$, $m_2f(A_2)$, ..., $m_nf(A_n)$ совпадает, с точностью до порядка, с исходной системой (1). Докажите, что барицентр Z системы (1) является неподвижной точкой перемещения f, то есть $f(Z) = Z$.

8. Докажите, что если система (1) симметрична относительно плоскости α, то ее центр масс лежит в плоскости α.

9. Докажите, что если система (1) переходит в себя при повороте вокруг некоторой прямой l на угол φ, где $0 < \varphi < 2\pi$, то центр масс системы (1) принадлежит прямой l.

10. Система (1) переходит в себя при повороте на некоторый угол вокруг прямой l_1, а также при повороте на некоторый угол вокруг прямой l_2 (углы поворота заключены между 0 и 2π). Докажите, что прямые l_1 и l_2 пересекаются, и их точка пересечения является центром масс системы (1).

11. Многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ переходит в себя при повороте вокруг точки O на угол φ, где $0 < \varphi < 2\pi$. Докажите, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

Теорема (о группировке масс). *Пусть в системе материальных точек (1) отмечены* k *точек* $m_1A_1, \ldots, m_kA_k$, *причем* $m_1+\ldots+m_k \neq 0$, $m_1+\ldots+m_n \neq 0$. *Если всю массу отмеченных точек сосредоточить в их барицентре* C, *то от этого положение барицентра* Z *всей системы (1) не изменится. Иначе говоря, система материальных точек* $(m_1+\ldots+m_k)\,C$, $m_{k+1}A_{k+1}, \ldots, m_nA_n$ *и исходная система (1) имеют один и тот же центр масс.*

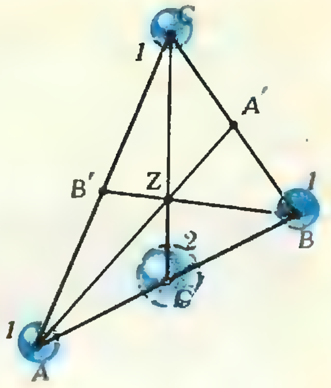


Рис. 2.

Доказательство. Фиксируем точку O. Так как Z — центр масс системы (1), а C — центр масс отмеченных материальных точек, то

$$(m_1+\ldots+m_k+m_{k+1}+\ldots+m_n)\,\overrightarrow{OZ} =$$
$$= m_1\overrightarrow{OA}_1+\ldots+m_k\overrightarrow{OA}_k+m_{k+1}\overrightarrow{OA}_{k+1}+\ldots+m_n\overrightarrow{OA}_n,$$
$$(m_1+\ldots+m_k)\,\overrightarrow{OC} = m_1\overrightarrow{OA}_1+\ldots+m_k\overrightarrow{OA}_k.$$

Следовательно,

$$(m_1+\ldots+m_k\ +m_{k+1}+\ldots+m_n)\,\overrightarrow{OZ} =$$
$$=(m_1+\ldots+m_k)\,\overrightarrow{OC}+m_{k+1}\overrightarrow{OA}_{k+1}+\ldots+m_n\overrightarrow{OA}_n,$$

а это и значит, что центром масс системы материальных точек $(m_1+\ldots+m_k)\,C$, $m_{k+1}A_{k+1}, \ldots, m_nA_n$ является та же точка Z.

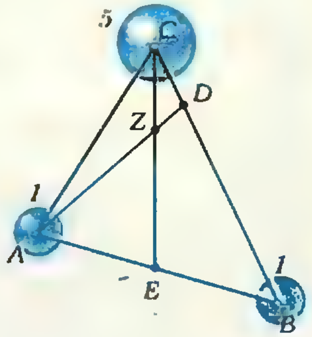


Рис. 3.

Пример 1. *Докажите, что медианы произвольного треугольника пересекаются в одной точке и каждая медиана делится этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.*

Решение. Пусть AA', BB', CC' — медианы треугольника ABC (рис. 2), а Z — центр масс трех материальных точек $1A$, $1B$, $1C$. Так как C' является центром масс двух материальных точек $1A$ и $1B$, то, сосредоточив массы точек A и B в точке C', мы получим, согласно предыдущей теореме, что Z совпадает с центром масс двух материальных точек $2C'$ и $1C$. Следовательно, $Z \in [CC']$ и $|CZ|:|C'Z| = 2:1$. Аналогично доказывается, что точка Z принадлежит двум другим медианам и делит каждую из них в отношении 2:1.

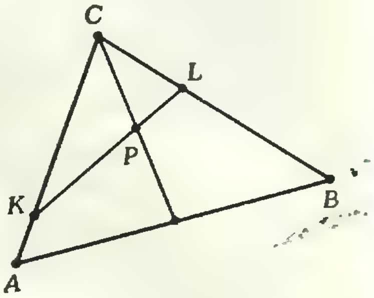


Рис. 4.

Замечание. Можно условиться в формулах (3), (4) не писать букву O и стрелки над векторами, то есть применять вместо (3) и (4) сокращенные записи:

$$(m_1+m_2+\ldots+m_n)\,Z = m_1A_1+m_2A_2+\ldots+m_nA_n, \qquad (3')$$

$$Z = \frac{m_1A_1+m_2A_2+\ldots+m_nA_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}. \qquad (4')$$

Такая форма записи сокращает решение задач. Например, решение примера 1 можно будет изложить следующим образом. Пусть Z — барицентр точек $1A$, $1B$, $1C$. Тогда

$$Z = \frac{1A+1B+1C}{3} = \frac{(1A+1B)+1C}{3} = \frac{2C'+1C}{3},$$

то есть Z — центр масс материальных точек $2C'$ и $1C$, и потому $Z \in [CC']$ и $|CZ|:|C'Z| = 2:1$. Для двух других медиан рассуждение аналогично.

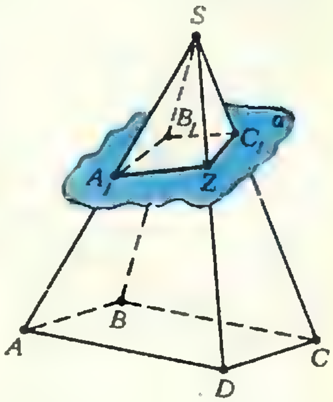


Рис. 5.

Пример 2. *На стороне* BC *треугольника* ABC *взята такая точка* D, *что* $|BD|:|DC| = 5:1$ *(рис. 3). В каком отношении медиана* CE *делит отрезок* AD?

Решение. Рассмотрим материальные точки $1A$,

$1B$. $5C$ (так что $E=\frac{1A+1B}{2}$, $D=\frac{1B+5C}{6}$) и обозначим через Z барицентр этих трех материальных точек. Тогда

$$Z=\frac{1A+1B+5C}{7}=\frac{(1A+1B)+5C}{7}=\frac{2E+5C}{7},$$

и потому $Z\in[CE]$; далее,

$$Z=\frac{1A+1B+5C}{7}=\frac{1A+(1B+5C)}{7}=\frac{1A+6D}{7},$$

то есть $Z\in[AD]$. Следовательно, Z — точка пересечения отрезков CE и AD. Из равенства $Z=\frac{1A+6D}{7}$ по правилу рычага вытекает, что $|AZ|:|ZD|=6:1$.

Следующие два примера показывают, что иногда удобно поместить в одной и той же точке несколько масс.

Пример 3. *В треугольнике CAB* (рис. 4) *проведена медиана CD. На сторонах CA и CB выбраны такие точки K и L, что $|CK|=4|KA|$, $2|CL|=|LB|$. В каком отношении точка P пересечения прямых KL и CD делит медиану CD? В каком отношении точка P делит отрезок KL?*

Решение. Рассмотрим систему материальных точек $1C$, $4A$, $4B$, $8C$ (так что $K=\frac{1C+4A}{5}$, $D=\frac{4A+4B}{8}$, $L=\frac{4B+8C}{12}$) и обозначим через P барицентр этой системы. Тогда

$$P=\frac{1C+4A+4B+8C}{17}=\frac{(1C+4A)+(4B+8C)}{17}=\frac{5K+12L}{17},$$

то есть $P\in[KL]$;

$$P=\frac{(4A+4B)+(1C+8C)}{17}=\frac{8D+9C}{17},$$

то есть $P\in[CD]$.

Следовательно, P есть точка пересечения отрезков KL и CD. Из написанных равенств вытекает, согласно правилу рычага, что $|KP|:|PL|=12:5$, $|CP|:|PD|=8:9$.

Пример 4. *Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$* (рис. 5). *Плоскость α отсекает от трех боковых ребер SA, SB, SC соответственно треть, четверть, пятую часть (считая от вершины S). Какую часть отсекает она от четвертого бокового ребра?*

Решение. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки встречи плоскости α с ребрами SA, SB, SC. Поместим в точках A, B, C, в которых оканчиваются эти ребра, соответственно массы 1, -1, 1 (так, чтобы центром масс получившихся трех материальных точек был конец D четвертого ребра, см. задачу 5). Далее, в точке S поместим такие три массы, чтобы вместе с уже взятыми материальными точками $1A$, $(-1)B$, $1C$ они имели в качестве центров масс точки A_1, B_1, C_1. Так как, по условию

$$|SA_1|:|A_1A|=1:2,\quad |SB_1|:|B_1B|=1:3,\quad |SC_1|:|C_1C|=1:4,$$

мы получаем

$$A_1=\frac{1A+2S}{3},\quad B_1=\frac{(-1)B+(-3)S}{-4},\quad C_1=\frac{1C+4S}{5}.$$

Обозначим через Z центр масс всех шести материальных точек $1A$, $(-1)B$, $1C$, $2S$, $(-3)S$, $4S$. Тогда

$$Z=\frac{(1A+2S)+((-1)B+(-3)S)+(1C+4S)}{4}=\frac{3A_1+(-4)B_1+5C_1}{4},$$

откуда видно, что $Z\in\alpha$. Далее,

$$Z=\frac{(1A+(-1)B+1C)+(2S+(-3)S+4S)}{4}=\frac{1D+3S}{4},$$

откуда видно, что $Z\in[SD]$. Следовательно, Z — искомая точка пересечения плоскости α с ребром $[SD]$. Из равенства $Z=\frac{1D+3S}{4}$ следует, согласно правилу рычага, что $|SZ|:|ZD|=1:3$, и потому $|SZ|=\frac{1}{4}|SD|$.

Задачи

12. Пусть в вершинах A, B, C некоторого треугольника помещены положительные массы m_A, m_B, m_C и Z — барицентр этих трех материальных точек. Обозначим через A' точку пересечения прямой AZ со стороной BC. Докажите, что A' — центр масс двух материальных точек m_BB и m_CC.

13. Пусть в вершинах A, B, C некоторого треугольника помещены массы m_A, m_B, m_C. Обозначим через A' барицентр материальных точек m_BB и m_CC, через B' — барицентр материальных точек m_CC и m_AA, и через C' — барицентр материальных точек m_AA и m_BB. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

14. Пусть в системе (1) отмечены k точек m_1A, ..., m_kA_k и пусть C — барицентр отмеченных материальных точек, и D — барицентр остальных точек $m_{k+1}A_{k+1}, \ldots, m_nA_n$ (предполагается, что $m_1+\ldots+m_k\neq 0$, $m_{k+1}+\ldots+m_n\neq 0$, $m_1+\ldots+m_n\neq 0$). Докажите, что барицентр двух материальных точек $(m_1+\ldots+m_k)C$ и $(m_{k+1}+\ldots+m_n)D$ совпадает с барицентром Z исходной системы (1).

15. Из четырех точек A, B, C, D никакие три не лежат на одной прямой. Точки M и N — середины отрезков AB и CD, Z — середина отрезка MN, P — точка пересечения медиан треугольника BCD. Лежат ли точки A, Z, P на одной прямой?

16. В четырехугольнике $ABCD$ отрезок KL соединяет середины двух противоположных сторон, отрезок MN соединяет середины двух других противоположных сторон, а отрезок PQ соединяет середины диагоналей. Докажите, что отрезки KL, MN и PQ пересекаются в одной точке Z и каждый из них делится в этой точке пополам.

17. В четырехугольнике $ABCD$ точки пересечения медиан треугольников BCD, ACD, ABD, ABC обозначены через A', B', C', D'. Докажите, что каждый из отрезков AA', BB', CC', DD' проходит через точку Z, рассмотренную в предыдущей задаче, и делится точкой Z в отношении $3:1$, считая от вершин четырехугольника.

18. В тетраэдре проведены три отрезка, каждый из которых соединяет середины двух противоположных ребер. Докажите, что эти три отрезка пересекаются в одной точке Z и каждый из них делится в этой точке пополам.

19. В тетраэдре проведены четыре отрезка, каждый из которых соединяет одну из вершин с точкой пересечения медиан противолежащей грани. Докажите, что эти четыре отрезка пересекаются в точке Z, рассмотренной в предыдущей задаче, и делятся этой точкой в отношении $3:1$, считая от вершин.

20. На сторонах шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ последовательно отмечены их середины B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6. Будет ли точка пересечения медиан треугольника $B_1B_3B_5$ совпадать с точкой пересечения медиан треугольника $B_2B_4B_6$?

21. Даны шесть точек, из которых никакие три не принадлежат одной прямой. Точка пересечения медиан треугольника с вершинами в каких-либо трех из этих точек соединена отрезком с точкой пересечения медиан треугольника с вершинами в остальных трех точках. Докажите, что все возникающие таким образом 10 отрезков имеют общую середину.

22. Противоположные стороны AB и DC четырехугольника $ABCD$ разделены точками M и N в одном и том же отношении k (то есть $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{NC}$); P и Q — середины сторон AD и BC. В каком отношении делится каждый из отрезков MN и PQ точкой их пересечения?

23. Противоположные звенья AB и DC пространственной замкнутой ломаной $ABCD$ разделены точками M и N в одном и том же отношении k; отрезки BC, MN, AD разделены точками P, Q, R в одном и том же отношении l. Докажите, что точки P, Q, R лежат на одной прямой.

24. Звенья AB, BC, CD, DA пространственной замкнутой ломаной $ABCDA$ разделены точками M, N, P, Q соответственно в отношениях $\alpha:\beta$, $\beta:\gamma$, $\gamma:\delta$, $\delta:\alpha$, где α, β, γ, δ — положительные числа. Докажите, что точки M, N, P, Q лежат в одной плоскости. В каком отношении делятся отрезки MP и NQ точкой их пересечения?

25. Каждое звено замкнутой пространственной ломаной $A_1A_2\ldots A_{2n}A_1$ пересекает плоскость α в одной точке, причем звено A_iA_{i+1} делится точкой пересечения с плоскостью α в отношении k_i $(i=1, 2, \ldots, 2n-1)$. В каком отношении звено $A_{2n}A_1$ делится точкой пересечения с плоскостью α?

26. На сторонах треугольника ABC взяты такие точки M и N, что $\overrightarrow{CN}=\alpha\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CM}=\beta\overrightarrow{CB}$. Пусть S — точка пересечения прямых AM и BN. Вычислите отношения $|AS|:|AM|$, $|BS|:|BN|$.

27. На сторонах KL и LM треугольника KLM взяты такие точки A и B, что $|LA|=3|AK|$, $|LB|=4|BM|$. Вычислите отношение площадей треугольников KLM и KLC, где C — точка пересечения прямых AM и KB.

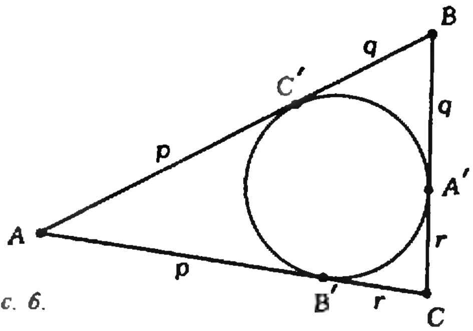


Рис. 6.

28. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты такие точки C_1, A_1, B_1, что $|AC_1|=\frac{1}{3}|AB|$, $|BA_1|=\frac{1}{3}|BC|$, $|CB_1|=\frac{1}{3}|CA|$; При пересечении отрезков AA_1, BB_1, CC_1 образовался треугольник $A_2B_2C_2$. Найдите отношение площадей треугольников $A_2B_2C_2$ и ABC.

Указание. Найдите, в каком отношении точка A_2 делит отрезки BB_1 и CC_1 (и. аналогично, для точек B_2 и C_2).

29. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1. Точка M делит сторону BC в отношении $3:5$. Вычислите площадь четырехугольника $CMPD$, где P — точка пересечения прямых AM и BD.

30. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ взята точка M, отсекающая $\frac{1}{n}$ часть этой стороны, то есть $|AM|=\frac{1}{n}|AB|$. Какую часть диагонали AC отсекает прямая DM?

31. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон BC, CA, AB соответственно в точках A', B', C'. Докажите, что отрезки AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

Указание. Введем обозначения: $|AC'|=|AB'|=p$, $|BC'|=|BA'|=q$, $|CA'|=|CB'|=r$ (рис. 6). Загрузим вершины A, B, C массами $1/p$, $1/q$, $1/r$. Убедитесь, что C' — барицентр двух материальных точек $\frac{1}{p}A$ и $\frac{1}{q}B$, и потому (по теореме о группировке масс) барицентр Z системы материальных точек $\frac{1}{p}A$, $\frac{1}{q}B$, $\frac{1}{r}C$ лежит на отрезке CC'. Аналогично проверьте, что $Z\in[AA']$ и $Z\in[BB']$.

32. В угол PAQ вписана окружность, которая касается сторон угла в точках P и Q. Прямая BC $(B\in[AP]$, $Q\in[AQ])$ касается окружности в точке T. Прямые BQ и CP пересекаются в точке M. Лежат ли точки M, T, A на одной прямой?

33. На сторонах треугольника ABC или на их продолжениях выбраны такие точки A_1, B_1, C_1, что $\overrightarrow{BA_1}=\alpha\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CB_1}=\beta\overrightarrow{B_1A}$, $AC_1=\gamma\overrightarrow{C_1B}$. Докажите, что если $\alpha\beta\gamma=-1$, то точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой (*теорема Менелая*).

Указание. Рассмотрите систему из четырех материальных точек $1A$, γB, $(-1)A$, $\alpha\gamma C$.

34. Докажите, что если при обозначениях предыдущей задачи выполнено равенство $\alpha\beta\gamma=1$, то прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны (*теорема Чевы*).

Указание. Загрузите вершины A, B, C массами 1, γ, $\alpha\gamma$ и докажите, что при $1+\gamma+\alpha\gamma\neq 0$ центр масс этих трех материальных точек принадлежит каждой из прямых AA_1, BB_1, CC_1.

35. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. Плоскость α отсекает от трех боковых ребер SA, SB, SC соответственно половину, две трети, три четверти (считая от вершины S). Какую часть отсекает она от четвертого бокового ребра?

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Столкновения тел» предназначена восьмиклассникам, «Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях» — девятиклассникам, «Рентгеновские лучи» — десятиклассникам. Материалы подготовил И. К. Белкин.

Столкновения тел

В учебнике «Физика 8» сказано, что законы сохранения позволяют решать некоторые задачи механики даже тогда, когда не известны действующие на тело силы. К такому случаю относится, например, задача об упругом столкновении шаров.

Для простоты мы рассмотрим удар двух шаров с массами m_1 и m_2, из которых первоначально один покоится ($v_1=0$), а второй движется по направлению к первому со скоростью $\vec{v}_2$ (рис. 1). При столкновении происходит так называемый центральный (или лобовой) упругий удар. Каковы скорости обоих шаров после столкновения?

Чтобы ответить на этот вопрос, попытаемся воспользоваться законами сохранения энергии и импульса, о которых рассказывается в «Физике 8». Начнем с импульса.

До столкновения импульс первого шара равен нулю, а импульс второго равен $m_2\vec{v}_2$. Следовательно, общий импульс двух шаров был равен $m_2\vec{v}_2$. После столкновения импульсы обоих шаров изменились и стали равными $m_1\vec{u}_1$ и $m_2\vec{u}_2$ соответственно. Общий импульс теперь равен $m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2$.

По закону сохранения импульса общий импульс шаров (можно считать, что они образуют замкнутую систему тел) измениться не может. Поэтому мы должны написать

$$m_2\vec{v}_2=m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2.$$

Геометрическое сложение импульсов можно заменить алгебраическим сложением их проекций. Направим координатную ось вдоль линии, соединяющей центры шаров, в направлении скорости $\vec{v}_2$. Тогда для проекций импульсов на эту ось имеем

$$m_2v_{2x}=m_1u_{1x}+m_2u_{2x}.$$

При выбранном направлении оси

$$v_{2x}=v_2,\quad |u_{1x}|=u_1,\quad |u_{2x}|=u_2,$$

но знаки проекций u_{1x} и u_{2x} могут быть как положительными, так и отрицательными.

Из одного этого равенства мы, конечно, не можем найти две неизвестные проекции скоростей u_{1x} и u_{2x}. Необходимо еще одно уравнение.

Будем считать, что сила взаимодействия F шаров при столкновении (рис. 2) — сила упругости (именно в таком случае удар называют упругим). Тогда справедлив закон сохранения механической энергии

$$\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{m_1u_1^2}{2}+\frac{m_2u_2^2}{2},$$

или

$$\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{m_1u_{1x}^2}{2}+\frac{m_2u_{2x}^2}{2}.$$

Теперь мы имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} m_2v_2=m_1u_{1x}+m_2u_{2x},\\ \dfrac{m_2v_2^2}{2}=\dfrac{m_1u_{1x}^2}{2}+\dfrac{m_2u_{2x}^2}{2}, \end{cases}$$

из которой можно найти проекции u_{1x} и u_{2x} скоростей шаров после столкновения. Предлагаем читателям самостоятельно решить эту систему и показать, что первый, покоившийся до столкновения шар получит скорость, проекция которой

$$u_{1x}=\frac{2m_2v_2}{m_1+m_2},$$

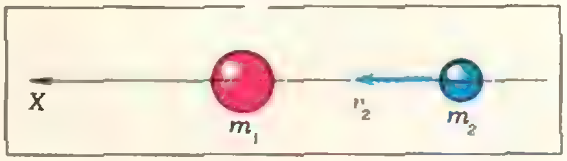


Рис. 1.

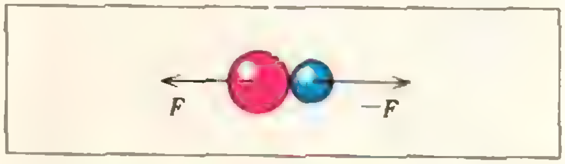


Рис. 2.

Рис. 3.

а проекция второго шара

$$u_{2x}=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2.$$

Легко видеть, что проекция скорости первого шара всегда положительная, а проекция второго может быть как положительной, так и отрицательной. Если масса налетающего шара меньше массы покоящегося ($m_2<m_1$), то u_{2x} отрицательна. Это означает, что шар после столкновения изменяет направление своей скорости (отскакивает от покоившегося шара, как показано на рисунке 3). При обратном соотношении масс ($m_2>m_1$) проекция $u_{2x}>0$, и направление движения налетающего шара после столкновения не меняется (отскакивает покоившийся шар). Если же массы обоих шаров равны ($m_1=m_2$), то $u_{1x}=v_2$, а $u_{2x}=0$. Это значит, что второй шар, столкнувшись с первым, передал ему свой импульс, а сам остановился.

Таким образом, пользуясь законами сохранения энергии и импульса, можно, зная скорости тел до столкновения, определить их скорости после столкновения. А как обстояло дело *во время* столкновения, когда шары уже соприкоснулись друг с другом, но еще не разошлись?

При столкновении шары деформируются. Сначала их деформация растет, затем уменьшается. В момент наибольшей деформации шары движутся вместе с одной и той же скоростью. Рассмотрим этот момент подробнее. Обозначим скорость их совместного движения через $\vec{u}$ и будем считать, для простоты, массы шаров одинаковыми ($m_1=m_2=m$). По закону сохранения импульса

$$mv_2=2mu_x.$$

Отсюда следует, что $u_x=u=v_2/2$. Таким образом, скорость обоих шаров при их совместном движении равна половине скорости одного из них до столкновения.

Что касается кинетической энергии шаров, то в момент их движения с одной и той же скоростью она равна $2mu^2/2=mu^2=mv_2^2/4$. А до столкновения общая энергия шаров была равна $mv_2^2/2$. Следовательно, кинетическая энергия уменьшилась вдвое. Куда же она исчезла? Не происходит ли здесь нарушения закона сохранения энергии, как это может показаться на первый взгляд?

Энергия, конечно же, осталась прежней. Все дело в том, что во время столкновения оба шара были деформированы, и поэтому они обладали потенциальной энергией упругого взаимодействия. Именно на величину этой потенциальной энергии и уменьшилась кинетическая энергия шаров. Вначале, когда деформация росла, потенциальная энергия увеличивалась и в момент совместного движения шаров она достигла своего максимального значения (в нашем случае равного половине общего запаса энергии). Затем деформация уменьшилась, а запасенная потенциальная энергия перешла обратно в кинетическую.

Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

Рассмотрим вначале движение частицы с зарядом q и массой m в однородном постоянном электрическом поле напряженностью $\vec{E}$. Напряженность поля в этом случае не зависит ни от координат, ни от времени (такое поле возникает, например, в заряженном плоском конденсаторе, отсоединенном от источника). Следовательно, на заряженную частицу со стороны поля действует постоянная сила $\vec{F}=q\vec{E}$, которая сообщает частице постоянное ускорение $\vec{a}=\vec{F}/m=q\vec{E}/m$. Если частица имеет начальную скорость $\vec{v}_0$, как показано на рисунке 1, то ее движение в таком поле похоже на движение тела, брошенного под углом к горизонту в однородном поле тяжести, где ускорение тела также постоянно и равно $\vec{g}$. В учебнике «Физика 8» показано, что траектория движения в таком случае — парабола.

При движении заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле на нее действует сила Лоренца

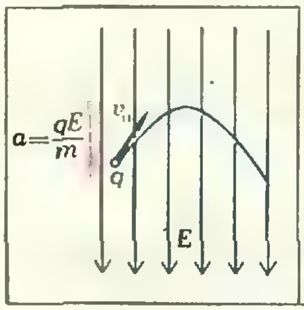


Рис. 1.

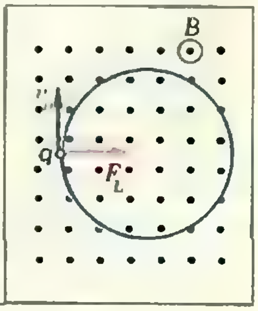


Рис. 2.

$\vec{F}_L$. Если начальная скорость $\vec{v}_0$ частицы *перпендикулярна* вектору магнитной индукции $\vec{B}$ поля, то заряженная частица движется по окружности (рис. 2). Этот случай рассмотрен в учебнике «Физика 9».

А что если поместить частицу *одновременно в электрическое и магнитное поля?* Рассмотрим, например, случай, когда напряженность электрического поля $\vec{E}$ и индукция магнитного поля $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны, а поля однородны и постоянны (рис. 3). Предположим, что в начальный момент частица находится в начале координат (положение 1) и ее начальная скорость равна нулю. Под действием электрического поля частица начнет ускоряться, то есть приобретет скорость. Сила Лоренца, действующая со стороны магнитного поля, перпендикулярна скорости частицы и поэтому не совершает работы. Она изменяет только направление скорости (искривляет траекторию частицы), но не меняет ее модуля (об этом рассказано в «Физике 9»). В результате после некоторого момента времени (положение 2) частица начнет двигаться в обратном направлении, и электрическое поле будет тормозить ее. В положении 3 скорость частицы опять обратится в нуль, и далее цикл будет повторяться (см. рис. 3).

Точный расчет (он довольно сложный и выходит за рамки школьного курса физики) показывает, что траектория частицы в этом случае такая же, как у точки колеса, катящегося с постоянной *скоростью без проскальзывания* по горизонтальной плоскости (рис. 4; соответствующая кривая называется циклоидой). Другими словами, движение частицы можно представить как сложение двух движений — равномерного поступательного движения с постоянной скоростью $\vec{v}_д$ в направлении, перпендикулярном векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$ (ее называют скоростью дрейфа частицы), и вращения вокруг точки O.

Как известно, для описания движения можно пользоваться любой инерциальной системой отсчета. Рассмотрим движение относительно системы отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}_д$. Относительно этой системы заряженная частица движется по окружности. Вдумайтесь в полученный результат. Мы уже говорили о том, что заряженная частица движется по окружности, когда на нее действует только магнитное поле. Значит, в движущейся системе отсчета электрическое поле исчезает!

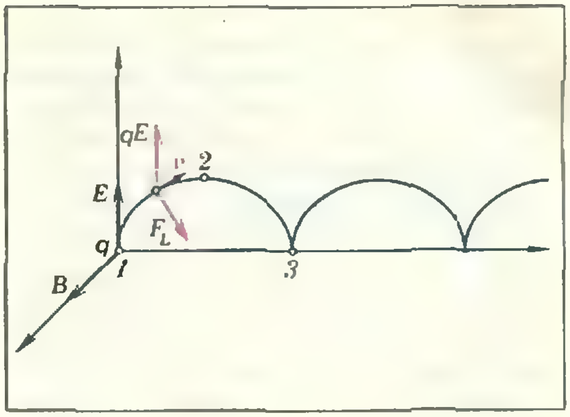


Рис. 3.

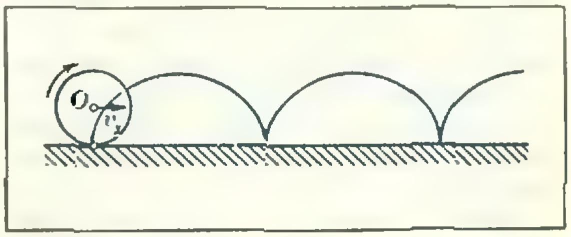


Рис. 4.

В прошлом номере журнала в заметке «Электрическое и магнитное поля» рассказывалось о том, что магнитное поле относительно — его индукция зависит от системы отсчета. Сейчас мы *пришли к выводу, что относительно и* электрическое поле.

Рентгеновские лучи

В *учебнике «Физика 10» рассказывается* о том, как были открыты рентгеновские лучи, об их свойствах и практическом применении, а также об устройстве рентгеновской трубки, с помощью которой эти лучи получают. Остановимся подробнее на принципе ее работы.

В том же учебнике раньше говорится о вибраторе Герца и об излучаемых им электромагнитных волнах. Излучение происходит вследствие того, что заряды совершают колебательное движение. При этом амплитуды напряженности электрического поля и индукции магнитного поля в волне пропорциональны ускорению зарядов. Энергия, излучаемая в единицу времени, пропорциональна квадрату амплитуды и, следовательно, квадрату ускорения. Это — общее правило. Заряд, движущийся с ускорением, всегда излучает электромагнитные волны, интенсивность которых пропорциональна квадрату ускорения.

Этот закон объясняет и излучение электромагнитных волн в рентгеновской трубке. Электроны, пролетая в глубоком вакууме в пространстве между катодом и анодом, разгоняются электрическим полем до больших скоростей, а затем резко тормозятся при соударении с анодом. При этом возникают значительные ускорения, и электроны излучают электромагнитные волны. Такое излучение называется тормозным.

Оказывается, что, тормозясь, электроны излучают целый спектр электромагнитных волн с разными частотами (или длинами волн). Этот спектр — сплошной, но он ограничен определенной максимальной частотой ν_{max} (такое ограничение по частоте можно объяснить только с точки зрения квантовой теории).

Самая большая частота (и, соответственно, самая малая длина волны) определяется из условия равенства кинетической энергии электрона eU (U — напряжение между анодом и катодом) энергии излучаемого кванта:

$$eU = h\nu_{max},$$

откуда

$$\nu_{max} = \frac{eU}{h},$$

и, соответственно, минимальная длина волны

$$\lambda_{min} = \frac{c}{\nu_{max}} = \frac{ch}{eU}\ ^{*)},$$

где h — постоянная Планка, а c — скорость света. При разности потенциалов в несколько десятков киловольт минимальная длина волны достигает долей ангстрема (1 Å $= 10^{-10}$ м). Такое коротковолновое излучение обладает большой проникающей способностью и называется рентгеновским излучением.

---

*) Измерив на опыте минимальную длину волны λ_{min} и напряжение U, можно из этого равенства определить значение постоянной Планка h. Из таких опытов было получено значение $h \approx 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Дифференцирование сложной функции

Б. С. ЭППЕЛЬ

Все абитуриенты знают, что $(\sin x)' = \cos x$. Однако равенства вроде $(\sin 2x)' = \cos 2x$ или $(\sin^3 x)' = \cos^3 x$, которыми нет-нет да и грешат абитуриенты, грубо неверны. Дело в том, что функции $\sin 2x$ и $\sin^3 x$ — сложные и дифференцирование их — задача тоже более сложная. Мы покажем здесь, как решать эту задачу практически.

Ошибки вроде $(\sin^3 x)' = \cos^3 x$ возникают тогда, когда поступающие не умеют расшифровать запись $y = \sin^3 x$, не видят в этом простом выражении сложной функции — композиции двух функций (см. «Алгебра и начала анализа 9—10», п. 20). В действительности, функция $y = \sin^3 x$ получается последовательным выполнением двух операций: взятия синуса угла x и возведения полученного числа $\sin x$ в куб:

$$x \to \sin x \to (\sin x)^3.$$

В записи функции $y = \sin^3 x$ нужно суметь раздельно увидеть одну за другой две функции (синус и степень), из которых она составлена. Это легче сделать, если эта функция записана в виде

$$y = (\sin x)^3.$$

Для наглядности, на первых порах мы будем помогать читателю распознавать сложные функции с помощью цвета. В нашем примере

$$y = (\sin x)^3 \quad \text{или} \quad y = \sin^3 x$$

В общем случае, чтобы применять правило дифференцирования сложной функции («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 21)

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

необходимо данную функцию суметь «увидеть» в форме $f(g(x))$. Для этого вначале нам будет помогать цвет. Рассмотрим несколько примеров.

Продифференцируем функцию

$$y = \sin 2x = \sin u,\ u = 2x$$

(каждая функция имеет свой цвет):

$$y' = (\sin u) \cdot (2x)' = (\cos u) \cdot 2 = 2\cos 2x.$$

(Но не $\cos 2x$.)

Точно так же

$$y = \sin^3 x = u^3, \quad u = \sin x;$$

$$y' = (u^3)' \cdot (\sin x)' = (3u^2) \cdot (\cos x) =$$

$$= 3 \sin^2 x \cos x.$$

(Но не $\cos^3 x$.)

На практике такое дифференцирование производится гораздо короче и проще, во всяком случае без введения в запись u.

Искусство дифференцирования сложной функции заключается в умении видеть в момент дифференцирования только одну функцию (именно — дифференцируемую в данный момент), не замечая пока другие, — откладывая их видение до момента их дифференцирования.

Вот еще несколько демонстрационных примеров, уже без введения промежуточного «u», так, как обычно осуществляют и записывают дифференцирование сложной функции те, кто обладает свободным навыком такого дифференцирования. Только по-прежнему каждую дифференцируемую функцию и ее производную мы будем писать одинаковым цветом.

$$y = (2x^4 - 5x^2 + 6)^8;$$

$$y' = 8(2x^4 - 5x^2 + 6)^7 \cdot (8x^3 - 10x).$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} = (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$y' = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Следующая сложная функция —

$$y = \sin^3 5x,$$

она является, как видно хотя бы уже по количеству цветов, композицией трех функций: 1) синус; 2) возведение в степень; 3) умножение на 5.

Продифференцируем ее:

$$y = \sin^3 5x;$$

$$y' = \underbrace{(3 \sin^2 5x)}_{\text{производная степени}} \cdot \underbrace{(\cos 5x)}_{\text{производная синуса}} \cdot \underbrace{(5)}_{(5x)'} =$$

$$= 15 (\sin^2 5x) \cos 5x.$$

Поскольку от перемены мест сомножителей произведение не меняется, то и перебирать функции для дифференцирования, само собой разумеется, можно в любом порядке.

Еще несколько примеров:

$$y = \operatorname{tg} x^3; \qquad y' = \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}.$$

Функцию

мы дифференцируем как произведение функций по формуле $(uv)' = u'v + v'u$:

$$y' = (x^2)'(\ln x^3) + (x^2) \cdot (\ln x^3)' =$$

$$= 2x \ln x^3 + x^2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot (3x^2) =$$

$$= 2x \ln x^3 + 3x.$$

$$y = 2^{x^3 - 5x};$$

$$y' = \underbrace{2^{x^3 - 5x} \ln 2}_{\text{производная показательной функции}} \cdot \underbrace{(3x^2 - 5)}_{\text{производная многочлена}}$$

Упражнения. Продифференцируйте, используя по мере надобности многоцветную запись:

1. $y = (x^3 + 2)^4$; 2. $y = \sqrt{1 + 5x^2}$;
3. $y = e^{x^2 - 3x}$; 4. $y = \ln(2x^3 - 4x^2)$;
5. $y = \lg(2x^3 - 4x^2)$; 6. $y = 5^{\sin x}$;
7. $y = \log_{0.3}(8x^2 - 2x^3)$;
8. $y = \cos(2x - 1)$; 9. $y = \cos^2 3x$;
10. $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$; 11. $y = x \operatorname{tg}^2 x$;
12. $y = \sin \sqrt{ax}$; 13. $y = \ln \sin x$;
14. $y = 3^{\frac{1}{x}}$; 15. $y = \frac{1}{\cos 2x}$.

16. Докажите, что функция $y = c\sqrt{1 + x^2}$ служит решением дифференциального уравнения $y' = xy/(1 + x^2)$.

Поправки

1) В «Кванте» № 1 на с. 57 во втором уравнении задачи 1 варианта 1 ошибочно напечатано 15 вместо 55.

2) В последнем абзаце на с. 47 «Кванта» № 2 над 1-й, 4-й, 7-й жирными буквами **A** и 1-й, 3-й, 5-й, 6-й, 8-й жирными буквами **B** должна стоять черта ($\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$), пропущенная по вине типографии.

Избранные школьные задачи

Под этим заголовком в разделе «Школа в Кванте» будут регулярно публиковаться задачи по математике, тесно связанные со школьным курсом. В отличие от «Задачника Кванта», здесь мы будем помещать довольно известные задачи — «школьную математическую классику». Их решения (как правило, короткие, но не всегда очевидные!) будут публиковаться в конце того же номера журнала. Систематически разбирая эти задачи, вы познакомитесь со многими полезными приемами, которые пригодятся вам на школьных контрольных и экзаменах, при поступлении в вуз или на олимпиаде. Мы надеемся, что «Избранные школьные задачи» окажутся интересными и для учителей, а также для тех студентов, которые готовятся стать ими.

Восьмой класс

1. Разложите на множители выражения:
а) a^4+4b^4; б) a^4+b^4.

2. Докажите, что в трапеции 4 точки — середины оснований, точка пересечений диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

3. а) Пусть на плоскости заданы две параллельные прямые и отрезок AB на одной из них. Постройте середину отрезка AB с помощью одной линейки.

б) Пусть на плоскости заданы отрезок AB и точка M вне прямой AB, а также отмечена середина C отрезка AB. Постройте прямую, проходящую через точку M, параллельную прямой AB, с помощью одной линейки.

4. Какую фигуру задает на координатной плоскости неравенство $|x|+|y|<1$?

5. Три экскаватора должны выкопать траншею. Сначала первый из них работал столько времени, сколько понадобилось бы второму и третьему экскаваторам, чтобы вырыть половину траншеи. Затем второй из них проработал столько времени, сколько понадобилось бы первому и третьему экскаваторам, чтобы вырыть половину траншеи. Наконец после этого третий экскаватор проработал столько времени, сколько понадобилось бы первому и второму экскаваторам, чтобы вырыть половину траншеи. В результате этой работы экскаваторы вырыли всю траншею. Во сколько раз быстрее они вырыли бы траншею, работая все вместе, а не поодиночке?

Девятый класс

6. Пусть $a+4b=2$. Какое наибольшее значение может принимать произведение ab?

7. *Задача о честном купце.* Один честный купец заметил, что на весах, которыми он пользуется, одно плечо коромысла немного длиннее другого (в то время пользовались весами с двумя чашками на коромысле). Что делать? Обвешивать покупателей — грех, но и себя обижать не хочется! В это время в лавку зашел покупатель и попросил взвесить ему два фунта орехов. «Взвешу-ка я орехи в два приема», — подумал купец. «Сначала поставлю фунтовую гирю на левую чашку весов и насыплю на правую столько орехов, чтобы весы уравновесились. Отдав эти орехи покупателю, я затем поставлю ту же фунтовую гирю на правую чашку весов, а на левую насыплю столько орехов, чтобы весы снова уравновесились, и отдам их покупателю». Сказано — сделано. Удалось ли купцу осуществить свои честные намерения или кто-то остался в проигрыше?

8. Пусть функция $f(x)$ задана формулой

$$f(x)=(x^2+5x-8)^{100}\cdot x^5. \qquad (1)$$

Если произвести все указанные в правой части формулы (1) действия и привести подобные члены, то функция $f(x)$ запишется в виде многочлена:

$$f(x)=a_0x^{205}+a_1x^{204}+a_2x^{203}+\ldots+a_{204}x+a_{205}, \quad (2)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{205}$ — некоторые числа (коэффициенты многочлена).

а) Найдите сумму всех коэффициентов

$$S=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{204}+a_{205}$$

указанного многочлена.

б) Найдите сумму коэффициентов

$$S_Н=a_0+a_2+a_4+\ldots+a_{204}$$

указанного многочлена, стоящих при нечетных степенях x.

в) Найдите сумму коэффициентов

$$S_Ч=a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{205}.$$

9. Докажите, что любую функцию $f(x)$, определенную на всей числовой оси, можно представить как сумму четной и нечетной функций.

10. Пусть в тетраэдре (произвольной треугольной пирамиде) высота, проведенная из вершины, проходит через точку пересечения высот треугольника, расположенного в основании. Докажите, что:

а) скрещивающиеся ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны;

б) остальные высоты тетраэдра также проходят через точки пересечения высот соответствующих граней;

в) все четыре высоты тетраэдра пересекаются в одной точке;

г) суммы квадратов длин каждой пары скрещивающихся ребер одинаковы.

Десятый класс

11. а) Докажите, что $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$.

б) Докажите, что $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

12. Какую фигуру задает в координатном пространстве неравенство $|x|+|y|+|z|<1$?

13. Решите уравнения:
а) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2$;
б) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2^x$.

14. Упростите выражения:

а) $\log_a \operatorname{tg} 1^\circ+\log_a \operatorname{tg} 2^\circ+\ldots+\log_a \operatorname{tg} 88^\circ+\log_a \operatorname{tg} 89^\circ$;

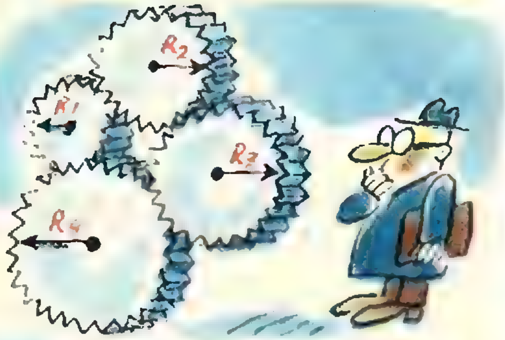
б) $\log_a \sin 60^\circ\cdot\log_a \sin 61^\circ\times\ldots\times\log_a \sin 119^\circ\cdot\log_a \sin 120^\circ$;

в) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\times\ldots\times\log_{(n-2)}(n-1)\cdot\log_{(n-1)} n$.

15. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, взятой внутри или на границе правильного тетраэдра, до его граней равна высоте тетраэдра.

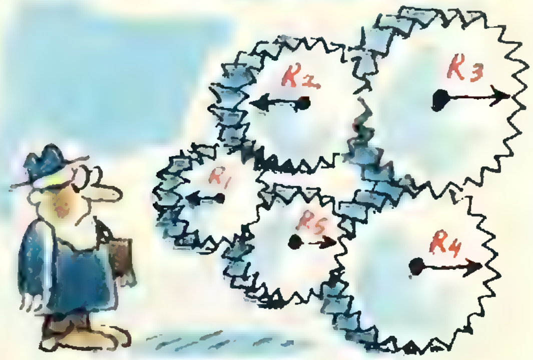
Публикацию подготовил *Ж. М. Раббот*

Квант для младших школьников



Задачи

1. При каком соотношении радиусов шестеренок будет вращаться система, изображенная на верхнем рисунке? А система на следующем рисунке?

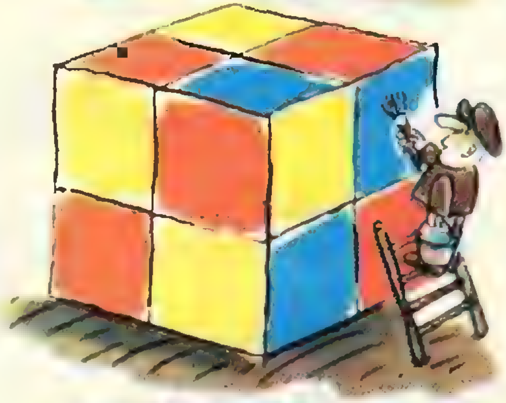


2. Решите числовой ребус:

$$\begin{array}{r} \text{ВАГОН} \\ +\ \text{ВАГОН} \\ \hline \text{СОСТАВ} \end{array}$$

+ ВАГОН
ВАГОН
СОСТАВ

3. Каждая грань кубика разделена на 4 квадрата и каждый квадратик окрашен в один из трех цветов: синий, желтый или красный так, что квадратики, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета. Сколько при этом может быть синих, красных и желтых квадратиков?



4. Рассмотрим некоторое двузначное число, например 13. Умножим это число на 20 и сложим его с исходным числом — получится число 273. Умножим полученное число на 481 — получится число 131 313, в записи которого трижды повторяется исходное число 13. Это удивительное свойство выполняется для любого двузначного числа. Почему?

5. На электронных часах высвечивается время: часы и минуты. Сколько времени в сутки высвечивается хотя бы в одном месте цифра 2? Найдите соответствующее время для остальных цифр: 0, 1, 3, 4, ..., 9.

Эти задачи нам предложили: *Н. В. Молодчик, С. Н. Олехник, В. В. Произволов, А. П. Савин, В. П. Чичин.*

ОТКУДА ПРОИЗОШЛИ НАЗВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР?

Доктор физико-математических наук
Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

Почти все названия геометрических фигур греческого происхождения, как и само слово геометрия, происходящее от греческого слова γεωμετρία (геометриа) — землемерие. Однако эти слова вошли в русский язык не непосредственно с греческого, а через латинский язык.

Слово цилиндр происходит от латинского слова cylindrus (цилиндрус), являющегося латинской формой греческого слова κύλινδρος (кюлиндрос), означающего валик, каток.

Слово призма — латинская форма греческого слова πρισμα (присма) — опиленная (имелось в виду опиленное бревно).

Слово сфера — латинская форма греческого слова σφαῖρα (сфайра) — мяч.

Слово пирамида — латинская форма греческого слова πυρᾶμις (пюрамис), которым греки называли египетские пирамиды; это слово происходит от древнеегипетского слова «пурама», которым эти пирамиды называли сами египтяне. Современные египтяне называют пирамиды словом «ахрам», которое также происходит от этого древнеегипетского слова.

Слово трапеция происходит от латинского слова trapezium (трапезиум) — латинской формы греческого слова τράπεζιον (трапезион) — столик. От этого же корня происходит наше слово «трапеза», означающее по-гречески стол.

Слово ромб происходит от латинского слова rombus (ромбус) — латинской формы греческого слова ῥόμβος (ромбос), означающего бубен. Мы привыкли к тому, что бубен имеет круглую форму, но раньше бубны имели форму квадрата или ромба, о чем свидетельствуют изображения «бубен» на игральных картах.

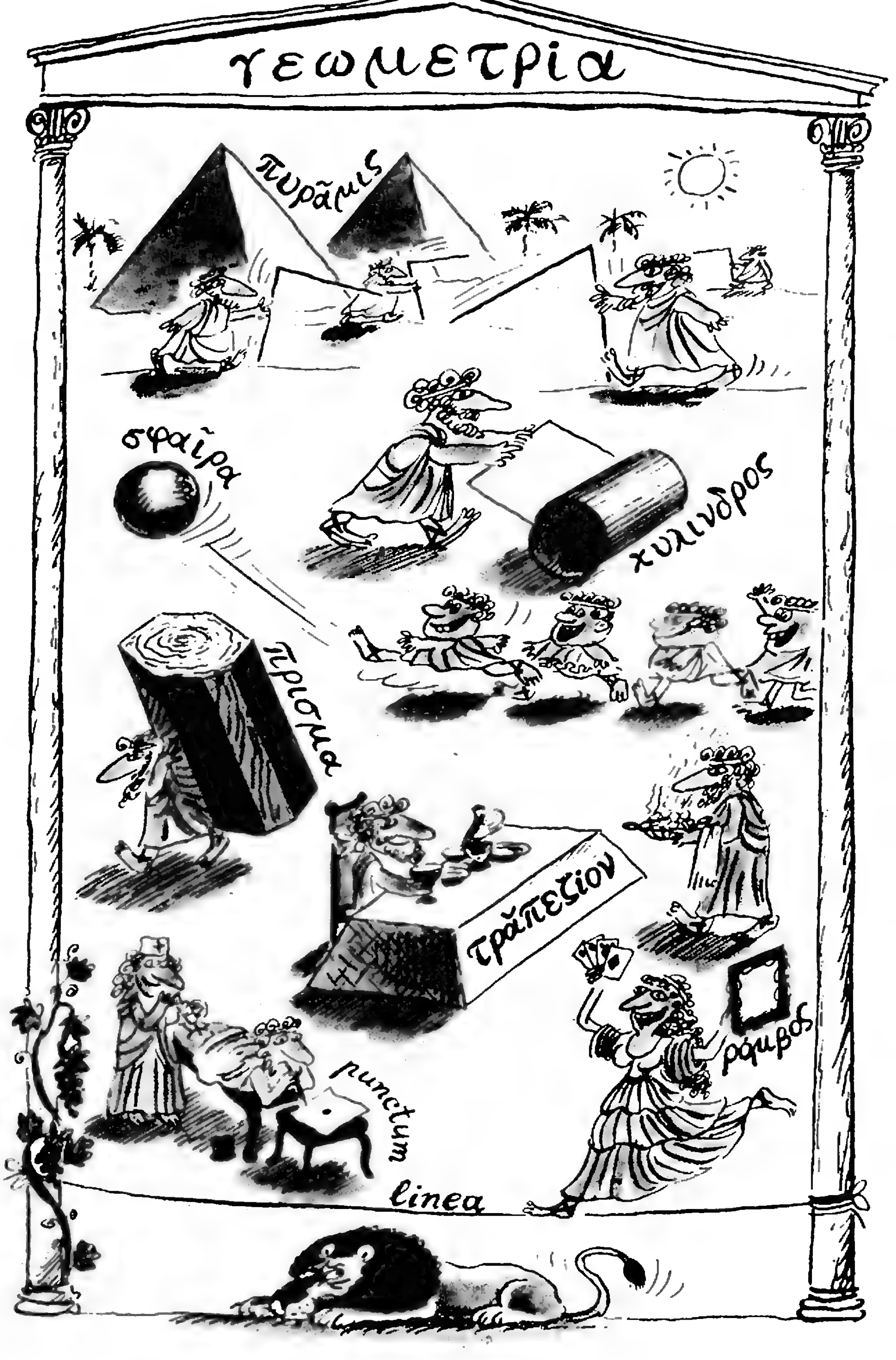
Непосредственно с латинского языка мы заимствовали слово пункт, употребляющийся иногда в значении «точка» (отсюда «пунктир»), и слово линия.

Слово пункт происходит от латинского слова punctum (пунктум) — укол; от этого же корня происходит медицинский термин «пункция» — прокол.

Слово линия происходит от латинского слова linea (линеа) — льняная (имеется в виду льняная нить). От этого же корня происходит наше слово «линолеум», первоначально означавшее промасленное льняное полотно.

Таким образом, все названия геометрических фигур первоначально были названием конкретных предметов, имеющих форму, более или менее близкую к форме данной фигуры.

Статья перепечатывается из «Кванта» № 1 за 1970 год.


γεωμετρία
πυρᾶμις
σφαῖρα
χυλινδρος
πρισμα
τρᾰπεζίον
ρόμβος
punctum
linea

задачник Кванта

Задачи

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 июня 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4 — 84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М856, М857» или «Ф868». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Внимание!

Задачу М846 следует решать в более общей формулировке: *докажите, что среднее арифметическое длин сторон произвольного выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин его диагоналей.*

Срок отправки ее решений продлевается до 30 июня.

М856—М860; Ф868—Ф872

М856. а) Постройте четырехугольник, зная длины его сторон и длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

б) При каких условиях задача имеет решение?

И. З. Титович

М857. Среди 1984 первых натуральных чисел (от 1 до 1984) отметим те, которые можно представить в виде суммы пяти целых неотрицательных степеней двойки (то есть пяти не обязательно различных чисел 1, 2, 4, 8, ...). Каких чисел окажется больше: отмеченных или не отмеченных?

С. Стадниченко

М858. Для величин α, β и γ углов некоторого треугольника выполнено соотношение

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin\gamma.$$

а) Найдите α, β, γ, если известно, что треугольник равнобедренный (рассмотрите все случаи).

б) Может ли треугольник быть остроугольным?

в)* Какие значения может принимать наибольший угол треугольника?

П. Б. Гусятников

М859. Найдите наименьшее положительное число a такое, что для любого квадратного трехчлена $f(x)$, удовлетворяющего при $0\leqslant x\leqslant 1$ неравенству $|f(x)|\leqslant 1$, выполняется неравенство $|f'(1)|\leqslant a$.

В. П. Пикулин

М860.* а) Пусть O и R — центр и радиус описанной окружности треугольника ABC, Z и r — центр и радиус его вписанной окружности, K — точка пересечения медиан треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC. Докажите, что точка Z лежит на отрезке OK, причем $|OZ|:|ZK|=3R/r$.

б) Пусть a, b, c — длины сторон треугольника ABC, $\vec{n}_a$, $\vec{n}_b$, $\vec{n}_c$ — единичные векторы, перпендикулярные к соответствующим сторонам треугольника и направленные во внешнюю сторону (рис. 1). Докажите, что

$$a^3\vec{n}_a+b^3\vec{n}_b+c^3\vec{n}_c=12S\cdot\overrightarrow{MO},$$

где S — площадь треугольника ABC, M — точка пересечения его медиан. O — центр описанной окружности.

Чан Куанг

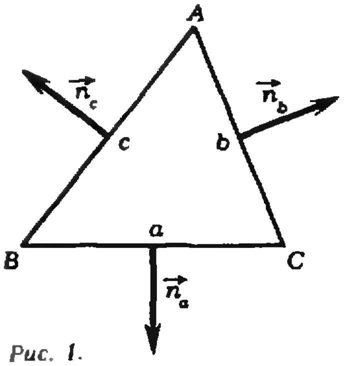


Рис. 1.

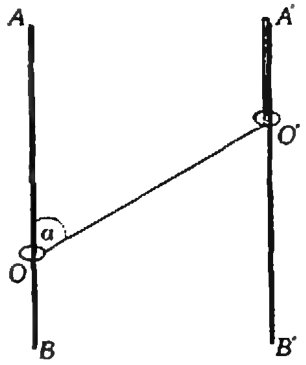


Рис. 2.

Ф868. Колечки O и O' надеты на вертикально закрепленные стержни AB и $A'B'$. Нерастяжимая нить привязана к кольцу O, пропущена через кольцо O' и закреплена в точке A' (рис. 2). В тот момент, когда $\angle AOO' = \alpha$, кольцо O' движется вниз со скоростью v. Найти скорость кольца O в этот момент.

С. С. Кротов

Ф869. Вертикальная длинная кирпичная труба заполнена чугуном. Нижний конец трубы поддерживается при температуре $T_1 > T_{пл}$ ($T_{пл}$ — температура плавления чугуна), верхний — при температуре $T_2 < T_{пл}$. Теплопроводность у расплавленного чугуна в k раз больше, чем у твердого. Какая часть металла находится в расплавленном состоянии?

А. И. Буздин

Ф870*. Одноатомный идеальный газ расширяется так, что его молярная теплоемкость c_x остается постоянной; при этом газ совершает работу $A = 165$ Дж. Затем газ изохорически нагревают до первоначальной температуры, для чего к нему подводят количество теплоты $Q = 125$ Дж. Определить c_x.

А. А. Шеронов

Ф871. Первоначально незаряженный конденсатор емкости C подключают к последовательно соединенным батарее с напряжением U_0 и катушке с индуктивностью L. Ток через катушку вначале увеличивается, а затем уменьшается. В тот момент, когда ток становится равным нулю, конденсатор отключают от схемы и подключают вновь, поменяв местами его выводы. Какой максимальный ток будет после этого течь через катушку? Как изменится этот ток, если процесс переключения повторить 1984 раза? Сопротивлением цепи пренебречь.

А. Р. Зильберман

Ф872. Длинные сани, скользящие по очень гладкому льду, въезжают на асфальт и останавливаются, не пройдя половины своей длины. После этого саням резким толчком сообщают первоначальную скорость, и они вновь останавливаются. Как относятся времена торможения в первом и во втором случаях? Как относятся пути торможения?

С. С. Кротов

Problems

M856—M860; P868—P872

M856. a) Construct a quadrilateral knowing the lengths of its sides and that of the segment joining the midpoints of the diagonals.
b) Under what conditions does the problem have a solution?

I. Z. Titovich

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The

more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than June 30th, 1984, to the following adress: USSR, Moscow, 103006.

Please send the solutions of problems in physics and mathematics, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

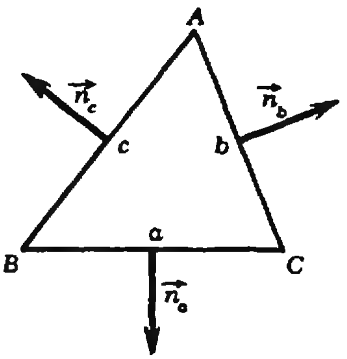


Рис. 1.

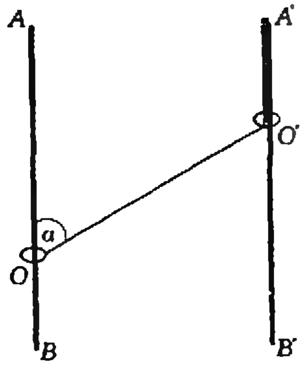


Рис. 2.

M857. Among the first 1984 positive integers (from 1 to 1984) we underline those which may be represented as the sum of five non-negative integer powers of 2 (i. e. of five not necessarily different numbers 1, 2, 4, 8, ...). Is the set of underlined numbers larger than that of the non-underlined ones?

S. Stadnichenko

M858. The angles α, β and γ of a triangle satisfy the relation

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin\gamma.$$

a) Find α, β, γ if the triangle is isosceles (consider all possible cases).
b) Can the triangle have only acute angles?
c)* What values can the largest angle of the triangle assume?

P. B. Gusyatnikov

M859. Find the least positive number a such that any quadratic trinomial $f(x)$ for which $|f(x)|\leqslant 1$ whenever $0\leqslant x\leqslant 1$ satisfies $|f'(1)|\leqslant a$.

V. P. Pikulin

M860. a) Let R and O be the radius and centre of the circumcircle of triangle ABC, r and Z the radius and centre of its incircle, K the common point of the medians of the triangle whose vertices are the points where the incircle touches the sides of ABC. Prove that Z lies on the segment OK and $|OZ|:|ZK|=3R/r$.
b) Let a, b, c be the lengths of the sides of triangle ABC, $\vec n_a$, $\vec n_b$, $\vec n_c$ unit vectors perpendicular to the corresponding sides of the triangle and directed outward (see figure Рис. 1). Prove that

$$a^3\vec n_a+b^3\vec n_b+c^3\vec n_c=12S\cdot\overrightarrow{MO}$$

where S is the area of triangle ABC, M the intersection point of its medians and O the centre of the circumcircle.

Chan Quang

P868. Little rings O and O' are slipped on two vertical rods AB and $A'B'$. An unstretchable string is teid to the ring O, slides through the ring O' and fixed at the point A' (see figure Рис. 2). At the moment when $\angle AOO'=\alpha$, the ring O' moves down with velocity v. Find the velocity of the ring O at that moment.

S. S. Krotov

P869. A long vertical brick furnace is filled with pig iron. The temperature of the lower part of the furnace is maintained at $T_1>T_m$ (where T_m is the melting temperature of pig iron), the upper part — at $T_2<T_m$. The heat conductivity of melted pig iron is k times that of solid pig iron. What part of the metal is in melted state?

A. I. Buzdin

P870*. A monoatomic ideal gas expands so that its molar specific heat c_x remains constant; the gas produces the work $A=165$ J. Then the gas is

isochorically heated to its initial temperature, which requires the amount of heat $Q=125$ J. Determine c_x.

A. A. Sheronov

P871. An initially uncharged capacitor of capacity C is connected consecutively to a battery of *EMF* of tension U_0 and a coil of inductivity L. The current in the coil first increases, then decreases. At the moment when the current banishes, the capacitor is disconnected and then reconnected with the ends interchanged.

What maximal current will then flow through the coil. How will the current change if the reconnection process is repeated 1984 times? The circuit's resistance is negligible.

A. R. Zilberman

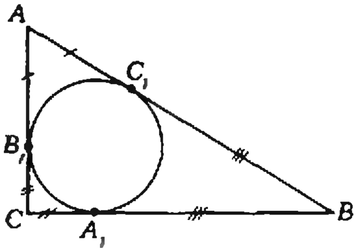
P872. A long sled, sliding on very slippery ice, reaches an ice-free section of the road and stops before travelling half its length. Then a sharp push restores the sled's previous velocity, and it stops again. What is the relationship between 1) the slowing down times in the first and second cases? 2) the distances travelled while slowing down?

S. S. Krotov

Решения задач

M841 — M845; Ф852 — Ф857

M841. *Докажите, что произведение длин отрезков, на которые гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанной в него окружности, равно площади этого треугольника.*



Эта простая задача имеет несколько решений. Приведем только одно из них. Пусть a и b — длины катетов, c — длина гипотенузы данного треугольника ABC; A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами (см. рисунок). По теореме о равенстве касательных, проведенных к окружности из одной точки, $|AB_1|=|AC_1|$, $|BC_1|=|BA_1|$ и $|CA_1|=|CB_1|$. Отсюда следует, что

$$|AC_1|=\frac{c+b-a}{2},\quad |BC_1|=\frac{c+a-b}{2}.$$

Поэтому

$$|AC_1|\cdot|BC_1|=\frac{1}{4}(c+b-a)(c-(b-a))=\frac{1}{4}(c^2-(b-a)^2)=$$
$$=\frac{1}{4}(c^2-b^2-a^2+2ab)=\frac{ab}{2}=S_{\triangle ABC}$$

(мы воспользовались теоремой Пифагора).

В случае произвольного треугольника ABC аналогичная выкладка приводит к такой формуле:

$$S_{\triangle ABC}=|AC_1|\cdot|BC_1|\cdot\operatorname{ctg}(\hat{C}/2).$$

В. Н. Дубровский

◆

M842. *а) Докажите, что если* $\alpha+\beta+\gamma=0$, *то*

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=$$
$$=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

б) Величины $\hat{A}$, $\hat{B}$ *и* $\hat{C}$ *углов треугольника удовлетворяют*

а) Это довольно известное утверждение — подсказка к пункту б); оно легко доказывается с помощью стандартных формул преобразования суммы синусов и разности косинусов в произведение:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=$$
$$=2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

условию

$$\frac{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}{\cos\hat{A}+\cos\hat{B}+\cos\hat{C}}=\sqrt{3}.$$

Докажите, что хотя бы один из них равен 60°.

$$=4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta-\gamma}{4}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{4}=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

(в последнем переходе использовано условие $\alpha+\beta+\gamma=0$).

б) Так как $\sqrt{3}=\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}$, условие можно переписать так:

$$\sin\hat{A}\cos 60^\circ-\cos\hat{A}\sin 60^\circ+\sin\hat{B}\cos 60^\circ-$$
$$-\cos\hat{B}\sin 60^\circ+\sin\hat{C}\cos 60^\circ-\cos\hat{C}\sin 60^\circ=0$$

или

$$\sin(\hat{A}-60^\circ)+\sin(\hat{B}-60^\circ)+\sin(\hat{C}-60^\circ)=0.$$

Применяя к углам $\hat{A}-60^\circ$, $\hat{B}-60^\circ$ и $\hat{C}-60^\circ$ утверждение пункта а), получим, что

$$\sin\frac{\hat{A}-60^\circ}{2}\cdot\sin\frac{\hat{B}-60^\circ}{2}\cdot\sin\frac{\hat{C}-60^\circ}{2}=0,$$

то есть хотя бы один из углов $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ равен 60°.

Л. Д. Курляндчик

◆

M843. *В вершинах треугольника ABC восстановлены перпендикуляры AA_1, BB_1 и CC_1 к его плоскости по одну сторону от нее, равные по длине соответствующим высотам треугольника. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки пересечения плоскостей ABC_1, BCA_1 и CAB_1 на плоскость ABC, попадает в центр вписанной в треугольник ABC окружности и равен по длине ее радиусу.*

Пусть Q — точка пересечения плоскостей ABC_1, BCA_1 и CAB_1, O — ее проекция на плоскость ABC, P — проекция O на одну из сторон треугольника, для определенности — на прямую BC. Очевидно, что треугольник QOP подобен треугольнику A_1AH, где AH — высота треугольника ABC (см. рис. 1). Следовательно, $|OP|:|OQ|=|AH|:|AA_1|=1$, то есть $|OP|=|OQ|$. Аналогично доказывается, что расстояния от точки O до прямых AB и AC тоже равны $|OQ|$. Но это и значит, что O — центр вписанной окружности, а $|OQ|$ — ее радиус.

Приведем общее соотношение между расстоянием d от точки Q до плоскости ABC и длинами a, b и c отрезков AA_1, BB_1 и CC_1:

$$\frac{d}{a}+\frac{d}{b}+\frac{d}{c}=1 \text{ или } d=\frac{abc}{ab+bc+ca}.$$

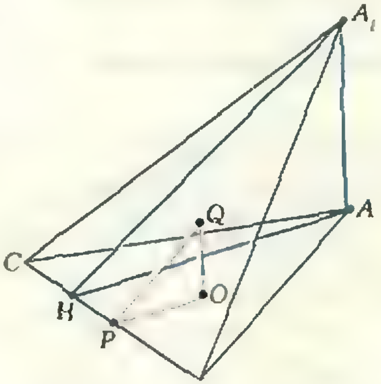
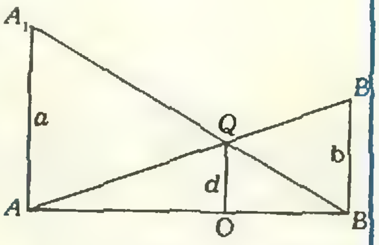


Рис. 1.



$$\frac{d}{a}+\frac{d}{b}=\frac{|OB|}{|AB|}+\frac{|AO|}{|AB|}=1$$

Рис. 2.

Докажите его самостоятельно и проверьте, что если a, b и c — длины высот треугольника, то d — радиус его вписанной окружности. Рис. 2 иллюстрирует доказательство аналогичного соотношения в двумерном случае.

В. Н. Дубровский,
А. А. Ягубьянц

◆

M844. *а) Докажите, что любое натуральное число a можно единственным образом представить в виде*

$$a=a_1\cdot 1!+a_2\cdot 2!+\ldots+a_n\cdot n!, \quad (1)$$

где a_k — целые числа, $0\leqslant a_k\leqslant k$, $a_n\neq 0$. (По определению, $k!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$, $1!=1$.)

б) Докажите, что любое рациональное число r, $0<r<1$, можно единственным образом*

а) Покажем, как по данному числу a найти старший коэффициент a_n в представлении

$$a=a_1\cdot 1!+a_2\cdot 2!+\ldots+a_{n-1}\cdot(n-1)!+a_n\cdot n! \qquad (*)$$

где $0\leqslant a_k\leqslant k$, $a_n\neq 0$, и его номер n.

Из первого тождества на полях (см. с. 37) следует, что при указанных значениях коэффициентов a_k

$$a'=a_1\cdot 1!+a_2\cdot 2!+\ldots+a_{n-1}\cdot(n-1)!\leqslant$$
$$\leqslant 1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+(n-1)\cdot(n-1)!<n!,$$

кроме того, $n!\leqslant a_n\cdot n!\leqslant n\cdot n!$. Для каждого натурального a можно найти единственное n такое, что a лежит в промежутке $n!\leqslant a<(n+1)!$; этим однозначно определяется n в представле-

представить в виде

$$r=\frac{b_1}{2!}+\frac{b_2}{3!}+\ldots+\frac{b_n}{(n+1)!}, \qquad (2)$$

где b_k — целые числа, $0\leq b_k\leq k$, $b_n\neq 0$.

а) Представьте в виде (1) число $a=1984$ и в виде (2) число $r=19/84$.

нии (*). Разбив этот промежуток на n промежутков (длиной $n!$ каждый), мы найдем единственное возможное значение a_n как номер того промежутка, куда попадает $a: a_n\cdot n!\leq a<(a_n+1)n!$; другими словами, a_n — неполное частное от деления a на $n!: a=a_n\cdot n!+a'$, где $0\leq a'<n!$ ($a_n=[a/n!]$, где $[x]$ — целая часть x).

Точно так же мы можем найти для a' старший коэффициент в представлении

$$a'=a_1\cdot 1!+a_2\cdot 2!+\ldots+a_{n-1}\cdot(n-1)!$$

и т. д. Формальное доказательство существования и единственности требуемого представления (*) можно провести методом математической индукции: для $n=1$ утверждение очевидно, а наше рассуждение показывает, как из предположения, что оно верно для чисел, меньших a, следует его справедливость для данного a.

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(2!-1!)+(3!-2!)+\ldots+((n+1)!-n!)=(n+1)!-1$$

Можно двигаться и в обратном направлении: сначала найти a_1, потом a_2 и т. д. При этом a_1 есть остаток от деления a на 2, a_2 — остаток от деления $(a-a_1\cdot 1!)/2$ на 3 и, вообще, a_k — остаток от деления $(a-a_1\cdot 1!-\ldots-a_{k-1}\cdot(k-1)!)/k!$ на $k+1$.

Оба эти способа позволяют вывести такую общую формулу для a_k:

$$a_k=[a/k!]-[a/(k+1)!]\,(k+1).$$

б) Будем последовательно разбивать отрезок $[0;1[$: на 1-м шагу — на 2 равные части, на 2-м шагу каждый из двух образовавшихся отрезков — на 3 равные части и т. д. Вообще, на k-м шагу каждый из отрезков, полученных на $(k-1)$-м шагу, разбивается на $k+1$ равных частей. Ясно, что после k-го шага отрезок $[0;1]$ будет разбит на $(k+1)!$ равных частей.

Рассмотрим точку разбиения r, появившуюся **впервые** на n-м шагу (очевидно, $r=m/(n+1)!$, где m не делится на $n+1$). Эта точка отстоит от ближайшей к ней слева точки $(n-1)$-го шага на величину $b_n/(n+1)!$, где b_n — целое число, $0<b_n\leq n$. В свою очередь, эта точка $(n-1)$-го шага отстоит от ближайшей слева точки $(n-2)$-го шага на $b_{n-1}/n!$, где $0\leq b_{n-1}\leq n-1$, и т. д. В итоге получим представление

$$r=\frac{b_1}{2!}+\frac{b_2}{3!}+\ldots+\frac{b_n}{(n+1)!},\ 0\leq b_k\leq k,\ b_n\neq 0. \qquad (**)$$

Его единственность следует из того, что при любом наборе $b_1, \ldots, b_n$ в (**) числа

$$\frac{b_1}{2!},\ \frac{b_1}{2!}+\frac{b_2}{3!},\ \ldots,\ \frac{b_1}{2!}+\frac{b_2}{3!}+\ldots+\frac{b_n}{(n+1)!}$$

получаются, соответственно, не позже чем на 1-м, 2-м, ..., n-м шагах разбиения, причем (в силу неравенств $0\leq b_k\leq k$) каждое из них является ближайшим слева к следующему среди всех чисел того же шага.

Остается заметить, что любое рациональное число $r=p/q$ из промежутка $[0;1[$ появится среди точек разбиения не позже чем на $(q-1)$-м шагу, так как $r=p\,(q-1)!/q!$.

Фактически в этом решении коэффициенты b , ..., b_n определяются последовательно начиная с b_n: если уже найдены $b_n, \ldots, b_k$, то b_{k-1} — это остаток от деления (целого!) числа $\left(r-\frac{b_n}{(n+1)!}-\ldots-\frac{b_k}{(k+1)!}\right)\cdot k!$ на k. Подумайте, как можно находить эти коэффициенты начиная с b_1. Проверьте справедливость следующей формулы:

$$\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n-1}{n!}+\ldots+\frac{k!}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$b_k=[r\cdot(k+1)!]-[r\cdot k!](k+1)$$

(можно использовать второе тождество на полях).

в) Ответ: $1984=2\cdot 2!+3\cdot 3!+2\cdot 4!+4\cdot 5!+2\cdot 6!$, $19/84=1/3!+1/4!+2/5!+6/7!$. Эти представления легко найти, опираясь на решения пунктов а) и б).

В. Е. Колосов

◆

М845. *Для каких n из n уголков, состоящих из четырех клеток 1×1 и некоторого числа прямоугольников 4×1 (рис. 1), можно составить центрально-симметричную фигуру (многоугольник на клетчатой бумаге)?*

Ответ: для любого четного n.

На рисунке 2 показано, как из любого четного числа n уголков составить центрально-симметричную фигуру (прямоугольник $4\times n$). Покажем, что и обратно, любая центрально-симметричная фигура Ф из условия может содержать лишь четное число уголков. Приведем два доказательства.

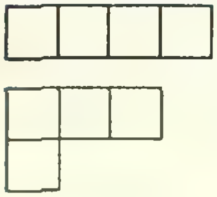


Рис. 1.

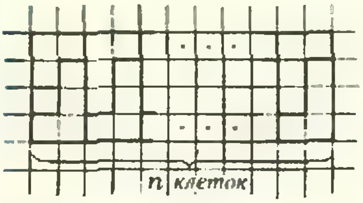


Рис. 2.

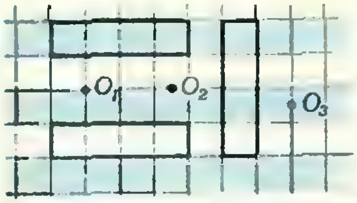


Рис. 3а.

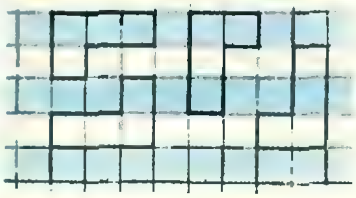


Рис. 3б.

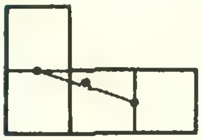


Рис. 4.

Первое основано на традиционных «олимпиадных» идеях — раскраски и четности. Центр симметрии O фигуры Φ — это один из центров симметрии соответствующей квадратной сетки, то есть либо ее узел, либо середина отрезка между двумя соседними узлами, либо центр клетки. Последний случай можно сразу отбросить, так как в этом случае число клеток в фигуре было бы нечетно, но оно должно делиться на 4. Покрасим плоскость «в синюю полоску», как показано на рисунке 3. Тогда число синих клеток в фигуре Φ будет четно. (В зависимости от расположения центра O либо каждой синей клетке симметрична белая — как для центров O_1 и O_2 на рисунке 3, *а*, и тогда число синих клеток в Φ равно половине общего числа клеток, кратного четырем; либо каждой синей клетке симметрична другая синяя — как для точки O_3 на рисунке 3, *а*.) Но в любом прямоугольнике 4×1 на сетке число синих клеток четно (рис. 3, *а*), а в любом уголке — нечетно (рис. 3, *б*). Поэтому число уголков должно быть четно.

Второе доказательство опирается на то, что центр симметрии O фигуры Φ является и ее центром масс (если рассматривать ее как однородную пластину; можно также заменить Φ на конечную систему равных масс, сосредоточенных в центрах составляющих эту фигуру клеток). Как мы видели выше, через точку O проходит хотя бы одна из линий сетки; примем ее за ось ординат, а за ось абсцисс — любую перпендикулярную линию сетки. Единицей длины будет служить сторона клетки. В этих осях координаты точки O, а также центра масс любого прямоугольника 4×1 будут целыми или полуцелыми, то есть числами вида $a/2$, где a — целое. Центр масс уголка лежит в середине отрезка, соединяющего центры двух прямоугольников 2×1, из которых он составлен (рис. 4), поэтому его координаты имеют вид $b\pm1/4$ (b — целое число). Воспользуемся теперь тем, что если заменить каждую из фигурок — прямоугольников и уголков, составляющих Φ, на ее центр масс и поместить в эти центры равные массы, то центр полученной новой системы также попадает в точку O. Это означает, что координаты точки O равны средним арифметическим соответствующих координат центров масс всех фигурок, составляющих Φ. Следовательно, сумма абсцисс этих центров, то есть сумма нескольких чисел вида $a/2$ и n чисел вида $b\pm1/4$, должна быть равной нулю. Но это, очевидно, возможно только при четном n.

Чтобы второе доказательство стало вполне строгим, надо еще дать точное математическое определение центра масс и доказать использованные нами его свойства, например, законность замены какой-то группы масс на ее центр. Об этом подробно рассказывается в статье М. Б. Балка и В. Г. Болтянского в этом номере журнала.

В. Г. Белов

Ф852. *По горизонтальной непроводящей плоскости без проскальзывания катится равномерно заряженное кольцо массы m. После включения горизонтального магнитного поля с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости кольца, сила давления кольца на плоскость уменьшилась вдвое. С какой скоростью катилось кольцо, если его заряд равен q?*

◆

Изменение силы давления кольца на плоскость обусловлено действием на кольцо некоторой силы со стороны магнитного поля. Найдем эту силу.

Рассмотрим два малых диаметрально противоположных участка кольца вблизи точек A и C (см. рисунок). Поскольку точка O — мгновенный центр вращения кольца, мгновенные скорости точек A и C равны, соответственно,

$$v_A=\frac{v}{R}|OA|=\frac{v}{R}2R\cos\frac{\alpha}{2}=2v\cos\frac{\alpha}{2},$$

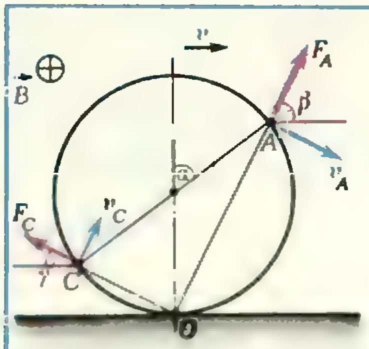
$$v_C=\frac{v}{R}|OC|=2v\sin\frac{\alpha}{2},$$

где R — радиус кольца. Векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_C$ перпендикулярны, соответственно, отрезкам OA и OC. Пусть заряд каждого участка равен Δq. Поскольку участки малы, эти заряды можно считать точечными. Силы Лоренца, действующие со стороны магнитного поля на каждый заряд, равны

$$F_A=\Delta q\cdot B2v\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$F_C=\Delta q\cdot B2v\sin\frac{v}{2}.$$

Векторы $\vec{F}_A$ и $\vec{F}_C$ направлены вдоль отрезков OA и OC и состав-



ляют с горизонталью углы, равные, соответственно,

$$\beta=\frac{\alpha}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}.$$

$$\gamma=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha}{2}.$$

В проекции на горизонталь результирующая сила, действующая на оба участка, равна

$$f_x=\Delta q\cdot 2Bv\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)=0,$$

а в проекции на вертикаль

$$f_y=\Delta q\cdot 2Bv\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=\Delta q\cdot 2Bv.$$

Рассматривая аналогично каждую пару диаметрально противоположных участков, найдем, что горизонтальная проекция силы, действующей на кольцо со стороны магнитного поля, равна нулю, а вертикальная проекция равна

$$F_y=\sum_i F_{yi}=2vB\sum_i \Delta q_i,$$

где $\sum\limits_i \Delta q_i$ — сумма зарядов всех элементарных участков, составляющих половину кольца, то есть $\sum\limits_i \Delta q_i=\frac{q}{2}$. Таким образом,

$$F_y=qvB.$$

Запишем условие равновесия кольца в проекции на вертикаль:

$$mg=N+qvB.$$

По условию задачи $N=mg/2$ и, следовательно,

$$qvB=mg/2.$$

Отсюда

$$v=mg/2qB.$$

Л. Г. Маркович

Ф853. *Левые опоры контейнера, в отличие от правых, сделаны на роликах (рис. 1), обеспечивающих пренебрежимо малое трение (размеры опор малы). Чтобы сдвинуть контейнер влево, к центру его правой стенки перпендикулярно ей надо приложить силу F_1. Чтобы сдвинуть контейнер вправо, к центру его левой стенки перпендикулярно ей надо приложить силу F_2. Определить массу контейнера, считая его однородным кубом.*

◆

При приложении к центру правой стенки силы F_1 контейнер сдвинется, когда эта сила сравняется с силой трения $\mu N_1'$, действующей на неподвижные опоры. Так что сила давления пола на эти опоры —

$$N_1=F_1/\mu.$$

Суммарный момент сил относительно оси, проходящей через ролики, должен быть равен нулю (контейнер не опрокидывается). Поэтому (см. рис. 1)

$$\frac{mgl}{2}-\frac{F_1 l}{2}-N_1 l=0.$$

Отсюда, с учетом того, что $N_1=F_1/\mu$, получаем:

$$mg=F_1\left(1+\frac{2}{\mu}\right). \qquad (1)$$

При приложении силы F_2 к центру левой грани (рис. 2) сила давления пола на неподвижные опоры равна F_2/μ. Равенство нулю полного момента сил относительно оси, проходящей через ролики, приводит к соотношению

$$mg=F_2\left(\frac{2}{\mu}-1\right). \qquad (2)$$

($F_2>F_1$, потому что во втором случае момент силы F_2 приводит к дополнительной нагрузке на неподвижные опоры, а значит, и к возрастанию силы трения.)

Решая совместно (1) и (2), находим m:

$$m=\frac{2F_1F_2}{g(F_2-F_1)}.$$

У некоторых холодильников конструкция опор такая же, как и у нашего контейнера. Они легко передвигаются в сторону роликов и значительно труднее в противоположную сторону. Иногда холодильник вообще не желает скользить, а начинает опрокидываться. Это происходит при определенном значении коэффициента трения. В случае «кубического» холодильника с равномерным распределением массы — при $\mu\geqslant 1$. Граничное значение μ полу-

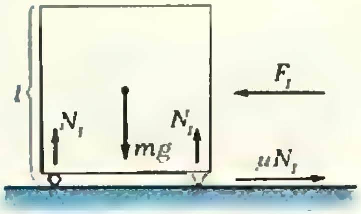


Рис. 1.

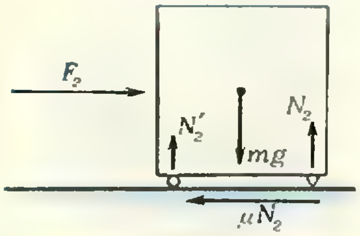


Рис. 2.

чается из условия отрыва роликов — когда моменты сил F_2 и mg относительно неподвижных опор становятся равными; тогда $F_2=mg$, а сила трения равна или меньше μmg. Коэффициент трения зависит от соприкасающихся поверхностей, более менее реальный диапазон $0{,}1\leqslant\mu\lesssim0{,}6$. Для куба опасности нет, но для контейнера, вытянутого в высоту, возможность опрокидывания нужно принимать во внимание (чем больше высота, тем больше момент силы F_2).

И. И. Воробьев

◆

Ф854. *Оцените среднее усилие, которое надо прилагать к краю надувного матраца, чтобы согнуть его посредине под прямым углом. Матрац не имеет поперечных перетяжек. Необходимые для решения величины и их достаточно реальные числовые значения задайте сами и получите численный результат.*

Оценим работу, которую надо совершить, чтобы согнуть матрац под прямым углом. По порядку величины ее можно оценить как $A\sim p\cdot\Delta V$, где p — перепад между атмосферным давлением и давлением воздуха внутри матраца, ΔV — изменение объема матраца в процессе его деформации. Как видно из рисунка, ΔV примерно равно произведению площади треугольника ABC на ширину матраца b:

$$\Delta V\approx\frac{2d\cdot d}{2}b=d^2b,$$

где d — толщина матраца.

С другой стороны, работа по сгибанию матраца может быть оценена как произведение средней действующей силы $F_{ср}$ на пройденное расстояние:

$$A\approx F_{ср}\frac{2\pi l}{4}\sim F_{ср}l$$

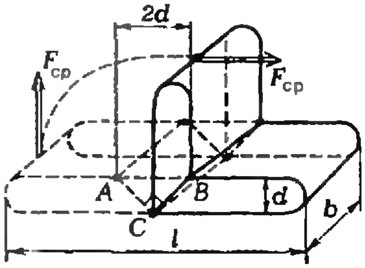
(l — длина матраца).

Из приведенных выражений следует, что

$$A\sim p\cdot\Delta V\sim pd^2b\sim F_{ср}l,$$

откуда

$$F_{ср}\sim\frac{pd^2b}{l}.$$



Для числовых расчетов можно положить $b\approx0{,}8$ м, $d\approx0{,}15$ м, $l\approx2$ м. Сложнее оценить p. Воспользуемся такими соображениями. Если встать на матрац ногами, то он, чаще всего, продавливается до земли. Следовательно, p одного порядка с давлением, оказываемым ступнями человека на землю:

$$p\sim\frac{mg}{S}\sim\frac{700\ \text{Н}}{0{,}2\cdot0{,}3\ \text{м}^2}\sim10^4\ \text{Па}.$$

Окончательно вычисляем:

$$F_{ср}\sim\frac{10^4\ \text{Па}\cdot(0{,}15\ \text{м})^2\cdot0{,}8\ \text{м}}{2\ \text{м}}\sim10^2\ \text{Н},$$

что неплохо согласуется с нашим житейским опытом.

Е. И. Пальчиков

◆

Ф855. *В плоский конденсатор, присоединенный к полюсам батареи с ЭДС $\mathcal{E}$, полностью вдвинута параллельно его пластинам заряженная пластина на расстоянии b от одной из пластин конденсатора (см. рисунок). Найти силу, действующую на вдвинутую пластину, если ее заряд равен q. Силой тяжести пренебречь. Площадь пластин конденсатора равна S, расстояние между ними — d.*

Электрическое поле внутри конденсатора представляет собой сумму поля, создаваемого пластиной с зарядом q, и поля, создаваемого зарядами пластин конденсатора. Напряженности этих полей обозначим, соответственно, E и E_1. (На рисунке указаны направления полей E и E_1 для случая положительного заряда вдвинутой пластины.)

Сила, действующая на вдвинутую пластину, равна

$$F=qE_1.$$

Напряженность E_1 можно найти, записав разность потенциалов между пластинами конденсатора в виде

$$\mathcal{E}=(E_1+E)(d-b)+(E_1-E)b.$$

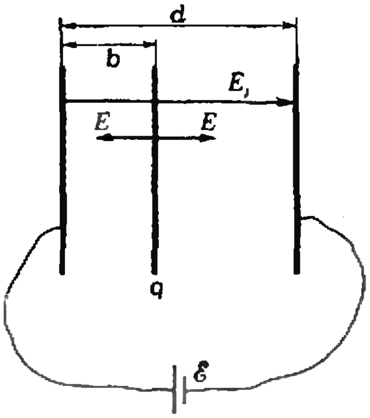
Отсюда

$$E_1=\frac{\mathcal{E}+E(2b-d)}{d}.$$

Подставив $E=q/2\varepsilon_0S$, получим:

$$E_1=\frac{\mathcal{E}+\dfrac{q(2b-d)}{2S\varepsilon_0}}{d}.$$

Таким образом, сила, действующая на вдвинутую пластину,



равна

$$F=\frac{q}{d}\left(\mathcal{E}+\frac{q(2b-d)}{2\varepsilon_0 S}\right).$$

Если пластина вдвинута точно посредине ($2b=d$), то она не изменяет заряд конденсатора и поле в нем. При несимметричном расположении пластины и достаточно большом ее заряде возможен случай, когда $E_1=0$, то есть когда на пластинах конденсатора не будет зарядов, несмотря на подключенный источник питания. Более того, из-за влияния вдвинутой пластины направление поля E_1 и знаки зарядов на пластинах конденсатора могут быть противоположными тем, которые создаются источником.

Б. П. Бородин, А. П. Ершов

Ф856. *Через нагревательную спираль с постоянным сопротивлением пропускают постоянный ток. На сколько процентов изменится среднее количество тепла, выделяющегося в спирали за секунду, если через нее пропускать одновременно еще и переменный (синусоидальный) ток, амплитудное значение которого составляет 10% от величины постоянного тока?*

◆

Когда по спирали течет только постоянный ток I_0, выделяющаяся в ней мощность равна $P_1=I_0^2R$.

Мгновенное значение тока в спирали, когда по ней течет и постоянный, и переменный ток, равно $I_0+I\sin\omega t$. Мгновенная мощность, выделяющаяся в спирали в этом случае,

$$P_2=(I_0+I\sin\omega t)^2R.$$

Так что мгновенная мощность при подключении к спирали дополнительного источника переменного тока изменяется на

$$\left(\frac{P_2-P_1}{P_1}\right)100\%=\frac{R(I_0+I\sin\omega t)^2-RI_0^2}{RI_0^2}100\%=$$

$$=\left(2\frac{I}{I_0}\sin\omega t+\left(\frac{I}{I_0}\right)^2\sin^2\omega t\right)100\%.$$

Поскольку $\overline{\sin\omega t}=0$, $\overline{\sin^2\omega t}=\frac{1}{2}$ (средние значения $\sin\omega t$, $\sin^2\omega t$), средняя мощность изменяется на

$$\frac{\overline{P_2}-P_1}{P_1}100\%=\frac{1}{2}\left(\frac{I}{I_0}\right)^2100\%\approx 0{,}5\%.$$

В. Г. Цудников

Ф857. *На блестящей банке имеется плоская вмятина, от которой отражается на экран пучок света. В банку наливают охлажденную жидкость. Отраженный сигнал заметно ослабляется. Объясните явление.*

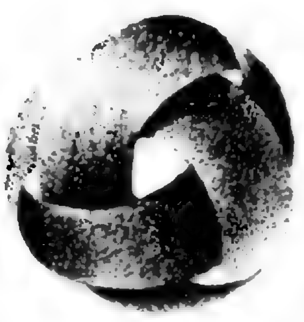
◆

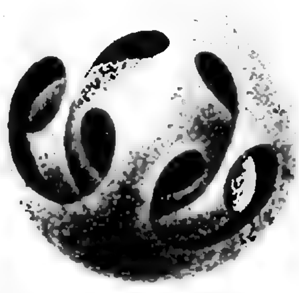
Когда в банку налили охлажденную жидкость, температура банки стала ниже точки росы, и на поверхности банки появились мелкие капли сконденсировавшейся влаги из окружающего воздуха. Теперь свет рассеивается на этих каплях, и поэтому отраженный сигнал заметно ослабляется.

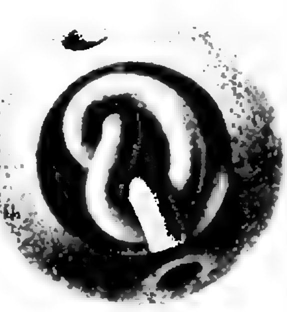
В. Г. Цудников

Наша обложка

На второй странице обложки наш художник, дав волю своему воображению, показал, как неориентируемая поверхность, полученная модификацией обыкновенной сферы, может стать основой фантастического городского пейзажа. Здесь же им представлены другие поверхности (придуманные Ю. В. Котовым). Слева направо показаны: заузленный лист Мёбиуса, более сложная неориентируемая модификация сферы и тор с заузленной дыркой. Все эти поверхности представляют собой «пленки» (см. статью А. Н. Веселова из февральского номера журнала).







Цепочка с бегущим кольцом

Кандидат физико-математических наук А. В. БЯЛКО

У вашего друга скоро день рождения. Нелегко придумать оригинальный и недорогой подарок. Вот как, затратив всего копеек пятьдесят и полчаса времени, можно сделать вещицу, которая, несомненно, доставит удовольствие любознательному человеку и будет, на наш взгляд, замечательным подарком.

На фотографии слева — цепочка. Двойное переплетение блестящих колец создает красивую спираль. Но это не чисто декоративная игрушка, у этой цепочки есть свой секрет, свое особое свойство. Внимание, фокус!

Вы держите цепочку за верхнее кольцо, перехватываете другой рукой соседнее, и верхнее кольцо отпускаете, как бы даже бросаете его вниз. И вдруг кольцо... начинает сбегать вниз. Проскальзывая по другим кольцам, оно вьется вдоль всей цепочки и, достигнув нижнего положения, останавливается. А в руках у вас точно такая же цепочка, какой она была до этого.

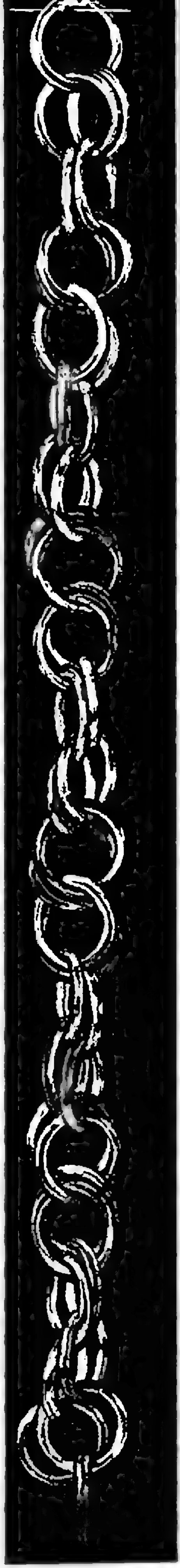
Ваш друг, заинтересовавшись, берет цепочку, и после нескольких неудачных попыток — не каждое из верхних колец имеет свойство проскальзывать вниз — и у него получается тот же фокус: секунда — и кольцо, просверкав, оказывается внизу. Однако как это произошло, остается загадкой — глаз не успевает проследить за перемещением кольца.

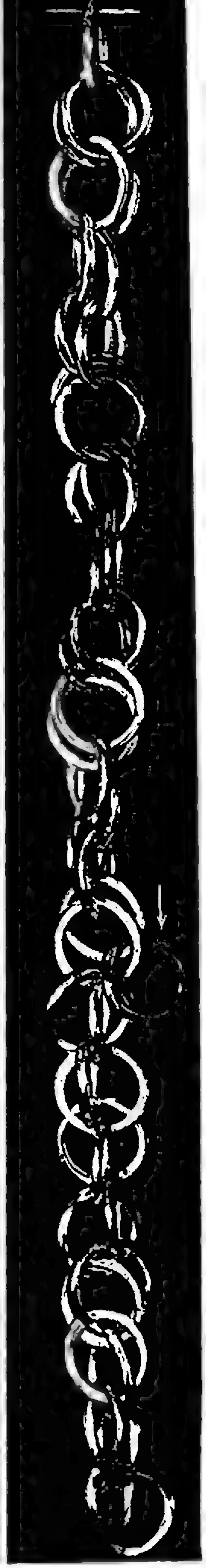
Изрядно повозившись с цепочкой, ваш приятель догадается, что сбегание кольца — это иллюзия. Все кольца продеты друг в друга, и поэтому каждое кольцо не может переместиться относительно своих соседей дальше чем на диаметр. Кажущееся сбегание кольца по цепочке на самом деле — такие (на диаметр) последовательные перемещения отдельных колец. Выше того кольца, которое в данный момент находится в движении, и ниже него цепочка неподвижна — вот и создается впечатление, что по цепочке перемещается отдельное кольцо, как бы бежит уединенная волна. Как же это происходит?

Рассмотрим внимательно соединения колец. Оказывается, наша цепочка — это две обычные одинарные цепочки, сплетенные боками — фото 1. Будем называть ветвями эти две вертикальные последовательности колец. Расположение колец на фото 1 неустойчиво — именно поэтому цепочку приходится фиксировать и сверху, и снизу. Устойчивым оно становится, когда одна из ветвей находится на одно кольцо выше другой.

Очевидно, что таких устойчивых положений у цепочки два: верхней может быть как одна, так и другая ветвь цепи. Кажущееся сбегание кольца происходит, когда вы переводите цепочку из одного положения в другое. Одинарные ветви при этом должны «поменяться местами» — верхняя ветвь станет нижней и наоборот. Это, однако, не происходит одновременно вдоль всей цепочки. Если вы взялись за верхнее кольцо той ветви, которая пока находится в нижнем положении, и отпустили кольцо другой ветви, то нижняя часть цепочки еще «не знает» о том, что наверху произошел «дворцовый переворот». Ведь положение каждого кольца цепочки определяется его соседями, и кольцо может занять правильную позицию только после того, как все расположенные над ним кольца уже находятся в новом состоянии.

Посмотрите на правую цепочку на заставке. На ней зафиксирован момент, когда правильную позицию занимает колечко, находящееся посередине цепочки (на него указывает стрелка). Когда оно займет новое положение, то «освободится» кольцо, расположенное под ним. Оно тоже под действием силы тяжести повернется и упадет вниз. И так далее. Это бегущее вниз воз-





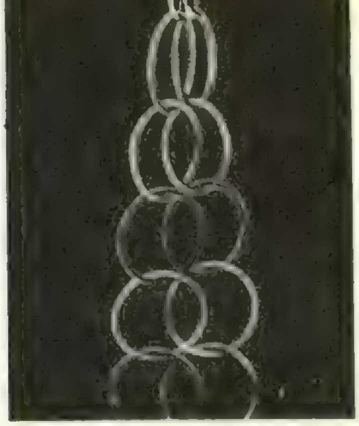


Фото 1.

мущение, подробности которого трудно уловить глазом, и создает иллюзию скольжения вдоль цепочки одного кольца.

Чем больше размер колец, тем с большей скоростью бежит по цепочке волна. Однако время, за которое каждое колечко переходит в новое правильное положение, тоже больше для крупных колец. Поэтому уследить за перемещением каждого колечка в цепочке, собранной из мелких колец, труднее — тем эффектнее и иллюзия фокуса. Напротив, для объяснения фокуса удобнее крупная цепочка.

А теперь поучимся плести цепочку. Материалом для ее изготовления могут быть любые кольца; несколько их видов продается в галантерейных магазинах. Как правило, на них имеется разрез, по которому кольца нетрудно разогнуть и согнуть снова.

Можно скрупулезно скопировать соединение колец с любой из фотографий. Такой способ, однако, займет уйму времени и вызовет растущее чувство досады при почти неизбежных ошибках сборки. Но есть способ плетения цепи настолько простой и надежный, что при некоторой тренировке можно научиться собирать эту цепочку с завязанными глазами. Его мы и опишем.

Первая операция — изготовление соединения из пяти колец, изображенного на фото 2. Рисунок рядом с фотографией поясняет сборку этого звена.

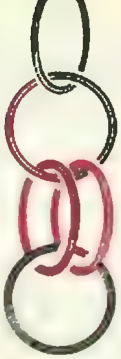
Теперь нужно подвесить эти пять колец за одно из двух колец второго сверху яруса (за одно из двух красных колец на рисунке). При этом все звено окажется в таком положении, как на фото 3. В нижнем ярусе теперь два кольца.

В них нужно продеть новое разомкнутое кольцо, а в его разъем добавить еще одно неразомкнутое кольцо (эта операция изображена на рисунке рядом с фото 3 штриховыми линиями). То, что получится, показано на фото 4. Разъем соединяется — фото 5.

Внизу получившейся у нас цепочки два яруса из одиночных колец. Поменяем теперь положения ее одинарных ветвей. Для этого нужно подвесить цепочку за одно из двух колец второго сверху яруса. При этом по цепочке «пробежит» одно кольцо. В результате получится то, что показано на фото 6. Теперь внизу оказался ярус из двух колец. С ним следует повторить основную операцию сборки: снова продеть через них разомкнутое кольцо, на него надеть неразомкнутое, соединить разъем. Получится такая же цепочка, как на фото 5, но на один ярус длиннее. У этой цепочки поменяем положения одинарных ветвей, повторим основную операцию сборки — цепочка удлинится еще на один ярус. И так далее.

Таким образом собирается цепочка любой длины. Когда вы решите ее закончить, в последнее разомкнутое кольцо нового неразомкнутого уже не добавляйте.

Напоследок несколько советов. Не делайте очень длинных цепочек. При числе звеньев больше тридцати силы трения, пропорциональные весу цепочки и ее длине, становятся велики настолько, что препятствуют движению колец, и уединенная волна может застрять посреди цепочки. Для большей эффектности фокуса можно собрать цепочку из колец разного цвета в примерно равных количествах и в кажущемся беспорядке. Но наверху и внизу цепочки при этом поставить кольца таким образом, чтобы «сброс» кольца сверху приводил к появлению внизу кольца того же цвета. Это усилит впечатление проскальзывания кольца вдоль цепочки.



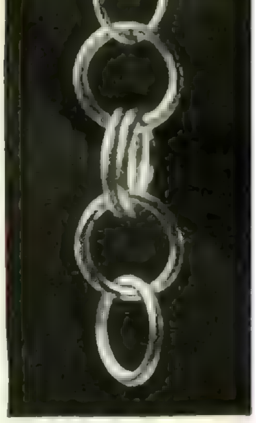
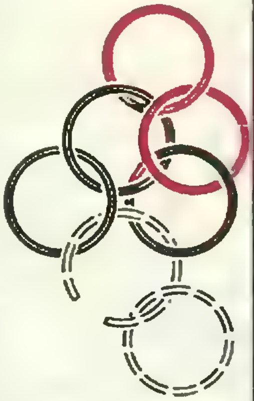


Фото 2.



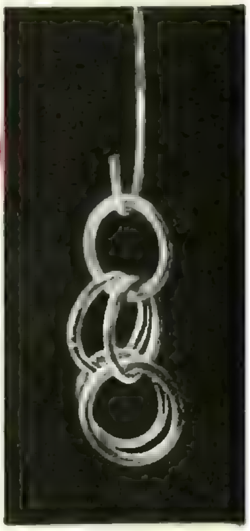


Фото 3.

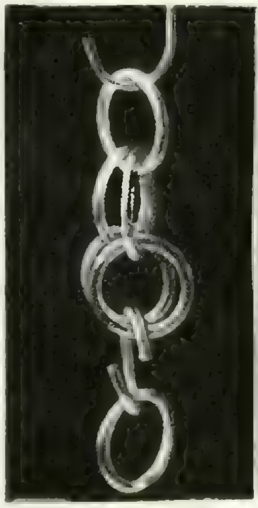


Фото 4.

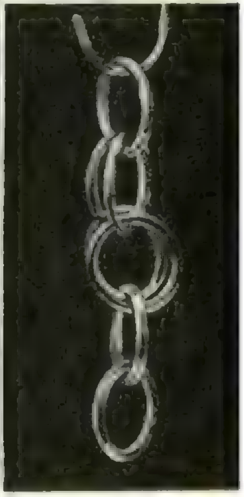
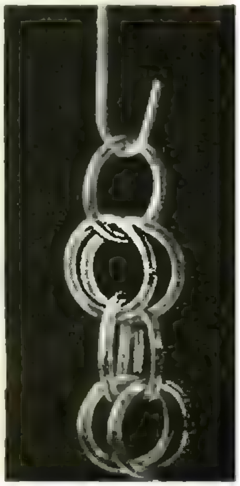
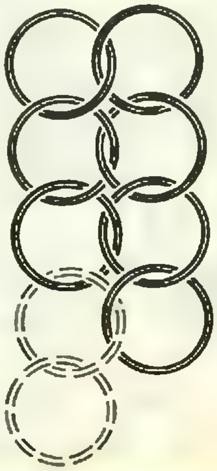


Фото 5.

Фото 6.





Кто решил задачку

13 августа 1983 года «Квант» побывал в гостях у «Комсомольской правды» — в 530-м выпуске «Клуба любознательных» было рассказано о нашем журнале и предлагались 3 задачи — 2 по математике и 1 по физике. Задачи по математике решили многие читатели. Напомним эти задачи.

1. Десять рабочих должны изготовить 50 изделий. Каждое изделие должно быть окрашено (на это нужно 10 минут), а затем смонтировано (20 минут). После окраски изделие 5 минут сохнет. Сколько рабочих назначить малярами и сколько — монтажниками, чтобы работа была выполнена в кратчайшее время?

2. Четыре предприятия, расположенные в вершинах квадрата, нужно соединить кратчайшей сетью дорог. Как это сделать? Соединять по сторонам квадрата — невыгодно. Лучше, конечно, провести две дороги по диагоналям. Но оказывается, что и это не дает оптимального решения. Каково же оно? А как быть, если 4 предприятия не находятся в вершинах квадрата? Если их не 4, а 3, 5, 6? Попробуйте построить общую теорию кратчайшей сети дорог между любым конечным числом пунктов.

«Изюминка» первой задачи — в неоднозначности ее решения. Кратчайшее время в 195 минут получается для трех различных способов деления рабочих на маляров и монтажников, а именно, 3 маляра и 7 монтажников, 4 маляра и 6 монтажников и даже 3 маляра и 6 монтажников. В последнем случае один из рабочих оказывается лишним. Читатели предлагают назначить его либо бригадиром, либо упаковщиком.

Если же маляров будет меньше трех (два или один), то время только на окраску займет не менее 250 минут, а если монтажников будет 5 или меньше, то монтаж займет не меньше 200 минут. Поэтому предложенное разделение является наилучшим. Его прислали многие читатели.

Для решения второй задачи оказывается очень важным разобрать случай трех предприятий. Здесь ответ таков: если в треугольнике ABC (с предприятиями в точках A, B, C) все углы не превосходят 120°, то кратчайшей сетью дорог будет система дорог, соединяющая некоторую узловую точку O с точками A, B и C, где точка O выбрана так, чтобы каждый из углов AOB, AOC и BOC равнялся 120°. Если же один из углов этого треугольника, например при вершине A, больше (или равен) 120°, то кратчайшей сетью дорог будут две дороги, соединяющие A с B и A с C. Из этого факта следует многое для общего решения задачи. Например, то, что для любого количества предприятий на оптимальной сети дороги не могут расходиться под углом, меньшим 120°. Для квадрата (случай 4 предприятий) оптимальная сеть изображена на рисунке, там имеются два узловых пункта, в которых дороги расходятся под углами в 120°.

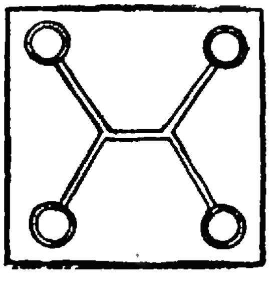
Для большего количества точек-«предприятий» можно построить несколько различных систем дорог, удовлетворяющих указанному свойству. А дальше? Дальше нужно выбрать из них наилучшую систему — ту, у которой сумма длин дорог наименьшая.

Любопытно, что эту задачу прекрасно решает... мыльная пленка, которая, как известно, стремится занять положение, при котором ее площадь минимальна. Можно поставить такой опыт — между двумя параллельными стеклами перпендикулярно им закрепить 4 карандашика — «предприятия» и окунуть эту систему в мыльную воду. Вынув систему из воды, вы увидите решение второй задачи.

Задачу по физике большинство читателей решило неверно. Наиболее полное решение прислал читатель Саидрасулов Азиз. Вот эта задача.

На одном из заводов в соответствии с технологией требовалось разогревать большие стальные цилиндрические болванки. Равномерный разогрев таких болванок в печах осуществлять было трудно и дорого. Тогда попробовали их разогревать, поместив вертикально в соленоид, питаемый током от городской сети (50 Гц). Результат оказался неожиданным: из сплошных цилиндров получились трубы (металл внутри болванок расплавился и вытек). Объясните, почему это произошло.

Вкратце ее решение сводится к следующему. При пропускании через соленоид переменного тока в болванке циркулируют вихревые токи, которые нагревают ее. Тепло выделяется во всем объеме болванки, но у поверхности температура будет существенно ниже из-за теплоотдачи в окружающее пространство через излучение и вследствие отвода тепла окружающим воздухом. Поэтому внутренняя часть болванки нагреется до температуры плавления, тогда как поверхностный слой еще останется в твердом состоянии. Жидкий металл вытечет под действием силы тяжести, оставив твердую «трубу».



КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Прижмись к середине.

Вот такие мысли

(из ответов читателей на 530-й выпуск «Клуба любознательных»)

Я не знаю, что такое «соленоид», но думаю, что произошла реакция металла болванок с этим самым соленоидом под действием тока, причем из-за малой мощности тока не со всем металлом, а только с частью, то есть с поверхностью.

(Н. Р., г. Целиноград)

Движение тока — одностороннее движение от источника к потребителю. При прохождении электрическим током металла образуется тепловая энергия. Но как она проходит болванку? Снизу вверх! Значит, тепловая энергия от движения тока уменьшается снизу вверх. С увеличением тепловой энергии движение ионов ускоряется и наступит такой момент, когда одно агрегатное состояние металла сменится другим, то есть кристаллическое — жидким. Под действием силы тяжести сталь выльется.

(О. П., г. Моздок)

Я так подумал, что если начнется драка на мосту, то люди или еще кто будут держаться к середине, чтобы не вылететь с моста. Так же ведут себя и атомы в проводнике, но если добавить энергии на получившиеся трубы, то они расплавятся.

(Н. Н., г. Пермь)

Когда тело, в данном случае болванка, нагреется, размах колебаний настолько увеличится, что нарушится порядок в расположении частиц в кристаллах. Но соленоид, начав работать, будет испускать магнитные волны, и эти магнитные волны будут удерживать порядок частиц в кристаллах только лишь по круговой орбите и в определенных слоях (это зависит от соленоида). А на внутренние слои это действовать не будет, и поэтому металл из болванки будет вытекать. Останется только металл, на который воздействует соленоид, то есть уже готовое изделие — труба.

(Р. К., г. Баку)

При бригадном подряде работа заканчивается за 150 минут.

(К. Р., г. Рига)

Ну а десятый пусть складывает готовые изделия в ящик.

(Р. М., Джамбульская обл.)

Получится паутина дорог, из которой видно, что тут много лишнего. Так что лучше всего — сделать между предприятиями площадь и всю ее заасфальтировать.

(рядовой А. П.)

Теплоемкость идеального газа

Доктор физико-математических наук
С. М. КОЗЕЛ,
кандидат физико-математических наук
А. А. ШЕРОНОВ

Определение теплоемкости связано с первым законом термодинамики — законом сохранения и превращения энергии в тепловых процессах. Согласно этому закону, количество теплоты Q, переданное телу (или системе тел), идет на изменение ΔU его внутренней энергии и на совершение работы A' над внешними телами:

$$Q = \Delta U + A'.$$

Для однородного тела удобно говорить о теплоемкости одного моля вещества. Молярной теплоемкостью C называют количество теплоты, полученное одним молем вещества при нагревании его на один градус. Если в процессе нагревания количеству вещества $\nu = m/M$ (здесь m — масса, M — молярная масса вещества) было передано количество теплоты Q, а его температура изменилась от T_1 до T_2, то

$$C = \frac{Q}{\nu (T_2 - T_1)} = \frac{Q}{(m/M)(T_2 - T_1)}.$$

В Международной системе единиц (СИ) молярная теплоемкость измеряется в Дж/(К·моль).

Наряду с молярной теплоемкостью C можно определить удельную теплоемкость c, то есть теплоемкость единицы массы вещества. Очевидно, что $c = C/M$.

Зная теплоемкость вещества в данном термодинамическом процессе, легко найти полученное телом количество теплоты:

$$Q = mc(T_2 - T_1) = \frac{m}{M} C (T_2 - T_1) = \nu C (T_2 - T_1).$$

Очень важно понимать, что работа A', совершаемая над внешними телами, зависит от условий, при которых происходит процесс передачи тепла. Поэтому теплоемкость определяется не только свойствами вещества, но и видом термодинамического процесса.

Например, при изотермическом расширении газа ($T = \text{const}$) к нему подводится тепло, но его температура остается неизменной. Из определения следует, что теплоемкость газа в изотермическом процессе бесконечно велика. В этом случае все переданное системе количество теплоты идет на совершение работы: $Q = A'$. Если тот же газ участвует в адиабатном процессе, то его температура изменяется, а получаемое газом количество теплоты равно нулю. Следовательно, в адиабатных процессах теплоемкость равна нулю, и работа A' газа над внешними телами совершается за счет убыли внутренней энергии: $A' = -\Delta U$.

Итак, теплоемкость газа зависит от термодинамического процесса. Процессы, при которых теплоемкость остается неизменной, принято называть политропическими. Примерами политропических процессов, наряду с изотермическим и адиабатным, являются также изохорный ($V = \text{const}$) и изобарный ($p = \text{const}$) процессы. Соответствующие им молярные теплоемкости обозначают через C_V и C_p. Рассмотрим эти процессы более подробно (рис. 1).

В первом случае ($V = \text{const}$) поршень закреплен (см. рис. 1, *а*), и газ при нагревании работы не совершает. Все полученное газом тепло идет на увеличение его внутренней энергии. Во втором случае ($p = \text{const}$) поршень свободен (см. рис. 1, *б*), газ при нагревании расширяется и совершает работу. Полученное газом тепло лишь частично идет на увеличение внутренней энергии, остальная часть затрачивается на со-

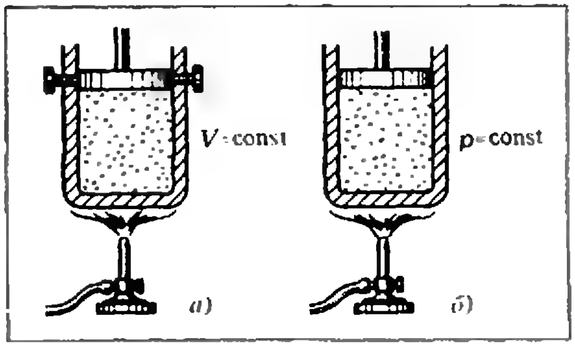


Рис. 1.

вершение работы по расширению. Ясно, что для повышения температуры газа на один градус во втором случае необходимо передать газу большее количество теплоты, следовательно, $C_p > C_V$.

Найдем теперь количественную связь между C_p и C_V. Из молекулярно-кинетической теории известно, что внутренняя энергия идеального газа прямо пропорциональна его абсолютной температуре. В учебнике «Физика 9» показано, что для одноатомного газа $U=3/2\,R\nu T$ (где R — универсальная газовая постоянная). При изохорном процессе $A'=0$, $Q=\Delta U=C_V\nu(T_2-T_1)$. Отсюда следует, что для одноатомного газа молярная теплоемкость при постоянном объеме равна $C_V=3/2\,R$.

Работа газа при изобарном расширении вычисляется по формуле

$$A'=p(V_2-V_1)=p\Delta V.$$

Если в рассматриваемом термодинамическом процессе давление изменяется, эту формулу тоже можно применять, но только для очень малых участков процесса, на которых изменение объема ΔV мало и поэтому давление p можно приближенно считать постоянным. Мы можем записать теперь первый закон термодинамики в виде

$$Q=C_V\nu(T_2-T_1)+p(V_2-V_1)= =C_V\nu\Delta T+p\Delta V.$$

Отсюда, используя определение молярной теплоемкости, получаем формулу для теплоемкости идеального газа в произвольном процессе:

$$C=\frac{Q}{\nu(T_2-T_1)}=C_V+\frac{p}{\nu}\frac{\Delta V}{\Delta T}.$$

Изменения объема ΔV и температуры ΔT в этой формуле связаны уравнением состояния идеального газа $pV=\nu RT$ и уравнением теплового процесса, в котором участвует газ. В частности, для изобарного процесса

$$p(V_2-V_1)=\nu R(T_2-T_1),\ \text{или}\ \frac{\Delta V}{\Delta T}=\frac{\nu R}{p}.$$

Следовательно, теплоемкость C_p одного моля идеального газа в процессе при $p=\mathrm{const}$ есть

$$C_p=C_V+R.$$

Для одноатомного газа $C_p=5/2\,R$.

Заметим, что у твердых и жидких тел теплоемкости C_p и C_V мало отличаются друг от друга. Это связано с тем, что при нагревании твердых или жидких тел их объем изменяется очень мало, так что в обычных условиях (то есть при атмосферном давлении или близком к нему) совершаемая при расширении работа практически оказывается равной нулю. В этом случае теплоемкость равна изменению внутренней энергии тела при нагревании на один градус.

Теперь проиллюстрируем сказанное на нескольких конкретных задачах, которые в разные годы предлагались абитуриентам на вступительных экзаменах в Московском физико-техническом институте.

Задача 1. *Некоторое количество идеального газа нагревается при постоянном давлении $p=1$ атм от температуры $T_1=300$ К до температуры $T_2=400$ К. Какую работу совершил газ в этом процессе, если его начальный объем $V_1=3$ л?*

Пусть ν — данное количество вещества, C_V и C_p — молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и давлении соответственно.

Подведенное к газу количество теплоты

$$Q=\nu C_p(T_2-T_1),$$

а увеличение внутренней энергии газа

$$\Delta U=\nu C_V(T_2-T_1).$$

Совершенная газом работа A', по первому закону термодинамики, есть

$$A'=Q-\Delta U=\nu(C_p-C_V)(T_2-T_1)= =\nu R(T_2-T_1).$$

Из уравнения состояния идеального газа находим

$$\nu R=pV_1/T_1,$$

тогда окончательно для работы газа получим

$$A'=pV_1(T_2/T_1-1)=100\ \text{Дж}.$$

Разумеется, приведенное решение не является единственно возможным. В данной задаче можно обойтись и без понятия теплоемкости, воспользовавшись непосредственно формулой для вычисления работы газа при изобарном процессе.

Задача 2. *Моль идеального газа из состояния с температурой $T_1=100$ К расширяется изобарно, а затем изохорно переходит в состояние с начальной температурой (рис. 2). Во сколько раз изменился при этом объем газа, если для перевода газа из начального состояния в конечное к нему пришлось подвести количество теплоты $Q=831$ Дж?*

Тепло подводится к газу на изобарном и отводится на изохорном участках:

$$Q=\nu C_p(T_2-T_1)+\nu C_V(T_1-T_2)= =\nu R(T_2-T_1).$$

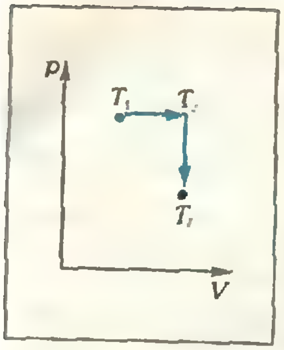


Рис. 2.

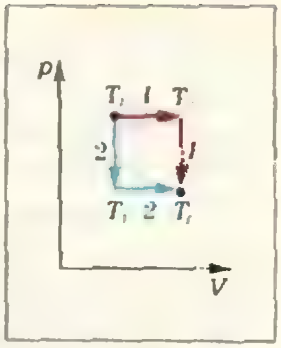


Рис. 3.

Для изобарного участка из уравнения состояния находим

$T_2-T_1=T_1(T_2/T_1-1)=T_1(V_2/V_1-1)$.

Из этих соотношений получаем

$$\frac{V_2}{V_1}=1+\frac{Q}{\nu RT_1}=2.$$

Задача 3. *Из начального состояния с известной температурой T_1 моль идеального газа переходит в состояние с той же температурой двумя путями (рис. 3). В одном из них газ сначала нагревается изобарно до температуры $T_2=2T_1$, а затем изохорно охлаждается. В другом — газ сначала изохорно охлаждается, а затем изобарно нагревается. Найдите разность количеств теплоты, подведенных к газу в обоих случаях.*

Решение этой задачи аналогично предыдущему:

$Q_1=\nu C_p(T_2-T_1)+\nu C_V(T_1-T_2)$,
$Q_2=\nu C_V(T_3-T_1)+\nu C_p(T_1-T_3)$,

и

$$Q_1-Q_2=\nu R(T_2+T_3-2T_1).$$

Применяя уравнение состояния $pV=\nu RT$ для изобарных участков процессов *1* и *2*, найдем связь температур T_1, T_2 и T_3:

$$p_1=\frac{\nu RT_1}{V_1}=\frac{\nu RT_2}{V_2},\quad p_2=\frac{\nu RT_3}{V_1}=\frac{\nu RT_1}{V_2},$$

откуда

$$T_1^2=T_2T_3.$$

По условию $T_2=2T_1$, поэтому $T_3=T_1/2$.

Окончательно получаем

$$Q_1-Q_2=\nu RT_3=\nu RT_1/2.$$

Задача 4. *Моль идеального газа расширяется по закону $pV^2=\text{const}$. Определите молярную теплоемкость газа в этом процессе.*

Как было сказано раньше, молярная теплоемкость газа

$$C=C_V+\frac{p}{\nu}\frac{\Delta V}{\Delta T}.$$

Из уравнения состояния $pV=\nu RT$ и уравнения процесса $pV^2=\text{const}$ получаем

$$VT=\text{const}.$$

Это равенство справедливо при любых V и T, поэтому

$$(V+\Delta V)(T+\Delta T)=VT.$$

Раскрывая скобки и пренебрегая малым слагаемым $\Delta V\Delta T$, находим отношение изменения объема ΔV к изменению температуры ΔT:

$$V\Delta T+T\Delta V=0,\ \text{или}\ \frac{\Delta V}{\Delta T}=-\frac{V}{T}.$$

Тогда окончательно молярная теплоемкость оказывается равной

$$C=C_V-\frac{pV}{\nu T}=C_V-R.$$

Нетрудно убедиться в том, что при расширении по закону $pV^2=\text{const}$ газ охлаждается (это непосредственно следует из условия $VT=\text{const}$). За счет убыли его внутренней энергии совершается работа по расширению ($A'>0$) и некоторое количество теплоты отдается окружающим телам ($Q<0$).

Задача 5. *Моль идеального газа помещают в цилиндр с подвижным невесомым поршнем, скрепленным с дном с помощью пружины, растяжение которой подчиняется закону Гука (рис. 4). Определите теплоемкость газа, считая внешнее давление равным нулю и пренебрегая длиной нерастянутой пружины.*

Пусть p — давление газа, $V=Sx$ — объем, занимаемый газом, где S — сечение цилиндра, x — длина растянутой пружины. Обозначим жесткость пружины через k и запишем условие равновесия поршня:

$$pS=kx,\ \text{или}\ pS^2=kV.$$

Из последней формулы следует, что изменения давления Δp и объема ΔV связаны соотношением

$$\Delta p=\frac{k}{S^2}\Delta V=\frac{p}{V}\Delta V.$$

Из уравнения состояния $pV=\nu RT$, справедливого при любых p, V, T, находим

$$(p+\Delta p)(V+\Delta V)=\nu R(T+\Delta T).$$

Раскрывая в последнем равенстве скобки и пренебрегая малым слагаемым вида $\Delta p\Delta V$, получим

$$p\Delta V+V\Delta p=\nu R\Delta T,$$

или, учитывая связь Δp и ΔV,

$$\frac{p}{\nu}\frac{\Delta V}{\Delta T}=\frac{R}{2}.$$

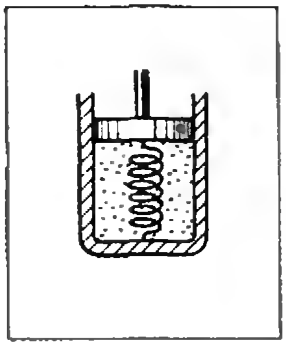


Рис 4.

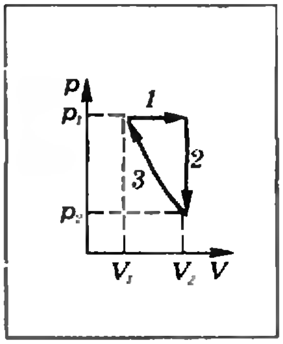


Рис. 5.

Таким образом, теплоемкость газа

$$C=C_V+\frac{p}{\nu}\frac{\Delta V}{\Delta T}=C_V+R/2.$$

Упражнения

1. Моль идеального одноатомного газа из состояния с начальной температурой $T_1=300$ К нагревается изохорно, а затем изобарно охлаждается до некоторой конечной температуры. Найдите эту температуру, если известно, что количество теплоты $Q=1500$ Дж, подведенное на изохоре, равно по модулю количеству теплоты, отведенного от газа на изобарном участке

2. Моль идеального газа совершает замкнутый цикл (рис 5). Сначала газ изобарно нагревается, так что его объем увеличивается: $V_2/V_1=n$. Затем он изохорно охлаждается, так что его давление уменьшается: $p_2/p_1=m$ Наконец, газ адиабатно переходит в исходное состояние. Определите по этим данным работу газа на адиабатном участке, если известна его начальная температура T_1 и молярная теплоемкость C_V

3. Идеальный одноатомный газ находится в масляном пузыре, помещенном в вакуумную камеру. Найдите теплоемкость (в расчете на моль) газа при его нагревании. Теплоемкостью пленки и зависимостью коэффициента поверхностного натяжения жидкости от температуры пренебречь. Указание. Давление газа p связано с радиусом пузыря r и коэффициентом поверхностного натяжения σ формулой $p=4\sigma/r$.

Задача для исследования

Цепные дроби и дихотомическая последовательность Штерна

Взгляните на таблицу 1. В ее верхней, «нулевой», строчке стоят две дроби $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$. Чтобы получить любую из последующих строчек, надо взять предыдущую строчку и между каждыми двумя ее соседними дробями вставить дробь, числитель которой равен сумме их числителей, а знаменатель — сумме их знаменателей. В n-й строчке будет 2^n+1 чисел, которые мы обозначим через $a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots, a_{n,2^n}$.

Номер строки	
0	$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{1}$
1	$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{1}$
2	$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{1}$
3	$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{1}$
. . .	. . . .
n	$a_{n,0}$ $a_{n,1}$ . . . . . $a_{n,2^n}$
. . .	. . . .

Таблица 1

1								1
1				2				1
1		3		2		3		1
1	4	3	5	2	5	3	4	1

Таблица 2

Любопытно, что в процессе составления таблицы 1 в числителях дробей будет многократно возникать одна и та же таблица 2, образованная знаменателями дробей из таблицы 1 (таблицу 2 называют «дихотомической последовательностью Штерна»). Таблица 1 обладает замечательным свойством, о котором рассказывалось в статье В. Н. Вагутена «Близкие дроби» («Квант», 1975, № 8): каждая несократимая дробь $\frac{m}{n}$, $0<\frac{m}{n}<1$, появляется в этой таблице не позже чем в $(n-1)$-й строчке и встречается во всех следующих строчках ровно по одному разу. Как заметил наш читатель *А. Одесский*, с помощью цепных дробей можно получить явную формулу для числа $a_{n,p}$. докажите, что каждое число $p<2^n$ можно представить в виде

$$p=2^{k_1}-2^{k_2}+2^{k_3}-\ldots\pm2^{k_r},$$

где $k_1>k_2>\ldots>k_r\geqslant0$, и тогда

$$a_{n,p}=\frac{1\,|}{|\,n+1-k_1}+\frac{1\,|}{|\,k_1-k_2}+\frac{1\,|}{|\,k_2-k_3}+\ldots+\frac{1\,|}{|\,k_{r-1}-k_r},$$

где мы воспользовались сокращенными обозначениями для цепных дробей (см., например, «Квант», 1983, № 5, с 18)

Попробуйте также выяснить, в какой именно строчке и на каком месте впервые появляется в таблице 1 дробь $\frac{m}{n}$. Напишите нам о других интересных закономерностях и формулах, которые вам удастся обнаружить в этой таблице.

Н. Б. Васильев

Об одном свойстве параболы

Г. Г. БОЯХЧАН

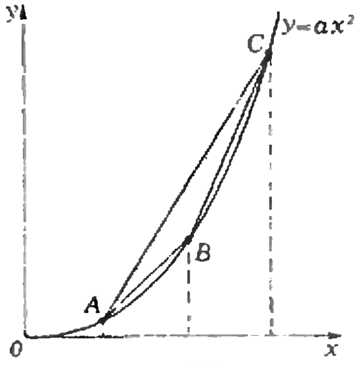


Рис. 1

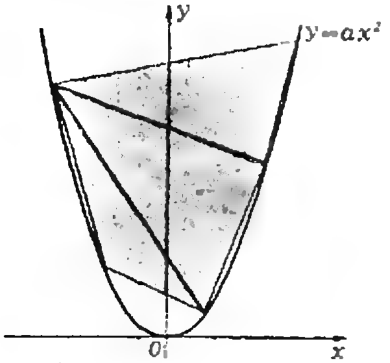


Рис. 2.

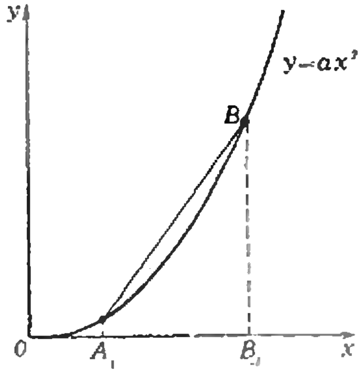


Рис. 3.

На параболе $y=ax^2$ рассмотрим три точки A, B, C, проекции которых на ось Ox равноотстоят друг от друга: $|A_1B_1|=|B_1C_1|=m$ (рис. 1). Найдем площадь треугольника ABC.

Для этого обозначим через x_1, x_2, x_3 абсциссы точек A, B, C соответственно. По условию $x_2=x_1+m$, $x_3=x_1+2m$. Трапеция A_1ACC_1 составлена из треугольника ABC и двух трапеций A_1ABB_1 и B_1BCC_1, поэтому

$$S_{ABC}=S_{A_1ACC_1}-(S_{A_1ABB_1}+S_{B_1BCC_1}),$$

откуда

$$A_{ABC}=\frac{ax_1^2+a(x_1+2m)^2}{2}\cdot 2m-$$

$$-\frac{ax_1^2+a(x_1+m)^2}{2}\cdot m-\frac{a(x_1+m)^2+a(x_1+2m)^2}{2}.$$

Приводя подобные члены, получим простейшую формулу:

$$\boxed{S_{ABC}=am^3.} \qquad (1)$$

Оказалось, что искомая площадь не зависит от абсциссы точки A, а только от расстояния m между соседними точками (и от параметра a, определяющего крутизну параболы).

Рассмотрим теперь общий случай — пусть абсциссы x_1, x_2, x_3 точек ABC произвольны. Если $x_1<x_2<x_3$, то можно рассуждать точно так же, как в предыдущем примере (см. рис. 1). Получим

$$S_{ABC}=\frac{ax_1^2+ax_3^2}{2}(x_3-x_1)-\frac{ax_1^2+ax_2^2}{2}(x_2-x_1)-\frac{ax_2^2+ax_3^2}{2}(x_3-x_2),$$

или, после приведения подобных членов,*)

$$\boxed{S_{ABC}=\left|\frac{a}{2}(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)\right|.} \qquad (2)$$

Нетрудно проверить (проверку мы оставляем читателю), что при всех других соотношениях между абсциссами формула (2) сохраняет силу. Эта формула показывает, что площадь *треугольника с вершинами на фиксированной параболе зависит только от разностей абсцисс его вершин.* Когда треугольник скользит по параболе, изменяя форму, но сохраняя неизменными разности между абсциссами вершин, его площадь не меняется. Оказывается, что этим свойством обладает только парабола, но мы этого доказывать не будем.

В качестве задач мы предлагаем читателю найти доказательства трех следствий формулы (2):

1. *Если все вершины выпуклого многоугольника, лежащие на параболе $y=ax^2$, передвигаются по параболе с сохранением разности их абсцисс, то площадь многоугольника не меняется.*

Указание. См. рис. 2.

2. *Площадь S сегмента параболы $y=ax^2$ ограниченного отрезком, концы которого имеют абсциссы x_1 и x_2* (рис. 3), *равна*

$$\boxed{S=\frac{a}{6}(x_1-x_2)^3.}$$

Указание. См. рис. 3. Площадь криволинейной трапеции A_1ABB_1 находится как интеграл $\int_{x_1}^{x_2} ax^2dx$.

3. *Предыдущие результаты* (формулы (1) и (2), следствия 1 и 2) *остаются в силе, если параболу $y=ax^2$ заменить на параболу общего вида $y=ax^2+bc+c$.*

Указание. Существует перемещение, превращающее одну параболу в другую.

---

*) Знак модули не нужен в случае, когда $x_1<x_2<x_3$, но требуется в других случаях (проверьте это!).

Спичечный коробок и экстремум

Р. Ш. ДАНЕЛИЯ

Эта задача мне пришла в голову, когда я рассматривал коллекцию спичечных коробков у своего приятеля. Он собирает не только этикетки, как делают многие, а коробки целиком. У него можно увидеть коробки самых разнообразных форм и размеров. Перебирая экспонаты коллекции, я подумал: каких размеров должна быть самая «выгодная» коробка? Ведь это — чисто математический вопрос, ему можно дать следующую строгую формулировку:

Среди всех спичечных коробков данного объема V обычной конструкции (то есть состоящих из выдвижной открытой сверху коробочки и внешней части, открытой по бокам; см. ' рис. 1) найти форму (то есть отношение ребер x y:z), обеспечивающую наименьшую затрату материала при изготовлении (толщина материала в счет не принимается).

Для решения этой задачи нам потребуется следующая

Лемма. *Если произведение трех положительных переменных a, b, c постоянно, то их сумма принимает наименьшее значение, когда $a = b = c$.*

Доказательство. В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}, \qquad (1)$$

соотношение $abc = k = \text{const}$ дает $a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{k}$, причем равенство достигается только при $a = b = c$.

Хотя доказательства неравенства (1) приводится во многих руководствах, будет не лишним познакомить читателя с еще одним его доказательством — отличным от традиционных.

Если ввести обозначения

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt[3]{abc}}, \quad x_2 = \frac{b}{\sqrt[3]{abc}},$$

$$x_3 = \frac{c}{\sqrt[3]{abc}},$$

то требуемое неравенство запишется так:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3, \qquad (2)$$

причем равенство достигается только при $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Итак, если произведение $x_1x_2x_3$ равно 1, то сумма $x_1 + x_2 + x_3$ не меньше 3 и равна 3 только в том случае, когда $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

В самом деле, рассмотрим два возможных случая:

1. Все три x равны между собой, то есть $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Ясно, что в этом случае $x_1 + x_2 + x_3 = 3$.

2. Не все x равны между собой. Так как их произведение равно единице, если одно больше 1, то другое меньше 1. Для определенности положим: $x_1 > 1$, $x_2 < 1$. Имеем:

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + 1 < x_1 + x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 > x_1x_2 + x_3 + 1 \qquad (3)$$

Но $x_1x_2x_3 = 1$, и поэтому

$$x_1x_2 + x_3 + 1 = \frac{1}{x_3} + x_3 + 1 =$$

$$= \frac{1}{x_3} + x_3 - 2 + 3 =$$

$$= \frac{(x_3 - 1)^2}{x_3} + 3 > 3.$$

Это же, согласно (3), дает $x_1 + x_2 + x_3 > 3$, что и требовалось доказать.

Теперь мы уже можем перейти к решению нашей задачи.

Пусть размеры коробки x, y, z (рис. 1). Коробка состоит из двух частей, причем площадь поверхности первой части $S_1 = xy + 2xz + 2yz$, а второй $S_2 = 2xy + 2xz$. Общая же площадь — их сумма — будет

$$S = 2yz + 3xy + 4xz.$$

Понятно, что материал, требуемый на изготовление коробки, пропорционален S, то есть мы должны подобрать x, y, z так, чтобы S было наименьшим. Для этого представим S в следующем виде:

$$S = xyz\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{z} + \frac{4}{y}\right)$$

или, учитывая равенство $xyz = V$,

$$S = V\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{z} + \frac{4}{y}\right).$$

Произведение слагаемых внутри скобки постоянно (оно равно $24/V$), поэтому в силу леммы наименьшее значение достигается, когда слагаемые равны, откуда $x:y:z = 2:3:4$.

Таким образом, *расход материала будет наименьшим, когда длина, ширина и высота коробки относятся как 4:2:3.* Заметим, что чаще фабрики не соблюдают этого соотношения (рис. 2), но есть и коробки, заготовленные именно с учетом этого условия (рис. 3).

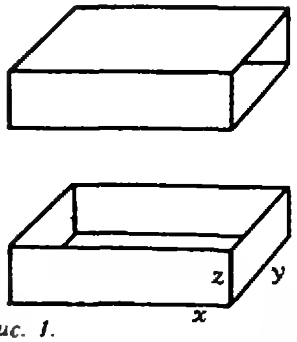


Рис. 1.

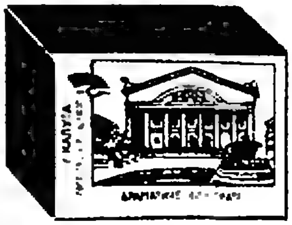


Рис. 2.

ХОЗЯЙСТВЕННЫЕ СПИЧКИ
ШТУК

Рис. 3.

Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова объявляет прием учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — *помочь учащимся средней школы глубже изучить* физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения, в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, которое необходимо отослать *до 10 сентября* по адресу: 119899, ГСП, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ. В письмо вложите также два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	*Сидоров Иван Петрович*
Класс ЗФШ	*9-й*
Профессия родителей и занимаемая должность	*отец — инженер* *мать — врач*
Подробный домашний адрес	*248016, г. Калуга, ул. Карла Либкнехта, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д. 3.*

Решение приемной комиссии ЗФШ о зачислении будет сообщено до 15 октября. Проверенные вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по различным разделам физики, изучаемым в средней школе. Решенные задания оцениваются, рецензируются и возвращаются учащимся. Учащиеся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно окончившие обучение получают свидетельство об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающие в 9 класс ЗФШ решают задачи 1—4, а поступающие в 10 класс — задачи 4—7.

1. Два катера с различными скоростями плыли в одном направлении по течению реки. Когда они поравнялись, с одного из них в воду бросили спасательный круг. Через некоторое время после этого оба катера одновременно повернули обратно и с прежними относительно воды скоростями направились к месту, где был брошен круг. Какой из них встретит круг раньше?

2. Два бруска с массами M_1 и M_2, связанные нерастяжимой нитью, находятся на горизонтальной плоскости. К ним приложены силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, составляющие с горизонтом углы α и β. Коэффициенты трения брусков о плоскость одинаковы и равны μ. Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ по модулю меньше веса брусков. Найдите ускорение системы и натяжение нити, если система движется в сторону действия силы $\vec{F}_1$.

3. Некоторая сила толкает тело массой $m=16$ кг вверх по гладкой наклонной плоскости длиной $l=3{,}1$ м и наклоном $\alpha=30°$ к горизонту. Скорость тела у основания наклонной плоскости была $v_0=0{,}6$ м/с, а у ее верхнего края — $v=3{,}1$ м/с. Чему равна работа, произведенная силой?

4. Две одинаковые тележки, на которых находятся два одинаковых дворника, движутся по инерции с одинаковыми скоростями параллельно друг другу. В некоторый момент времени на тележки начинает падать снег равномерным потоком. Дворник, стоящий на одной из тележек, все время сбрасывает снег вбок, а на второй тележке дворник спит. Какая из тележек быстрее пройдет одно и то же расстояние?

5. На двух одинаковых капельках воды находится по одному лишнему электрону, при этом сила электрического отталкивания капелек уравновешивает силу их взаимного тяготения. Каковы радиусы капелек?

6. Два одинаковых баллона, содержащие газ при температуре $t=0$ °C, соединены узкой горизонтальной трубкой диаметром $d=5$ мм, посередине которой находится капелька ртути. Капелька делит весь сосуд на две равные части объемом $V=200$ см^3 каждая. На какое расстояние переместится капелька, если один баллон нагреть на $\Delta t=2$ °C, а другой на столько же охладить? Изменением объемов сосудов пренебречь.

7. Электрон влетает со скоростью v_0 в пространство между пластинами плоского конденсатора (через отверстие в нижней пластине) под углом α к плоскости пластин. Расстояние между пластинами d, разность потенциалов U, нижняя пластина заряжена положительно, верхняя — отрицательно. Какую кривую опишет электрон при своем движении? На сколько приблизится он к верхней пластине? Силой тяжести пренебречь.

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1983 году.

Ленинградский государственный университет имени А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты математико-механический и прикладной математики — процессов управления)

1. Даны правильный тетраэдр и шар, площади поверхностей которых относятся как $s:1$. Можно ли шар поместить в тетраэдр, если а) $s=2\sqrt{3}$, б) $s=3$?

2. Решите уравнение $\operatorname{tg} 7x=\sin 4x+\operatorname{tg} 3x$.

3. Биссектриса тупого угла в равнобочной трапеции делит большую сторону длины a в отношении 1:2. Чему равна площадь трапеции?

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8\sqrt{\frac{1}{4}(3\log_8 x+\log_5 (y+1)^3)}-\\ -7\sqrt[7]{\frac{1}{4}(\log_8 x^3+3\log_5 (y+1))}=1, \\ 11\sqrt[3]{\log_8 x^3\cdot\log_5 (y+1)}-\\ -5\sqrt[5]{\log_8 x\cdot\log_5 (y+1)^3}=6. \end{cases}$$

3. Найдите все a, для которых любое решение неравенства

$$|1+a|x-ax^2>\frac{9}{16}\left|\frac{7}{16}a+1\right|-\frac{1}{8}$$

удовлетворяет также неравенству

$$1-\operatorname{tg}^2(ax)<-\frac{1}{\cos(ax)}.$$

Вариант 2

(физический факультет)

1. Из пункта B в пункт A, расположенный выше по реке, выплывает лодка и одновременно из A в B — катер. Катер доплывает до B, разворачивается и плывет в A, затем разворачивается и т. д. Скорости катера и лодок в стоячей воде равны v и $14v/209$ соответственно. Когда лодка преодолела половину расстояния между A и B, навстречу ей из A в B выплыла вторая лодка. Определите скорость течения реки, если в тот момент, когда вторая лодка прошла половину пути, катер в восьмой раз приплыл в B.

2. Угол α острый, а β — тупой, причем

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}},\ \operatorname{tg}^2\beta=51-10\sqrt{26}.$$

Докажите, что $\alpha+2\beta=9\pi/4$.

3. Изобразите множество точек на плоскости, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $a^{y+3|x|}<1+2a^{-y-3|x|}$, где a — положительное число.

4. Решите уравнение

$$\frac{6}{7}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}+4\cos^2\frac{y}{2}=5.$$

5. Стенки и дно колодца, имеющего глубину H, укрепили слоем бетона толщины h. Исходное сечение колодца — равносторонний треугольник со стороной a. Найдите объем израсходованного бетона.

Вариант 3

(психологический факультет; отделение экономической кибернетики экономического факультета; отделение математической лингвистики филологического факультета)

1. Из города M в город L выехала машина, а через t часов выехала машина из L в M. Их встреча произошла еще через T часов. Найдите время пробега каждой машины, если их скорости постоянны, а прибыли они в пункты назначения одновременно.

2. Решите уравнение

$$\frac{4}{25^{-x}+8+16\cdot 25^x}-\frac{5^x}{1+4\cdot 25^x}+\frac{\sqrt{15}}{4}=-\frac{\sqrt{23}}{5}+\frac{1}{100}.$$

3. В меньшую из двух концентрических окружностей радиусов 1 и 2 вписан равносторонний треугольник. Найдите площади, на которые разбивается большой круг прямыми, содержащими стороны треугольника.

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{(32\sin^6 x)^2}+4\sin^6 x<1-\sin^4 x.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{|y|}x^2+\log_{x^2}|y|=2, \\ x^4+yx^2=10+y \end{cases}$$

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Вариант 1

1. Пуля налетает на неподвижный шар по линии, проходящей через его центр. Свойства шара и пули подобраны таким образом, чтобы на опыте были возможны три исхода: а) пуля пробивает шар насквозь, практически не меняя его массы, б) застревает в шаре; в) отскакивает от шара назад. Определите, что именно наблюдалось на опыте, в котором скорость пули при ударе уменьшилась по модулю вдвое, а отношение выделившегося количества теплоты к первоначальной кинетической энергии равно β.

2. В вертикальном закрытом цилиндре имеются два поршня, которые могут перемещаться без трения (рис. 1). Части A, B и C сосуда, разделенные поршнями, содержат одинаковое число молей идеального газа. При некоторой температуре, одинаковой во всем цилиндре, отношение объемов равно $V_A:V_B:V_C=5:3:1$. Затем температура в цилиндре изменяется, и новое отношение объемов становится равным $V'_A:V'_B:V'_C=x:2:1$. Определите значение x. Во сколько раз изменилась температура?

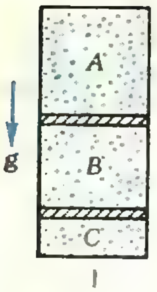


Рис. 1.

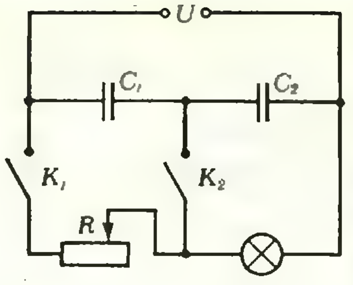


Рис. 2.

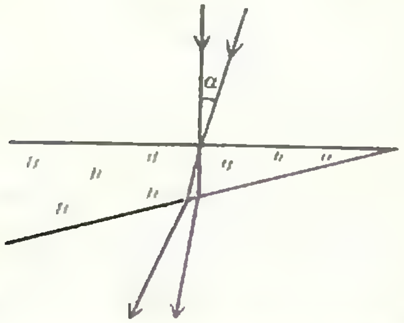


Рис. 3.

3. К входным клеммам цепи, схема которой показана на рисунке 2, приложено постоянное напряжение U. Оба ключа разомкнуты. Что нужно сделать, чтобы: а) напряжение на конденсаторе емкостью C_2 равнялось U? б) напряжение на конденсаторе емкостью C_1 равнялось U и лампочка при этом горела? в) напряжения на обоих конденсаторах были одинаковы?

4. Луч света падает нормально на грань стеклянного клина с малым углом при вершине (на рисунке 3 этот луч показан красным цветом). На какой угол повернется преломленный луч при повороте падающего луча (изображенного синим цветом) на небольшой угол α вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка?

5. Теоретический вопрос: свойства электромагнитных волн.

Вариант 2

1. Две пули, имеющие разные массы, но одинаковые начальные импульсы, попадают в одинаковые неподвижные шары. Первая пуля пробивает шар насквозь. Вторая пуля, масса которой в 6 раз меньше массы шара, застревает в нем. После попадания пуль шары движутся с одинаковыми скоростями. Во сколько раз уменьшилась скорость первой пули после вылета из шара? При каком условии в первом шаре выделится в 3 раза больше тепла, чем во втором? При каком условии во втором шаре выделится больше тепла, чем в первом?

2. Собрана электрическая схема, показанная на рисунке 4. При каком условии переключение ключа из положения A в положение B не приведет к изменению напряжения на конденсаторе емкостью C_1?

3. Некоторое число n одинаковых источников тока, соединенных между собой параллельно, подключены к резистору. Если переключить полярность одного источника, то сила тока в резисторе уменьшится в 2 раза. Определите значение n.

4. Вертикально расположенная рейка с нанесенными на нее делениями укреплена на дне водоема (рис. 5). Какой увидит эту рейку находящийся под водой наблюдатель без маски? Считать, что глаз расположен в точке A, находящейся на глубине h и на расстоянии l от рейки.

5. Теоретический вопрос: резонанс.

Задачи устного экзамена

Математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления, химический и геологический факультеты

1. Двум одинаковым телам сообщают одинаковые начальные скорости, направленные под некоторым углом к горизонту. Одно тело свободное, другое движется вдоль спицы. Какое из них поднимется на бо́льшую высоту?

2. Стальная пуля массы m пробивает подвешенный на тонкой нити свинцовый шар массы M, в результате чего скорость пули уменьшается вдвое. Какая часть кинетической энергии пули пошла на нагревание?

3. Тяжелый стержень согнули посередине под углом 90° и подвесили свободно за один из концов. Какой угол этот конец образует с вертикалью?

4. На рисунке 6 изображен график процесса, проводимого с идеальным газом. Объем газа постоянен. Найдите точки, где масса газа максимальна и минимальна.

5. Два сосуда, содержащие один и тот же газ, соединены трубкой с краном. Объемы сосудов равны V_1 и V_2, а давления в них — p_1 и p_2. Каким будет давление газа после открытия крана соединительной трубки? Температуру газа считать постоянной.

6. Резистор с сопротивлением R потребляет мощность P. Если к нему подключить параллельно еще такой же резистор, то в них обоих выделится та же мощность. Нарисуйте простейшую схему, в которой это возможно, и рассчитайте ее.

7. На схеме, приведенной на рисунке 7, указаны сопротивления резисторов (в омах) и ток через один из резисторов. Определите все остальные токи и подаваемое напряжение.

8. При электролитическом способе получения никеля расходуется электроэнергия $W = 10$ кВт·ч на $m = 1$ кг металла. Электрохимический эквивалент никеля $k = 1080$ мг/(А·ч). При каком напряжении производится электролиз?

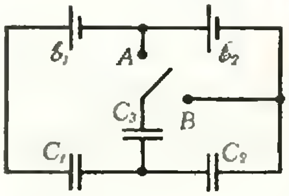


Рис. 4.

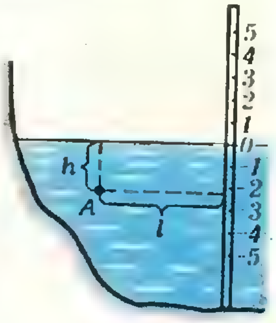


Рис. 5.

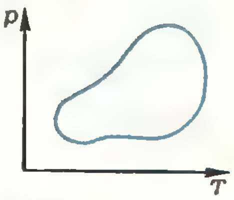


Рис. 6.

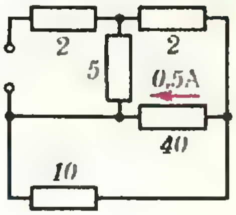


Рис. 7.

9. На какой угол повернется луч, отраженный от плоского зеркала, при повороте последнего на угол α?

10. Кажущаяся глубина водоема равна H. Какова его истинная глубина?

Публикацию подготовили
А. С. Кондратьев, С. А. Назаров

Ленинградский политехнический институт имени М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(факультет технической кибернетики)

1. Решите уравнение

$$2\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x=2.$$

2. Произведение первых трех членов геометрической прогрессии равно 1728, а их сумма равна 63. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.

3. Найдите область определения и промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=$ $=\sqrt{2}\left(\left(\frac{\lg^2 x+1}{2\lg x}-1\right)^{1/2}-\left(\frac{\lg^2 x+1}{2\lg x}+1\right)^{1/2}\right)\lg x.$

4. Пусть в треугольнике ABC средняя линия, параллельная стороне AB, пересекает биссектрису угла B в точке P, а K — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Выразите вектор $\overrightarrow{KP}$ через векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ единичной длины и сонаправленные соответственно с $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$, если $|AB|=18$, $|AC|=12$ и $|BC|=11$.

Вариант 2
(физико-механический и радиофизический факультеты)

1. Решите уравнение

$$8^{-\frac{2}{x}}=(\log_2 16)\left(2^{\frac{x+3}{x}}-3\right).$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{52-x^2}}{2-x}=1.$$

3. Дана функция $f(x)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\times$ $\times(1-\sin 2x)-\cos 2x-1$.
Найдите область определения функции $y=f'(x)$; докажите, что $f'(x)=0$ во всех точках $D(f'(x))$, а $f(\sqrt{7})$ равно целому числу.

4. Пусть квадратное уравнение

$$(3a+2)x^2+(a-1)x+4a+3=0$$

имеет корни x_1, x_2. Найдите все такие a $(a\in R)$, что x_1 и x_2 удовлетворяют условиям $x_1<-1<$ $<x_2<1$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Автомобиль начал движение с места, двигался равноускоренно и через некоторое время достиг скорости $v=10$ м/с. После этого мотор был выключен, и автомобиль двигался равнозамедленно до полной остановки. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пройденном пути.

2. Ракета взлетает вертикально вверх, выбрасывая раскаленные газы последовательно двумя равными порциями. Скорость истечения газов относительно ракеты постоянна и равна u. Каким должен быть промежуток времени между сгоранием порций, чтобы ракета достигла наибольшей высоты? Считать, что сгорание топлива происходит мгновенно. Сопротивлением воздуха пренебречь.

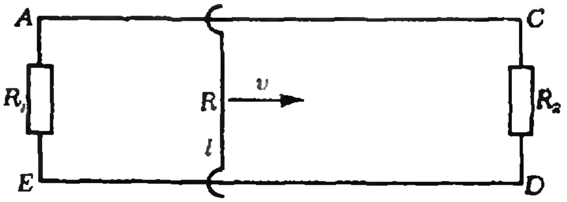
3. При подъеме воздушного пузырька со дна озера на поверхность его объем увеличивается в 3 раза. Найдите глубину озера.

4. В баллоне, объем которого $V=0{,}04$ м^3, под давлением $p=1{,}5\cdot 10^5$ Па при температуре $T=$ $=300$ К находится газ. Определите, сколько молекул газа находится в баллоне.

5. Три одинаковые заряженные частицы, каждая с массой m и зарядом q, поместили в вершины углов равностороннего треугольника со стороной r_0. Затем частицы одновременно освободили, после чего они стали симметрично разлетаться под действием кулоновских сил отталкивания. Найдите: 1) скорость каждой частицы в зависимости от расстояния r между частицами; 2) работу, которую совершили кулоновские силы, действующие на каждую частицу, при разлете частиц на очень большое расстояние друг от друга.

6. Как при параллельном, так и при последовательном соединении двух одинаковых аккумуляторов с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r на внешнем резисторе, сопротивление которого R, выделяется мощность $P=16$ Вт. Какая мощность выделится на этом резисторе, если к нему подключить только один из аккумуляторов?

7. Прямоугольный контур $ACDE$ со скользящей перемычкой длины l находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости контура (см. рисунок). Индукция магнитного поля равна $\vec{B}$. Перемычка имеет сопротивление R, стороны AE и CD контура — сопротивления R_1 и R_2. Пренебрегая самоиндукцией контура, найдите ток в перемычке при ее поступательном перемещении с постоянной скоростью $\vec{v}$.



8. Найдите энергию связи ядра, которое имеет одинаковое число протонов и нейтронов и радиус которого в полтора раза меньше радиуса ядра ^{27}Al.

9. Какая температура необходима, чтобы протоны приблизились друг к другу на расстояние $r_0=5\cdot 10^{-15}$ м?

Публикацию подготовили *Ю. Н. Волгин,*
Ю. Д. Максимов, Б. П. Попов,
С. П. Преображенский, Б. А. Чихачев

Ленинградский государственный педагогический институт имени А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Найдите значение выражения при

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}}.$$

2. Решите уравнение

$$\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)=1+\lg(2^{x-2}+1).$$

3. Докажите тождество

$$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=1.$$

4. Докажите, что расстояние от всякой точки окружности, описанной около правильного треугольника, до одной из его вершин равно сумме расстояний от этой точки до двух других вершин.

5. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом β. Двугранные углы при основании равны α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант 2
(физический факультет)

1. Найдите значение выражения

$$\sqrt[4]{7-4\cdot\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

2. Решите уравнение

$$10\cdot 2^x-4^x=16.$$

3. Решите неравенство

$$0{,}3^{|5-2x|}<0{,}027.$$

4. Докажите тождество

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\mathrm{ctg}\,\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha.$$

5. Найдите объем треугольной пирамиды, сторона основания которой равна b, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. К динамометру подвесили груз, при этом возникли колебания с частотой $\nu=2$ Гц. На каком расстоянии от нулевого положения остановится указатель динамометра после прекращения колебаний? Массу пружины не учитывать.

2. Имеются источники тока, ЭДС каждого из которых $\mathcal{E}=4$ В и внутреннее сопротивление $r=1$ Ом. Укажите хотя бы один из вариантов соединения источников тока в батарею, от которой лампочка, рассчитанная на напряжение $U=4$ В и ток $I=4$ А, горела бы в полный накал.

3. Постройте изображение предмета в собирающей линзе, если один конец предмета касается фокуса линзы, а другой — ее поверхности. Предмет расположен наклонно к главной оптической оси линзы.

Математический факультет

1. Двигаясь равноускоренно без начальной скорости, тело, пройдя некоторый путь, приобрело скорость $v=14$ м/с. Чему была равна скорость тела, когда оно прошло половину этого пути?

2. Когда объем газа уменьшили на 10 %, а температуру увеличили на $\Delta t=16$ °C, его давление возросло на 20 %. Определите начальную температуру газа.

3. Электроемкость колебательного контура $C=10$ мкФ. Постройте график зависимости частоты колебаний тока от индуктивности L данного контура.

4. Отрезок AB расположен на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=20$ см. Чему равно увеличение данного отрезка, если его ближайший конец расположен от линзы на расстоянии $d=30$ см, а длина отрезка $l=10$ см?

**Химический факультет
и факультет естествознания**

1. Тело, двигаясь равноускоренно, за первые пять секунд своего движения прошло путь $l_1=100$ м, а за десять — $l_2=300$ м. Определите начальную скорость движения тела.

2. Сколько молекул содержится в объеме $V=1$ м^3 воздуха при давлении $p=150$ кПа и температуре $t=27$ °C?

3. На электрической плитке мощностью $P=600$ Вт нагревается до кипения $V=2$ л воды за $\tau=40$ мин. Начальная температура воды была равна $t=20$ °C. Определите КПД установки.

4. Сколько электроэнергии надо затратить для получения $V=2{,}5$ л водорода при температуре $t=25$ °C и давлении $p=100$ кПа, если электролиз ведется при напряжении $U=5$ В и КПД установки $\eta=75$ %?

**Индустриально-педагогический
и художественно-графический факультеты**

1. Объясните, что произойдет с давлением воды на стенки сосуда, в который она была налита, если в сосуд опустить железный кубик массой $m=1$ кг? Сосуд до эксперимента был полностью заполнен водой.

2. Имеется шесть резисторов с сопротивлением $R=2$ Ом каждый. Как, используя полностью все резисторы, получить сопротивление $R_0=2$ Ом?

3. Имеется электродвигатель постоянного тока, вольтметр, нить. Как, используя данные предметы, сконструировать демонстрационный прибор для измерения скорости равномерного движения тел?

Публикацию подготовили

З. Г. Алексеева, Л. А. Бирюков

Дифференцирование сложной функции

1. $12x^2(x^3+2)^3$;
2. $\dfrac{5x}{\sqrt{1+5x^2}}$;
3. $(2x-3)\cdot e^{x^2-3x}$;
4. $\dfrac{3x-4}{x^2-2x}$;
5. $\dfrac{3x-4}{(x^2-2x)\ln 10}$;
6. $5^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\ln 5$;
7. $\dfrac{8-3x}{(4x-x^2)\ln 0{,}3}$;
8. $2\sin(1-2x)$;
9. $-3\sin 6x$;
10. $\dfrac{1}{2\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}$;
11. $\operatorname{tg}^2 x+\dfrac{2x\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$;
12. $\dfrac{a\cos\sqrt{ax}}{2\sqrt{ax}}$;
13. $\operatorname{ctg} x$;
14. $-\dfrac{3^{\frac{1}{x}}\ln 3}{x^2}$;
15. $\dfrac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$.

Избранные школьные задачи

1. а) $a^4+4b^4=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2=$
$=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$.
б) $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-(ab\sqrt{2})^2=$
$=(a^2+b^2+ab\sqrt{2})(a^2+b^2-ab\sqrt{2})$.

2. Пусть BC и AD — основания трапеции, M и N — соответственно их середины, O — точка пересечения диагоналей, а прямые AB и DC пересекаются в точке F (рис. 1). Рассмотрим гомотетию с центром в точке F, переводящую треугольник FBC в треугольник FAD; при этой гомотетии точка M переходит в точку N. Поэтому точки M, N и F лежат на одной прямой.

3. а) Проведем через точки A и B прямые, пересекающиеся в точке C по ту же сторону от прямой AB, где лежит вторая данная прямая (рис. 2, *а*). Пусть прямая AC пересекает вторую данную прямую в точке D, а прямая BC — в точке E (рис. 2, *б*). Построим точку O пересечения прямых BD и AE. Тогда прямая CO пересекает прямую AB в искомой точке F (рис. 2, *в*) в силу задачи 2.
б) Решение аналогично задаче 3а.

4. Ответ: квадрат с вершинами в точках $(1;0)$, $(0;1)$, $(0;-1)$ и $(-1;0)$.

5. Ответ: в 2,5 раза. Указание. Выясните, сколько траншей вырыли бы экскаваторы, если бы все указанное время они работали не поодиночке, а все вместе.

6. Ответ: $1/4$. Указание. Легко видеть (доказательство — от противного), что числа a и b либо разных знаков, либо положительны. В первом случае их произведение отрицательно, а во втором — положительно, поэтому имеет смысл рассматривать только положительные значения a и b. Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел, имеем:

$$2=a+4b\geqslant 2\sqrt{(a)\cdot(4b)}=4\sqrt{ab},$$

поэтому $\sqrt{ab}\leqslant 1/2$, откуда $ab\leqslant 1/4$, причем равенство достигается, если $a=4b$, то есть $b=1/4$, $a=1$. Другой путь решения: заметим, что $ab=b(2-4b)=2b(1-2b)$, и найдем наибольшее значение квадратичной функции $f(b)=2b(1-2b)$.

7. Ответ: купец обманул себя. Указание. Пусть l — длина левого плеча коромысла весов, а m — правого. Обозначим вес орехов, которыми купец уравновесил весы, когда гиря весом в 1 фунт лежала на левой чашке весов, через x. Тогда $l\cdot 1=m\cdot x$, откуда $x=l/m$ (фунтов). Обозначив через y вес орехов, которыми купец уравновесил весы, когда фунтовая гиря находилась на правой чашке, аналогично получим, что $y=m/l$ (фунтов). Таким образом, $y=1/x$ и купец отвесил покупателю $x+1/x$ фунтов орехов. Но при $x>0$, $x\neq 1$ (а эти неравенства следуют из условия задачи) имеет место неравенство $x+1/x>2$ (которое вытекает, например, из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим), значит, купец отвесил покупателю слишком много орехов.

8. Ответ. а) 2^{100}; б) $2^{99}(1+6^{100})$; в) $2^{99}(1-6^{100})$.
Указания. а) Из формулы (2) и условия задачи вытекает, что $S=f(1)$. Из формулы (1) получаем

$$f(1)=(1+5-8)^{100}\cdot 1=2^{100}.$$

б) Из формулы (2) следует, что

$$f(-1)=-a_0+a_1-a_2+a_3-\ldots-a_{204}+a_{205},$$

поэтому (используя пункт а) этой задачи) получаем

$$S_H=\frac{1}{2}(f(1)-f(-1))=\frac{1}{2}(2^{100}+12^{100})=$$
$$=2^{99}(1+6^{100}).$$

в) Поскольку, очевидно, $S_r=S-S_H$ (см. пункты а) и б) этой задачи), получаем

$$S_r=2^{100}-2^{99}(1+6^{100})=2^{99}(1-6^{100}).$$

9. Данная функция определена на всей оси, поэтому также на всей оси определена и функция

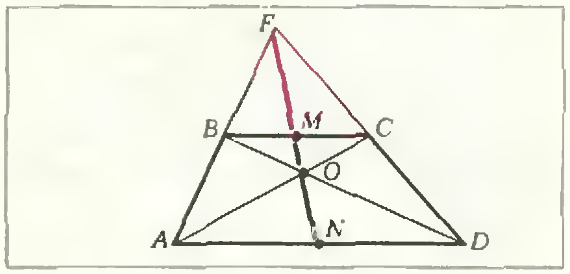


Рис. 1.

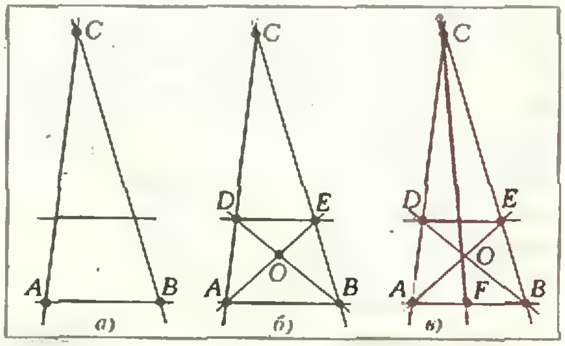


Рис. 2.

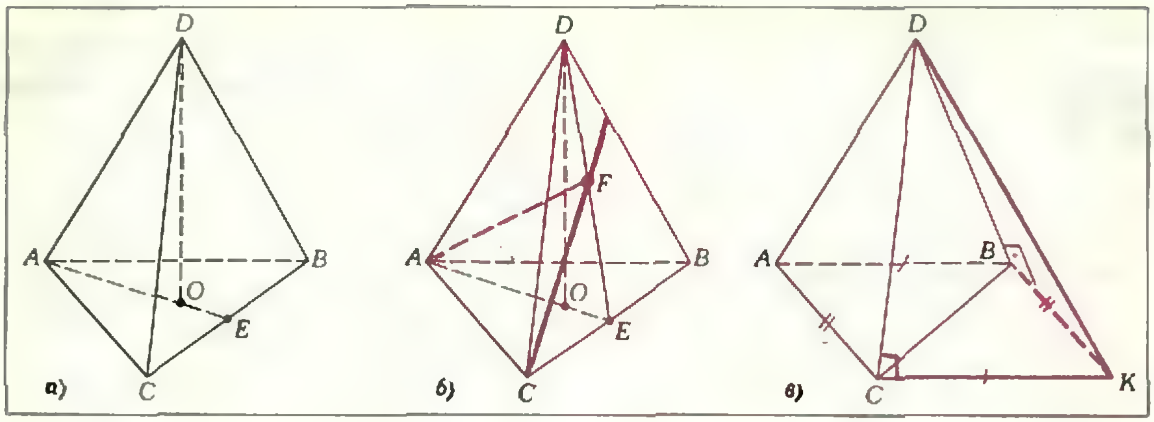


Рис. 3.

$f(-x)$. Утверждение задачи вытекает из того, что:

а) функция $\varphi(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ — четная (проверьте!);

б) функция $\psi(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$ — нечетная;

в) при всех значениях x имеем: $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$.

10. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, DO — его высота.

а) Докажем, что скрещивающиеся ребра AD и BC перпендикулярны. По условию, AE — высота основания ABC (рис. 3, *а*), поэтому ребро BC перпендикулярно плоскости ADE (оно перпендикулярно непараллельным прямым DO и AE этой плоскости), в частности, прямой AD, лежащей в этой плоскости.

б) Докажем, что высота тетраэдра, опущенная из вершины A, проходит через ортоцентр (точку пересечения высот) грани BCD. Сначала построим эту высоту. Для этого проведем высоту AF треугольника ADE. Прямая AF перпендикулярна двум непараллельным прямым плоскости BCD (как показано выше, ребро BC перпендикулярно плоскости ADE, в которой лежит прямая AF). Итак, AF — высота тетраэдра (рис. 3, *б*). Докажем, что точка F — ортоцентр треугольника BCD. Во-первых, DE — высота треугольника BCD (ребро BC перпендикулярно плоскости ADE). Во-вторых, прямая CF перпендикулярна ребру BD (это ребро перпендикулярно высоте тетраэдра AF и, по доказанному в пункте а), скрещивающемуся с ним ребру AC, значит, и всей плоскости AFC, в которой лежит прямая CF). Значит, F — точка пересечения высот треугольника BCD и утверждение доказано.

в) Из пункта б) вытекает, что любые две высоты тетраэдра пересекаются. Но если каждые две из четырех прямых в пространстве пересекаются, то они либо все лежат в одной плоскости, либо все проходят через одну точку.

г) Докажем, например, что сумма квадратов длин ребер BD и AC равна сумме квадратов длин ребер DC и AB. Для этого достроим основание тетраэдра до параллелограмма $ABKC$ (рис. 3, *в*). Очевидно, треугольники DCK и DBK — прямоугольные (воспользуйтесь пунктом а) и тем, что $ABKC$ — параллелограмм) с общей гипотенузой DK. Приравнив правые части равенств

$$|DK|^2-|DC|^2+|CK|^2 \text{ и } |DK|^2=(DB)^2+(BK)^2,$$

получим требуемое.

Другой путь: из векторного равенства

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DA}$$

(разберитесь, как его получить), взяв скалярные квадраты его левой и правой частей, получим доказываемое равенство.

11. а) Домножим и разделим левую часть доказываемого равенства на $2\sin\frac{\pi}{5}$ и преобразуем полученные произведения синусов и косинусов, используя формулу приведения:

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}+2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{2}.$$

б) Поскольку $\cos 3\pi/5=\cos(\pi-2\pi/5)=-\cos 2\pi/5$, перепишем равенство, доказанное в пункте а), в виде $\cos\pi/5-\cos 2\pi/5=1/2$. Преобразовав левую часть полученного равенства

$$\cos 36^\circ-\cos 72^\circ=1/2,$$
$$\cos 36^\circ-\sin 18^\circ=1/2,$$
$$1-2\sin^2 18^\circ-\sin 18^\circ=1/2,$$
$$4\sin^2 18^\circ+2\sin 18^\circ-1=0,$$

получим квадратное уравнение

$$4x^2+2x-1=0.$$

Решая его, находим (так как $x=\sin 18^\circ>0$)

$$\sin 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

12. Ответ: правильный октаэдр, с вершинами в точках (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1), (—1; 0; 0), (0; —1; 0), (0; 0; —1). Указание. Пересечение искомой фигуры с плоскостью $z=0$ (то есть с плоскостью XOY) — фигура, задаваемая неравенством $|x|+|y|<1$ (см. задачу 4). Аналогично пересекают эту фигуру и другие координатные плоскости. Воспользуйтесь также симметрией искомой фигуры относительно координатных плоскостей, осей и начала координат.

13. Ответ: а) 0; б) 2. Указание. а) Поскольку $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$, можно, обозначив $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$ через t, переписать данное уравнение в виде

$$t+\frac{1}{t}=2.$$

б) Перепишем данное уравнение в виде

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1.$$

Поскольку $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} < \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} < \frac{\sqrt{2+\sqrt{4}}}{2} = 1$, в левой части последнего уравнения стоит сумма двух монотонно убывающих показательных функций, поэтому левая часть — сама монотонно убывающая функция. Но монотонная функция принимает каждое свое значение ровно один раз, поэтому данное уравнение имеет не более одного решения. Осталось подобрать это решение.

14. Ответ: а) 0; б) 0; в) $\log_2 \pi$. Указание. а) Поскольку $\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 89° = \operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{ctg} 1° = 1$, то $\log_a \operatorname{tg} 1° + \log_a \operatorname{tg} 89° = 0$. Аналогично преобразуются и остальные пары слагаемых, равно отстоящих от концов рассматриваемой суммы. В результате остается одно лишь среднее слагаемое, $\log_a \operatorname{tg} 45°$, но оно само равно нулю.

б) Средний сомножитель равен нулю.

в) Перейдя к основанию 2, получим ответ.

15. Соединив выбранную внутри или на границе тетраэдра точку с вершинами тетраэдра, разобьем его на пирамиды, основаниями которых служат грани тетраэдра, а вершиной — выбранная точка. Записав, что сумма объемов полученных пирамид равна объему тетраэдра, получим нужное равенство.

Теплоемкость идеального газа

1. $T = T_1 + \frac{Q\nu R}{C_V(C_V+R)} = T_1 + \frac{4Q\nu}{15R} \approx 350$ К.

2. $A' = \nu C_V T_1 (mn-1)$.

3. $C = C_V + 3R/2 = 3R$.

Ленинградский государственный университет имени А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. а) да; б) нет. Указание. Докажите, что шар радиуса R можно поместить в тетраэдр объема V и площади поверхности тогда и только тогда $V \geqslant \frac{1}{3} RS$.

2. $\{\pi k;\ \frac{\pi}{4}(2l+1)\}$, $(k, l \in \mathbf{Z})$. Указание. После преобразований получаем уравнение—следствие $\sin 4x(1-\cos 3x \cdot \cos 7x) = 0$, откуда либо $\sin 4x = 0$, либо $\cos 3x \cdot \cos 7x = 1$. Из последнего уравнения следует, что либо

$$\begin{cases} \cos 3x = 1, \\ \cos 7x = 1, \end{cases}$$

либо

$$\begin{cases} \cos 3x = -1, \\ \cos 7x = -1. \end{cases}$$

При окончательном отборе корней воспользуйтесь условиями $\cos 3x \neq 0$, $\cos 7x \neq 0$.

3. $S = \frac{a^2}{3}(1-\cos\alpha)\sin\alpha$ (рис. 4, *а*) или $S = \frac{a^2}{3}(2+\cos\alpha)\sin\alpha$ (рис. 4, *б*) при $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right[$; $S = \frac{a^2}{9}(3+\cos\alpha)\sin\alpha$ (рис. 4, *в*), или $S = \frac{2a^2}{9}(3+2\cos\alpha)\sin\alpha$ (рис. 4, *г*) при $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.

4. $\{(8, \sqrt[3]{5}-1);\ (2;\ 4)\}$. Указание. После замены $a^{14} = \frac{3}{4}(\log_8 x + \log_5(y+1))$, $b^{20} = 3\log_8 x \cdot \log_5(y+1)$ система преобразуется к виду

$$\begin{cases} 8a^7 - 7a^2 = 1, \\ 11b^5 - 5b^4 = 6. \end{cases}$$

Единственным решением этой системы является $a = b = 1$.

Для доказательства этого воспользуйтесь тем, что при $a > 1$ и $b > 1$ левые части уравнений больше 1, а при $a < 1$ и $b < 1$ меньше 1.

5. $a \in \left]\frac{8}{7}\pi;\ \frac{16}{9}(\pi-1)\right[$. Указание. При $a = 0$ второе неравенство решений не имеет при $a < 0$ первое неравенство приводится к виду $y^2 - |a+1|y + \frac{9}{16}a\left|\frac{7}{16}a+1\right| - \frac{1}{8}a \geqslant 0$, где $y = ax$; множество решений этого неравенства содержит все достаточно большие по модулю y, среди которых найдутся такие, для которых $\cos y = \cos ax = 0$, то есть не удовлетворяющие второму неравенству.

При $a > 0$ первое неравенство приводится к виду

$$y^2 - (1+a)y + \frac{7a(9a+16)}{256} < 0,$$

где $y = ax$. Решения этого неравенства образуют отрезок $I = \left[\frac{7}{16}a;\ 1 + \frac{9}{16}a\right]$ длины $1 + \frac{9}{16}a - \frac{7}{16}a = 1 + \frac{a}{8}$. Второе неравенство после замены $y = ax$ приводится к виду $1 - \operatorname{tg}^2 y < -\frac{1}{\cos y}$;

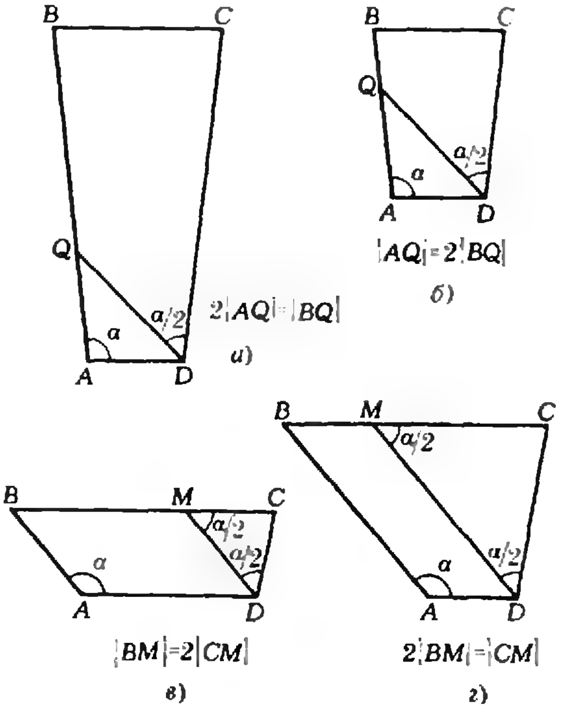


Рис. 4.

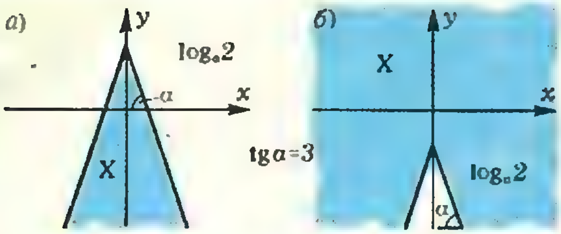


Рис. 5.

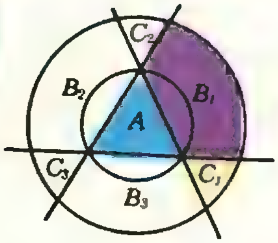


Рис. 6.

решения этого неравенства образуют объединение интервалов $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < y < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < y < \pi + 2\pi k$, $\pi + 2\pi k < y < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k < y < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$ первый и последний из перечисленных интервалов имеют длину $\frac{\pi}{6}$ и поэтому отрезок l ни в одном из них содержаться не может. Значит l может содержаться лишь в одном из интервалов длины $\frac{\pi}{2}$. Отсюда $l + \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$. Дальнейшее ясно.

Вариант 2

1. $v\left(7 \cdot \frac{223}{209} - \sqrt{\left(7 \cdot \frac{223}{209}\right)^2 - \frac{14}{209}}\right)$.

2. Указание. Легко подсчитать, что $\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = 1$, то есть $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4} + \pi k$, где k — целое число. Так как $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ получаем $\frac{5\pi}{4} < \alpha + 2\beta < \frac{\pi}{2} + 2\pi$. Поэтому $k = 2$ и $\alpha + 2\beta = \frac{9\pi}{4}$.

3. При $a = 1$ — вся плоскость; при $a > 1$ см. рисунок 5, *а* при $0 < a < 1$ — рисунок 5, *б*.

4. $\{\pm\arccos\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{7}}\right) + 2\pi k;$

$\pm\arccos\left(\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{111}{7}}\right) + 2\pi l\}$ $(k, l \in \mathbb{Z})$.

Указание. Заменой $z = \cos y$ уравнение приводится к виду $\frac{6}{7|z|} + 2(1 + z) = 5$.

5. $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}H - (a - 2h\sqrt{3})^2(H - h)\frac{\sqrt{3}}{4}$ — это разность объемов двух правильных треугольных пирамид: с основанием a и высотой H и с основанием $a - 2h\sqrt{3}$ и высотой $H - h$.

Вариант 3

1. $t + T + \sqrt{t^2 + tT}$; $T + \sqrt{T^2 + tT}$.

2. Уравнение корней не имеет. Указание. Выполнив замену $z = (5^{-x} + 4 \cdot 5^{x})^{-1}$, получим $4z^2 - z + \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{23}}{5} - \frac{1}{100} = 0$. Свободный член этого уравнения отрицателен, и сумма корней равна $\frac{1}{4}$, поэтому положительный корень z_2 полученного уравнения больше $\frac{1}{4}$. Однако $0 < z < \frac{1}{4}$.

3. Круг разбивается на 7 частей (см. рис. 6).

$$S_A = \frac{3\sqrt{3}}{4};\quad S_{C_1} = S_{C_2} = S_{C_3} = \frac{\sqrt{3}}{4} + 4\arccos\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{4}{3}\pi,$$

$$S_{B_1} = S_{B_2} = S_{B_3} = \frac{8}{3}\pi - 4\arccos\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. $x = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$, $k \in Z$. Указание. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\left(\frac{1}{32\sin^8 x} - \sin^2 x\right)^2 + \left(\frac{1}{4\sin^3 x} - 2\sin^3 x\right)^2 < 0.$$

5. $\left\{(\pm\sqrt{10}; -10); \left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}; \frac{5}{2}\right)\right\}$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Разберем последовательно все возможные случаи.

а) Пуля пробивает шар насквозь. По закону сохранения импульса имеем $mv = mv/2 + MV$, причем $V < v/2$ (пробив шар, пуля движется быстрее шара). Отсюда найдем

$$V = \frac{m}{M}\frac{v}{2}, \quad \frac{m}{M} < 1.$$

Отношение β в рассматриваемом случае равно

$$\beta = \frac{mv^2/2 - m(v/2)^2/2 - MV^2/2}{mv^2/2} = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{m}{M}\right).$$

Учитывая предыдущее условие для масс, получим область изменения β:

$$\frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{4}.$$

б) Пуля застревает в шаре. В этом случае скорости шара и пули после удара одинаковы, поэтому

$$mv = (m + M)\frac{v}{2} \text{ и } \frac{m}{M} = 1.$$

Тогда

$$\beta = \frac{mv^2/2 - (m + M)(v/2)^2/2}{mv^2/2} = \frac{1}{2}.$$

в) Пуля отскакивает от шара назад. Теперь закон сохранения импульса записывается в виде $mv = -mv/2 + MV$, откуда

$$V = \frac{m}{M}\frac{3}{2}v,$$

и

$$\beta = \frac{mv^2/2 - m(v/2)^2/2 - MV^2/2}{mv^2/2} = \frac{3}{4}\left(1 - 3\frac{m}{M}\right).$$

Из последнего выражения находим $m/M<1/3$, и, следовательно,

$$0<\beta<\frac{3}{4}.$$

Теоретически возможен еще один случай, когда после удара пуля движется вслед за шаром с меньшей, чем он, скоростью. Легко убедиться, что для этого масса пули должна быть больше массы шара. По условию задачи такая ситуация на опыте не реализуется.

Полученные результаты позволяют сформулировать ответ следующим образом:

Если $\beta<\frac{1}{2}$, то пуля отскакивает от шара назад.

Если $\beta=\frac{1}{2}$, то при $\frac{m}{M}=1$ пуля застревает в шаре, а при $\frac{m}{M}<\frac{1}{3}$ — отскакивает назад. Если $\frac{1}{2}<\beta<\frac{3}{4}$, то при $\frac{1}{3}<\frac{m}{M}<1$ пуля пробивает шар насквозь, а при $\frac{m}{M}<\frac{1}{3}$ пуля либо пробивает шар, либо отскакивает от него назад (для окончательного ответа необходимо знать конкретные значения отношения m/M и коэффициента β).

2. Поскольку во всех частях сосуда содержится одинаковое число молей идеального газа, справедливы равенства

$$p_AV_A=p_BV_B=p_CV_C=\nu RT,$$
$$p'_AV'_A=p'_BV'_B=p'_CV'_C=\nu RT'.$$

Учитывая, что действующие на каждый неподвижный поршень силы уравновешиваются, придем к соотношениям

$$p_B-p_A=p'_B-p'_A,$$
$$p_C-p_B=p'_C-p'_B.$$

С помощью этих равенств и данных условия задачи находим

$$x=5/2.$$

Для ответа на второй вопрос задачи учтем, что сумма объемов газов одинакова при любой температуре:

$$V_A+V_B+V_C=V'_A+V'_B+V'_C.$$

Отсюда, используя данные условия, получаем

$$\frac{T'}{T}=\frac{24}{11}.$$

3. а) Замкнем оба ключа. В установившемся режиме напряжения на конденсаторах равны напряжениям на участках цепи, параллельно которым эти конденсаторы подключены, поэтому, установив на реостате $R=0$, получим $U_1=0$ и $U_2=U$. Теперь можно разомкнуть ключ K_2, а затем и K_1. Ток в цепи прекратится, но напряжения на конденсаторах останутся прежними (хотя формально конденсаторы соединены последовательно, суммарный заряд правой обкладки первого конденсатора и левой обкладки второго не равен нулю).

б) Замкнем ключ K_2. При этом напряжение на втором конденсаторе $U_2=0$ (так как его обкладки замкнуты через лампочку, а тока в цепи нет), а напряжение на первом конденсаторе $U_1=U$. Теперь разомкнем ключ K_2 — напряжения на конденсаторах при этом не изменятся. Замкнув ключ K_1, мы добьемся того, что через лампочку пойдет ток, но при этом $U_1=U$ и $U_2=0$.

в) Этот случай аналогичен первому. Установив на реостате $R=R_л$ при обоих замкнутых ключах получим $U_1=U_2=U/2$.

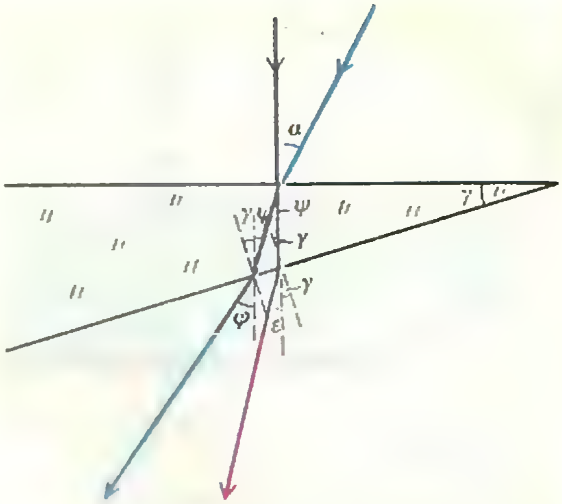


Рис. 7.

4. Решение этой задачи основано на последовательном применении закона преломления света на плоской границе раздела двух сред и ясно из рисунка 7 (малость фигурирующих углов позволяет заменить синусы углов самими углами, выраженными в радиальной мере):

$$\frac{\sin(\varepsilon+\gamma)}{\sin\gamma}=n,\quad \frac{\varepsilon+\gamma}{\gamma}\approx n,\quad \varepsilon\approx\gamma(n-1),$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\psi}=n,\quad \frac{\alpha}{\psi}\approx n,\quad \psi\approx\frac{\alpha}{n},$$

$$\frac{\sin(\varphi+\gamma)}{\sin(\psi+\gamma)}=n,\quad \frac{\varphi+\gamma}{\psi+\gamma}\approx n,\quad \varphi\approx n\psi+(n-1)\gamma=$$
$$=\alpha+\gamma(n-1),$$

откуда получаем

$$\varphi-\varepsilon\approx\alpha,$$

то есть второй преломленный луч повернут относительно первого преломленного луча на угол α.

Вариант 2

1. После вылета из шара скорость первой пули уменьшится в 7 раз. Если $m_1/m_2=4/11$, то в первом шаре выделится в 3 раза больше тепла, чем во втором. Во втором шаре не может выделиться больше тепла, чем в первом, ни при каких условиях.

2. Напряжение на конденсаторе емкостью C_1 не изменится при переключении ключа, если $\mathscr{E}_2=0$. Указание. Рассчитайте напряжения на первом конденсаторе при обоих положениях ключа и сравните их между собой. Аналогичный расчет можно найти в книге Е. И. Бутикова, А. А. Быкова и А. С. Кондратьева «Физика в примерах и задачах» (М., 1983, с. 278).

Задачу, однако, можно решить и не проводя детального расчета. Действительно, предположим, что напряжение U_1 на первом конденсаторе остается постоянным при переключении ключа из A в B. В таком случае при обоих положениях ключа справедливо равенство $U_1+U_2=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2$. Но это означает, что при переключении не меняются и напряжение U_2 на втором конденсаторе, и заряды на обоих конденсаторах. Тогда не должен меняться и заряд на третьем конденсаторе, ибо алгебраическая сумма зарядов на правой обкладке первого конденсатора, на правой обкладке второго и на нижней обкладке третьего равна нулю. Следовательно, не должно измениться и напряжение U_3 на третьем конденсаторе. Но после переключения $U_3=U_2$, так как теперь эти конденсаторы соединены параллельно. Зна-

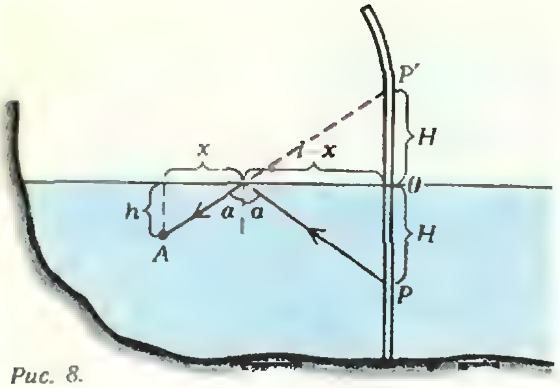


Рис. 8.

чит, и до переключения $U_2=U_3$. А это возможно, только если $\mathcal{E}_2=0$.

3. $n=4$.

4. Прежде всего заметим, что наблюдатель — близорукий (человек с нормальным зрением плохо видит под водой без маски). Он увидит погруженную часть рейки, а над ней — ее отражение от поверхности воды (за счет явления полного отражения). Предельная видимая в отраженном свете точка P рейки определяется из условий (рис. 8)

$$\sin\alpha=1/n,\ H=(l-x)\operatorname{ctg}\alpha,\ h=x\operatorname{ctg}\alpha,$$

откуда находим

$$H=l\sqrt{n^2-1}-h$$

(физический смысл имеют лишь положительные значения H). Точно на высоте точки P' (по углу) будет видно начало (точка O) выступающей из воды части рейки. Вся выступающая часть будет казаться сильно сжатой снизу и изогнутой.

Задачи устного экзамена

1. Если трение не учитывать, что $h_1=(v_0^2\sin^2\alpha)/(2g)$ и $h_2=v_0^2/(2g)$.
2. $\alpha=\dfrac{1}{4}\left(3-\dfrac{m}{M}\right)$; из условия пробивания пулей шара следует, что $m/M<1$, поэтому $1/2<\alpha<3/4$.
3. $\alpha=\operatorname{arctg}(1/3)$.
4. См. рис. 9.
5. $p=(p_1V_1+p_2V_2)/(V_1+V_2)$.
6. См. рис. 10, где $\mathcal{E}=\sqrt{PR/2}\,(\sqrt{2}+1)$ и $r=R/\sqrt{2}$.
7. См. рис. 11.
8. $U=kW/m=10{,}8$ В.

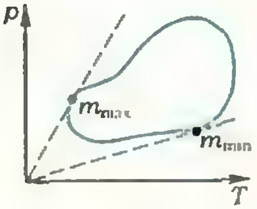


Рис. 9.

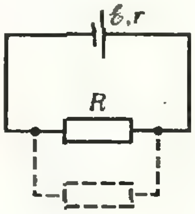


Рис. 10.

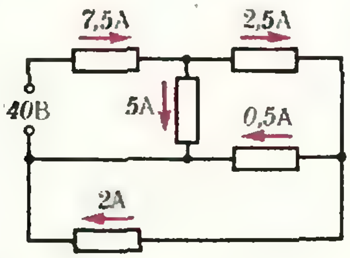


Рис. 11.

9. $\delta=2\alpha$.

10. $h=Hn$, где n — показатель преломления воды.

Ленинградский политехнический институт имени М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}$ $(k\in Z)$. 2. $b_1=3$; $q=4$ и $b_1=48$; $q=1/4$ 3. $D(f)=]1;+\infty[$; функция убывает на промежутке $]1;+\infty[$.

4. $\overrightarrow{KP}=-\dfrac{13}{22}\vec{e}_1+\dfrac{36}{11}\vec{e}_2$. Указание: пусть E середина стороны BC, тогда $\widehat{PBE}=\widehat{EPB}=ABP$.

Вариант 2

1. $\{3;\ 3\log_6 2\}$. 2. $\{-4\}$. 3. $D(f')=\{x\in R:\ x\neq\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z\}$, $f(\sqrt{7})=-1$. 4. $a\in\left]-1;-\dfrac{2}{3}\right[$.

Физика

1. $v_{ср}=v/2=5$ м/с.
2. Ракета достигает наибольшей высоты, если вторая порция топлива сгорает непосредственно вслед за первой.
3. $h=2p_a/(\rho g)\approx 20$ м (здесь $p_a=10^5$ Па — нормальное атмосферное давление, $\rho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).
4. $N=N_A pV/(RT)\approx 1{,}45\cdot10^{24}$ (здесь $N_A=6{,}02\times\times10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро).
5. 1) $v=\sqrt{2\dfrac{kq^2}{m}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_0}\right)}$; 2) $A=\dfrac{kq^2}{r_0}$.
(Здесь k — коэффициент, зависящий от выбора системы единиц.)
6. $P'=9P/16=9$ Вт.
7. $I=\dfrac{Blv}{R+R_1R_2/(R_1+R_2)}$.
8. Считая плотность ядерного вещества постоянной, найдем, что интересующее нас ядро — это ядро бериллия $^8_4$Be. Его энергия связи $E_{св}$ равна удельной энергии связи $E_{уд}$, которая примерно одинакова для всех ядер, умноженной на число нуклонов N:
$$E_{св}=E_{уд}N\approx 8\ \text{МэВ}\cdot 8\approx 64\ \text{МэВ}.$$
9. Температура связана с кинетической энергией протона соотношением $E_k=3/2\ kT$, где $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Согласно закону сохранения энергии,
$$2E_k=E_p,\ \text{или}\ 2\,\frac{3}{2}\,kT=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}.$$
Отсюда найдем
$$T=\frac{e^2}{12\pi\varepsilon_0 k r_0}\approx 1{,}1\cdot10^9\ \text{К}.$$

Ленинградский государственный педагогический институт имени А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 1. 2. $\{2;\ 4\}$.

4. Пусть M — произвольная точка описанной окружности (см. рис. 12). Отложите на $[MA]$

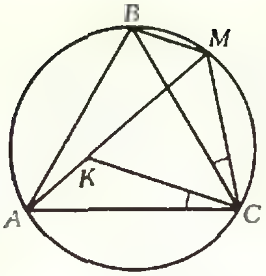


Рис. 12.

отрезок MK длины $|MC|$ после чего докажите, что $\triangle AKC \cong \triangle BMC$.

5. $\dfrac{2a^2 \sin\beta \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

Вариант 2.

1. 1. 2. $\{1; 3\}$. 3. $]-\infty; 1[\ \cup\ ]4; +\infty[$.

5. $\dfrac{b^3}{24}\operatorname{tg}\alpha$.

Физика

Физический факультет

1. $x = g/(4\pi^2\nu^2) \approx 0{,}06$ м.
2. См. рис. 13, *а* и *б*.
3. См. рис. 14.

Математический факультет

1. $v' = v/\sqrt{2} \approx 10$ м/с.
2. $T = \dfrac{\Delta T}{(1-\alpha)(1+\beta)-1} = 200$ K (здесь $\Delta T = 16$ K, $\alpha = 0{,}1$ и $\beta = 0{,}2$).
3. См. рис. 15.
4. $k = \dfrac{F^2}{(d-F)(d+l-F)} = 2$.

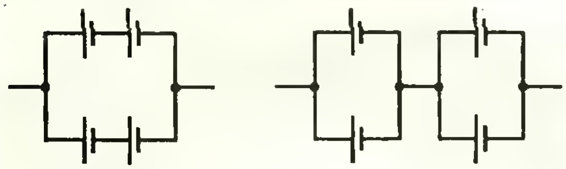

а) *б)*

Рис. 13.

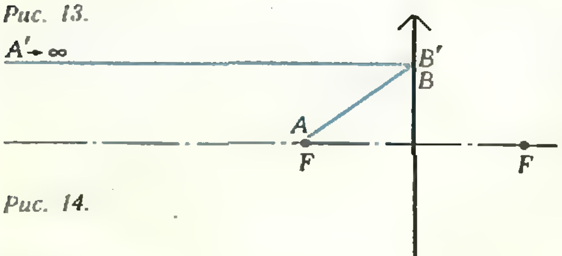


Рис. 14.

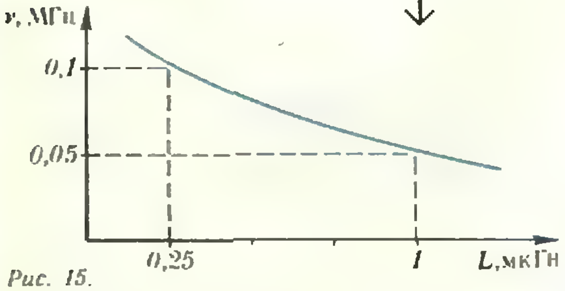


Рис. 15.

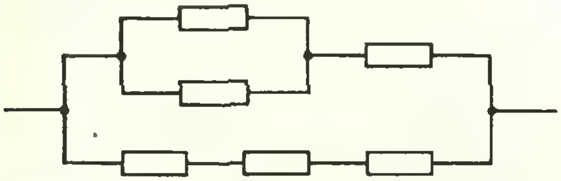


Рис. 16.

Химический факультет и факультет естествознания

1. $v_0 = (4l_1 - l_2)/(2t) = 10$ м/с (здесь $t = 5$ с).
2. $N = N_A \rho V/(RT) \approx 3{,}6 \cdot 10^{25}$ (здесь $N_A = 6{,}02 \times \times 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро, $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная).
3. $\eta = \dfrac{c\rho V(t_к - t)}{P\tau}100\% \approx 47\%$ (здесь $\rho = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды, $t_к = 100$ °С — температура кипения воды).
4. $W = \dfrac{\rho VMFnU}{RTA\eta/100\%} \approx 0{,}13$ МДж (здесь $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса водорода, $F = 96\,500$ Кл/моль — постоянная Фарадея, $n = 1$ — валентность атома водорода, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная и $A = 10^{-3}$ кг/моль — атомная масса водорода).

Индустриально-педагогический и художественно-графический факультеты

1. Давление воды на стенки сосуда не изменится.
2. См. рис. 16.
3. Один конец нити нужно прикрепить к валу электродвигателя, а второй — к перемещающемуся телу; вольтметр следует подключить к электродвигателю и проградуировать его в единицах скорости.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 3)

1. Да, верно, так как $(n-1)n = n^2 - n - 2 + 2 = (n+1)(n-2) + 2$.
2. Колесики, приводящие в действие динамомашину, вращаются из-за трения об обод. Колесики будут вращаться с одинаковыми скоростями (так как велосипеды едут с одинаковыми скоростями). Значит, фонарики будут светить одинаково.
3. Нет: трехзначное число не меньше, чем произведение первой цифры на 100, а произведение цифр не больше, чем произведение этой цифры на 81.
4. Эти площади равны, так как площадь заштрихованного сектора в четыре раза больше площади «заточканного» сектора, и четыре розовых сектора конгруэнтны (рис. 17).
5. Пусть вторая и третья цифры числа будут x и y, тогда само число можно записать как $900 + 10x + y$. После переноса цифры 9 в конец числа, получаем число $100x + 10y + 9$, которое на 216 меньше предыдущего, то есть $900 + 10x + y = 100x + 10y + 9 + 216$. Отсюда $90x + 9y = 675$. Разделив обе части на 9, получим $10x + y = 75$, следовательно, первоначальное число есть 975.

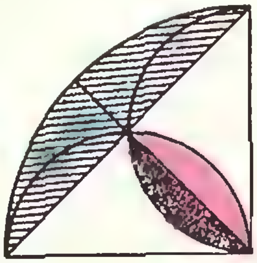


Рис. 17

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 1)

Задание 1 (Решевский — Глигорич, Нью-Йорк, 1952 г.). Ферзь c2 и слон h2 направили свои рентгеновские лучи на ферзя c7. Преграды для них не существуют. **1. Кb5! cb 2. Ф:c7+ С:c7 3. Л:c7 Кр:c7 4. К:e6+ + Крd7 5. К:d8 Л:d8 6. С:b5+.** Черные сдались.

Задание 2 (Хуг — Горт, Скопле, 1972 г.). Ферзь g6 взял на мушку неприятельского короля. **1...С:h4! 2. gh Лf3!! 3. Кe3** (3. ef gf+ 4. Крf1 Фg2+ 5. Крe1 Ф:g1+ 6. Фf1 Фg3+ с выигрышем) **3...Лg3+ 4. Крh1** (4. Крh2 Фh5) **4...Лf2!** Белые сдались.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, В. С. Коваль, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров, А. А. Орехов, А. Е. Остаев, И. А. Смирнов, Н. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина

Фото представили:
А. Н. Виленкин, А. С. Кондратьев
В номере использованы материалы фотохроники ТАСС

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Е. В. Сидоркина

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.2.84.
Подписано к печати 23.2.84.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16 Усл. кр.-отт. 24,85
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,79. Т-07949
Цена 40 коп. Заказ 380. Тираж 178 944 экз.

Шахматная страничка

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЧЕТВЕРТЫЙ ЧЕМПИОНАТ МИРА СРЕДИ ЭВМ

В «Кванте» уже рассказывалось о трех чемпионатах мира среди компьютеров. Четвертый состоялся осенью прошлого года в Нью-Йорке. Как и все предыдущие, он проводился по швейцарской системе, чемпионский титул в пяти турах разыграли 22 программы. Две первые чемпионки мира — «Каисса» и «Чесс» — на этот раз в соревновании не участвовали.

Победительницей стала программа «Крэйблиц» (США). Новая чемпионка, игравшая на самой мощной машине с быстродействием более 100 миллионов операций в секунду, набрала 4,5 очка. На пол-очка отстали «Бебе» (США) и «Эвит» (Канада). Перед заключительным туром «Крэйблиц» опережала предыдущую чемпионку мира «Белл» на пол-очка, и все решалось в партии между ними. Эта партия оказалась и самой интересной в турнире.

«Белл» — «Крэйблиц»

Сицилианская защита

1.e4 c5 2.c3 d5 3.ed Ф:d5 4. Kf3 e6 5.d4 Kf6 6.Cd3 Kc6 7.0—0 Ce7 8.Ce3 0—0 9.dc. После 9...С:с5 10.С:h7+, 11.Ф:d5 и 12.С:с5 белые просто остаются с лишней пешкой. Любопытно, что на основании этого варианта «Энциклопедия шахматных дебютов» осуждает рокировку черных. Однако «Крэйблиц» находит сильный промежуточный ход ладьей. **9...Лd8 10.Kd4 C:c5 11.c4 Фd6 12.K:c6 bc 13.C:c5 Ф:d3.** Благодаря примененной новинке черные получили хорошую игру, и белым пора побеспокоиться о поисках равенства. Годилось 14.Ф:d3 Л:d3 15.Кс3 Са6 16.Лad1 С:с4 17.Л:d3 С:d3 18.Лd1 Сс4 19.С:а7 с близкой ничьей, но, с другой стороны, в сложившейся спортивной ситуации «Белл» устраивала только победа, и она должна была избегать упрощений. Впрочем, подобные психологические нюансы вряд ли учитывались машиной. **14.Фa4 Ke4 15.Cb6.** Остроумный способ решить проблему развития ферзевого фланга. Белый слон, правда, оказывается на отшибе. **15...Лd7 16.Ca5.** Ни в этот момент, ни в какой другой взятие на с6 невозможно из-за выпада слона на b7. **16...Cb7.** Активнее 16...Лb8, и заботы белых по координации своих фигур еще не кончаются. **17.Kc3 Kc5 18.Фb4 Фd4.**

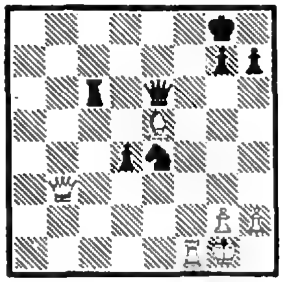
Заслуживало внимания 17.Kd2! После 17...К:d2 18.С:d2 ничья не за горами (18...Ф:d2? 19.Лad1), а в случае 17...Кс5 18.Фb4 Фd4 19.Kf3! об уравнении уже должны думать черные. На f3 конь стоит куда лучше, чем на с3. **19.Лad1 Kd3 20.Фa4 Фg4.** Снова черные допускают неточность. Гораздо сильнее 20...с5. Над белым королем сгущаются тучи. **21.c5! Фf5.** Неопасно 21...Кf4 из-за 22.g3. **22.b4!** Наконец ферзевый фланг белых стабилизирован, и слон а5, расположенный несколько неуклюже, принимает косвенное участие в борьбе за линию «d». Но не зевнули ли белые вилку?

22...Kb2 23.Л:d7! «Белл» смело жертвует ферзя, очевидно, это было предусмотрено машиной заранее. **23...K:a4 24.K:a4 Фc2 25.Л:b7 Ф:a4 26.Лa1?** Вот тот самый момент, когда шахматная корона переходит от «Белл» к «Крэйблиц». Тактическую схватку «Белл» провела вполне достойно, но в позиционной игре она чувствует себя совершенно растерянной. Пожалуй, такой ход ладьей в состоянии сделать только начинающий шахматист, оберегающий каждую свою пешку. Задача белых — побыстрее соединить ладьи, и пешка а2 тут ни при чем. Нормальное продолжение 26.h3 и если 26...Ф:а2, то 27.Лd1. В крайнем случае эта ладья попадет на линию «d» после предварительного Лbd7 и в сложной игре белые могли еще рассчитывать на успех. **26...e5 27.f3?** Еще один ход, который любой опытный шахматист отвергнет, не рассматривая ни одного варианта. **27...Фc2 28.Лc7 Фd3.** Не только угрожая Фd4+, но и захватывая линию «d», которую белые слишком легко уступили противнику. **29.Лf1 Фd5 30.a3 g5 31.Лe7 f6 32.Лc7 h5.** Фигуры белых разобщены и, как ни странно, черные наращивают свой перевес, надвигая пешки. Они-то и решают исход поединка. **33.h3 Kph8 34.Kph2 a6 35.Лe1 Лe8 36.Лe4 f5 37.Лe2 g4 38.hg fg 39.fg hg 40.Лf2 e4 41.Лff7.** Ладьи встретились друг с другом, но слишком поздно. **41...Фe5+ 42.g3 e3 43.Лh7+ Kpg8 44.b5.** Слон подключается к защите, но ничего изменить не может. **44...cb 45.Ce1 Фb2+ 46.Kpg1 Фa1 47.Kpg2.** Надежды белых на вечный шах не оправдываются. **47...Лd8 48.Лhd7.** Ускоряет развязку. **48...Лf8.** Живой шахматист, наверное, предпочел бы 48...Л:d7 и 49...Ф:е1, но компьютер счел, что с ладьей мат поставить проще. **49.Лd6 Фb2+ 50.Kpg1 Фb1 51.Kph2 Фc2+ 52.Kpg1 Фf5.** Убедившись, что мат неизбежен, «Белл» сдала партию, поздравив соперницу с завоеванием звания чемпионки мира.

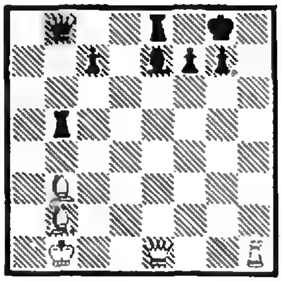
Судя по партиям последнего первенства мира, сила электронных шахматистов осталась на прежнем уровне. Использование современных ЭВМ позволило увеличить глубину перебора на несколько полуходов, но на классе игры это существенным образом не сказалось. Для качественного скачка вперед, видимо, требуются принципиально новые идеи, отличные от полного перебора вариантов, который лежит в основе большинства действующих программ.

Конкурсные задания

Сегодняшние задания примечательны тем, что с ними справилась программа «Белл».



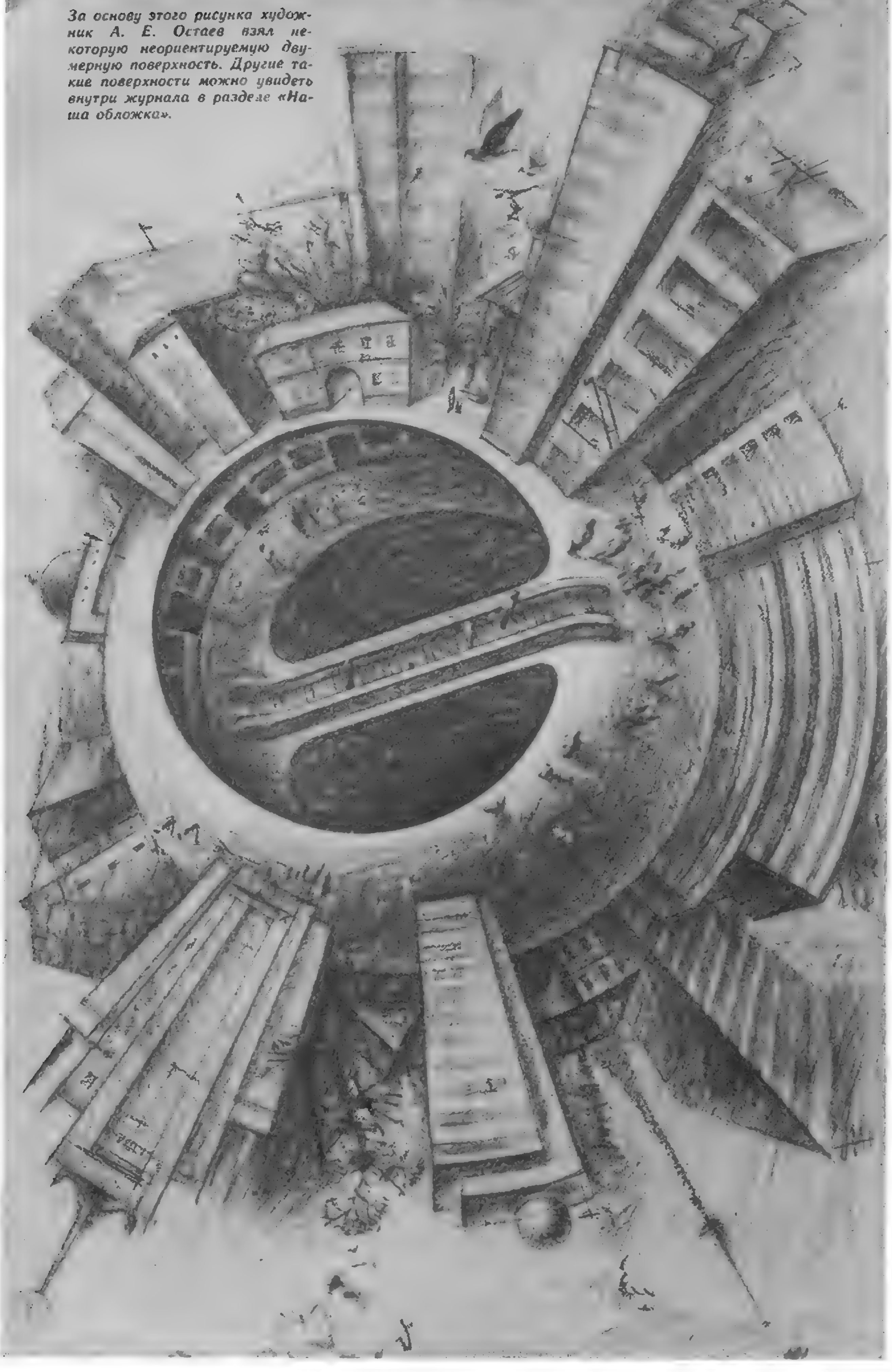
7. Белые начинают и выигрывают.



8. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 июня 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 7, 8»).

За основу этого рисунка художник А. Е. Остаев взял некоторую неориентируемую двумерную поверхность. Другие такие поверхности можно увидеть внутри журнала в разделе «Наша обложка».



Цена 40 коп.

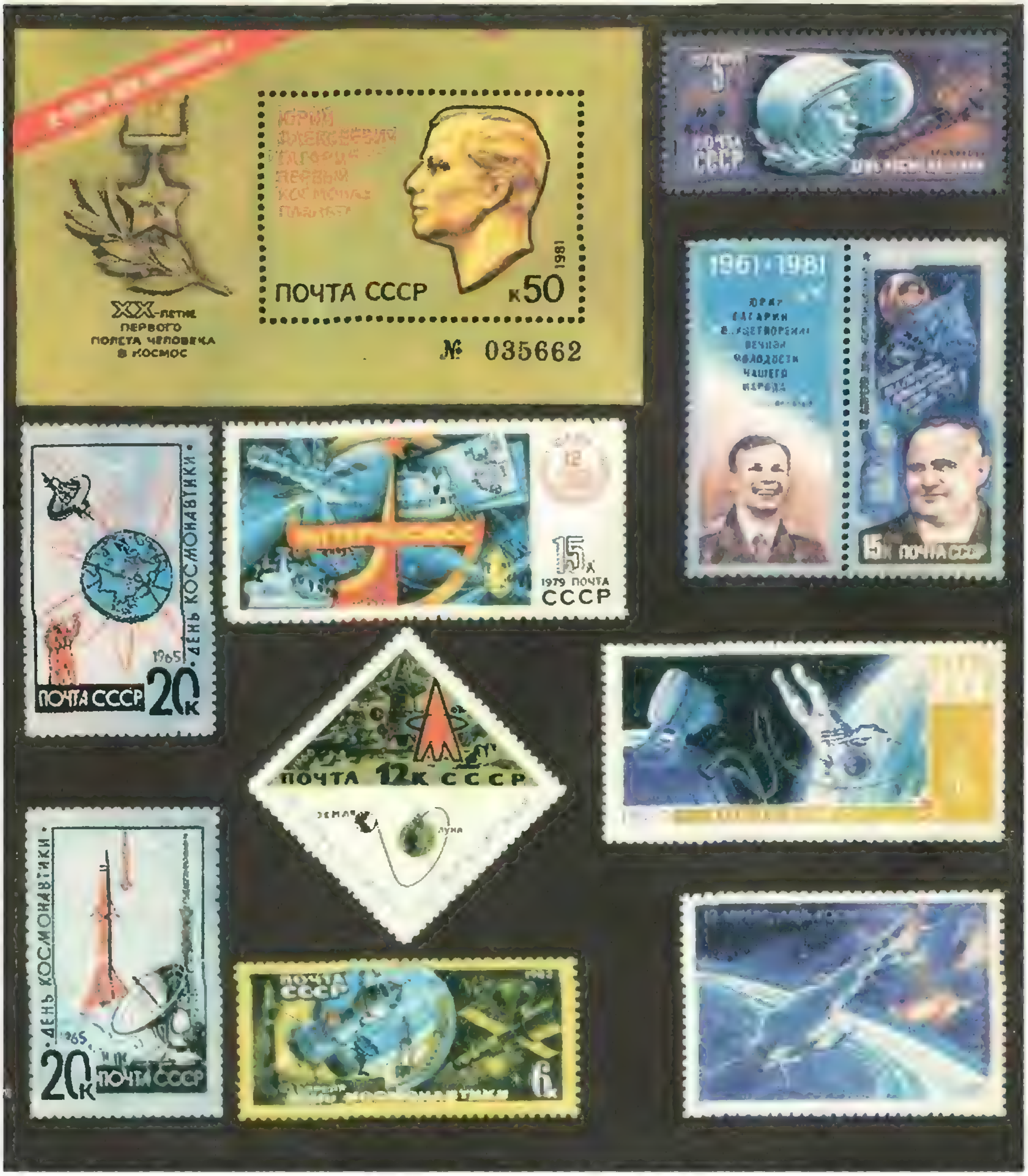
Индекс 70465

ДЕНЬ КОСМОНАВТИКИ

23 года назад, 12 апреля 1961 года, первый космонавт Юрий Гагарин совершил космический полет на корабле «Восток». Эта знаменательная дата отмечается в нашей стране как всенародный праздник «День космонавтики». К этому празднику ежегодно выпускаются специальные почтовые марки, а иногда и почтовые блоки. По ним можно проследить хронологию выдающихся достижений нашей страны в изучении космоса. На этих марках и блоках отображены различные этапы исследования Луны, Венеры и Марса при помощи автоматических межпланетных станций и разнообразных автоматических устройств, показаны советские космические корабли и орбитальные станции. Марки рассказывают о метеорологических спутниках и спутниках связи, о первом выходе человека в открытый космос, о совместном советско-американском космическом полете «Союз—Аполлон», о международной космической программе «Интеркосмос», успешно осуществляемой при активном участии Советского Союза.

Мы воспроизводим здесь почтовый блок и несколько марок, посвященных Дню космонавтики.

В. Рудов


ПОЧТА СССР
к50
1981
XX-летие первого полета человека в космос
№ 035662
ПОЧТА СССР
1961·1981
15к ПОЧТА СССР
ДЕНЬ КОСМОНАВТИКИ
1965
ПОЧТА СССР 20к
15к
1979 ПОЧТА СССР
ПОЧТА 12к СССР
ЗЕМЛЯ
ЛУНА
ДЕНЬ КОСМОНАВТИКИ
1965
20к ПОЧТА СССР
ПОЧТА СССР
6к

НОМЕР
5

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

КВАНТ **5** 1984

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

	В НОМЕРЕ:	**IN THIS ISSUE:**
3	*И. К. Кикоин.* Философские идеи В. И. Ленина и развитие современной физики	*I. K. Kikoin.* V. I. Lenin's philosophical ideas and the development of contemporary physics
11	*С. М. Воронин, А. Г. Кулагин.* Метод производящих функций	*S. M. Voronin, A. G. Kulagin.* The method of generating functions
16	*С. Н. Артеменко, А. Ф. Волков.* Синтетические металлы — новый тип проводников	*S. N. Artemenko, A. F. Volkov.* Synthetic metals — a new kind of conductor
	Новости науки	**Science news**
10	*В. А. Бронштэн.* Нейтронная звезда, черная дыра или ...?	*V. A. Bronshten.* Neutron star, black hole or...?
	Наш календарь	**Our calendar**
22	Пьер Кюри	Pierre Curie
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
23	*Е. И. Бутиков.* Связанные маятники	*E. I. Butikov.* Linked pendulums
	Математический кружок	**Mathematics circle**
26	*В. М. Уроев.* Инверсия	*V. M. Uroev.* Inversion
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
33	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
36	Непослушные задачи	Disobedient problems
37	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	Геометрическая страничка	**The geometric page**
38	Эволюта	The evolute
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school-children**
40	Задачи	Problems
41	Задача в картинках	A problem in pictures
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
42	Задачи М861—М865; Ф873—Ф877	Problems M861—M865; P873—P877
45	Решения задач М847—М850; Ф858—Ф861	Solutions M847—M850; P858—P861
	Информация	**Information**
53	Ижевскому НОУ — 5 лет	The Izhevsk school scientific society is 5 years old
54	**Варианты вступительных экзаменов**	**College entrance examination problems**
58	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь *(21)*	**Miscellaneous** *(21)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	«Бермудский треугольник» в центре доски *(3-я с. обложки)*	The "Bermuda triangle" in the chessboard's centre *(3rd cover page)*

На первой странице обложки изображены эволюты эллипса, построенные ЭВМ по программе новосибирской школьницы Ани Бабиковой. Эволюты обсуждаются на «Геометрической страничке» внутри номера.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1984

Петр Леонидович Капица

8 апреля 1984 года на 90-м году жизни скончался крупнейший физик нашего времени, выдающийся организатор советской науки, член президиума Академии наук СССР, директор Института физических проблем, дважды Герой Социалистического Труда, один из инициаторов создания журнала «Квант» и член его редакционного совета, академик Петр Леонидович Капица.

П. Л. Капица внес крупный вклад в развитие физики магнитных явлений, физики и техники низких температур, физической электроники. Он был членом Лондонского королевского общества, иностранным членом академий наук США, Швеции, Дании, Польши, Индии и ряда других стран, лауреатом Государственных премий СССР и Нобелевской премии.

П. Л. Капица активно участвовал в Пагуошском движении ученых за мир. Он горячо любил молодежь и был одним из основателей Московского физико-технического института. Светлая память о нем навсегда сохранится в истории советской науки.

Философские идеи В. И. Ленина и развитие современной физики

(к 75-летию книги В. И. Ленина «Материализм и эмпириокритицизм»)

Академик И. К. КИКОИН

В своей книге «Материализм и эмпириокритицизм» В. И. Ленин дал исчерпывающий анализ философских проблем современной ему физики. Величайшее значение этого труда Ленина заключается в том, что в нем был разработан метод анализа философских проблем науки, которым и сейчас пользуются прогрессивные ученые.

Владимир Ильич Ленин был не только великим политическим и государственным деятелем, но и великим ученым.

Особая роль физики в развитии как техники, так и философии явилась причиной пристального внимания Ленина к вопросам новой физики (может быть, на интерес Ленина к физике в какой-то мере повлияло и то, что его отец Илья Николаевич Ульянов был учителем физики).

Ленинский метод научной работы особенно близок сердцам физиков. В своей теоретической работе Ленин всегда опирался на *опыт*, на практику как на критерий истины. Ленин следующими словами Энгельса поясняет идею «критерия практики»: «В тот момент, когда, сообразно воспринимаемым нами свойствам какой-либо вещи, мы употребляем ее для себя,— мы в этот самый момент подвергаем безошибочному испытанию *истинность* или ложность наших чувственных восприятий. (Курсив мой — *И. К.*) ⟨...⟩ ... Успех наших действий дает доказательство соответствия (Übereinstimmung) наших восприятий с предметной (gegenständlich) природой воспринимаемых вещей »*).

Но история науки знает немало примеров, свидетельствующих о том, что явно неправильные с современной точки зрения представления ученых приводили, тем не менее, к «успеху наших действий».

---

*) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 109—110

Для примера возьмем старую теорию магнетизма, по которой намагниченный кусок стали рассматривался как магнитный диполь, состоящий из двух магнитных полюсов, или «магнитных зарядов» (по аналогии с электрическим диполем). Пользуясь этим представлением, физики создали магнитостатику, на которой базируется вся практика и техника использования магнитов. Эта практика блестяще подтвердила теорию «магнитных зарядов». Между тем теперь хорошо известно, что никаких магнитных зарядов в действительности не существует. И когда сейчас говорят о магнитных полюсах, то обязательно оговаривают, что это фиктивное понятие.

Выходит, что критерий практики не может служить надежной основой для выяснения истинности наших представлений о том или ином предмете? Это, разумеется, не праздный вопрос.

Один из крупнейших физиков-теоретиков современности Ричард Фейнман, пытаясь выяснить, что же такое философское толкование физического закона, иллюстрирует значение этого вопроса следующим примером.

«Пусть те, кто настаивает на том, что единственно важным является лишь согласие теории и эксперимента, представят себе разговор между астрономом из племени майя и его студентом. Майя умели с поразительной точностью предсказывать, например, время затмений, положение на небе Луны, Венеры и других планет. Все это делалось при помощи арифметики... У них не было ни малейшего представления о вращении небесных тел.

Представьте себе, что к нашему астроному приходит молодой человек и говорит: «Вот, что мне пришло в голову. Может быть, все это вертится, может, это шары из камня... и их движение можно рассчитывать совсем иначе». Далее, узнав, что молодой человек еще не дошел до расчетов движения планет, астроном майя ответит ему, что мы можем и так достаточно точно вычислять затмения, так что не стоит возиться с твоими идеями.

Как видим,— заканчивает Фейнман,— нелегкая задача — решить, стоит или не стоит задумываться над тем, что кроется за нашими теориями».

Это и в самом деле нелегкая задача. Ведь если принять безоговорочно утверждение, что критерием истины является практика, то такое утверждение, как видно из приведенных примеров, может привести к застою в науке.

Эту нелегкую задачу с блеском решил В. И. Ленин.

Утверждая, что «точка зрения жизни, практики должна быть первой и основной точкой зрения теории познания», Ленин добавляет: «Конечно, при этом не надо забывать, что критерий практики никогда не может по самой сути дела подтвердить или опровергнуть *полностью* какого бы то ни было человеческого представления. Этот критерий тоже настолько «неопределенен», чтобы не позволять знаниям человека превратиться в «абсолют», и в то же время настолько определенен, чтобы вести беспощадную борьбу со всеми разновидностями идеализма и агностицизма*)».**)

«...Отсюда,— продолжает Ленин,— вытекает признание единственным путем к этой истине пути *науки*, стоящей на материалистической точке зрения.»***) (Курсив мой. — *И. К.*)

Подавляющее большинство физиков сознательно или стихийно руководствуется именно таким ленинским пониманием критерия практики.

Опыт служил Ленину надежной опорой, когда он формулировал основы своих философских воззрений. Иллюстрацией к этому может служить следующий пример.

Ленин считал необходимым *проверить историей науки* (то есть проверить экспериментально, как сказал бы физик) одно из основных положений диалектики — так называемое «единство противоположностей». Свою заметку «К вопросу о диалектике» Ленин так и начинает: «Раздвоение единого и познание противоречивых частей его... есть *суть* (одна из «сущностей», одна из основных, если не основная, особенностей или черт) диалектики. ⟨...⟩ Правильность этой стороны содержания диалектики должна быть проверена историей науки»****).

---

*) Агностицизмом называется философское учение, отрицающее возможность познания объективного мира, ограничивающее роль науки лишь познанием явлений. (Прим. мое. — *И. К.*)

**) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18. с. 145—146

***) Там же, с. 146.

****) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 316.

Это высказывание Ленина не было простой декларацией. Такую проверку он сам осуществил в своей классической работе «Материализм и эмпириокритицизм», написанной в 1908 году, в работе, которая оказала и продолжает оказывать огромное влияние на развитие науки.

Написанный в годы крутого перелома основных физических представлений, этот труд дал исчерпывающий философский анализ данных физики того времени.

Известно, что Ленин назвал «гигантскими, головокружительными» успехи физики за последние три десятилетия XIX столетия и первые годы XX столетия. В еще большей мере такую оценку можно дать успехам физики за годы, прошедшие после выхода в свет книги Ленина «Материализм и эмпириокритицизм».

Начало нашего века ознаменовалось величайшей революцией в физике. В 1905 году была опубликована знаменитая работа Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел», представляющая собой основу специальной теории относительности. Мы не можем здесь подробно изложить эту теорию. Сущность ее заключается в «простой» идее о том, что в движущихся друг относительно друга системах отсчета *время течет по-разному*. Теория относительности внесла коренные изменения в представления о времени и пространстве — об этих основных философских и физических понятиях. Сейчас, когда основы теории относительности уже излагают в школьном курсе физики, когда широко развивается ядерная техника, основанная на прямых следствиях теории относительности, кажется удивительным, что вначале эта теория была принята физиками «в штыки». Даже один из величайших физиков начала нынешнего столетия, создатель электронной теории Х. А. Лоренц не сразу оценил значение этой теории. И это тот Лоренц, который выковал для теории относительности самое могучее оружие — так называемые «преобразования Лоренца».

Замечательно, что Ленин, спустя всего два с лишним года после опубликования работы Эйнштейна, следующими словами оценил ее огромное революционное и философское значение: «...как ни необычно ограничение механических законов движения одной только областью явлений природы и подчинение их более глубоким законам электромагнитных явлений и т. д.,— все это только лишнее *подтверждение* диалектического материализма»*).

В течение многих лет теория относительности порождала обширную литературу, в которой отразилась ожесточенная борьба на философском и физическом фронтах. Эта литература имеет сейчас главным образом исторический интерес, и мы не будем на ней останавливаться. Но следует напомнить, что В. И. Ленин и в дальнейшем продолжал считать автора теории относительности «великим преобразователем естествознания».

В своем знаменитом труде «Материализм и эмпириокритицизм» В. И. Ленин не ограничился общим философским анализом бурного развития физики в период, когда он писал свою книгу. В некоторых случаях он выступал как специалист-физик высокой квалификации.

В качестве примера этому приведем разъяснение В. И. Ленина одному из его идеологических противников чисто физического вопроса о массе тела.

Известно, что вопрос о том, что такое масса тела в прежнее время казался довольно сложным и ответы на него разных физиков были противоречивыми. К сожалению, и в наше время нередко некоторые авторы придерживаются устарелых определений этой важнейшей физической величины. Это связано с тем, что сам Ньютон, который несомненно понимал, что такое масса тела, в своей книге «Математические начала натуральной философии» дал не очень удачное определение этой величины. Точное определение понятия массы дал впервые известный механик Сен-Венан. Так же определил эту величину Л. Больцман в своих лекциях о принципах механики. Оно основано на опытах по взаимодействию тел.

Опыты показали, что отношение ускорений двух взаимодействующих тел есть величина постоянная и не зависит от условий взаимодействия и других условий. Обратное отношение ускорений назвали отношением масс этих тел. Чтобы найти массу отдельного тела, выбирают какое-нибудь тело, массу которого условно принимают за единицу — эталон массы. Отсюда следует определение массы: масса тела — это величина, выражающая его инертность, она определяет отношение модуля ускорения *эталона массы* к модулю ускорения тела при их взаимодействии.

---

*) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 276

Упомянутый выше идеологический противник В. И. Ленина, не поняв смысла приведенного определения, решил его использовать для «опровержения» материалистического мировоззрения, указав, что понятие материи... сводится к обратному отношению ускорений взаимодействующих тел!

В. И. Ленин объяснил незадачливому философу его ошибку следующими словами: «Понятно, что если какое-нибудь *тело* взять за единицу, то движение (механическое) всех прочих тел можно выразить простым отношением ускорений. Но ведь «тела» (т. е. материя) от этого вовсе еще не исчезают, не перестают существовать независимо от нашего сознания»*). Приведенный пример показывает, насколько ясно, профессионально В. И. Ленин разбирался в сложных, по тем временам, понятиях физики.

Революцию, сравнимую с той, которую произвела теория относительности, совершила в физике и квантовая механика. Уже упоминавшийся ранее Ричард Фейнман свидетельствует, например, что «...было время, когда газеты писали, что теорию относительности понимают только двенадцать человек». Не соглашаясь с таким мнением и считая, что многие ученые, прочитав статью Эйнштейна, так или иначе поняли теорию относительности, Фейнман продолжает: «Но мне кажется, я смело могу сказать, что *квантовой механики никто не понимает*».

Это очень честное заявление одного из крупнейших физиков-теоретиков, столь много сделавшего для развития квантовой электродинамики, весьма многозначительно.

Далее Фейнман поясняет, что значит «понимать» квантовую механику. Это значит найти ответ на вопрос: «Как же так может быть?».

Современная физика — это квантовая физика. Успехи квантовой механики можно назвать исключительными. Она позволила раскрыть тайну строения атома. Пользуясь квантовой механикой, можно с любой степенью точности рассчитать атом, то есть вычислить детальную электронную структуру атома. Эти вычисления находятся в потрясающем по точности согласии с экспериментом.

Вся современная квантовая электроника с ее разнообразными техническими применениями (лазерами, мазерами и т. п.) — это продукт квантовой механики. Квантовая механика еще не стала объектом изучения в школе, но ее приложения уже изучаются в технических вузах.

И при всем том крупнейший авторитет в этой области физики утверждает, что ее никто не понимает!

Попытаемся разобраться, в чем причины непонимания квантовой механики.

Дело в том, что уже при самом ее зарождении квантовая механика содержала противоречия. Обратимся, например, к простейшему проявлению квантовой природы света — к фотоэлектрическому эффекту.

В теории фотоэффекта, развитой Эйнштейном, свет частоты ν рассматривается как поток «частиц» — фотонов, энергия которых $E=h\nu$ (h — постоянная Планка). Когда фотоны достигают поверхности металла, некоторая часть их поглощается электронами. Электрон, поглотивший фотон, приобретает энергию $h\nu$. Обладая такой энергией, электрон может покинуть металл, вылететь наружу. При этом он теряет часть приобретенной энергии, затратив ее на «работу выхода» A. Поэтому максимальная кинетическая энергия, с которой электрон вылетит из металла, равна

$$\frac{1}{2}mv^2=h\nu - A.$$

Эта знаменитая формула Эйнштейна для фотоэффекта подтверждается многочисленными экспериментами и лежит в основе бесчисленных применений этого явления.

Так вот, если вдуматься в смысл формулы Эйнштейна (она была получена им тоже в 1905 году), то сразу становится ясной ее противоречивость.

Входящая в эту формулу величина $E=h\nu$ — это энергия «световой частицы» (фотона), а величина ν — частота света, состоящего из частиц. Но частота — это величина, характеризующая волну. Понятие частоты света появилось после того, как в XIX столетии было установлено, что свет представляет собой процесс распространения колебаний. Такой процесс и называется волной. Но волна, по самому смыслу этого понятия, занимает большую область пространства (если говорить строго — всё пространство). Частица же — это нечто такое, что локализовано в пространстве, занимает малый объем. Поэтому основное выражение $E=h\nu$, связывающее *энергию* фотона, то есть *частицы*, с *частотой* световой *волны*, представляется с точки зрения «здравого смысла» абсурдным.

---

*) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 305.

Фотоэлектрические явления неопровержимо доказали, что свет представляет собой поток частиц.

С другой стороны, существуют столь же неопровержимые экспериментальные доказательства того, что свет представляет собой волновой процесс. Действительно, самое характерное свойство волн заключается в следующем: если наложить две волны друг на друга так, чтобы гребень одной совпал со впадиной другой, то волнение вовсе прекратится. И наоборот, когда гребни одной волны совпадают с гребнями другой, волнение усиливается. Это хорошо известное явление называется интерференцией волн. Можно утверждать, что если в опыте наблюдается явление интерференции, то мы имеем дело с волной.

Волновая теория света утвердилась в науке после того, как было показано, что некоторые точки экрана, освещаемого одновременно двумя одинаковыми источниками света, оказываются темными, тогда как при действии каждого из источников в отдельности экран освещен равномерно.

Практика, следовательно, привела к необходимости принять парадоксальный факт, что как волновая, так и квантовая теория света верны, а формула $E=h\nu$ устанавливает связь между этими противоречащими друг другу теориями.

Этот вызов «здравому смыслу» достиг своей кульминации в 1924 году, когда двойственное понятие «волна — частица» путем теоретических рассуждений было распространено на электроны и атомы. Другими словами, атом и электрон, которые с момента их открытия обладали всеми свойствами частиц, должны были вести себя и как волны. И очень скоро эксперименты подтвердили эти теоретические выводы.

Основы квантовой механики были заложены в 1925—1927 годах. Существенный вклад в ее развитие внес немецкий физик Вернер Гейзенберг. Он сформулировал так называемое соотношение неопределенностей, вокруг которого разгорелась обширная философская дискуссия. Многих известных физиков это соотношение привело в лагерь философских идеалистов.

На первый взгляд соотношение неопределенностей имеет совершенно безобидный вид:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \frac{h}{2\pi}\,.$$

Здесь Δx — неопределенность (неточность) значения координаты частицы, Δp — неопределенность значения импульса частицы и h — постоянная Планка. В переводе на разговорный язык эта формула означает, что нельзя в одно и то же время точно узнать место и скорость движения частицы. Другими словами, если мы попытаемся определить точное значение скорости частицы, находящейся в данный момент в строго фиксированной точке ее траектории, то сделать это нам не удастся. И наоборот, если мы заставим частицу двигаться со строго определенной скоростью, то мы не сможем точно указать, в какой точке траектории находится частица в данный момент времени. Отсюда легко сделать «простейшее» заключение явно идеалистического характера о том, что знания человека принципиально ограничены, раз нам не дано ответить на такой простой вопрос. Более того, отсюда же можно сделать заключение, столь же идеалистическое по своему смыслу, что события в мире непредсказуемы, то есть нарушается принцип причинности.

Действительно, мы привыкли к тому, что классическая механика позволяет нам предвидеть будущее движение тела, если известны его начальное положение и скорость, а также действующие на него силы. На этом строится вся классическая механика. Так, успехи космонавтики основаны на том, что, зная место старта ракеты (начальные координаты), сообщив ракете известную начальную скорость, мы можем по законам классической механики заранее предсказать, где будет находиться ракета в любой момент времени.

Иное дело с частицей, подчиняющейся квантовой механике. Раз мы, в соответствии с соотношением неопределенностей, не можем точно указать ее координаты и скорость в данный момент времени, то, очевидно, мы не можем предсказать, какими они станут в будущем. Нетрудно догадаться, что все это является следствием того, что частицы (электроны, атомы, нейтроны и т. д.) обладают волновыми свойствами.

В самом деле, рассмотрим следующий грубо схематизированный опыт, который, тем не менее, очень недалек от действительно осуществляемых опытов. Представим себе, что через два отверстия в экране пролетают электроны, испускаемые каким-то источником, например накаленной проволочкой. Позади экрана мы можем передвигать параллельно ему счетчик электронов. Счетчик регистрирует каждый попавший в него электрон. Значит, число электронов можно непосредственно сосчитать.

Естественно полагать, что каждый электрон, попадающий в счетчик, прошел через одно из двух отверстий. Поэтому, если мы сосчитаем число электронов, попавших в счетчик через первое отверстие при закрытом втором, затем проделаем то же самое с электронами, попавшими в счетчик через второе отверстие при закрытом первом, мы вправе ожидать, что число электронов, попавших в счетчик через оба отверстия, будет равно сумме показаний счетчика. Мы уверены, что так было бы, если бы мы стреляли из пулемета через броневой щит с двумя отверстиями, за которым в каком-нибудь месте помещен ящик с песком, где застревают пролетевшие пули. Можно не сомневаться в том, что число пуль, попадающих в ящик с песком при открытых обоих отверстиях в щите, равно сумме чисел пуль, попадающих в тот же ящик через каждое из отверстий в отдельности (конечно, за один и тот же промежуток времени, скажем, за час).

Но когда мы «стреляем» электронами, этого не получается! Больше того, может оказаться, что установленный в надлежащем месте счетчик, зарегистрировавший одинаковое число электронов при их прохождении через каждое отверстие в отдельности (когда одно из отверстий закрыто), не зарегистрирует ни одного электрона, когда открыты оба отверстия.

Естественно возникает вопрос: как это может быть?

Нетрудно усмотреть здесь то же явление, которое наблюдается при освещении экрана двумя одинаковыми источниками света, то есть явление интерференции.

Попытаемся теперь ответить на вопрос, почему непонятна квантовая механика. Это поможет нам найти корни идеалистических выводов, к которым пришли некоторые философы и физики, анализируя создавшееся в физике положение.

Основная трудность понимания рассмотренных выше физических явлений заключается в том, что мы пытались при их анализе пользоваться теми же понятиями, к которым мы привыкли в повседневной жизни. Многовековой опыт человечества привел к тому, что человек считает для себя понятным то, что он может представить себе в виде *геометрического или механического образа*. Этот опыт, практика изучения окружающего мира привели к созданию ряда понятий, при помощи которых реальный мир отражается в мозгу человека. Но до XX века человечество занималось лишь макроскопическими телами, движущимися со сравнительно небольшими скоростями. Макроскопическими называются тела, которые можно видеть, определить их форму и размеры (создать геометрический образ) и изучить их движение (создать механический образ). К этому опыту были приспособлены и соответствующие понятия.

Механика Ньютона, разработанная применительно к движению макроскопических тел, установила, что механическое состояние тела однозначно определяется его координатами и импульсом (или скоростью, если массу тела считать неизменной).

Но вот мы перешли к миру объектов, подчиняющихся квантовым законам, чуждым механике Ньютона. Человеческий опыт не успел еще выработать образы объектов и понятия, соответствующие этому миру.

Если опыт показывает, что эти объекты обладают и свойствами частиц, и свойствами волн, то в действительности они не волны и не частицы, а должны быть чем-то иным, «единым в противоположностях». И действительно, если внимательно рассмотреть экспериментальные доказательства того, что электрон есть обычная механическая частица, то мы убедимся, что это весьма косвенные доказательства. Скорее всего только глубокое убеждение физиков в атомистическом строении вещества привело их к выводу, что опыты с электронами (и атомами тоже) свидетельствуют о том, что они являются частицами в обычном механическом смысле.

Даже Эйнштейн не мог отречься от «механической» точки зрения на движение электрона. Он часто качал головой и говорил: «Но ведь не гадает же бог «орел — решка», чтобы решить, куда должен двигаться электрон».

В наше время достоверность реального существования атомов, электронов, протонов может соперничать с достоверностью системы Коперника в астрономии. Но это не значит, что мы можем представлять себе эти объекты как уменьшенную модель астрономических тел. Мы до сих пор никак не можем их себе представить; они ни на что не похожи. И в этом природа не виновата!

Было бы, конечно, выражением высшей степени философского идеализма считать, что природа должна так приспособиться к человеческому разуму, чтобы он мог образно представить себе все ее объекты. Именно потому, что мы не можем представить квантовые объекты в виде геометрических и механических образов, мы считаем их непонятными.

Но если это так, то какие у нас основания предполагать, что состояние квантовых объектов должно определяться теми же величинами, то есть координатами и импульсом, которыми определяется состояние небесных тел? Словом, вопрос «каковы координаты и импульс в данный момент времени?» применительно к квантовым объектам — незаконный вопрос. Ведь не всякий вопрос правомерен. Например, нельзя ответить на вопрос «какого цвета пулковский меридиан?». Но из этого не следует, что возможности познания ограничены!

В такой же мере, по-видимому, неправомерен вопрос «каковы координаты и импульс электрона?».

К создавшейся ситуации в квантовой механике как нельзя лучше применимы слова Ленина: «Движение тел превращается в природе в движение того, что не есть тело с постоянной массой, в движение того, что есть неведомый заряд неведомого электричества в неведомом эфире,— эта диалектика *материальных* превращений, проделываемых в лаборатории и на заводе, служит в глазах идеалиста... подтверждением не материалистической диалектики, а доводом против материализма...»*). Из того, что было сказано выше, ясно, что «непонятность» квантовой механики не дает никаких оснований для идеалистических выводов об ограниченности возможности познания природы.

Также лишен основания идеалистический вывод о нарушении принципа причинности, то есть о непредсказуемости событий.

По квантовой механике состояние системы вполне определяется специальной величиной, так называемой волновой функцией. Для нее имеется уравнение, решив которое, физик вполне может предвидеть, какой у него получится результат опыта. И не было случая, чтобы уравнения квантовой механики подводили экспериментаторов!

Здесь вполне уместно следующее высказывание Ленина о современной ему новой физике: «...все это много мудренее старой механики, но все это есть движение материи в пространстве и во времени»**).

В наши дни все больше и больше физиков всего мира становятся на позиции диалектического материализма. В свое время Ленин показал, что современные ему физики не сумели «прямо и сразу подняться от метафизического материализма к диалектическому материализму». Но он предвидел, что «этот шаг делает и сделает современная физика».

Это предвидение Ленина сбылось!

---

*) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 297—298.

**) Там же, с. 298.

Нейтронная звезда, черная дыра или ...?

Кандидат
физико-математических
наук
В. А. БРОНШТЭН

Все началось довольно прозаично. В 1977 году американские астрономы Б. Стефенсон и Н. Сандулак, завершив многолетний труд, опубликовали новый каталог звезд Млечного Пути с яркими линиями водорода в спектре.

Уже на следующий год одна из звезд нового каталога, получившая обозначение SS 433, привлекла всеобщее внимание. Это слабенькая звездочка (14-й звездной величины) в созвездии Орла, наблюдать ее можно только в крупные телескопы. Однако, если в спектре звезды наблюдаются яркие линии, значит, звезда проявляет необычную активность. Ее решили «проверить». Оказалось, что вблизи этой звезды находится источник радиоизлучения, напоминающий остаток взрыва сверхновой звезды. Почти в той же точке неба был зарегистрирован и источник рентгеновского излучения. Но самое удивительное было связано все же со спектром самой звезды.

Начиная с июля 1978 года астрономы из Калифорнийского университета (США) начали систематически фотографировать спектры нового объекта. Они оказались какими-то странными. Вместо каждой линии водорода, гелия и других газов наблюдались три линии: одна там, где ей положено быть, и еще две по бокам. Вскоре обнаружилось, что боковые линии смещаются: они как бы сходятся, приближаясь друг к другу. В сентябре этого же года крайние линии сошлись, но при этом не совпали со средней линией! Затем они опять начали расходиться. Наблюдения, проводимые в течение полутора лет, показали, что линии сходятся и расходятся с периодом в 165 суток.

Чем можно объяснить расщепление каждой спектральной линии на три?

В принципе, возможны три причины: смещение линий в гравитационном поле, расщепление линий сильным магнитным полем и эффект, связанный с движением источника излучения (эффект Доплера). Первые два механизма были отвергнуты, поскольку им не нашлось соответствующих подтверждений. Остается эффект Доплера — смещение линий при движении источника относительно наблюдателя. Но это означает, что исследуемый объект должен содержать по меньшей мере три источника излучения: один неподвижный и два движущихся в противоположных направлениях. Согласно расчетам, скорости последних достигают 80 000 км/с — более четверти скорости света!

Что же представляет собой эта система источников? Может быть, это центральная звезда с двумя спутниками, обращающимися вокруг нее с периодом, равным 165 суткам? Но такому периоду и указанным гигантским скоростям движения спутников соответствует радиус орбиты, в 1000 раз превышающий среднее расстояние от Земли до Солнца, и масса системы порядка 10^{10} солнечных масс. Таких звезд просто не бывает!

Не может данный объект быть и квазаром (далеким квазизвездным источником радиоизлучения): объект находится в пределах нашей Галактики.

Начались разработки возможной модели звезды SS 433. Одну из первых предложили английские астрономы Э. Фабиан и М. Рис. Согласно их гипотезе, некое центральное тело в результате пока еще не известного процесса выбрасывает в двух противоположных направлениях два потока газа со скоростями порядка 80 000 км/с. При этом вся система испытывает прецессию — хорошо известное движение оси системы по конусу, как у детского волчка или у нашей собственной планеты. Период этой прецессии и равен, по уточненным данным, 164 суткам. Но что же находится в центре?

По мнению Фабиана и Риса центральным телом может быть, например, черная дыра. Советский астрофизик И. С. Шкловский высказал другую гипотезу. Он предположил, что в центре находится нейтронная звезда, обладающая сильным магнитным полем, а неподалеку от нее — нормальная звезда. Вещество нормальной звезды под действием притяжения перетекает к нейтронной звезде, образуя вокруг нее газовый диск. Магнитное поле быстро вращающейся нейтронной звезды, подобно гигантскому фонтану, выбрасывает две газовые струи: одну — в сторону Земли, другую — в противоположную сторону.

Развивая эту модель, советский ученый И. Д. Новиков и его сотрудники предположили, что нейтронная звезда выбрасывает потоки быстрых частиц, которые, взаимодействуя с веществом диска, разгоняют это вещество до сверхвысоких скоростей.

Все же мы не можем сейчас дать окончательный ответ на вопрос, что же находится в центре объекта SS 433. Исследования продолжаются!

Метод производящих функций

Доктор физико-математических наук
С. М. ВОРОНИН,
А. Г. КУЛАГИН

Метод, названный в заглавии статьи, — красивый и неожиданный математический прием, позволяющий сводить задачи из теории чисел, теории вероятностей и комбинаторики к задачам из анализа. Часто оказывается, что для аналитической переформулировки задачи, полученной этим методом, удается быстро найти решение, в то время как другие подходы к исходной задаче ничего не дают. Следует сразу оговориться, однако, что метод производящих функций не является «волшебной палочкой», с помощью которой можно решить все задачи (см. ниже задачу Ферма, для решения которой он оказывается бесполезным).

Вначале, не вдаваясь в тонкости теории, мы покажем, как работает метод производящих функций в четырех классических задачах. Затем кратко остановимся на обосновании метода, а в конце предложим ряд задач, решаемых с его помощью.

Задача о взвешивании

В 50-х годах XVIII века Л. Эйлер решал следующую задачу: *какие грузы можно взвесить гирями в* 1, 2, 2^2, 2^3, ..., 2^m,... *грамм, и сколькими способами?* Мы не знаем, как быстро и каким образом Эйлер пришел к ее решению, но окончательный ход мысли великого петербургского математика, дошедший до нас, поражает своей неожиданностью. Посудите сами.

Эйлер рассматривает... произведение

$$\alpha(z)=(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdot\ldots, \qquad (1)$$

которое, после раскрытия скобок и приведения подобных членов, представляется в виде «бесконечного многочлена по z»:

$$\alpha(z)=1+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+\ldots . \qquad (2)$$

Чему же равны числа A_k $(k=1, 2,\ldots)$? Каждый A_k — это коэффициент при z^k, а z^k получается как произведение каких-то одночленов z^{2^m} (не более одного из каждой скобки в (1)), то есть A_k — *это в точности число разных представлений числа k в виде суммы некоторых из чисел* 1, 2, 4, 8, ..., 2^m,... (продумайте это место). Другими словами, A_k — это число способов взвешивания груза в k грамм рассматриваемыми гирями!

Итак, для решения исходной задачи остается вычислить A_k. И здесь — очередной неожиданный ход Эйлера. Он пишет очевидные тождества

$$(1-z)(1+z)=1-z^2,$$
$$(1-z^2)(1+z^2)=1-z^4,$$
$$(1-z^4)(1+z^4)=1-z^8,$$

а после перемножения и сокращения на общие множители получает

$$(1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdot\ldots= \\ =1,$$

то есть $(1-z)\,\alpha(z)=1$, откуда

$$\alpha(z)=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+z^4+\ldots \quad (3)$$

(здесь написана хорошо вам известная формула суммы геометрической прогрессии*)). Сравнение (3) с (2) показывает, что $A_k=1$ для всех k, то есть *всякий груз в целое число граммов можно взвесить гирями в* 1, 2, 4, ..., 2^m, ... *граммов, притом единственным способом.*

Задача о разбиении числа

Так Эйлер назвал следующую задачу: *найти число положительных целых решений уравнения*

$$x_1+\ldots+x_m=k, \quad (4)$$

где m и k — фиксированные натуральные числа. Здесь к цели приводит другое неожиданное выражение, именно

$$\beta(z)=(1+z+z^2+z^3+z^4+\ldots)^m. \quad (5)$$

После раскрытия скобок, $\beta(z)$ записывается в виде

$$\beta(z)=1+B_1z+B_2z^2+B_3z^3+\ldots \quad (6)$$

Чему равно B_k? Попробуйте ответить на этот вопрос сами, имея в виду, что B_k — коэффициент при z^k. Да, разумеется: коэффициент B_k равен числу способов выбора по одному целому показателю из каждой из скобок в правой части (5), то есть B_k *равно числу положительных целых решений уравнения* (4)! Задача Эйлера свелась к вычислению B_k.

Для этого, вспомнив формулу геометрической прогрессии, можно написать

$$\beta(z)=(1-z)^{-m}= \\ =1+B_1z+B_2z^2+B_3z^3+\ldots \quad (7)$$

Дифференцируя это равенство

$$m(1-z)^{-m-1}=B_1+2B_2z+3B_3z^2+\ldots$$

и подставляя $z=0$, получаем $B_1=m$. Дифференцируя еще раз и вновь подставляя $z=0$, получаем $B_2=m(m+1)/2$. Продолжая точно так же (то есть продифференцировав (7) k раз и подставив $z=0$), мы получаем, следуя Эйлеру, число решений уравнения (4) в виде

$$\boxed{B_k=\frac{m(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+k-1)}{n!}}$$

Задача о размене

Сколькими способами можно разменять рубль монетами достоинством 1, 2, 3, 5, 10 копеек? Эту задачу можно сформулировать иначе: сколько неотрицательных целых решений имеет уравнение

$$x_1+2x_2+3x_3+5x_4+10x_6=100?$$

В более общем виде «задачу о размене» ставят так: *сколько неотрицательных целых решений имеет уравнение*

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_mx_m=n, \quad (8)$$

если a_i — целые положительные числа, а n — фиксированное натуральное число?

Рассмотрим выражение

$$\gamma(z)=(1+z^{a_1}+z^{2a_1}+z^{3a_1}+\ldots)\times \\ \times(1+z^{a_2}+z^{2a_2}+z^{3a_2}+\ldots)\times \quad (9) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times(1+z^{a_m}+z^{2a_m}+z^{3a_m}+\ldots)= \\ =1+C_1z+C_2z^2+C_3z^3+\ldots$$

Если вы поняли предыдущие рассуждения, вы сразу скажете, что *число C_n равно числу решений уравнения* (8). Но как найти C_n? Пользуясь формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии (например, $1+z^{a_1}+z^{2a_1}+\ldots=1/(1-z^{a_1})$), можно $\gamma(z)$ представить в виде

$$\gamma(z)=\frac{1}{(1-z^{a_1})(1-z^{a_2})\ldots(1-z^{a_m})},$$

но отсюда сразу не ясно, как получить C_n в общем случае. Однако уже формулы (9) достаточно, чтобы найти C_n при малых n.

Задача о четырех квадратах

Всякое ли целое число можно представить в виде суммы четырех квадратов целых чисел, а если можно, то сколькими способами? Другими словами, *сколько целых решений имеет уравнение*

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=m, \quad (10)$$

где m — данное натуральное число?

Эта задача потруднее предыдущих, хотя она сводится, как и они, к вычислению коэффициентов некоторого «бесконечного многочлена». Именно, положив

---

*) Если $|z|<1$. Но к этому мы еще вернемся.

$$\delta(z)=(1+2z+2z^4+2z^9+2z^{16}+\ldots)^4= \qquad (11)$$
$$=1+D_1z+D_2z^2+D_3z^3+\ldots,$$

легко понять, что число искомых решений уравнения (10) равно D_m. Дифференцируя m раз и подставляя $z=0$, можно найти D_m в виде

$$\boxed{D_m=\frac{1}{m!}\frac{d^m}{dz^m}(\delta(z))\Big|_{z=0}}$$

где $\frac{d^m}{dz^m}$ обозначает взятие производной m-го порядка, а символ $|_{z=0}$ означает, что всюду вместо z нужно подставить 0. Для малых m число D_m можно сосчитать по этой формуле, но в общем виде это непросто. Исходная задача по теории чисел сведена к некоторой задаче из анализа, но последнюю нужно еще решить!

Из результатов немецкого математика К. Г. Якоби (1804—1851) следует замечательная формула для $\delta(z)$

$$\delta(z)=1+8\sum_{m\neq 4k}\frac{mz^m}{1-z^m},$$

которую также получил индийский математик С. Рамануджан (1887—1920). Из нее можно вывести, что уравнение (10) всегда разрешимо, и найти число решений этого уравнения.

Обсуждение метода

Попробуем теперь понять, в чем состоит общий метод, так удивительно сработавший в разобранных задачах. В каждой из них рассматривалось некое «бесконечное выражение», содержащее букву z (бесконечное произведение двучленов — (1), конечная степень бесконечной суммы — (5) и (11), произведение бесконечных сумм — (9)). Далее это выражение записывалось в виде «бесконечного многочлена от z», то есть в виде

$$\alpha(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+\ldots$$
$$\ldots+A_nz^n+\ldots,$$

и выяснялось, что коэффициенты A_k дают ключ к решению задачи. Коэффициент A_k удавалось затем вычислить, производя разные операции над бесконечными выражениями: выполнялись арифметические действия над ними, они дифференцировались, преобразовывались по формуле геометрической прогрессии...

Естественно спросить: что представляют собой рассматриваемые нами бесконечные выражения, и законны ли те действия, которые над ними производились? Автор метода, Леонард Эйлер, видимо, не очень задумывался над этими вопросами — он оперировал с бесконечными выражениями как с конечными, для него было важно лишь получение результата. Между тем беспечное обращение с бесконечностью таит в себе опасность ошибок.

Пренеприятный пример

Рассмотрим два «бесконечных многочлена»

$$\alpha(z)=1-z+z^2-z^3+z^4-\ldots,$$
$$\beta(z)=-1+z-z^2+z^3-z^4+\ldots$$

и посчитаем бесконечную сумму

$$S(z)=\alpha(z)+\beta(z)+\alpha(z)+\beta(z)+\alpha(z)+\ldots$$

Если сгруппировать слагаемые в $S(z)$ попарно, начиная с первой пары, получим

$$S(z)=[\alpha(z)+\beta(z)]+[\alpha(z)+\beta(z)]+\ldots$$
$$\ldots=0+0+\ldots=0.$$

Но если сгруппировать иначе, можно получить

$$S(z)=\alpha(z)+[\beta(z)+\alpha(z)]+[\beta(z)+\alpha(z)]+\ldots$$
$$\ldots=\alpha(z)+0+0+\ldots=\alpha(z)!$$

А если менять порядок слагаемых, то можно прийти к еще более странному результату, например, $S(z)=17z^{17}$ (подумайте, как это можно сделать).

Наверное, наступило время дать точные определения бесконечных выражений и выяснить, какие операции над ними законны.

Формальные степенные ряды

Формальным степенным рядом называется выражение

$$\alpha(z)=a_0+a_1z+a_1z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots, \qquad (12)$$

где a_i — действительные числа (*коэффициенты* ряда (12)), а z — просто символ (*формальная переменная* ряда). Математики говорят также, что $\alpha(z)$ является *производящей функцией* для последовательности коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Не следует думать, однако, что в рассматриваемом нами общем случае $\alpha(z)$ является функцией от переменной z в обычном смысле. Когда мы говорим, что $\alpha(z)$ — производящая функция от последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, это значит лишь то, что $\alpha(z)$ является сокращенной записью формального выражения в правой части (12).

Для читателей, знакомых с понятием (обычного) степенного ряда, подчеркнем, что формальный ряд (12) может расходиться (при некоторых z или даже при всех z), но при этом равенство (12) остается законным: ведь $\alpha(z)$ обозначает не сумму ряда для данного значения z, а сам формальный ряд.

Выдающийся немецкий математик К. Вейерштрасс (1815—1897), развивший и поставивший на строгую логическую основу теорию степенных рядов, рассматривал лишь сходящиеся степенные ряды, и критиковал Эйлера за сомнительные трюки с «бесконечными многочленами». Современная алгебраическая теория формальных степенных рядов, которой мы здесь касаемся, вполне строга, однако по сути ближе к «наивному» подходу Эйлера, чем к строгой аналитической теории Вейерштрасса.

Формальные степенные ряды можно складывать и умножать. Пусть, кроме ряда $\alpha(x)$ (см. (12)), дан формальный степенной ряд

$$\beta(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\dots+b_nz^n+\dots \qquad (13)$$

Тогда *сумма* и *произведения* этих рядов определяются по естественным формулам:

$$\alpha(z)+\beta(z)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)z+\dots$$
$$\dots+(a_n+b_n)z^n+\dots,$$
$$\alpha(z)\cdot\beta(z)=a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)z+$$
$$+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)z^2+\dots \qquad (14)$$

(эти действия выполняются по правилам, аналогичным обычным правилам сложения и умножения конечных многочленов). Заметим, кстати, что обычный многочлен можно считать частным случаем формального степенного ряда — именно такого, у которого все коэффициенты, начиная с некоторого, равны нулю. При этом обычное сложение и умножение многочленов будут, конечно, совпадать с их сложением и умножением как формальных степенных рядов.

Далее, формальные степенные ряды можно дифференцировать и интегрировать. По определению

$$\frac{d}{d(z)}(\alpha(z))=(\alpha(z))'=$$
$$=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\dots+na_nz^{n-1}+\dots,$$
$$\int\alpha(z)=\int_0^z\alpha(x)\,dx=a_0z+$$
$$+\frac{a_1}{2}z^2+\frac{a_2}{3}z^3+\dots+\frac{a_n}{n+1}z^{n+1}+\dots$$

Для определенных таким образом сложения и умножения бесконечных рядов будут выполняться свойства, аналогичные свойствам чисел или многочленов. Именно, будут выполняться переместительный, сочетательный и распределительный законы.

Подобно целым числам, из любого формального ряда можно вычесть любой другой ряд и получить опять же формально степенной ряд. Деление же в области формально-степенных рядов не всегда возможно, так же как не всегда возможно деление двух целых чисел. Например, нельзя делить на «нуль», то есть нельзя делить на ряд

$$0=0+0\cdot z+0\cdot z^2+\dots+0\cdot z^n+\dots$$

Нельзя осуществить деление «единицы», то есть ряда

$$1=1+0\cdot z+0\cdot z^2+\dots+0\cdot z^n+\dots$$

на ряд

$$z=0+1\cdot z+0\cdot z^2+\dots+0\cdot z^n+\dots$$

Действительно, предположим, что существует ряд

$$\alpha(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots,$$

для которого $\alpha(z)\cdot z=1$, или,

$$(a_0+a_1z+a_2z^2+\dots)\times$$
$$\times(0+1\cdot z+0\cdot z^2+\dots)=$$
$$=1+0\cdot z+0\cdot z^2+\dots$$

Но из формулы (14) следует тогда, что $a_0\cdot 0=1$, что безусловно невозможно.

Аналогично доказывается, что $\alpha(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$ делится на z^n тогда и только тогда, когда $a_0=a_1=a_2=\dots=a_{n-1}=0$.

Легко проверить, что 1 делится на $\alpha(z)$, если только $a_0\neq0$, причем коэффициенты получающегося ряда определяются однозначно.

Найдем, для примера, результат деления «единицы» на ряд $1-z$. Пусть

$$(1-z)(a_0+a_1z+a_2z^2+\dots)=$$
$$=1+0\cdot z+0z^2+\dots$$

Тогда, раскрывая скобки и приравнивая коэффициент при одинаковых степенях z, получаем систему равенств

$$1\cdot a_0=1,\ a_1-a_0=0,$$
$$a_2-a_1=0,\ \dots,\ a_n-a_{n-1}=0,\ \dots,$$

откуда $a_0=a_1=\dots=a_n=\dots=1$, то есть

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\dots+z^n+\dots$$

Мы уже пользовались этой формулой (см. (3) выше и сноску на с. 10) под другим названием; здесь же эта формула — верное равенство для формальных степенных рядов (и условие $|z|<1$ уже не при чем).

Бесконечные суммы и произведения

В решении задач в начале статьи использовались бесконечные произведения; не менее полезны и бесконечные суммы (в частности, формальный степенной ряд можно рассматривать как бесконечную сумму одночленов). Во избежание неприятностей, дадим необходимые определения этих понятий.

Пусть $\alpha_1(z),\alpha_2(z),\dots,\alpha_k(z),\dots$ — последовательность формальных степенных рядов (в частности — многочленов). Мы хотим определить бесконечную сумму и бесконечное произведение:

$$(\alpha_1(z))+(\alpha_2(z))+\dots+(\alpha_k(z))+\dots, \qquad (15)$$

$$(\alpha_1(z))\cdot(\alpha_2(z))\cdot\dots\cdot(\alpha_k(z))\cdot\dots \qquad (16)$$

так же, как и выше, то есть с помощью раскрытия скобок и приведения подобных членов. Однако такое определение в общем случае не годится. Действительно, если, например, в «бесконечном произведении»

$$(1+z)(1+z)\cdot\ldots\cdot(1+z)\cdot\ldots$$

мы начнем раскрывать скобки и приводить подобные, мы сразу увидим, что коэффициент, скажем, при z^2, растет и продолжает расти по мере того, как мы раскрываем скобки. Этот пример принципиально отличается от ранее разобранного произведения

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)\cdot\ldots\cdot(1+z^{2m})\cdot\ldots,$$

в котором начальные коэффициенты постепенно стабилизируются, в силу того, что в «далеких» скобках нет одночленов с формальной переменной в «низкой» степени.

Так вот, *бесконечная сумма* (15) и *бесконечное произведение* (16) определяются, только если происходит стабилизация коэффициентов при раскрытии скобок и приведении подобных членов, — как формальный степенной ряд с полученными таким образом коэффициентами.

Точное определение «стабилизации» такое: для всякого натурального d найдется натуральное число n такое, что при $n\geqslant N$ ряд $a_n(z)$ не содержит z в степенях меньших, чем d

Этим завершается наш краткий экскурс в теорию формальных степенных рядов. Мы советуем читателю прервать чтение на этом месте, вернуться к примерам в начале статьи и убедиться в том, что в них производились не сомнительные трюки с бесконечными многочленами, а вполне законные операции с формальными степенными рядами.

Производящие функции

Вдумчивый читатель, разбирая примеры в начале статьи, возможно, заметил, что успех метода связан с возможностью записать производящую функцию формального степенного ряда $\alpha(z)$ в компактном виде. Так, например, производящую функцию последовательности 1, 1, 1, ... можно записать как $1/(1-z)$, ибо

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots\qquad(17)$$

Отправляясь от этого соотношения, можно получить много других конкретных производящих функций. Например, умножив обе части (17) на z и дифференцируя, получим

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)'=1+2z+3z^2+\ldots+(n+1)z^n+\ldots\qquad(18)$$

Это значит, что функция $(z(1-z))'=1/(1-z)^2$ является производящей для последовательности 1, 2, 3, 4, ... Снова умножая на z и дифференцируя, мы получим

$$\frac{1+z}{(1-z)^3}=1+2^2z+3^2z^2+\ldots+(n+1)^2z^n+\ldots\qquad(19)$$

Мы нашли явное выражение для производящей функции последовательности 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ...

Читатели, умеющие делить многочлены «уголком», могут получить соотношение (19) иначе — именно деля многочлен $1+z$ на многочлен $1-3z+3z^2-z^3$.

Вновь отправляясь от (17), но теперь уже интегрируя, получим

$$\int_0^z\frac{dx}{1-x}=\int_0^z 1\cdot dx+\int_0^z xdx+\ldots+\int_0^z x^ndx+\ldots,$$

$$-\ln(1-z)=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots$$

Мы видим, что производящей функции последовательности 1, 1/2, 1/3, ... будет функция $-\ln(1-z)/z$.

Ограничимся этими примерами и перейдем к задачам, решаемым методом производящих функций.

Задачи

1. Докажите, что любое целое положительное число можно представить в двоичной записи единственным образом.

Указание. Сравните эту задачу с задачей о взвешивании.

2. Докажите, что любое целое положительное число можно представить в десятичной записи единственным образом.*)

Указание. Воспользуйтесь соотношением (доказав его):

$$(1+z+z^2+\ldots+z^9)\cdot(1+z^{10}+z^{20}+\ldots+z^{90})\times\\ \times(1+z^{100}+z^{200}+\ldots z^{900})\cdot\ldots=\\ =1+z+z^2+z^3+\ldots=1/(1-z)$$

3. Докажите, что любое целое положительное число можно представить в виде суммы различных целых положительных слагаемых столькими способами, сколькими способами его можно представить в виде суммы (не обязательно различных) нечетных положительных слагаемых. (Например, для числа 6 — четыре способа, именно $6=1+5=2+4=1+2+3$ и $1+5=3+3=1+1+1+3=1+1+1+1+1+1$.)

(Окончание см. на с 52)

---

*) То, что этот факт вам известен с первого класса, нельзя считать математическим обоснованием его справедливости!

Синтетические металлы — новый тип проводников

Кандидат физико-математических наук
С. Н. АРТЕМЕНКО,
доктор физико-математических наук
А. Ф. ВОЛКОВ

Что лучше всего проводит ток?

По способности проводить электрический ток все твердые тела делят на три большие группы: металлы, полупроводники и диэлектрики (или изоляторы). Сюда можно добавить и сверхпроводники — ряд металлов и их соединений, которые при очень низких температурах проводят ток без потерь энергии; их электросопротивление равно нулю.

Наилучшими проводниками электричества являются металлы. Удельное сопротивление металлов — порядка 10^{-8}—10^{-6} Ом·м. У диэлектриков удельное сопротивление больше 10^3 Ом·м. Полупроводники занимают промежуточное положение.

На рисунке 1 приведены значения удельного сопротивления некоторых металлов, полупроводников и диэлектриков. Видите, удельное сопротивление у серебра меньше, чем у тефлона, в 10^{24} (!) раз. Ни одна физическая характеристика не изменяется так сильно при переходе от вещества к веществу, как удельное сопротивление.

И диэлектрики, и полупроводники, и металлы широко используются в технике. Диэлектрики применяются, например, в качестве изоляторов. Полупроводники составляют основу современной электроники. Полупроводниковые приборы можно встретить во многих устройствах, начиная с бытовой радиоаппаратуры и кончая современными вычислительными машинами, создание которых было бы немыслимо без полупроводниковых элементов. Из металлов делают соединительные провода, а также различные электросиловые установки (генераторы тока, электромоторы, трансформаторы и т. д.).

В последнее время в технику начинают вторгаться и сверхпроводники. Основное преимущество сверхпроводников состоит в их способности проводить ток без потерь энергии. Это свойство сверхпроводников оказывается очень ценным не только при проектировании будущих линий электропередач от мощных ГЭС к потребителям, но и в тех областях, где расходы энергии сравнительно невелики. В частности — при конструировании сверхмощных (по числу выполняемых операций, а не по потребляемой мощности) ЭВМ со скоростью вычислений в сто или тысячу миллионов операций в секунду.*)

Недостаток же существующих сверхпроводников состоит в необходимости охлаждать их до очень низких температур (даже самый «высокотемпературный» сплав Nb_3Ge переходит в сверхпроводящее состояние лишь при 21,3 К). Поэтому ясно, что очень заманчивой является задача создания проводника тока, который становился бы сверхпроводником при обычных температурах или хотя бы при температуре жидкого азота, равной 77 К (жидкий азот намного дешевле жидкого гелия, его сейчас используют даже при транспортировке скоропортящихся продуктов). В этом направлении уже было сделано немало оригинальных предложений. Интересные и перспективные идеи были высказаны в 1964 го-

---

*) См. статью Л. Г. Асламазова «ЭВМ на сверхпроводниках» в «Кванте» № 11 за 1983 год.

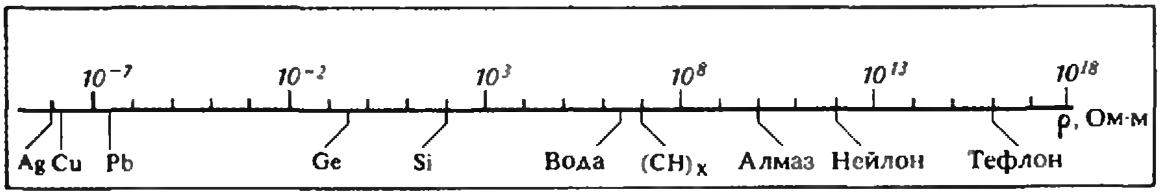


Рис. 1.

ду советским физиком-теоретиком В. Л. Гинзбургом и американским физиком У. Литтлом. Они предложили искать сверхпроводимость в специально созданных веществах, которые часто называют квазиодномерными (похожими на одномерные).

Квазиодномерные вещества

Такие вещества должны состоять из длинных проводящих цепочек атомов, окруженных молекулами непроводящего материала. Тогда свободные электроны будут легко двигаться вдоль цепочки и ориентировать соответствующим образом электроны в окружающих «непроводящих» молекулах. По предсказаниям теории, такое поведение электронов (как в проводящих цепочках, так и в «непроводящих» молекулах) приводит к новому механизму сверхпроводимости, и температура $T_к$ перехода квазиодномерных веществ в сверхпроводящее состояние должна быть достаточно высокой — вплоть до комнатной.

Термин «квазиодномерный проводник» возник от того, что эти вещества хорошо проводят ток только в одном направлении — вдоль цепочек (электрон легко перемещается вдоль цепочки и плохо — в поперечных направлениях). В этом случае говорят, что проводимость вещества резко анизотропна. Такие вещества могут быть как органическими, так и неорганическими. На рисунке 2 схематически представлена структура квазиодномерного неорганического вещества трисульфида тантала — TaS_3. В органических квазиодномерных веществах атомы металла могут вообще отсутствовать, но тем не менее и там есть свободные электроны, которые легко движутся только в одном измерении — вдоль цепочек.

Вдохновляемые заманчивыми идеями получения высокотемпературной сверхпроводимости, ученые с энтузиазмом принялись за исследования квазиодномерных материалов. Были синтезированы квазиодномерные металлы. Прежде всего были измерены зависимости $R(T)$ сопротивления этих проводников от температуры. С понижением температуры сопротивление, как и должно быть в металлах, уменьшалось. Ожидалось, что при некоторой температуре $T_к$ оно упадет до нуля, то есть произойдет переход в сверхпроводящее состояние. Однако, вместо этого сопротивление при некоторой температуре начало расти. Дальнейшие исследования показали, что в веществе действительно происходит переход, но не в сверхпроводящее состояние, а в полупроводниковое или даже диэлектрическое!

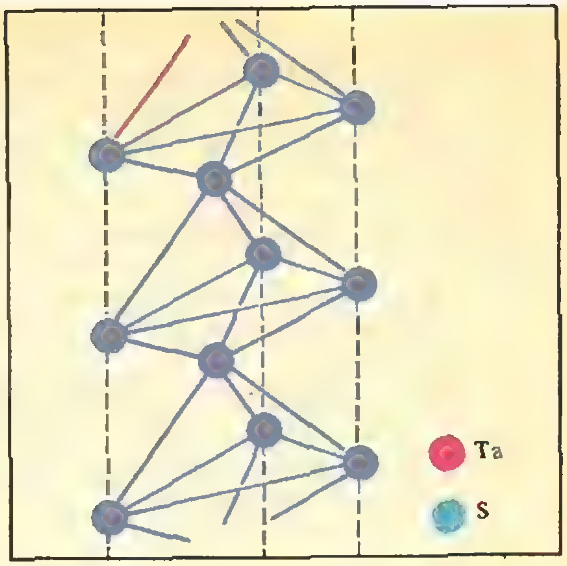


Рис. 2.

Надо сказать, что обнаруженное явление скорее несколько разочаровало физиков, чем удивило. А удивляться действительно было особенно нечему, так как еще в 1954 году английский физик-теоретик Р. Пайерлс рассмотрел устойчивость регулярного расположения атомов металла в цепочках. Оказывается, что, если при высоких температурах атомы в цепочках располагаются на одинаковом расстоянии a друг от друга (рисунок 3, *а*), то по мере охлаждения при некоторой температуре $T_п$ они начинают смещаться из положения равновесия. Смещение происходит вдоль направления цепочки, и атомы могут образовывать, например, пары (рисунок 3, *б*). При этом период l решетки удваивается — $l=2a$, а проводимость материала сильно падает. Если раньше каждый свободный электрон не принадлежал ни к какому конкретному атому и мог свободно перемещаться по кристаллу, то при удвоении периода (то есть при образовании пар атомов) два электрона пары близко расположенных атомов принадлежат именно этой паре. Такой кристалл с удвоенным периодом решетки напоминает молекулярный кристалл, который почти всегда является полупроводником или диэлектриком.

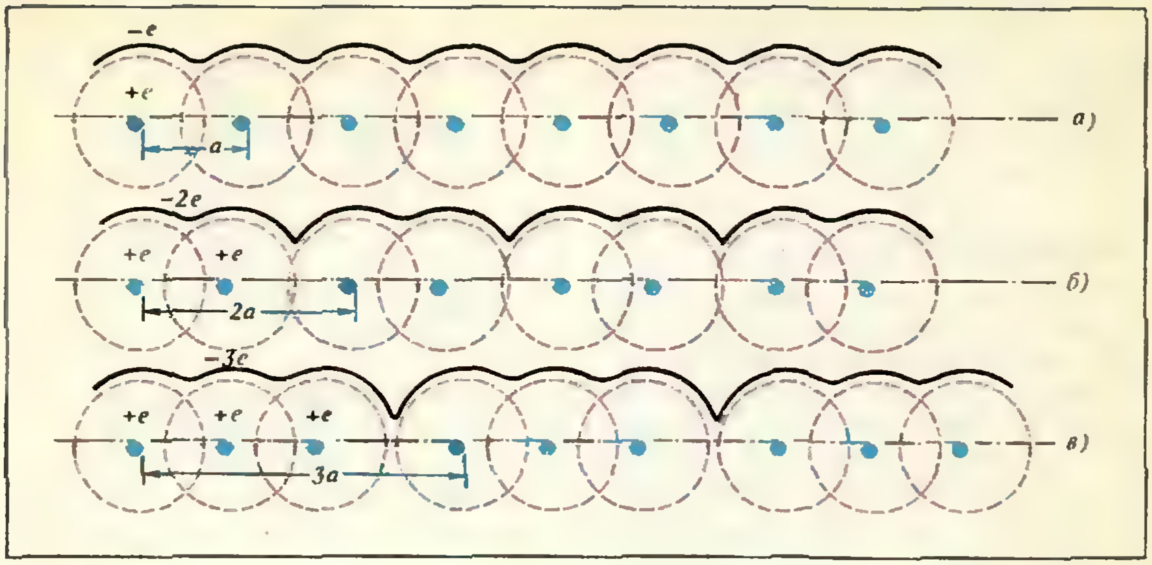


Рис. 3.

Следовательно, наблюдаемый рост сопротивления при охлаждении свидетельствует о том, что кристалл перешел из металлического состояния в полупроводниковое или диэлектрическое. Такой *переход называют пайерлсовским*, а температуру $T_п$, при которой он происходит, — температурой пайерлсовского перехода.

Удвоение — это наиболее простой случай изменения периода решетки. Чаще возникает более сложная ситуация: могут образовываться тройки атомов (утроение периода — $l=3a$; этот случай показан на рисунке 3, *в*), четверки атомов (учетверение периода — $l=4a$) и т. д. Более того, период новой искаженной решетки может быть и несоизмерим с периодом исходной, неискаженной решетки, то есть его нельзя представить в виде $l=na/m$, где n и m — целые числа.

Когда появилась работа Пайерлса, она не вызвала большого интереса у экспериментаторов. В то время предсказание Пайерлса представлялось чисто теоретическим построением, касающимся, в лучшем случае, каких-то экзотических веществ. К тому же казалось, что если бы даже и удалось наблюдать переход из металлического состояния в полупроводниковое, ничего особенно нового это не дало бы.

В последние годы положение изменилось. Во-первых, ученые хотели бы *детально изучить пайерлсовский переход*, чтобы понять нельзя ли его подавить и получить переход из металлического состояния в сверхпроводящее. Во-вторых, хотелось выяснить, какими новыми свойствами, отличающими его от обычного полупроводника или диэлектрика, обладает вещество с искаженным периодом (такое вещество часто называют *пайерлсовским проводником*). В поисках ответов на поставленные вопросы были развернуты широкие исследования во многих лабораториях мира. Были синтезированы десятки новых квазиодномерных соединений, как органических, так и неорганических. Эти соединения, полученные с помощью мощных методов химической технологии, называют также синтетическими металлами, поскольку их проводимость довольно высока. На шкале удельных сопротивлений (см. рисунок 1) синтетические металлы занимают промежуточное положение между полупроводниками и хорошими проводниками (типа меди). Исследования, проведенные с этими материалами, дали неожиданные и интересные результаты.

Каков же ответ на первый вопрос? Оказалось, что подавить пайерлсовский переход совсем не просто. А если и удается это сделать (например, с помощью введения большого числа примесных атомов, которые стабилизируют атомы металла в цепочках, не дают им смещаться), ожидаемого сверхпроводящего перехода не наблюдается. С другой стороны, довольно неожиданное поведение обнаружено у *некоторых квазиодномерных органических проводников*. При уменьшении температуры сопротивление этих веществ, которое близко по величине к сопротивлению металлов, уменьшается. При дальнейшем понижении температуры в веществе происходит переход типа пайерлсовского и сопротивление увеличивается. Но при последующем охлаждении при температуре около 1 К кристалл переходит в сверхпроводящее состояние! Ясно, конечно, что это не высокотемпературная сверхпроводимость, хотя и не совсем понятно, почему вещество из полупроводникового состояния переходит сразу в сверхпроводящее. Имеются экспериментальные данные, показывающие, что сверхпроводимость в этом веществе отличается по своим свойствам от сверхпроводимости в обычных металлах. Однако полной ясности относительно природы обнаруженной сверхпроводимости пока нет, и вопрос о ее механизме остается открытым. Исследования его продолжаются.

Новый механизм проводимости

Как же обстоит дело с ответом на второй вопрос — об отличии квазиодномерного пайерлсовского проводника от обычного полупроводника? Здесь усилия физиков были вполне вознаграждены природой. Как оказалось, такие отличия есть, и они настолько существенны, что подчас трудно решить, к какому типу веществ отнести пайерлсовские проводники: к металлам, полупроводникам или к диэлектрикам. В некоторых квазиодномерных веществах можно обнаружить черты поведения, свойственные всем трем типам. Более того, в пайерлсовских проводниках наблюдаются явления, обусловленные коллективным поведением электронов и сходные с теми, которые происходят в сверхпроводниках. Остановимся на одном из наиболее ярких отличий пайерлсовского проводника от обычных проводников и расскажем о новом механизме проводимости.

Несмотря на то, что, как мы уже говорили, проводимости металла, полупроводника и диэлектрика очень сильно различаются по величине, механизм проводимости во всех этих веществах в принципе один и тот же. Все отличие связано, главным образом, с различной концентрацией n свободных электронов (или дырок). В металлах концентрация практически не зависит от температуры и является самой большой: в кубическом сантиметре содержится примерно 10^{22} свободных электронов. В полупроводниках и диэлектриках при достаточно низких температурах свободных электронов практически нет — все электроны участвуют в образовании химических связей. С повышением температуры часть связей разрывается, и некоторые электроны становятся свободными. В полупроводниках разрыв связей происходит легче (при более низких температурах), чем в диэлектриках. Именно свободные электроны и создают ток в твердом теле при приложении к нему напряжения. Тепловые колебания атомов кристаллической решетки мешают двигаться электронам, ограничивая их среднюю скорость. Поэтому и уменьшается сопротивление металла при охлаждении — при низких температурах атомы решетки колеблются слабее, с меньшей амплитудой. В полупроводниках и диэлектриках тепловое движение, как правило, также уменьшает среднюю направленную скорость имеющихся в наличии свободных электронов. Зато само число электронов сильно зависит от температуры: оно резко возрастает с повышением температуры. При охлаждении число свободных электронов уменьшается, и сопротивление полупроводника и диэлектрика увеличивается.

Как же ведет себя пайерлсовский проводник, когда к нему приложено напряжение? В слабых электрических полях выполняется закон Ома: ток пропорционален приложенному напряжению $I=U/R$. Сопротивление R велико и увеличивается при понижении температуры, как в полупроводнике или в диэлектрике. Однако, когда напряжение U превышает некоторое поро-

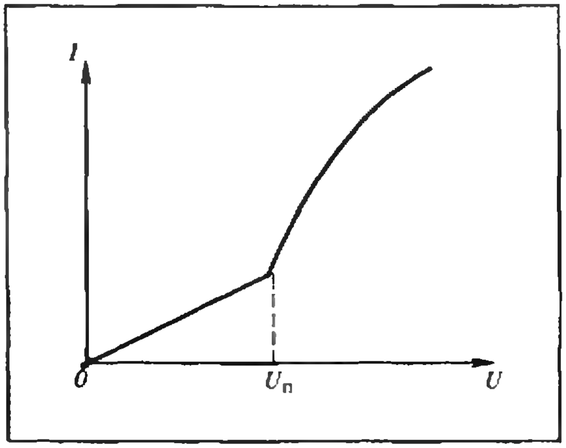


Рис 4.

говое значение $U_{\text{п}}$, ток начинает расти с увеличением U более резко, чем по линейному закону (см. рисунок 4). Вид зависимости $I(U)$ наводит на мысль, что при $U>U_{\text{п}}$ включается дополнительный механизм проводимости. Как показали всесторонние исследования, именно это и происходит. Резкий рост тока с ростом напряжения обусловлен не свободными электронами, а коллективным движением связанных электронов.

Поясним природу нового механизма проводимости, обратившись снова к рисунку 3. Рассмотрим, например, случай утроения периода (рисунок 3, *в*) и образование «молекул» из трех атомов металла. Электроны, которые до утроения периода были свободными, теперь участвуют в связывании атомов металла друг с другом и группируются вблизи соответствующих троек атомов. Распределение плотности таких электронов вдоль цепочки атомов показано на рисунке 3 черной линией. Прибегая к научной терминологии, можно сказать, что возникла электронная сверхрешетка с утроенным периодом. Отличительное свойство квазиодномерных проводников и заключается в слабом взаимодействии атомов каждой цепочки с их окружением из других цепочек. Не следует забывать, что сверхрешетка образована электронами, которые до пайерлсовского перехода (то есть при температуре выше $T_{\text{п}}$) были свободными. Поэтому довольно слабое воздействие может изменить положение каждой тройки атомов в цепочке. Такое воздействие оказывает электрическое поле $E=U/L$, возникающее при приложении к проводнику напряжения U (L — длина образца). Поле действует на электронную сверхрешетку, пытаясь сдвинуть ее. При сравнительно небольших значениях E сверхрешетка деформируется.

Если поле превышает некоторое пороговое значение $E_{\text{п}}=U_{\text{п}}/L$, то электронная сверхрешетка срывается с места и начинает двигаться как целое (коллективное движение). (Ионная решетка при этом как целое не движется, но ионы совершают колебательные движения.) Движение электронной сверхрешетки, образованной связанными электронами, и приводит к резкому увеличению тока. Интересно, что скорость электронной сверхрешетки может быть не постоянной, она может содержать изменяющуюся со временем часть. Поэтому помимо постоянного тока, на его «фоне», в образце течет переменный ток.

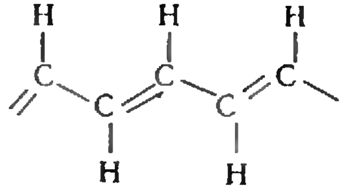
Таким образом, пайерлсовский переход и образование сверхрешетки приводят к тому, что в слабых полях вещество может быть полупроводником или диэлектриком, а в полях выше порогового, когда включается коллективный механизм проводимости, проводимость вещества становится близкой к металлической.

Подобного коллективного механизма нет в обычных типах проводников. Исключение составляют сверхпроводники, в которых наблюдается ряд явлений, до некоторой степени аналогичных явлениям в пайерлсовском проводнике. Изучение этих явлений в синтетических металлах ведется широким фронтом, и оно уже не связано с проблемой высокотемпературной сверхпроводимости, так как имеет самостоятельную научную ценность.

При каких же температурах происходит изменение периода в квазиодномерных веществах? Температура $T_{\text{п}}$ пайерлсовского перехода, как и температура $T_{\text{к}}$ сверхпроводящего перехода, зависит от вещества, но она значительно выше критической температуры сверхпроводника. Например, для трисульфида тантала TaS_3 температура $T_{\text{п}}$ составляет 215 К, для органического проводника с пугающе длинным названием тетратиофульвален-тетрацианохинодиметан (его химический символ TTF—TCNQ) $T_{\text{п}}=53$ К, а для полиацетилена $(CH)_x$ температура $T_{\text{п}}$ превышает температуру его химического разложения. Это значит, что полиацетилен находится в пайерлсовском состоянии при всех температурах, при которых он существует, в том числе и при температурах, близких к комнатной, то есть около 300 К.

Квазиодномерный проводник — полиацетилен

Надо сказать, что полиацетилен занимает несколько особое место и ему уделяется повышенное внимание в исследовании пайерлсовских проводников. В полиацетилене происходит удвоение периода, то есть период цепочки $(CH)_x$ включает в себя не одну, а две CH-группы. Это, кстати, отражает и структурная химическая формула полиацетилена



Чтобы сдвинуть электронную сверхрешетку с удвоенным периодом, требуется слишком большое электрическое поле, и поэтому движение сверхрешетки как целого не наблюдается. Однако, как выяснилось, в полиацетилене могут возникать особые нарушения в регулярности расположения пар CH-групп и окружающего их электронного облака. Такие нарушения могут сопровождаться перераспределением зарядов — в области нарушения появляется дополнительный положительный или отрицательный заряд. Раз возникнув, такое нарушение перемещается вдоль цепочки CH-групп, и при его движении переносится электрический заряд. По цепочке бежит уединенная волна — область с повышенным (относительно окружающего пространства) значением электрического поля. Подобные волны называют солитонами*). Таким образом, в полиацетилене осуществляется новый механизм протекания токов с участием солитонов.

Интересно, что количество солитонов, содержащихся в полиацетилене, может значительно изменяться при добавлении к материалу примесей (этот процесс называется легированием). А так как солитоны служат носителями тока, то при этом сильно меняется и проводимость материала. Чистый полиацетилен — диэлектрик; его удельная электропроводность порядка 10^{-6} (Ом • м)$^{-1}$. А за счет введения определенных примесей его проводимость можно увеличить в 10^{12} раз! Причем, в зависимости от примесей проводимость полиацетилена может быть как электронного, так и дырочного типа (преобладают отрицательные или положительные солитоны). Следовательно, на основе полиацетилена можно создать p—n-переход, что и было уже реализовано экспериментально. Эти качества делают полиацетилен очень привлекательным с точки зрения его применений в электронной технике. Учитывая то, что полиацетилен напоминает обычную полиэтиленовую пленку, можно представить себе перспективность использования его на практике. Из пленки полиацетилена уже изготовлены образцы солнечных батарей, имеющие меньший удельный вес и более дешевые, чем батареи на основе обычных полупроводников.

Возможно, в недалеком будущем будут построены дома, автомобили или, например, легкие самолеты, оклеенные тонкой пленкой и работающие на энергии, которая производится ею. Пока еще нет промышленных приборов, использующих новые вещества — синтетические металлы. Однако есть все основания думать, что разнообразие свойств этих материалов и возможности изменения их свойств с помощью современных методов химической технологии приведут к широкому внедрению синтетических металлов в практику и к открытию новой страницы в развитии электроники.

---

*) Солитонам была посвящена статья в ноябрьском номере «Кванта» за 1983 год.

Задачи для исследования

Вокруг задачи Сильвестра

Предлагаем читателям обдумать некоторые варианты и обобщения «задачи Сильвестра», которые указали нам *А. Белостоцкий, Н. Долбилин, И. Шарыгин, С. Шлосман.*

Напомним исходную формулировку этой классической задачи.

Если на плоскости задано $n>2$ точек, не лежащих на одной прямой, то найдется прямая, содержащая ровно две из данных n точек (короткое доказательство этого утверждения см. в «Кванте» № 5, 1981 г., или в книге Г. С. М. Кокстера *Введение в геометрию*, «Наука», М., 1966).

1°. Докажите, что при тех же условиях найдутся по крайней мере а) две, б) три прямые, содержащие ровно две из данных точек. в) Можно ли утверждать, что найдется k таких прямых, если число точек n достаточно велико, $n>n_k$? (Оценка n_k нам не известна.)

2°. На плоскости задано $n>3$ точек, не лежащих на одной окружности или на одной прямой. а) Докажите, что найдется окружность, которая содержит ровно три из данных точек. б) Оцените (как в пункте 1°) число таких окружностей.

3°. На плоскости нарисовано n прямых, среди которых нет двух параллельных и не все пересекаются в одной точке. а) Докажите, что найдется точка, в которой пересекаются ровно две прямые. б) Оцените число таких точек.

4°. Попробуйте сформулировать и доказать какие-либо аналоги «задачи Сильвестра» в пространстве.

Пьер Кюри

(к 125-летию со дня рождения)

Известный французский физик, один из основателей учения о радиоактивности, Пьер Кюри родился 15 мая 1859 года.

Не многие из ученых удостаивались того, чтобы их именем был назван новый эффект, закон, единица измерения. Имя Кюри встречается на страницах учебников физики не один раз: принцип Кюри, закон Кюри, точка Кюри и просто кюри — единица измерения радиоактивности.

Эти названия соответствуют крупнейшим открытиям ученого. Так, многие, наверное, знают, что один из способов размагнитить постоянный магнит состоит в том, чтобы его сильно нагреть. Температура, при которой происходит размагничивание, и называется точкой Кюри. Законы поведения магнитных тел при различных температурах были открыты ученым и описаны в его докторской диссертации.

Есть и еще одно открытие, которое было сделано Пьером Кюри совместно с его старшим братом Жаком. Это — открытие пьезоэлектричества. При деформации некоторых кристаллов (например, кварца) на их гранях возникают противоположные по знаку электрические заряды. Братья Кюри впервые экспериментально обнаружили этот эффект, а также и обратный ему — при помещении пьезокристалла в электрическое поле он деформируется. Сейчас это явление используется в самых разных областях науки и техники, начиная от радиотехники и кончая точными часами.

В 1895 году Пьер Кюри женился на Марии Склодовской. С этого момента начинается одиннадцатилетний период счастливой, трудной и необычайно плодотворной жизни супругов Кюри, принесший им мировую славу и трагически оборвавшийся гибелью П. Кюри в результате несчастного случая 19 апреля 1906 года.

Начиная с 1897 года научные интересы Кюри сосредоточиваются на изучении явления радиоактивности.

Исследуя радиоактивность солей урана, Мария Кюри обнаружила, что их излучение значительно сильнее, чем излучение чистого урана. Тогда она предположила, что соли содержат еще неизвестное радиоактивное вещество. Так началась работа, которая привела к открытию двух новых элементов — полония и радия.

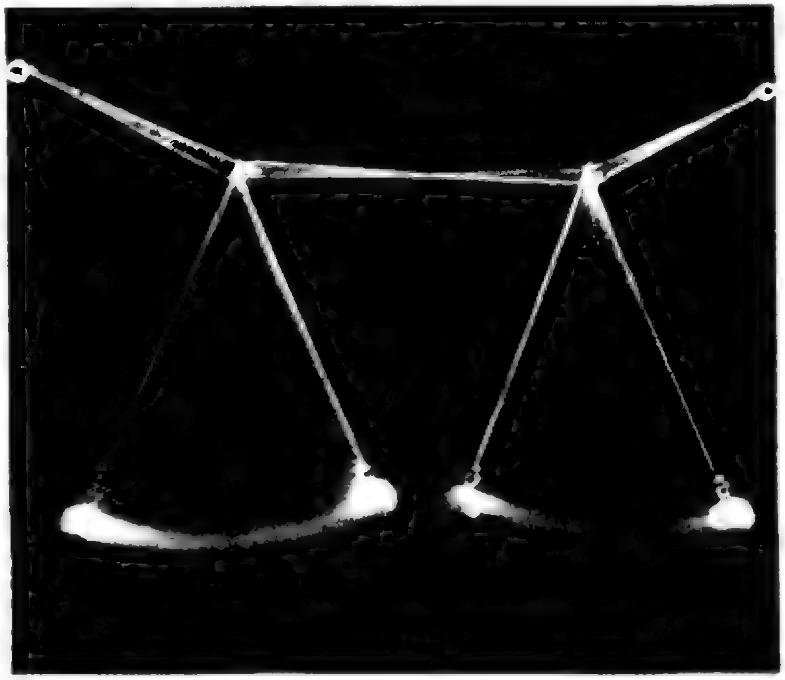
Для того чтобы выделить из восьми тонн отходов урановой руды десятую долю грамма радия, потребовалось четыре года. Основные работы проводились учеными на собственные скудные сбережения в старом деревянном сарае, без всяких приспособлений. Опыты, в которых выделялись вредные газы, приходилось делать во дворе.

Кюри могли бы стать богатыми людьми, если бы запатентовали способ получения радия, но они полностью опубликовали результаты своих исследований, не стремясь извлечь из них какую-либо материальную выгоду. Любой заинтересованный человек получал подробную информацию.

Крупнейший физик, признанный во всем мире ученый, лауреат Нобелевской премии (совместно с М. Кюри), П. Кюри не дождался того, о чем мечтал,— хорошей лаборатории для своих исследований. Когда в 1903 году его хотели наградить орденом Почетного легиона, он написал в письме: «Прошу Вас передать господину министру, что не имею никакой нужды в ордене, но весьма нуждаюсь в лаборатории».

Лучше всего о Пьере Кюри сказала его жена: «Веря лишь в мирное могущество науки и разума, он жил для искания истины».

А. А. Боровой



Связанные маятники

Кандидат физико-математических наук
Е. И. БУТИКОВ

Закономерности колебаний сложных систем таких, как связанные маятники, можно изучить на опыте с помощью простейших средств. Все, что вам потребуется для того, чтобы воспроизвести описываемые здесь опыты, — это два одинаковых небольших грузика (например, массивные гайки), два штатива, которые с успехом можно заменить спинками стульев, прочные нитки, секундомер или часы с секундной стрелкой.

Прикрепим грузики к нитям одинаковой длины 50—60 см, а нити привяжем к поперечной нити длиной около 1 м, расположив их симметрично на расстоянии 40—50 см друг от друга. Концы поперечной нити закрепим в штативах или привяжем к спинкам стульев. В результате получим систему из двух маятников, примерно такую, как показано на фотографии. Это и есть *связанные маятники*. Желательно добиться возможно более совершенной симметрии системы. Нужно позаботиться также и о том, чтобы можно было изменять расстояние между штативами, регулируя, тем самым, провисание поперечной нити.

Несмотря на простоту, это устройство дает возможность провести много интересных наблюдений. Ограничимся изучением лишь свободных (или собственных) колебаний системы в случае, когда маятники качаются перпендикулярно к плоскости их равновесия.

Удерживая один из маятников в положении равновесия, другой отклоним на небольшой угол в поперечном направлении, затем отпустим их одновременно. Будем внимательно следить за их дальнейшим поведением. Мы увидим, что амплитуда колебаний первоначально отклоненного маятника постепенно уменьшается, но одновременно с этим второй маятник раскачивается все сильнее и сильнее. В какой-то момент маятники будут колебаться с одинаковыми амплитудами. Но через некоторое время первый маятник вообще остановится, «замрет» в положении равновесия, а второй раскачается настолько, что его амплитуда будет такой же, как в начальный момент у первого маятника. Колебания как бы полностью «перейдут» от одного маятника к другому.

Продолжаем наблюдать дальше. Теперь все процессы происходят в обратной последовательности: амплитуда второго маятника уменьшается, а первый раскачивается, пока не достигнет прежней амплитуды. Затем все повторяется сначала.

Такой тип движения с периодическими «замираниями» колебаний принято называть *биениями*. Проследите за несколькими циклами биений и постарайтесь определить их период, то есть время, в течение которого один из маятников совершает полный цикл от одной остановки до другой. (При этом в качестве часов можно использовать сами маятники: подсчитайте, например, сколько полных колебаний совершает маятник за один цикл биений.)

Почему колебания передаются от одного маятника к другому? Понаблюдаем за поперечной нитью, к которой они привязаны. Легко заметить, что при колебаниях маятников она не остается неподвижной: отклоняясь в сторону, один из маятников тянет ее за собой и тем самым приводит в движение точку подвеса второго маятника. Таким образом, поперечная нить осуществляет связь маятников друг с другом. Потому маятники и называются *связанными*.

Интуиция подсказывает, что маятники связаны тем сильнее, чем больше провисает нить. Проверим это на опыте. Уменьшим натяжение нити, несколько сблизив точки ее закрепления, и повторим описанный выше опыт. Мы увидим, что полный цикл передачи колебаний от одного маятника к другому и обратно сокращается. Напротив, при увеличении натяжения нити связь маятников ослабляется, и обмен колебаниями происходит медленнее. Но интересно, что и при заметно ослабленной связи маятники полностью обмениваются энергией. (Конечно, если принять во внимание постепенное затухание колебаний маятников из-за трения, то при очень слабой связи время обмена энергией может стать больше времени затухания колебаний. Колебания возбужденного маятника прекратятся прежде, чем он успеет передать заметную часть своей энергии другому маятнику. В таких условиях наличие связи маятников становится несущественным, и их можно рассматривать как независимые.)

Задумаемся над тем, почему после того как амплитуды, а значит, и энергии маятников станут одинаковыми, процесс обмена энергией не прекращается, а продолжается до тех пор, пока возбужденный маятник не передаст другому всю свою энергию. Все дело в соотношении фаз: при выравнивании амплитуд колебания раскачиваемого маятника отстают по фазе на четверть периода. В тот момент, когда «активный» маятник достигает максимального отклонения и создает наибольшее натяжение поперечной соединительной нити, «пассивный» маятник (то есть раскачиваемый) еще только проходит через положение равновесия. Скорость точки его подвеса максимальна, а действующая на нее со стороны поперечной нити сила направлена в ту же сторону, куда движется точка подвеса. Это значит, что здесь сложились наиболее благоприятные условия для продолжения передачи энергии в прежнем направлении.

Мы видели, что при рассмотренном способе возбуждения (начальное отклонение одного из маятников) возникающие колебания не являются гармоническими (хотя при слабой связи их можно считать «почти гармоническими» с медленно меняющейся амплитудой). А нельзя ли возбудить колебания таким образом, чтобы движение каждого из маятников было чисто гармоническим? Легко сообразить, что для колебаний, перпендикулярных к равновесной плоскости, существует два типа таких движений.

Во-первых, можно отклонить оба маятника на один и тот же небольшой угол в одном направлении и одновременно осторожно отпустить их без толчка. Тогда вся система будет качаться как единое целое. Попробуйте возбудить такие колебания и измерьте их частоту ω_1. Так как маятники колеблются в одинаковых фазах, зависимость смещения от времени для каждого из них выражается одной и той же гармонической функцией:

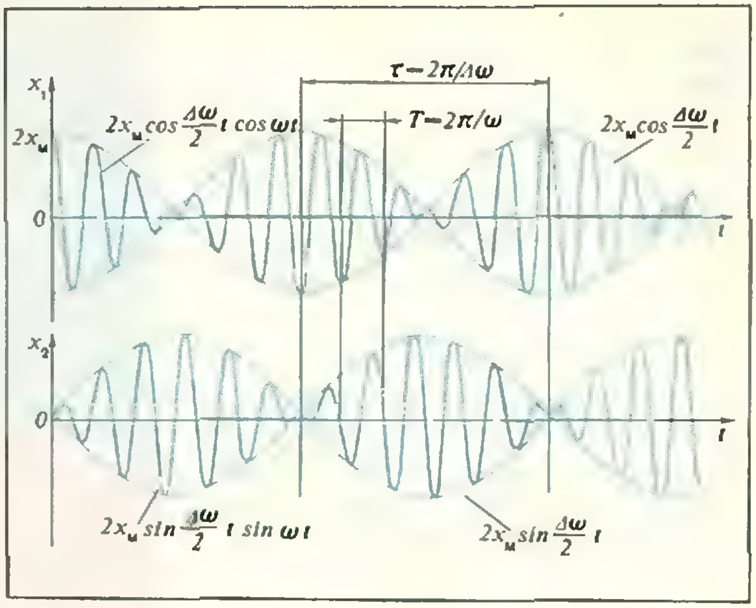
$$x_1(t)=x_2(t)=x_m\cos\omega_1 t, \qquad (1)$$

где амплитуда x_m равна начальному отклонению маятников из положения равновесия.

Во-вторых, можно отвести оба маятника на одинаковые углы в противоположные стороны и одновременно отпустить. Маятники и в этом случае будут совершать гармонические колебания с одинаковой амплитудой и одной и той же частотой ω_2 (эта частота несколько больше, чем ω_1), но в противоположных фазах. Поэтому зависимости смещения от времени имеют вид

$$x_1(t)=x_m\cos\omega_2 t, \quad x_2(t)=-x_m\cos\omega_2 t. \qquad (2)$$

Такие движения сложной системы, когда все тела совершают чисто гармонические колебания с одной и той же частотой, называют *нормальными колебаниями*, или *модами* системы. Поперечным колебаниям связанных маят-



Так выглядят графики биений двух связанных маятников. В начальный момент первый маятник отклонен на небольшой угол в направлении, перпендикулярном плоскости равновесия системы, а второй маятник находится в положении равновесия.

ников соответствуют две рассмотренные выше моды с частотами ω_1 и ω_2. Каждая мода характеризуется не только собственной частотой, но и определенным взаимным расположением (конфигурацией) маятников при колебаниях.

Какое отношение имеют моды к изученным ранее биениям? Вспомним начальные условия, при которых возбуждается каждая из них: для первой маятники нужно отклонить в одну сторону, для второй — в противоположные. Если мы захотим возбудить обе моды *одновременно*, то как раз и получим начальные условия, соответствующие возбуждению *биений*: один маятник отклонен, второй находится в положении равновесия. Таким образом, мы приходим к выводу, что биения получаются в результате суперпозиции нормальных колебаний с частотами ω_1 и ω_2 и одинаковыми амплитудами.

Смещение каждого маятника в любой момент времени t мы получим, сложив соответствующие выражения из формул (1) и (2) и воспользовавшись известными тригонометрическими тождествами:

$$x_1(t) = x_m(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = \\ = 2x_m\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\cos\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t,$$

$$x_2(t) = x_m(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) = \\ = 2x_m\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\sin\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t. \qquad (3)$$

Если разность частот нормальных колебаний $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ мала по сравнению со средней частотой $\omega = (\omega_2 + \omega_1)/2$, то в правых частях формул (3) первая тригонометрическая функция изменяется медленно по сравнению со второй. Это и значит, что $x_1(t)$ и $x_2(t)$ описывают «почти гармонические» колебания с частотой ω и медленно пульсирующими амплитудами. Соответствующие графики приведены на рисунке. Мы видим, что они правильно описывают то, что наблюдалось в первом опыте.

О представлении сложного колебания в виде суммы гармонических колебаний говорят как о разложении в спектр. Спектр любого поперечного колебания маятников изучаемой системы, в том числе и биений, состоит только из двух компонент с частотами ω_1 и ω_2, так как ими исчерпывается весь набор поперечных нормальных колебаний. Все многообразие возможных свободных колебаний, возникающих при разных начальных условиях, обусловлено различными соотношениями амплитуд и фаз этих спектральных компонент. Попробуйте задать иные, чем раньше, начальные условия (например, неодинаковые начальные отклонения) и понаблюдайте за возникающими колебаниями.

С нашими связанными маятниками можно проделать еще много интересных опытов, если не ограничиваться только поперечными движениями. В этой системе есть еще три моды, соответствующие колебаниям маятников в плоскости, образуемой нитями при равновесии. Попробуйте возбудить эти моды и понаблюдайте за ними.

Инверсия

Кандидат физико-математических наук
В. М. УРОЕВ

В этой статье мы расскажем об одном замечательном геометрическом преобразовании плоскости. Это преобразование — инверсия — позволяет решать задачи, даже подступиться к которым на первый взгляд очень трудно.

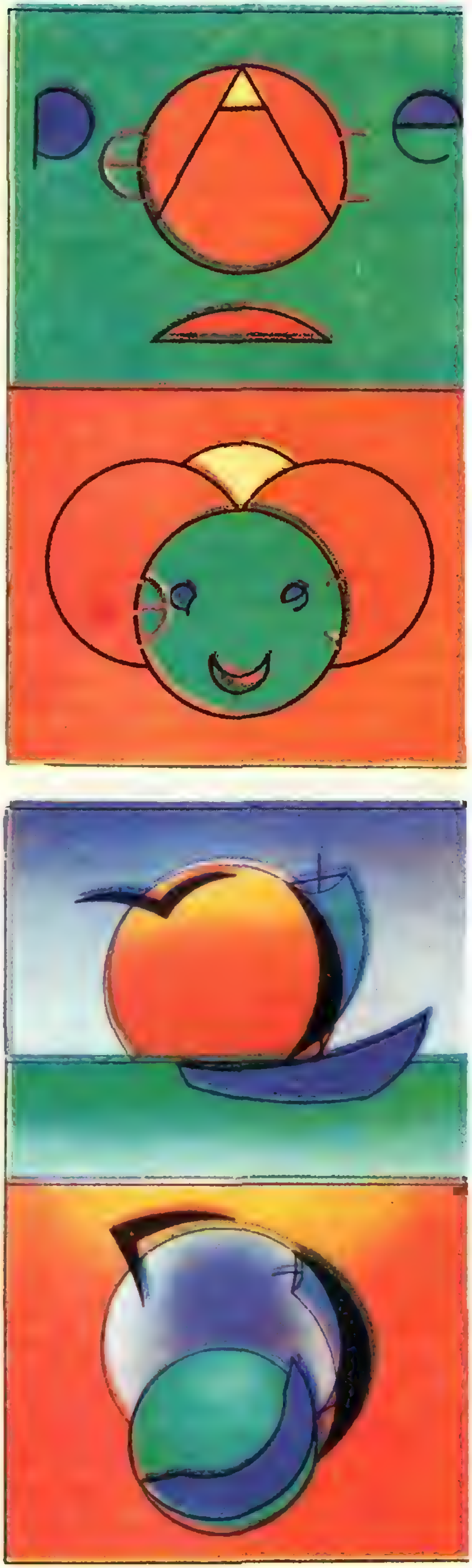
§ 1. Что такое инверсия

Предположим, на плоскости α задана окружность C радиуса R с центром O. *Инверсией* плоскости α относительно этой окружности называется отображение, при котором каждой точке A плоскости α, за исключением точки O, ставится в соответствие лежащая на луче (OA) точка A' такая, что

$$|OA'| = \frac{R^2}{|OA|}. \qquad (1)$$

Из этого определения видно, что при инверсии точки A и A' меняются местами, отображаясь друг в друга. Центр O окружности C, называемый *центром инверсии*, не имеет образа, и никакая точка при инверсии в него не попадает (рис. 1). Внутренность круга, ограниченного окружностью C, инверсия переводит во внешнюю область, поскольку из неравенства $|OA| < R$ следует, что $|OA'| > R$, и наоборот, внешняя область отображается во внутреннюю.

Точки окружности C при инверсии остаются на месте, а из того, что внутренность круга переходит во внешность, вытекает, что других неподвижных точек нет.



На этих рисунках, выполненных учащимися ФМШ при МГУ, показано, как инверсия преобразует цветные картинки. На первом рисунке окружность инверсии охватывает букву А, на втором эта окружность — край солнца.

Иногда инверсию называют *симметрией относительно окружности* (по аналогии с симметрией относительно прямой), а точки A и A' — *симметричными относительно окружности*. Как и осевая симметрия, инверсия относительно окружности C обладает интересным свойством: ее повторное выполнение возвращает точки в исходное положение. Отметим еще, что если точку A выбирать все ближе и ближе к O, то $|OA'|$ будет неограниченно возрастать. Инверсия как бы «выворачивает» внутренность круга на его внешность и, соответственно, внешность круга выворачивается» на его внутренность.

Это наблюдение наводит на мысль добавить к плоскости не принадлежащую ей «бесконечно удаленную точку» ∞ и считать, что при инверсии центр O переходит в ∞, а ∞ — в точку O.

§ 2. Свойства инверсии

Посмотрим, как преобразуются при инверсии прямые и окружности плоскости α. Непосредственно из определения следует, что прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя. При этом центр O и ∞ меняются местами. Прямая как бы «проворачивается по плоскости»: часть ее, находящаяся вне окружности вместе с «бесконечностью», переходит в диаметр окружности, а диаметр переходит в два луча, причем точка O переходит в ∞, как бы «соединяющую» эти лучи.

А что произойдет с прямой, не проходящей через центр O?

Пусть l — прямая, и D — основание перпендикуляра, опущенного из центра O на l, точка D' — образ точки D при инверсии, относительно окружности C (рис. 2)*). Пусть A — произвольная точка на прямой l, а точка D' — ее образ при инверсии. Из $|OA'|\times$ $\times|OA|=|OD'|\cdot|OD|=R^2$ следует, что $\frac{|OA'|}{|OD|}=\frac{|OD'|}{|OA|}$. Поэтому треугольники $A'OD'$ и AOD подобны, поскольку угол AOD у них общий, а стороны, между которыми заключен этот угол, пропорциональны. Это означает, что $\widehat{OA'D'}=\widehat{ODA}=90°$, так что точка A' лежит на окружности, построенной на $[OD']$ как на диаметре.

Итак, *прямая, не проходящая через центр инверсии O, переходит в окружность, проходящую через точку O*. Верно и обратное утверждение: *всякая окружность, проходящая через центр инверсии O; переходит в прямую, не проходящую через точку O*.

Упражнение 1. Докажите это утверждение.

Теперь выясним, что происходит с окружностями, не проходящими через центр инверсии. Пусть сначала точка O лежит вне данной окружности S с центром Q.

Проведем луч OQ и рассмотрим диаметр ED (см. рис. 3)*). Пусть D' и E' — точки, симметричные точкам D и E относительно C, а A' — образ произвольной точки A окружности S.

Упражнение 2. Докажите, что $\triangle OA'D'\sim$ $\sim\triangle OAD$, а $\triangle OA'E'\sim\triangle OAE$.

Отсюда следует, что $\widehat{D'A'E'}=$ $=\widehat{OEA}-\widehat{ODA}=\widehat{EAD}=90°$. Итак, отрезок $D'E'$ виден из каждой точки A' под прямым углом, а это и значит, что образом окружности S является окружность S', построенная на $D'E'$ как на диаметре.

Упражнение 3. Докажите, что утверждение остается в силе, если центр инверсии лежит внутри окружности S.

Для доказательства достаточно аккуратно построить чертеж и провести почти дословно рассуждения из упражнения 2.

Объединяя результаты упражнений 2 и 3, мы видим, что *образом всякой*

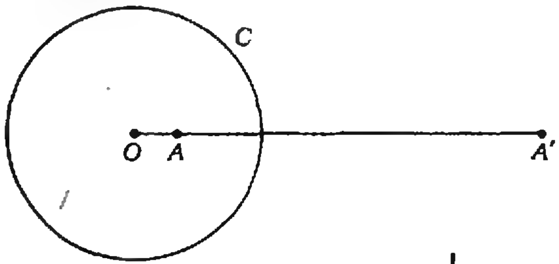


Рис. 1.

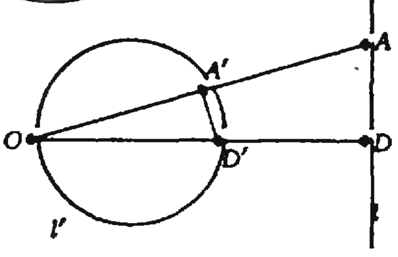


Рис. 2.

---

*) На рисунке 2 окружности C нет. Но это и не нужно: наши рассуждения, связанные с подобием, никак не зависят от чертежа

*) На рисунке 3 сама окружность инверсии не изображена.

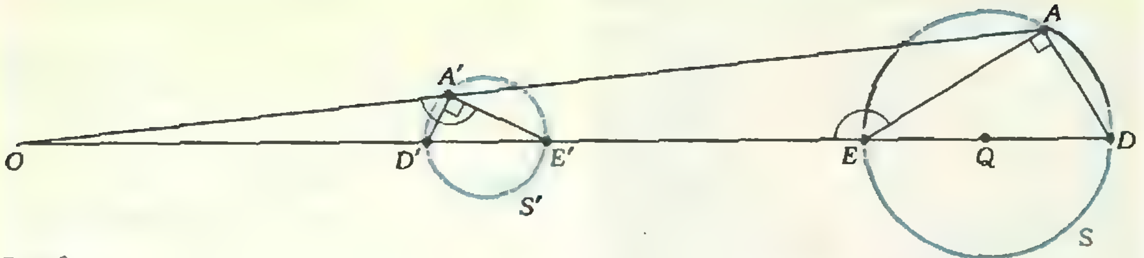


Рис. 3.

окружности, не проходящей через центр инверсии, является окружность, также не проходящая через центр инверсии.

Если рассматривать прямую линию как окружность бесконечного радиуса, содержащую бесконечно удаленную точку, то круговое свойство инверсии можно сформулировать так.

Инверсия отображает совокупность прямых линий и окружностей на себя, причем окружности, проходящие через центр инверсии и окружности, содержащие бесконечно удаленную точку, переходят друг в друга.

Теперь докажем, что *инверсия сохраняет углы между окружностями и прямыми.*

Углом между окружностями называется угол между касательными к ним в точке пересечения. Углом между прямой и окружностью называется угол между прямой и касательной к этой окружности в их общей точке.

Начнем со случая нулевых углов, то есть когда окружности касаются.

Этот случай рассмотрен на рисунке 4. Если окружности S_1 и S_2 касаются в точке K и не проходят через центр инверсии, то их образы — тоже окружности, имеющие единственную общую точку (рис. 4, *а*). Если центр инверсии лежит на одной из них и не совпадает с точкой касания, то другая переходит в окружность, а первая — в прямую, имеющую с ней единственную общую точку, то есть — в касательную (рис. 4, *б*). Если, наконец, центр окажется в точке касания, то обе окружности перейдут в параллельные прямые, угол между которыми можно считать равным нулю (рис. 4, *в*).

Доказательство общей теоремы вы получите, решив следующие упражнения.

Упражнения

4. Докажите, что при инверсии относительно окружности с центром O углы между прямыми равны углам между их образами.

Указание. Рассмотрите три возможных случая: а) прямые l_1 и l_2 проходят через O; б) прямая l_1 проходит через O, а l_2 — нет; в) обе прямые не проходят через O. Для доказательства утверждения во всех трех случаях достаточно воспользоваться уже известными вам свойствами инверсии.

5. Угол между двумя окружностями равен углу между их образами.

6. Угол между прямой и окружностью равен углу между их образами.

Указание. Проведите касательные в точках пересечения и воспользуйтесь упражнением 4.

§ 3. Решение задач с помощью инверсии

Сначала докажем одно важное свойство окружности.

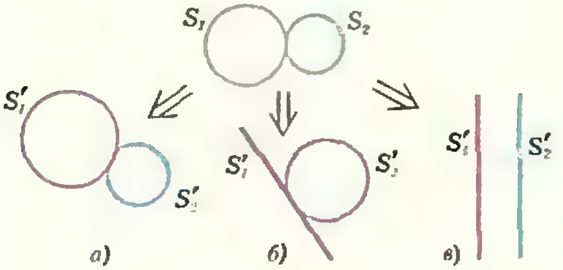
Теорема о квадрате касательной. Пусть прямая OD касается окружности T в точке D, секущая OA пересекает окружность T в точках A и B. Тогда $|OD|^2 = |OA| \cdot |OB|$ (рис. 5).

Упражнение 7. Докажите, что $\widehat{DAO} = \widehat{ODB}$.

Указание. Проведите DD' — диаметр окружности T и воспользуйтесь тем, что $\widehat{DAB} = \widehat{DD'B}$ как вписанные углы, а $\widehat{D'BD} = 90^\circ$.

Упражнение 8. Из упражнения 7 получите утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь несколько задач.



а) *б)* *в)*

Рис. 4.

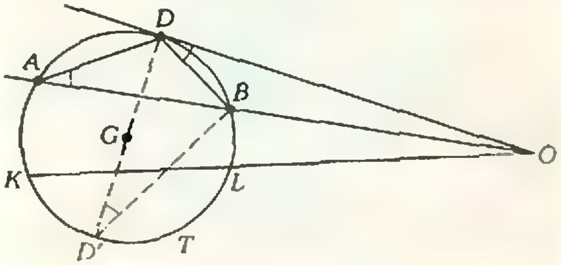


Рис. 5.

Задача 1. Если при инверсии относительно некоторой окружности C точки A и B окружности T переходят друг в друга, то окружность T переходит в себя (см. рис. 5).

Решение. Центр инверсии O должен лежать на прямой AB, которая переходит в себя, причем $OA \cdot OB = R^2$, где R — радиус окружности C. Проведем касательную OD к окружности T. По доказанной теореме $|OA| \cdot |OB| = |OD|^2$. Значит, $|OD| = R$. Проведем теперь произвольную секущую OK к окружности T. По теореме о квадрате касательной $|OK| \cdot |OL| = |OD|^2 = R^2$ и, значит, точки K и L переходят друг в друга, а поэтому окружность T переходит в себя.

Задача 2. Пусть A' и B' точки, симметричные точкам A и B относительно окружности радиуса R с центром O. Докажите, что $|A'B'| = \dfrac{R^2 \cdot |AB|}{|OA| \cdot |OB|}$.

Указание. Воспользуйтесь подобием треугольников OAB и $OA'B'$.

Задача 3. Прямые MA и MB касаются окружности C в точках A и B, точка D — середина хорды AB. Докажите, что точки D и M симметричны относительно окружности C (рис. 6).

Доказательство. $\triangle OAD \sim \triangle OAM$. Поэтому $\dfrac{|OA|}{|OM|} = \dfrac{|OD|}{|OA|}$. Отсюда сразу следует, что $|OA|^2 = R^2 = |OM| \cdot |OD|$.

Задача 4 (теорема Птолемея). Докажите, что в любом вписанном четырехугольнике $ABCD$ произведение длин диагоналей равно сумме произведений длин противоположных сторон (рис. 7):

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$

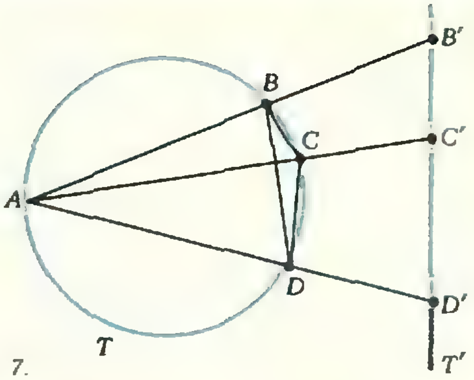


Рис. 7.

Доказательство. Выполним инверсию с центром в вершине A. Тогда описанная окружность T перейдет в прямую T', вершины B, C, D — соответственно в точки B', C', D' на прямой T'. Обозначим R — радиус описанной окружности. Обращаясь к задаче 2, получаем

$$|C'B'| = \frac{R^2 \cdot |BC|}{|AB| \cdot |AC|},$$

$$|B'D'| = \frac{|BD| \cdot R^2}{|AD| \cdot |AB|},$$

$$|C'D'| = \frac{R^2 \cdot |CD|}{|AC| \cdot |AD|}.$$

Отсюда видно, что утверждение теоремы Птолемея выражает следующий очевидный факт: $|B'D'| = |B'C'| + |C'D'|$. Действительно, подставляя в это равенство найденные значения $|C'B'|$, $|B'D'|$, $|C'D'|$ и приводя к общему знаменателю, приходим к искомому соотношению.

Задача 5. На окружности C даны две точки A и B. Рассматриваются всевозможные пары окружностей, лежащие внутри C, одна из которых касается окружности C в точке A, другая — в точке B и касающиеся друг друга, (рис. 8). Найдите множество X всех точек, в которых могут касаться друг друга две окружности такой пары.

Решение. Пусть T_1 и T_2 касающиеся окружности и D — их точка касания (см. рис. 8). Выполним инверсию с центром в точке A относительно произвольной окружности. Тогда окружности C и T_1 перейдут в парал-

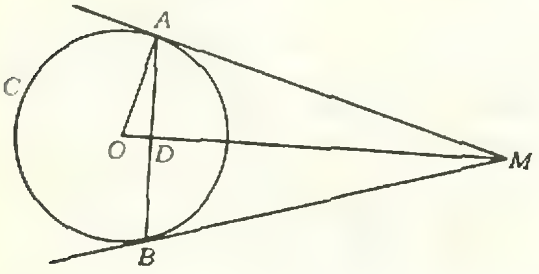


Рис. 6.

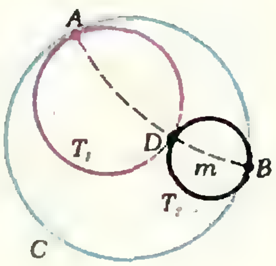


Рис. 8.

лельные прямые C' и T'_1. Окружность T_2 перейдет в окружность T'_2, касающуюся прямой T'_1 в образе D' точки D, а прямой C' — в образе B' точки B (рис. 9). Очевидно, точка D' лежит на перпендикуляре m', восставленном к C' в точке B. При другом выборе пары T_1, T_2 получится другая прямая T'_1, параллельная C', но точка D' будет по-прежнему лежать на перпендикуляре m'. Следовательно, искомое множество точек инверсия отображает на луч m'.

Очевидно, каждая точка луча m' может быть точкой касания некоторой прямой T'_1, параллельной C', и окружности T'_2, касающейся C' в точке B. Следовательно, любая точка (m') является образом некоторой точки D множества X. При повторном выполнении инверсии, сделанной вначале, все точки вернутся на прежнее место, поэтому луч m' перейдет в множество X точек касания. Следовательно, искомым множеством является лежащая внутри C дуга окружности, пересекающей C в точках A и B под прямым углом.

Задача 6 (теорема Эйлера). Пусть r и R — радиусы вписанной T_1 и описанной T_2 окружностей треугольника ABC, а d — расстояние между центрами этих окружностей. Докажите, что $\frac{1}{R+d}+\frac{1}{R-d}=\frac{1}{r}$, то есть $d^2=R^2-2Rr$.

Указание. Обозначим M, N, K — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC (рис. 10). Сделаем инверсию относительно вписанной окружности T_1. Тогда вершины A, B, C треугольника отобразятся на середины P, Q, R сторон треугольника MNK (см. задачу 3), поэтому описанная окружность T_2 перейдет в окружность T_3, описанную около треугольника PQR. Сама окружность T_1, описанная около треугольника MNK, останется на месте. Треугольники PQR и MNK подобны с коэффициентом 1/2, поэтому радиус окружности T_3 равен $1/2r$. Проведем диаметр GF окружности T_2, проходящий через центр O_1 вписанной окружности T_1. При инверсии относительно T_1 точки G, и F перейдут в точки G' и F', лежащие на концах диаметра окружности T_3, проходящего через точку O_1. Следовательно, выполняется соотношение $|O_1G'|+|O_1F'|=2\cdot r/2$, откуда $\frac{r^2}{|O_1G|}=\frac{r^2}{|O_1F|}=r$, но $|O_1G|=R+d$, $|O_1F_1|=R-d$.

В заключение этого параграфа предлагаем вам решить несколько задач.

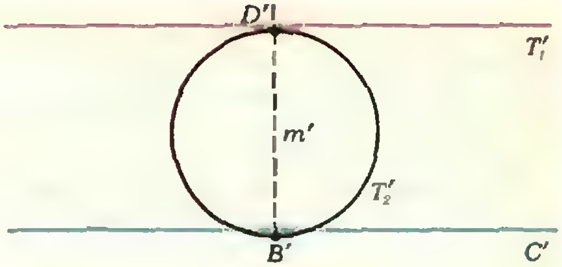


Рис. 9.

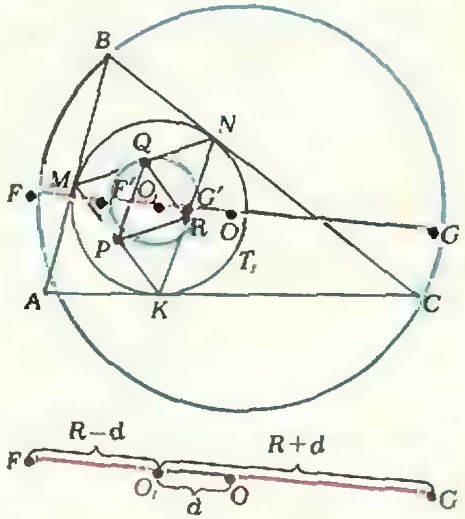


Рис. 10.

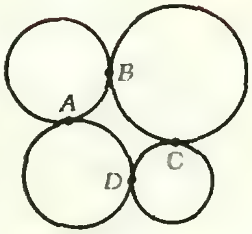


Рис. 11.

Упражнения

9. Четыре окружности касаются друг друга внешним образом, как показано на рисунке 11. Докажите, что четыре точки касания A, B, C, D лежат на одной окружности.

10. На отрезке AB отмечена точка M и на отрезках AB и AM как на диаметрах построены полуокружности C_1 и C_2. Окружность C_3 касается полуокружностей C_1, C_2 и перпендикуляра m, восставленного к (AB) в точке M (рис. 12). Докажите, что общая касательная к окружностям C_2 и C_3 проходит через точку B.

11. На отрезке AB отмечена точка M и на отрезках AB, AM и MB как на диаметрах построены полуокружности C_1, C_2 и C_3 соответственно. Пусть точка O — центр окружности T, касающейся полуокружностей C_1, C_2, C_3 (рис. 13). Найдите расстояние от точки O до прямой AB, если радиус окружности T равен r.

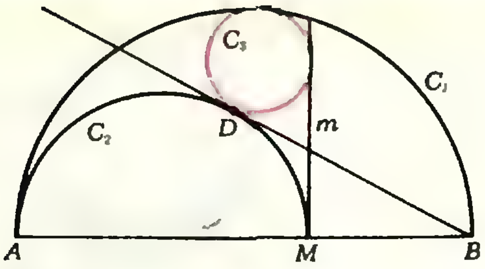


Рис. 12.

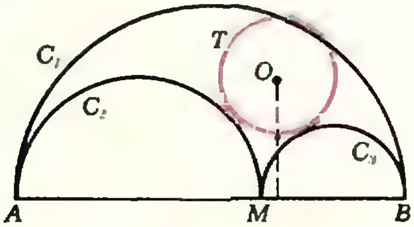


Рис. 13.

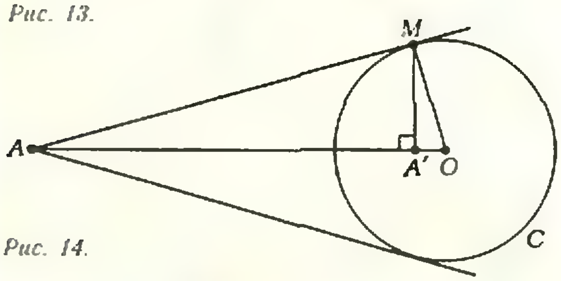


Рис. 14.

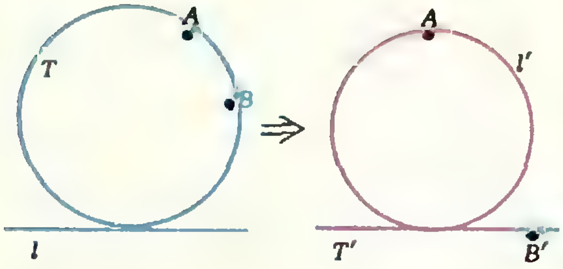


Рис. 15.

§ 4. Задачи на построение

Инверсия с большим успехом может применяться при решении задач на построение.

В основе решения всех задач лежит способ построения точки A', симметричной данной точке A относительно окружности C (см. рис. 14). Способ этот заключается в следующем (для точки A, лежащей вне окружности C). Проводим касательную AM и из точки M опускаем перпендикуляр на OA. Основание перпендикуляра — искомая точка A' (см. задачу 3 из § 3).

Упражнение 12. Придумайте построение точки A', если A лежит внутри окружности C.

Зная, как строить образы точек, мы без труда можем построить образы прямых и окружностей. Например, если требуется построить образ прямой l, не проходящей через точку O, достаточно опустить из точки O перпендикуляр OD на прямую l, построить точку D' и описать окружность на OD' как на диаметре.

Упражнение 13. А как построить образ окружности, не проходящей через точку O? Вспомните, что об этом написано в § 2.

Приведем теперь пример задачи на построение, решаемой с помощью инверсии.

Задача 7. Постройте окружность, касающуюся данной прямой l и проходящую через данные точки A и B. Сколько решений имеет эта задача?

Решение. Предположим, что искомая окружность T построена. Сделаем произвольную инверсию с центром в точке A. Прямая l перейдет при этом в некоторую окружность l', точка B — в точку B', а окружность T — в прямую T', касающуюся окружности l' (см. рис. 15).

Отсюда сразу вытекает способ построения: выполняем инверсию с центром в точке A, из точки B' проводим касательные к окружности l', выполняя еще одну инверсию с центром в точке A, получаем требуемое. Всего будет, вообще говоря, два решения. (А одно решение может получиться?)

Упражнения

14. Постройте окружность, проходящую через данные две точки A и B и касающуюся данной окружности L. Сколько решений имеет эта задача?

15. Постройте окружность, касающуюся данной окружности S в точке A и а) данной прямой l; б) данной окружности T.

16 (задача Аполлония). Постройте окружность, касающуюся трех данных окружностей. Об этой знаменитой задаче см. статью А. П. Савина «Инверсия и задача Аполлония» («Квант», 1971, № 8, с. 23).

17. Проведите две окружности равных радиусов, которые касались бы друг друга в данной точке D и проходили соответственно через данные точки A и B.

§ 5. Инверсия и стереографическая проекция

Рассмотрим сферу Q, касающуюся плоскости α в точке O. Пусть точка N диаметрально противоположна точке S. Стереографической проекцией сферы Q на плоскость α называется отображение, которое каждой точке B сферы, за исключением точки N, сопоставляет точку A плоскости α, полученную в результате пересечения прямой NB с плоскостью α (рис. 16). Заметим, что любая точка A плоскости α является образом некоторой точки B сферы при стереогра-

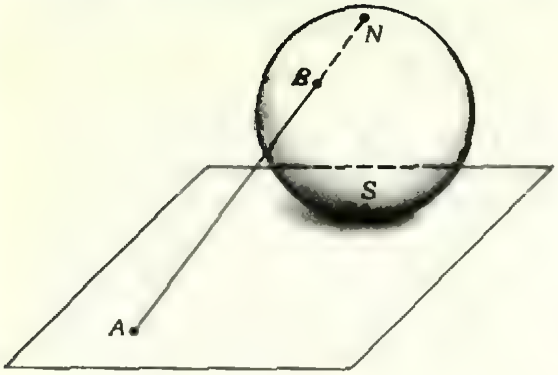


Рис. 16.

фической проекции. Точка B — есть пересечение прямой NA со сферой Q.

Покажем, как устроены на сфере множества точек, соответствующие некоторым хорошо известным линиям в плоскости α. При этом нам удобно будет пользоваться «географической» терминологией, называя сферу Q глобусом, а точки S и N — южным и северным полюсом.

Параллели, то есть окружности, проведенные на сфере «параллельно» плоскости α, отображаются на концентрические окружности с центром S. «Южный полюс» S, принадлежащий одновременно и сфере и плоскости, переходит в себя. «Северный полюс» образа не имеет.

Построим множество точек сферы, отображающееся на прямую линию l, лежащую в плоскости α. Поскольку через полюс N и прямую l можно провести единственную плоскость β, то все лучи, выходящие из точки N и осуществляющие стереографическую проекцию искомого множества *на прямую* l, лежат в плоскости β (рис. 17). Следовательно, прямая l сопоставляется множеству точек сферы, принадлежащему пересечению сферы Q с плоскостью β, т. е. окружности с выброшенной точкой N. В частности, «меридианы», проходящие через точки S и N, отображаются на лучи, выходящие из точки S. Заметим, что если точка A на плоскости α неограниченно удаляется от точки S (например, по прямой), то соответствующая ей точка B сферы приближается к полюсу N. Это соображение дает возможность вновь определить понятие бесконечно удаленной точки плоскости α как мысленный образ полюса N при стереографической проекции.

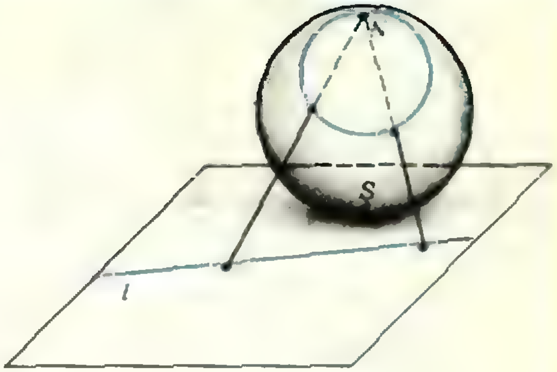


Рис. 17.

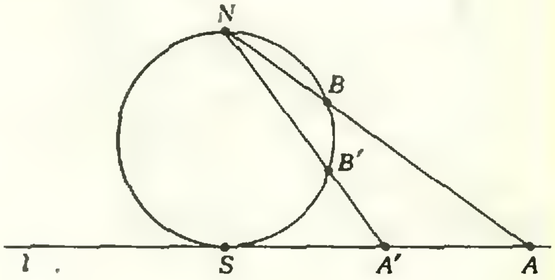


Рис. 18.

Оказывается, инверсия плоскости α с центром S относительно окружности C радиуса R непосредственно связана со стереографической проекцией сферы Q, радиуса $R/2$, касающейся плоскости α в точке S. Для этого мы предлагаем читателям самостоятельно решить следующую задачу.

Задача 8. Окружность T радиуса $R/2$ касается прямой l в точке S. Точка N — диаметрально противоположна точке S. Точки B и B' лежат на окружности T, причем $|SB| = |NB'|$. Прямые NB и NB' пересекают прямую l в точках A и A' соответственно. Доказать, что $|SA'| = R^2/|SA|$ (рис. 18).

Указание. $S\widehat{N}A = N\widehat{A'}S$, *поэтому* треугольники SNA и SNA' подобны.

Из решения задачи 8 вытекает важное утверждение:

Если точки B и B' сферы Q радиуса $R/2$ симметричны относительно экваториальной плоскости сферы Q, то их образы A и A', получающиеся при стереографической проекции сферы Q на плоскость α, симметричны относительно окружности радиуса R с центром S.

Упражнение 18. Докажите, что при стереографической проекции окружностям на плоскости α соответствуют окружности на сфере Q. И, наоборот, окружностям на сфере Q, не проходящим через полюс, соответствуют окружности на плоскости α.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Закон Бернулли» предназначена восьмиклассникам, «Токи смещения» — девятиклассникам и «Аннигиляция и рождение пар» — десятиклассникам. Материалы подготовил И. К. Белкин.

Закон Бернулли

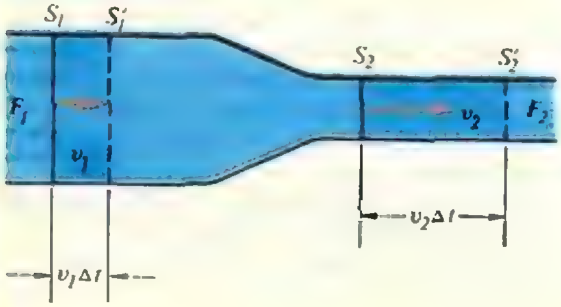
В учебнике «Физика 8» рассказывается о зависимости давления p жидкости от скорости v ее движения. Выведем формулу, связывающую эти величины количественно.

Будем считать, что труба, по которой течет жидкость, имеет широкий и узкий участки. Труба расположена горизонтально, так что потенциальная энергия жидкости в поле тяжести при течении не меняется. Выделим объем жидкости, ограниченный сечениями S_1 и S_2, где скорость жидкости равна v_1 и v_2 соответственно (см. рисунок). Этот объем при течении жидкости перемещается вправо. Через промежуток времени Δt он займет положение между сечениями S_1' и S_2', показанными на рисунке штриховыми линиями.

Так как жидкость несжимаема, уменьшение объема жидкости в широком участке трубы равно его приращению в узком участке:

$$S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t, \quad \text{или} \quad S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Но что значит — жидкость несжимаема? Когда так говорят, имеют в виду только то обстоятельство, что изменения объема жидкости относительно малы. Небольшие деформации жидкости имеются всегда, и именно они приводят к возникновению сил давления — упругих сил сжатия жидкости.



На выделенный объем жидкости действуют силы давления с двух сторон — со стороны жидкости, следующей за ним, и со стороны жидкости, находящейся впереди. При перемещении этого объема силы давления совершают работу. Согласно теореме о кинетической энергии, полная работа сил давления равна изменению кинетической энергии жидкости:

$$A = E_{k2} - E_{k1}.$$

Подсчитаем работу A сил давления. В сечении S_1 давление жидкости равно p_1, и сила давления $F_1 = p_1 S_1$. За время Δt это сечение перемещается вправо на расстояние $v_1 \Delta t$, и, следовательно, сила $\vec{F}_1$, направленная вдоль перемещения, совершает работу

$$A_1 = F_1 v_1 \Delta t = p_1 S_1 v_1 \Delta t.$$

В сечении S_2 действует сила давления $\vec{F}_2 (F_2 = p_2 S_2)$, направленная противоположно перемещению. Работа этой силы отрицательна:

$$A_2 = -F_2 v_2 \Delta t = -p_2 S_2 v_2 \Delta t.$$

Полная работа сил давления

$$A = A_1 + A_2 = (p_1 v_1 S_1 - p_2 v_2 S_2)\Delta t.$$

Вот эта работа и равна увеличению кинетической энергии жидкости.

Теперь найдем разность кинетических энергий выделенного объема жидкости до и после перемещения. Очевидно, что энергия жидкости между сечениями S_1' и S_2 не изменяется. Поэтому общее изменение энергии будет таким, как если бы часть жидкости, заключенная между сечениями S_1 и S_1', заняла место жидкости, заключенной между сечениями S_2 и S_2'.

Кинетическая энергия массы жидкости m_1, протекающей за время Δt через сечение S_1 (то есть жидкости в объеме между сечениями S_1 и S_1'), равна

$$E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \varrho v_1 \Delta t \cdot S_1 \frac{v_1^2}{2},$$

где ϱ — плотность жидкости. Для сечения S_2 кинетическая энергия соответственно равна

$$E_{k2} = \varrho v_2 \Delta t \cdot S_2 \frac{v_2^2}{2}.$$

Следовательно, за время Δt кинетическая энергия выделенного объема жидкости изменилась на величину

$$E_{k2} - E_{k1} = \left(\varrho v_2 S_2 \frac{v_2^2}{2} - \varrho v_1 S_1 \frac{v_1^2}{2}\right)\Delta t.$$

Приравняем эту разность работе A:

$$\rho v_2 S_2 \frac{v_2^2}{2} - \rho v_1 S_1 \frac{v_1^2}{2} = p_1 v_1 S_1 - p_2 v_2 S_2.$$

Так как произведение площади сечения на скорость в любом сечении трубы одно и то же, написанное равенство можно сократить на величину $S_1 v_1 = S_2 v_2$. В результате получаем

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

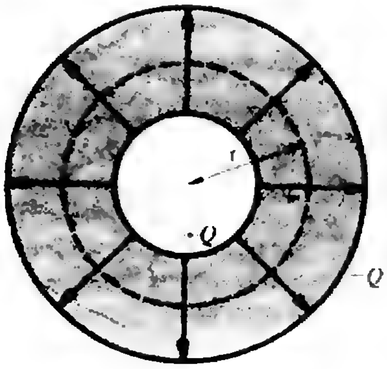
Перенесем члены, относящиеся к сечению S_1, в одну сторону, а к сечению S_2 — в другую:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Это равенство и выражает связь между давлением и скоростью жидкости. Оно называется законом Бернулли. Согласно этому закону, там, где скорость течения жидкости больше, давление меньше и наоборот. Заметим, что величина $\rho v^2/2$ — это кинетическая энергия единицы объема жидкости. Таким образом, в любом месте трубы сумма давления и кинетической энергии единицы объема жидкости одна и та же.

Токи смещения

В разделе «Школа в «Кванте» в заметке «Электрические колебания. Колебательный контур» (см. «Квант», 1983, № 11) уже говорилось о том, что причиной возникновения магнитного поля могут быть не только движущиеся электрические заряды (токи), но и переменное электрическое поле. Этот второй источник магнитного поля Максвелл назвал током смещения. Существование токов смещения относится к числу основных законов электродинамики. Поэтому рассмотрим этот вопрос подробнее. Покажем на конкретном примере, когда возникают токи смещения и какова их величина.



Представьте себе, что пространство между двумя концентрическими проводящими сферами, заряженными одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами (сферический конденсатор), заполнено проводящей средой (см. рисунок). Тогда в этой среде вдоль радиусов текут токи, и конденсатор разряжается. Как «устроено» возникающее при разрядке конденсатора магнитное поле?

В этой задаче нет никакого выделенного направления и нарисовать систему магнитных линий, удовлетворяющую условиям симметрии, не удастся. Что же это означает? Только то, что магнитное поле при разрядке сферического конденсатора вообще не возникает. Как же так — токи текут, а магнитного поля нет? Значит, есть еще один «источник», создающий магнитное поле, компенсирующее поле, создаваемое токами.

Подсчитаем силу тока, приходящуюся на единицу площади поперечного сечения, то есть плотность тока, на расстоянии r от центра сфер. Полный ток i равен скорости изменения заряда конденсатора:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Этот ток равномерно распределяется по площади сферы радиуса r; следовательно, плотность тока

$$j = \frac{i}{S} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\Delta Q}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Как при разрядке конденсатора изменяется электрическое поле? Между обкладками сферического конденсатора поле такое же, как поле точечного заряда Q, помещенного в центр сфер, поэтому на расстоянии r от центра напряженность поля определяется формулой

$$E = k\frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Тогда скорость изменения напряженности равна

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\Delta Q}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Сравним формулы (1) и (2). Как видно, плотность тока и скорость изменения электрического поля пропорциональны друг другу. Если предположить, что переменное электрическое поле, так же, как и обычный ток, создает магнитное поле, то можно объяснить отсутствие магнитного поля в конденсаторе взаимной компенсацией магнитных полей. Введем понятие плотности тока смещения, которая определяется согласно формуле

$$j_{см}=\varepsilon_0\frac{\Delta E}{\Delta t}. \qquad (3)$$

В нашем примере электрическое поле в конденсаторе убывает, и скорость изменения поля отрицательна. Это означает, что ток смещения в данном случае течет в направлении, противоположном электрическому полю, в то время как обычный ток течет по направлению электрического поля. Как видно из формул (1) — (3), плотности тока смещения и обычного тока по модулю совпадают. Следовательно, суммарная плотность токов и суммарное магнитное поле равны нулю (как и должно быть в этой задаче).

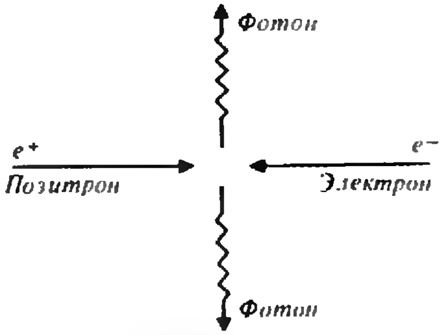
Оказывается, что формула (3) справедлива не только при разрядке сферического конденсатора, но и в самом общем случае. Индукция магнитного поля всегда определяется суммой плотности обычного тока (тока проводимости) и плотности тока смещения, связанной со скоростью изменения электрического поля формулой (3).

Аннигиляция и рождение пар

В учебнике «Физика 10» говорится о том, что при встрече позитрона с электроном эти частицы исчезают (аннигилируют), порождая взамен себя фотоны большой энергии. Возможен и обратный процесс — образование электронно-позитронной пары.

Рассмотрим эти процессы подробнее. Покажем, например, что при аннигиляции не может родиться один фотон.

Представим себе, что в какой-то системе отсчета электрон неподвижен, а позитрон налетает на него со скоростью $\vec{v}_0$. Затем перейдем в систему отсчета, движущуюся с постоянной скоростью $\vec{v}_0/2$ (переходить в любую другую инерциальную систему отсчета можно, согласно принципу относительности Галилея, о чем подробно рассказывается в учебнике «Физика 8»). В этой системе скорость позитрона равна $\vec{v}_0/2$, но и электрон уже не неподвижен — его скорость равна $-\vec{v}_0/2$. Таким образом, в выбранной нами системе отсчета обе частицы движутся с равными по модулю, но противоположно направленными скоростями. Так как масса m у электрона и позитрона одна и та же, их суммарный импульс $m\vec{v}_0/2-m\vec{v}_0/2$ равен нулю.



Теперь понятно, почему в результате аннигиляции не может родиться только один фотон. Ведь фотон — это квант света, и его скорость во всех инерциальных системах отсчета одинакова и равна c. Поэтому и в выбранной нами системе отсчета фотон тоже имел бы импульс, отличный от нуля. А значит, нарушался бы основной закон природы — закон сохранения импульса, который управляет любыми процессами, происходящими в замкнутой системе. Но все встает на свои места, если предположить, что при аннигиляции рождаются два фотона, летящие в противоположные стороны (см. рисунок). Тогда их суммарный импульс тоже равен нулю, и закон сохранения импульса не нарушается.

Воспользовавшись еще и законом сохранения энергии, можно найти частоту и длину волны соответствующего излучения. Будем считать, что скорость частиц мала по сравнению со скоростью света. Тогда основной запас их энергии — это энергия покоя, определяемая формулой Эйнштейна $E=mc^2$. Приравнивая энергию покоя частиц энергии $h\nu$ квантов излучения, получаем

$$2mc^2=2h\nu,$$

откуда

$$\nu=\frac{mc^2}{h}\approx 1{,}3\cdot 10^{20}\ \text{Гц},$$

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{h}{mc}\approx 2{,}4\cdot 10^{-12}\ \text{м},$$

что соответствует гамма-излучению.

Аналогично можно показать, что γ-квант, летящий в пустоте, не может сам по себе родить электронно-позитронную пару. Для этого нужно третье тело (например, ядро), которому можно отдать «лишний» импульс. Процесс рождения пар возможен также при столкновении двух фотонов.

Непослушные задачи

с устного экзамена по математике

В этой заметке приводится несколько простых задач, взятых из практики устных вступительных экзаменов по математике. Но пусть читатель не смотрит на них свысока и не смеется над теми, кто их решал с ошибками. На устном экзамене решать не так просто, как дома за столом: волнение, незнакомые экзаменаторы, давлеющая над абитуриентом ответственность часто приводят к торопливости, к потере необходимой рассудительности, порой к непоправимым ошибкам «на ровном месте». Чтобы их избежать, нужно подходить и легкому вопросу, заданному на устном экзамене, не менее серьезно, чем к трудному. Не бросайтесь мгновенно в вычисления — подумав немного заранее, вы сможете избежать подвоха или существенно упростить ход решения, тем самым подняв себя в глазах экзаменатора.

На устных вступительных экзаменах я люблю давать вот такую задачу: *Решите уравнение* $\sin x=\pi/3$.
Очень часто абитуриент тут же пишет

$$x=(-1)^k \arcsin\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z},$$

и в ответ на вопрос: «Так сколько же будет у него решений?» — отвечает, — «Бесконечно много». А иногда при этом продолжает предыдущее равенство так:

$$x=(-1)^k\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots, \qquad (!)$$

Сидя за столом, читатель наверное давно сообразил, что $\pi/3>1$ и поэтому данное уравнение не имеет решений. Важно проявлять подобную сообразительность и хладнокровие в экзаменационной обстановке. Надеюсь, что вам в этом помогут другие простые задачи (с небольшим подвохом) из моего экзаменационного арсенала. Советую их прорешать самостоятельно, затем просмотреть комментарий к ним и только при необходимости заглянуть в конец журнала в раздел «Ответы, указания, решения». Если ошибок будет много, тренируйтесь — в конце статьи для этого помещены дополнительные задачи.

Задачи

1. *Решите уравнение* $\sin\sqrt{x}=-1$.

2. *Решите относительно x неравенство* $ax+b\geqslant 0$.

3. *Решите систему*

$$\begin{cases}|x-y|=x+y,\\ |x+y|=x-y.\end{cases}$$

4. *Решите неравенство* $x\sin 3x>3x$.

5. *Решите неравенство*

$$\sqrt{4+3x-x^2}>-2.$$

6. *Решите относительно x неравенство*

$$\frac{x^2-2x+2^{|a|}}{x^2-1}<0.$$

7. *Что больше:* $\log_2 3$ *или* $\log_5 8$?

8. *Постройте график функции*

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n},\ x\in[0;+\infty\ ].$$

9. *На отрезке AB, как на диаметре, построен полукруг. Точки C и D делят полуокружность на три конгруэнтные части. Докажите, что площадь фигуры F, ограниченной хордами AC и AD и дугой CD, равна трети площади полукруга.*

10. *Дан четыреугольник, три угла которого тупые. Докажите, что диагональ четырехугольника, содержащая вершину его острого угла, больше другой его диагонали.*

11. *Вычислите сумму всех векторов, начало каждого из которых лежит в центре правильного n-угольника, а концы расположены в вершинах этого n-угольника.*

12. *Существует ли многогранник с 25 ребрами?*

13. *В основании треугольной пирамиды SABC лежит правильный треугольник ABC со стороной d, длины боковых ребер SA, SB, SC равны a, b, c соответственно. На боковых ребрах SA, SB и SC соответственно выбраны точки P, Q и R так, что* $|SP|:|SA|=|SQ|:|SB|=|RC|:|SC|=1:2$. *В каком отношении плоскость PQR делит объем пирамиды SABC?*

Комментарий к задачам

1. Многие абитуриенты почему-то говорят, что это уравнение решений не имеет, так как функция $y=\sqrt{x}$ отрицательных значений не принимает. Решения же легко находятся.

2. «Ответ» $x\geqslant b/a$ — неполный!

3. Многие абитуриенты долго рисуют области на плоскости Oxy и ищут их пересечения, при этом часто ошибаются. Воспользуйтесь симметрией системы.

4. Здесь снова облегчает жизнь свойство $|\sin x|\leqslant 1$.

5. Не торопитесь обе части неравенства возводить в квадрат!

6. Рассмотрите по отдельности два случая $a=0$ и $a\neq 0$.

7. Оба числа лежат на отрезке $[1, 2]$. Не на разных ли половинках?

8. Рассмотрите по отдельности три случая $x=1$, $x<1$, $x>1$.

9. Не начинайте вычислять! Не надо интегралов! Это же простая задача!

10. Эта задача решается красивым дополнительным построением.

11. Это не вычислительная задача. Можно рассуждать и от противного.

12. Пятью пять — двадцать пять. Попробуйте составить многогранник из призмы и двух пирамид.

13. Не надо считать, как это делают многие абитуриенты. Подумайте, как расположена плоскость PQR относительно плоскости ABC.

Дополнительные задачи

14. Решите уравнения: а) $|\cos x| = \cos x + 2$, б) $\cos x = x^2+1$, в) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+6x+9} = 1$, г) $\sin|x| = 1$, д) $\cos(\cos x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, е) $\sin x = \frac{|x|}{x}$, ж) $\sqrt{x+3} + \sqrt[5]{7x-6} = 3$.

15. Решите неравенство: а) $\arcsin x < \arccos x$, б) $\frac{|x+1|}{x^2-x-2} > 1$, в) (МГУ, физфак, 1967) $\frac{x^2-2x+2^{|a|}}{x^2-a^2} > 0$.

16. Постройте график функции $y = \lim\limits_{n\to\infty} \cos^{2n} x$, $x \in R$.

17. Упростите выражение

$$\frac{x^1+x^2+\ldots+x^{1983}}{x^{-1}+x^{-2}+\ldots+x^{-1983}}.$$

18. Докажите, что функция $y = \lg(x+\sqrt{x^2+1})$ является нечетной.

19. Докажите, что между любыми двумя рациональными числами найдется третье рациональное число.

20. Докажите, что сумма длин всех ребер четырехугольной призмы, лежащей внутри шара радиуса 1 см, меньше 22 см.

Г. Ю. Зайцев

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. а) Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней или граничной точки правильного треугольника до его сторон равна длине высоты этого треугольника.

б) Пусть S и p — соответственно площадь и полупериметр многоугольника, в который можно вписать окружность радиуса r. Докажите, что $S=pr$.

2. При каких p и q корнями квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ являются числа p и q?

3. Пусть D — точка, в которой биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его сторону BC, $|BC|=a$, $|AB|=c$, $|AC|=b$, $|BD|=x$, $|DC|=y$, $|AD|=l$. Докажите, что:

а) (теорема о биссектрисе) биссектриса AD делит сторону BC на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника:

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{x},$$

б) $l^2 = bc - xy$.

4. Упростите выражение

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

5. Какое из двух чисел больше:
а) 2^{300} или 3^{200}; б) 2^{91} или 5^{35}?

Девятый класс

6. В математическом кружке, где занимается восьмиклассник Миша, более 93 % участников — девятиклассники. Чему равно наименьшее возможное число членов этого кружка?

7. Сколько существует плоскостей, одинаково удаленных от всех вершин тетраэдра (произвольной треугольной пирамиды)?

8. Пусть $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, где $b>0$ и $d>0$. Докажите, что

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

9. Даны плоскость α и две точки A и B по одну сторону от этой плоскости. Укажите на плоскости α такую точку C, для которой $|AC|+|CB|$ принимает наименьшее значение.

10. Под каким углом видна парабола $y=x^2$ из точки M $(0; -0{,}25)$?

Десятый класс

11. Сумма квадратов положительных чисел a и b равна единице. Докажите, что $a^{10}+b^{10}<1$.

12. Пусть сфера радиуса r вписана в многогранник объема V с полной поверхностью S. Докажите, что $V = \frac{1}{3}Sr$.

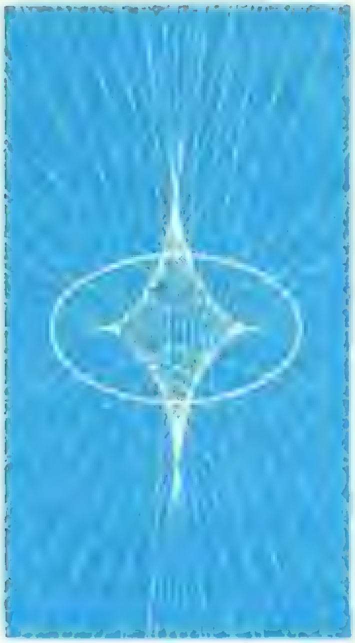
13. Пространственный четырехугольник (то есть не все его вершины лежат в одной плоскости) описан около сферы. Доказать, что все четыре точки касания лежат в одной плоскости.

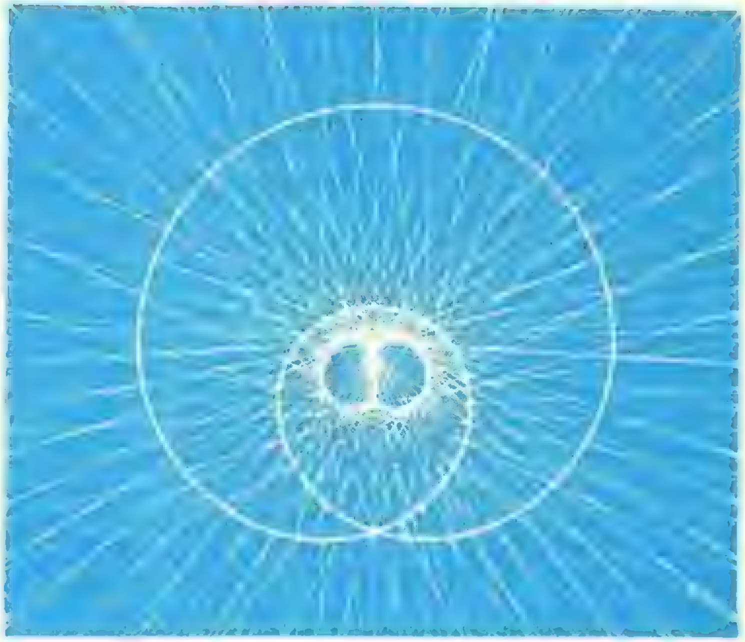
14. Известно, что осевое сечение прямого кругового конуса имеет площадь в два раза меньшую, чем максимальная из площадей всех его сечений, проходящих через вершину конуса. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

15. а) Пусть $a+b+c=1$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$.

б) Пусть $a+b+c=1$ (как и в пункте а)) и, кроме того, известно, что a, b и c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 < \frac{1}{2}$.

Публикацию подготовил
Ж. М. Раббот





Эволюта

Под редакцией
Д. Б. ФУКСА

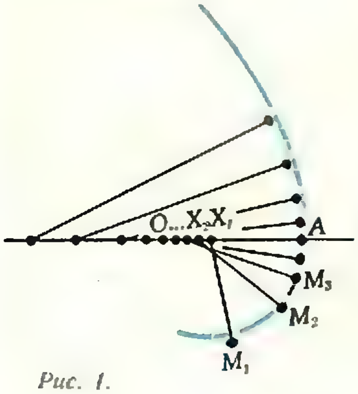


Рис. 1.

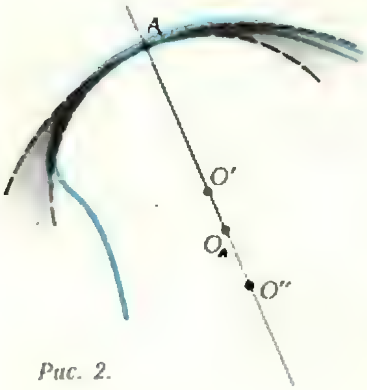


Рис. 2.

В прошлый раз (см. «Квант» № 2, с. 40) вам были предложены три кривые (эллипс, «вывернутая восьмерка» и полукубическая парабола), к которым требовалось провести достаточно частое семейство *нормалей* (нормаль — перпендикуляр к касательной в точке касания). Правильные чертежи для первых двух кривых вы видите перед собой. На каждом из этих чертежей нормали к кривой сгущаются к точкам некоторой другой кривой. Эта другая кривая называется *эволютой* исходной кривой*). В двух первых случаях эволюта имеет *точки возврата* (точки, в которых кривая скачком изменяет свое направление на 180°). Мы попытаемся понять, что такое эволюта, и разобраться в причинах всех названных явлений.

Для этого нам потребуется еще одно геометрическое понятие — *центр кривизны*. Пусть c — некоторая кривая, n_A — нормаль к ней в ее фиксированной точке A. Пусть M — переменная точка на кривой c и n_M — соответствующая нормаль. Обозначим через $X(A, M)$ точку пересечения нормалей n_A и n_M. Будем теперь двигать точку M по кривой c, устремляя ее к A (с любой стороны). Тогда точка $X(A, M)$ будет, вообще говоря, меняться; предельное положение этой точки, когда M достигнет A, если оно существует, называется *центром кривизны* кривой c в точке A и обозначается через $O_A(c)$ (рис. 1).**)

Введем еще несколько названий. Окружность с центром $O_A(c)$, проходящая через A, называется *соприкасающейся с кривой c* в точке A, ее радиус, то есть расстояние от точки $O_A(c)$ до точки A, — *радиусом кривизны кривой c в точке A*, и величина, обратная к радиусу кривизны, — *кривизной кривой c в точке A*.

Простейший пример. Пусть c есть окружность радиуса R с центром O. Тогда все нормали к c проходят через O и поэтому при движении точки по c точка $X(A, M)$ вообще не меняется, а занимает неподвижное положение O. Поэтому и предел этой точки есть O, то есть центр кривизны нашей окружности в любой ее точке совпадает с центром окружности. Следовательно, радиус кривизны и кривизна нашей окружности в любой ее точке равны соответственно R и $1/R$.

---

*) Эволюта эллипса, построенная ЭВМ, показана также на первой странице обложки. Обратите внимание на красивый муаровый узор в виде семейства гипербол вблизи центра эллипса. Подумайте, почему он получился.

**) Можно показать, что если кривая c является «достаточно гладкой», а точка A не является ее точкой перегиба, то $O_A(c)$ существует.

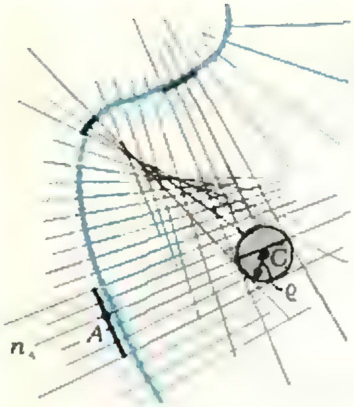


Рис. 3.

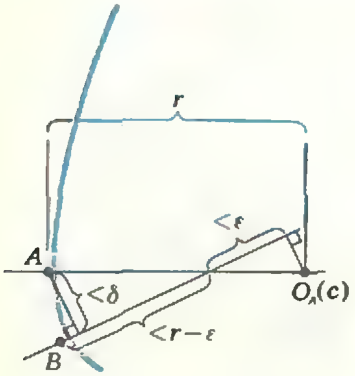


Рис. 4.

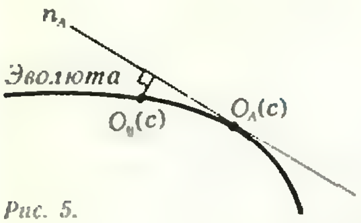


Рис. 5.

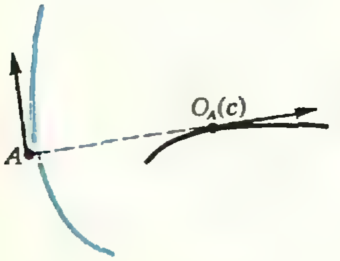


Рис. 6.

Если c не окружность, а другая кривая, то при движении точки A по ней центр кривизны $O_A(c)$ не стоит на месте, а сам вычисывает некоторую кривую. Как мы увидим, *эта кривая и есть эволюта*. Прежде, чем это доказывать, мы поговорим немного о свойствах введенных понятий.

Соприкасающаяся окружность из всех окружностей, проходящих через точку A, наиболее тесно прилегает к кривой c. Можно сказать, что если касательная к c в точке A служит для кривой c *первым приближением*, то соприкасающаяся окружность служит *вторым приближением* кривой c в точке A. Этому утверждению можно придать точный смысл многими разными способами, например, так. *Пусть точки O' и O'' лежат на n_A по разные стороны от $O_A(c)$, и пусть c', c'' — окружности с центрами O', O'', проходящие через точку A. Тогда некоторый кусок кривой c, охватывающий точку A, заключен между окружностями c' и c''* (рис. 2).

Обратимся, наконец, к нашему семейству нормалей. Пусть C — точка плоскости. Зафиксируем число ϱ и отметим на кривой c множество тех точек A, для которых нормаль n_A проходит от C на расстоянии, меньшем ϱ. Это множество состоит из одного или нескольких интервалов (рис. 3). Обозначим через $L(\varrho)$ сумму их длин. Предел отношения $L(\varrho)/\varrho$ при $\varrho \to 0$ называется *плотностью* нашего семейства нормалей в точке A. (Это определение согласуется с наглядным представлением о плотности: чем больше плотность, тем гуще нормали скапливаются к точке C.)

Теорема. *Плотность семейства нормалей в точках вида $O_A(c)$ бесконечна; в других точках она конечна.*

Мы ограничимся доказательством первой части теоремы. Поскольку предельное положение точек $X(A, B)$, когда B стремится к A, есть $O_A(c)$, для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta>0$, что если расстояние от B до A меньше δ, то расстояние от $X(A, B)$ до нормали n_B меньше ε. В этом случае расстояние от точки $O_A(c)$ до прямой n_B меньше $\varepsilon\delta(r-\varepsilon)$, где r — радиус кривизны в точке A (рис. 4), вследствие чего $L(\varepsilon\delta/(r-\varepsilon))>\delta$ и при $\varrho=\varepsilon\delta/(r-\varepsilon)$, получаем $L(\varrho)/\varrho>\delta/(\varepsilon\delta/(r-\varepsilon))=(r-\varepsilon)/\varepsilon$. Остается заметить, что можно взять $\delta<1$ и тогда при $\varepsilon\to 0$

$$\varrho=\frac{\varepsilon\delta}{r-\varepsilon}\to 0,\ \frac{L(\varrho)}{\varrho}>\frac{r-\varepsilon}{\varepsilon}\to\infty,$$

то есть плотность бесконечна.

Эта теорема показывает, что точки наибольшего сгущения нашего семейства нормалей действительно составляют эволюту.

В заключение мы назовем еще одно свойство эволюты.

Теорема. *Нормаль n_A касается эволюты в точке A.*

Эта теорема, строгого доказательства которой мы не приводим, по существу, является следствием предыдущей теоремы: поскольку семейство нормалей имеет в точках эволюты бесконечную плотность, всякая нормаль n_A проходит очень близко от точек $O_B(c)$, относительно далеких от $O_A(c)$, в том смысле, что предел отношения расстояния от $O_B(c)$ до n_A к расстоянию от $O_B(c)$ до $O_A(c)$ стремится к 0. А это и значит, что прямая n_A касается эволюты (рис. 5).

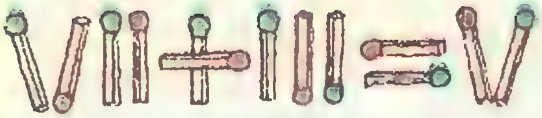
(Можно доказать и обратное: если некоторая кривая касается всех нормалей к кривой c, то она является ее эволютой.)

Из последней теоремы видно, что когда точка A движется по кривой c, точка $O_A(c)$ движется либо в направлении *от точки A*, либо в направлении *к точке A*. Можно сказать точнее: *если при движении точки A по c радиус кривизны увеличивается, то точка $O_A(c)$ движется в направлении от A, а если радиус кривизны уменьшается, то точка $O_A(c)$ движется в направлении к A* (рис. 6). А что происходит в точках, где радиус кривизны достигает максимума или минимума? А в этих точках центр кривизны меняет свое направление движения на противоположное — отсюда точки возврата на эволюте. Например, четыре точки возврата эволюты эллипса отвечают двум максимумам и двум минимумам радиуса кривизны эллипса в четырех его «вершинах» — точках пересечения с осями симметрии.

Мы не успели обсудить третью часть домашнего задания — эволюту полукубической параболы. Все к лучшему: более уместно будет поговорить об этом в следующий раз. А пока —

Задание к следующей геометрической страничке

Как построить кривую, эволютой которой является заданная кривая, например окружность?

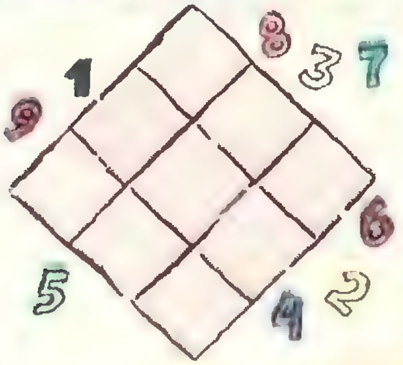


Квант для младших школьников

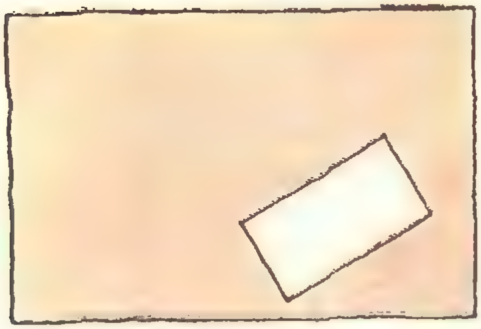
Задачи

1. В равенстве на рисунке переложите одну спичку так, чтобы оно стало верным. Попробуйте отыскать три разных способа.

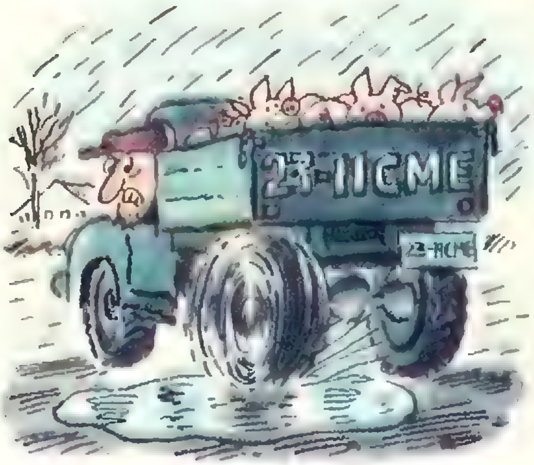
2. Умный продавец получил для продажи несколько пачек конвертов по 100 конвертов в пачке. 10 конвертов он отсчитывает за 10 секунд. За сколько секунд он отсчитает 60 конвертов? А 90 конвертов?



3. В клетках квадрата расставьте цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы пять чисел, десятичная запись которых получается на горизонтальных прямых, были бы квадратами целых чисел.

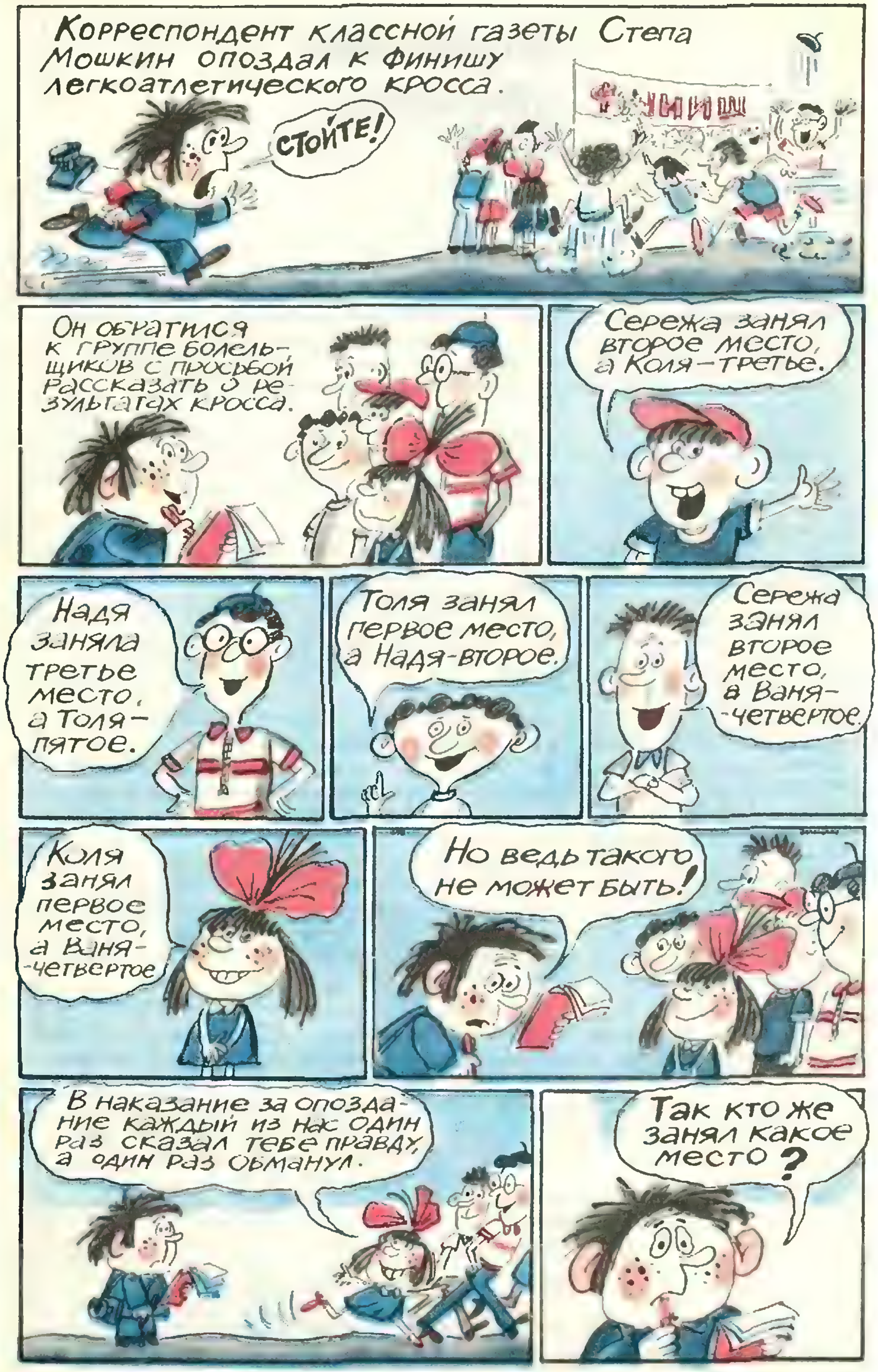


4. После того как из прямоугольника вырезали прямоугольник, образовалась фигура, изображенная на рисунке. Проведите прямую, которая делит площадь этой фигуры на две равные части.



5. Зимой можно наблюдать, как буксует автомашина: одно ведущее колесо, находящееся на льду, быстро вертится, а другое, стоящее на более шероховатой части дороги, остановлено. Если бы колеса всегда вращались с одной скоростью, машина таким образом буксовать бы не стала. Почему же тогда ведущие колеса автомобиля соединены так, что они могут вращаться с разными скоростями?

Эти задачи нам предложили:
С. В. Дворянинов, Саша Коршков (ученик 5 класса),
В. В. Произволов, А. П. Савин


Корреспондент классной газеты Степа Мошкин опоздал к финишу легкоатлетического кросса.
СТОЙТЕ!
Он обратился к группе болельщиков с просьбой рассказать о результатах кросса.
Сережа занял второе место, а Коля — третье.
Надя заняла третье место, а Толя — пятое.
Толя занял первое место, а Надя — второе.
Сережа занял второе место, а Ваня — четвертое
Коля занял первое место, а Ваня — четвертое
Но ведь такого не может быть!
В наказание за опоздание каждый из нас один раз сказал тебе правду, а один раз обманул.
Так кто же занял какое место?

Текст А. П. Савина, рисунки Э. В. Назарова

задачник Кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 июля 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5—84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М861, М862» или «Ф873». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М861—М865; Ф873—Ф877

М861. Докажите, что из любых n чисел можно выбрать несколько (быть может, одно) так, что сумма выбранных чисел отличается от ближайшего к ней целого числа не более, чем на $1/(n+1)$.

С. Ю. Оревков

М862. а) Внутри данного правильного треугольника укажите множество всех точек M таких, что расстояния от M до его сторон сами служат длинами сторон некоторого треугольника.

б) Внутри данного правильного тетраэдра укажите множество всех точек M таких, что расстояние от M до граней тетраэдра служат длинами сторон некоторого четырехугольника.

Э. А. Ясиновый

М863. В каждой клетке доски $n\times n$ стоит по фишке. Можно ли переставить их так, чтобы любые две фишки, угрожавшие друг другу ходом коня, после перестановки стали угрожать друг другу ходом короля, если а) $n=3$, б) $n=6$, в) $n=4$?

С. Стефанов

М864. Назовем «красивым» разбиение треугольника на подобные ему треугольники, никакие два из которых не равны по размерам.

а) Докажите, что для всякого прямоугольного треугольника существует красивое разбиение.

б) * Можно ли устроить красивое разбиение равностороннего треугольника?

в) Для каких неравносторонних треугольников существует красивое разбиение?

А. В. Савкин

М865. Обозначим через $[a, b]$ наименьшее общее кратное целых чисел a и b. Докажите, что для любых $n+1$ чисел $a_0<a_1<\ldots<a_n$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{[a_0, a_1]}+\frac{1}{[a_1, a_2]}+\ldots+\frac{1}{[a_{n-1}, a_n]}\leqslant 1-\frac{1}{2^n},$$

если а) $n=2$; б) $n=3$; в) * n — любое натуральное число.

Б. М. Ивлев

Ф873. Вымпел на мачте корабля образует угол 60° с курсом корабля при его скорости 20 км/ч. Не меняя курса, корабль увеличил скорость в 2 раза, и угол стал равным 30°. Найти по этим данным скорость ветра (считая ее неизменной). При какой скорости корабля угол станет равным 90°?

В. Е. Скороваров

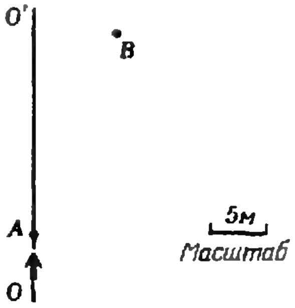


Рис 1.

Ф874. Автомобиль движется вдоль прямой OO' (рис. 1) и в точке A начинает поворачивать, не снижая скорости. В точке B автомобиль сбил придорожный столбик. Оцените скорость, с которой мог ехать автомобиль. Считайте сцепление шин с асфальтом хорошим. Руль автомобиля управляет его передними колесами.

А. Р. Зильберман

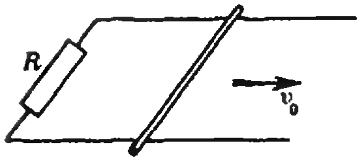


Рис 2

Ф875. По горизонтальным параллельным рельсам, расстояние между которыми равно d, может скользить без трения перемычка, масса которой равна m (рис. 2). Рельсы соединены резистором с сопротивлением R и помещены в вертикальное магнитное поле, индукция которого B. Перемычке сообщают скорость v_0. Найти путь, пройденный перемычкой до остановки. Как зависит ответ от направления вектора $\vec{B}$? от направления скорости?

А. И. Буздин

Ф876. Два спутника движутся по одной орбите на небольшом (по сравнению с радиусом R_0 Земли) расстоянии друг от друга. Расстояние это при движении периодически меняется от l_1 до l_2. Определите минимальное и максимальное удаления спутников от центра Земли, если период обращения спутников равен T.

В. Е. Скороваров

Ф877. При каких положениях точечного источника относительио тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=1$ м можно хотя бы из одной точки видеть одновременно и изображение, и источник?

А. Р. Зильберман

Problems

M861—M865; P873—P877

M861. Prove that it is always possible to choose some numbers (possibly only one) from any given n numbers so that the sum of the chosen numbers differs from the nearest integer by no more than $1/(n+1)$.

S. Yu. *Orevkov*

M862. a) Inside a given equilateral triangle indicate the set of all points M such that the distances from M to the triangle's sides are the lengths of the sides of some triangle

b) Inside a given regular tetrahedron indicate the set of all points M such that the distances from M to the tetrahedron's faces are the lengths of the sides of some quadrilateral.

E. A. Yasinovi

M863. A different pawn is placed in each case of an $n\times n$ chess board. Is it possible to rearrange them

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than July 31 st, 1984, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва. К-6, ул. Горь-

кого, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

so that any two pawns which originally attacked each other by a knight's move now attack each other by a king's move, if a) $n=3$, b) $n=6$, c) $n=4$?

S. Stephanov

M864. A partition of a triangle into smaller triangles similar to it is called nice if they are all of different size.
a) Prove that any right triangle possesses a nice partition.
b) * Is there a nice partition of the equilateral triangle?
c) For what non-equilateral triangles does a nice partition exist?

A. V. Savkin

M865. Denote by $[a, b]$ the least common multiple of the integers a and b. Prove that for any $n+1$ numbers $a_0<a_1<\ldots<a_n$ the following inequality

$$\frac{1}{[a_0, a_1]}+\frac{1}{[a_1, a_2]}+\ldots+\frac{1}{[a_{n-1}, a_n]}\leq 1-\frac{1}{2^n},$$

holds when a) $n=2$; b) $n=3$; c) * n is any natural number.

B. M. Ivlev

P873. A flag onthe mast a ship forms an angle of 60° to the ship's course when it sails at 20 km/h. Without changing course, the ship doubles it speed; the angle then becomes 30°. Use this data to find the wind's velocity (assumed constant). For what speed of the ship will the angle become equal to 90°?

V. E. Skorovarov

P874. A car, moving along the straight line OO' (see figure Рис. 1), begins to turn at the point A without decreasing its speed. At the point B the car knocked down a roadside indicator. Estimase the speed at which the car may been moving. Assume that the adherence to asphalt was good. The car's steering wheel turns the front wheels.

A. R. Zilberman

P875. A rod on mass m slides without friction along two parallel rails (at distance d from each other); see figure Рис. 2. The rails are joined by a resistor to a resistance R and placed in a vertical magnetic field of induction B. The rod is pushed with velocity v_0. Find the path covered by the rod until it stops. How does the answer depend on the direction of the vector $\vec{B}$?

A. I. Buzdin

P876. Two sputniks move along the same orbit at a small (as compared to the Earth's radius R_0) distance from each other. This distance changes periodically from l_1 to l_2. Determine the minimal and maximal distance of the two sputniks from the Earth's centre, if their period of revolution is T.

V. E. Skorovarov

P877. For what position of a point light source with respect to a thin convergent lens with focal distance $F=1$m is it possible to observe both the source and its image from at least one point?

A. R. Zilberman

Решения задач

М847—М850, Ф858—Ф861

М847. *Квадрат расчерчен на $n\times n$ клеток. Двое игроков по очереди обводят по одной стороне одной клетки (дважды обводить одну и ту же сторону нельзя). Кто выиграет при правильной игре, если*

а) побеждает игрок, первым построивший замкнутую линию;

б) проигрывает игрок, который вынужден первым построить замкнутую линию.

а) Ответ: при правильной игре всегда побеждает игрок, ходящий вторым. Для этого он должен делать ходы, симметричные ходам первого (начинающего) относительно одной из диагоналей квадрата, пока первый не построит «почти-цикл», то есть позицию, в которой достаточно обвести одну сторону, чтобы получился цикл (замкнутая ломаная). Обведя эту сторону, второй игрок выигрывает.

Нам надо доказать, что при такой стратегии первый «почти-цикл» не может возникнуть после хода второго игрока. Допустим, что, напротив, после того, как он обвел некоторую сторону a, впервые возник «почти-цикл», причем до цикла ему не достает одной стороны b; пусть x_1, ..., x_n — остальные стороны этого цикла. Эти стороны уже были обведены до последнего хода (a) второго игрока, поэтому и симметричные им относительно диагонали стороны x'_1, ..., x'_n, и также сторона a', симметричная a, были обведены до этого хода. А так как x_1, ..., x_n и a образуют «почти-цикл», x'_1, ..., x'_n и a' тоже образуют «почти-цикл» (которому до цикла не достает стороны b', симметричной b). Следовательно, «почти-цикл» возник перед последним ходом второго игрока. Противоречие.

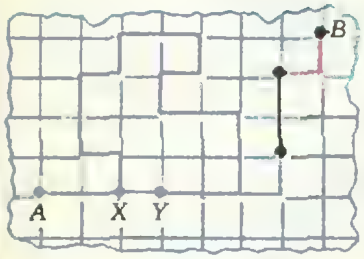
б) Ответ: при четном n выигрывает второй игрок, при нечетном — первый; точнее, первый цикл образуется ровно через $(n+1)^2$ ходов (подразумевается, конечно, что игроки ходят правильно, то есть не замыкают цикл, пока это возможно).

Действительно, рассмотрим позицию, в которой циклов еще нет, но любой новый ход создает цикл. Мы докажем следующие два утверждения:

1) любые два узла «игрового поля» в этой позиции можно соединить цепочкой из обведенных сторон; другими словами, (разветвленная) ломаная, составленная из всех обведенных сторон, проходит через все узлы и связна (из любой ее вершины можно пройти по ней в любую другую вершину);

2) любая связная ломаная без циклов с k вершинами имеет $k-1$ звеньев.

Из этих утверждений вытекает, что в рассматриваемой позиции обведено $(n+1)^2-1$ сторон, что нам и требуется.



Для доказательства первого утверждения возьмем любые два узла A и B и любую соединяющую их цепочку c из сторон клеток. Пусть в ней встретилась необведенная сторона XY (см. рисунок). Если ее обвести, возникнет цикл. Очевидно, он должен содержать звено XY, поэтому узлы X и Y уже должны быть соединены «мостиком» из обведенных сторон. Заменив каждое необведенное звено цепочки c таким «мостиком», мы получим ломаную из обведенных сторон, проходящую через A и B.

Перейдем ко второму утверждению. Если ломаная не содержит циклов, то у нее, очевидно, имеется хотя бы одна вершина X, из которой выходит только одно звено XY. В силу связности, из точки Y выходит еще хотя бы одно звено. Удалим из ломаной звено XY; вместе с ним удаляется одна вершина — X, причем ломаная остается связной. Поступая так же и дальше, мы в конце концов получим одно звено. У этой «ломаной» число вершин на 1 больше числа звеньев, поэтому то же самое верно и для исходной ломаной.

А. Г. Коган, И. В. Ветров

М848. *а) Постройте график функции*
$f_0(x)=$
$=||x-1|-2||x|-3||.$

б) На рисунке 1 изображены графики трех «кусочно-линейных» функций f_1, f_2, f_3. Запишите формулы для них в виде
$y=kx+b+c_1|x-a_1|+\ldots$
$\ldots+c_m|x-a_m|,$
где k, b, c_i, a_i — некоторые числа, m — количество точек излома графика (a_i — абсциссы точек излома, $i=1, 2, \ldots, m$).

в) Запишите в таком же виде функцию f_0 из пункта а)

г) * *Некоторая функция является комбинацией линейных функций, «модуля» и операции сложения, причем знак модуля использован в ее записи n раз (в примере а) $n=4$). Какое наибольшее число изломов (при каждом n) может иметь ее график?*

◆

а) График функций f_0 изображен красным (рис. 2). Он является ломаной с конечным числом вершин — точек излома и двумя бесконечными крайними звеньями; функции с такими графиками называются *кусочно-линейными*. Хотя построение этого графика вполне стандартно, мы остановимся на нем подробнее — это позволит сделать несколько замечаний, полезных при решении задачи г).

Пусть $f(x)=|x-1|-2||x|-3|$, тогда $f_0(x)=|f(x)|$, и потому *график f_0 получается из графика f* (черная линия на рисунке 2) *отражением его части, лежащей ниже оси абсцисс, относительно этой оси.* Ясно, что это правило построения графика $|f|$ справедливо для любой функции f. В частности, из него следует, что:

1) *если $m(f)$ — число изломов кусочно-линейной функции f, то*

$$m(|f|)\leqslant 2m(f)+1.$$

(Действительно, при переходе от f к $|f|$ новые изломы появляются там, где график функции f пересекает ось Ox, то есть не более чем по одному на каждом звене, а число звеньев на 1 больше числа изломов $m(f)$.)

Далее, функция f есть сумма функций $g(x)=|x-1|$ и $h(x)=-2||x|-3|$, поэтому она может иметь изломы только там, где есть излом хотя бы у одного из слагаемых, то есть в точках, где обращаются в нуль выражения, стоящие под модулем: $x-1$, x или $|x|-3$; это точки -3, 0, 1 и 3. Точно так же вообще

2) *для любых кусочно-линейных функций g и h*

$$m(g+h)\leqslant m(g)+m(h).$$

На каждом из промежутков $]-\infty; -3]$, $[-3; 0]$, $[0; 1]$, $[1; 3]$ и $[3; \infty[$ функции g, h и, следовательно, f линейны. «Раскрывая модули», получим, что $f(x)=-x+1$ при $x\leqslant -3$, $f(x)=-3x-5$ при $-3\leqslant x\leqslant 0$ и т. д., после чего можно построить каждое звено графика. (Впрочем, «раскрывать модули» необязательно. Для построения графика, очевидно, достаточно построить его точки

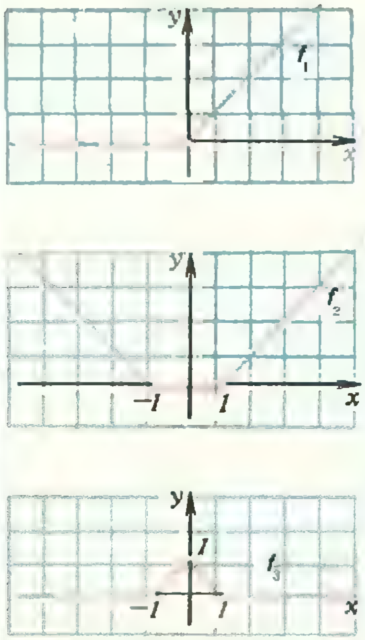


Рис. 1.

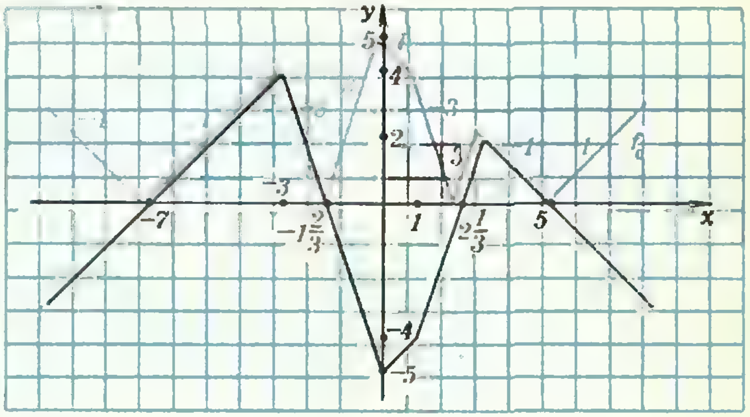
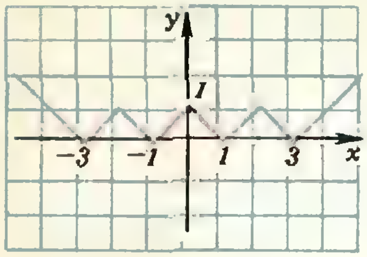


Рис. 2.



Р.

излома и по точке на бесконечных звеньях, то есть найти значения $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ и, скажем, $f(4)$ и $f(-4)$.)

б) Ответ: $f_1(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}|x|$, $f_2(x)=f_1(-x-1)+f_1(x-1)=-1+\frac{1}{2}|x+1|+\frac{1}{2}|x-1|$, $f_3(x)=1-|x|+f_2(x)=\frac{1}{2}|x+1|-|x|+\frac{1}{2}|x-1|$.

в) Ответ: $f_0(x)=-6+|x+7|-2|x+3|+3\left|x+\frac{5}{3}\right|-2|x|-|x-1|+3\left|x-\frac{7}{3}\right|-2|x-3|+|x-5|$.

Решим задачу сразу в общем виде. Пусть f — кусочно-линейная функция с изломами в точках с абсциссами $a_1, \ldots, a_m$ и пусть $k_0, k_1, \ldots, k_m$ — угловые коэффициенты звеньев ее графика на промежутках $]-\infty; a_1]$, $[a_1; a_2]$, …, $[a_m; \infty[$. Покажем что ее можно единственным образом представить в виде

$$f(x)=kx+b+c_1|x-a_1|+\ldots+c_m|x-a_m|. \qquad (1)$$

Это можно сделать, «раскрыв модули» на каждом из $m+1$ промежутков, приравняв коэффициент при x в получившемся выражении для $f(x)$ к соответствующему k_i и решив возникающую систему уравнений относительно k, c_1, …, c_m. Но можно сразу найти значения c_1, …, c_m.

Пусть $l_i(x)$ — линейная функция, совпадающая с $f(x)$ на i-м промежутке; ее угловой коэффициент равен k_i. Если функция $f(x)$ представима в виде (1), то есть $f(x)=c_i|x-a_i|+h(x)$, где $h(x)$ — линейная на промежутке $[a_{i-1}; a_{i+1}]$ функция, то на этом промежутке $l_{i-1}(x)=c_i(a_i-x)+h(x)$, $l_i(x)=c_i(x-a_i)+h(x)$, а угловой коэффициент разности $l_i(x)-l_{i-1}(x)=2c_ix$ равен k_i-k_{i-1}. Следовательно, должны выполняться равенства $c_i=(k_i-k_{i-1})/2$, $i=1, 2, \ldots, m$. Обратно, если они выполняются, то функция $c_1|x-a_1|+\ldots+c_m|x-a_m|$ имеет изломы в тех же точках, что и f, и изменение углового коэффициента при переходе через любую из этих точек для обеих функций будет одинаковым. Поэтому разность этих функций — линейная функция $kx+b$. Угловые коэффициенты левой и правой частей (1) при $x>a_m$ равны k_m и $k+c_1+\ldots+c_m=k+(k_m-k_1)/2$ соответственно, поэтому $k=(k_1+k_m)/2$. Значение b можно найти, подставляя в (1) любое конкретное значение x, например $x=0$.

Коэффициенты k_0, …, k_9 для функции f_0 выписаны над ее графиком (рис. 2). Подставляя их в полученные формулы, найдем приведенный выше ответ.

г) Ответ: Если в запись функции f, рассматриваемой в задаче, знак модуля входит n раз, то число изломов $m(f)$ её графика не превосходит 2^n-1.

Это утверждение мы докажем индукцией по n. При $n=0$ оно очевидно (у линейной функции изломов нет). Пусть оно верно, если число модулей меньше n, а в запись функции f входит n модулей. Тогда эту функцию можно представить в виде $f=|g|+h$, причем функция g записывается с n_1 модулями, а h — с n_2 модулями, где $n_1+n_2=n-1$. В силу утверждений 1) и 2) пункта а) и предположения индукции

$$m(f)\leqslant m(|g|)+m(h)\leqslant 2m(g)+1+m(h)\leqslant 2\cdot(2^{n_1}-1)+$$
$$+1+2^{n_2}-1=2^{n_1+1}+2^{n_2}-2\leqslant 2^{n_1+n_2+1}-1=2^n-1,$$

поскольку $2^{n_1+n_2+1}-2^{n_1+1}-2^{n_2}+1=(2^{n_1+1}-1)(2^{n_2}-1)\geqslant 0$.

График функции $y=|\ldots|||x|-2^{n-2}|-2^{n-3}|-\ldots-1|$ (см. рис. 3 для $n=3$) имеет ровно 2^n-1 излом (при n модулях в записи функции), поэтому оценка в задаче точная.

П. Г. Сатьянов

◆

Каждое из рассматриваемых чисел при делении на 9 дает остаток, равный остатку от деления суммы его цифр $1+2+\ldots+7=28$ на 9, то есть 1. Такой же остаток дадут при делении на 9 и седьмые степени

М849. *Из цифр 1, 2, …, 7, взятых в разном порядке, составлены семь семизначных чисел. Докажите, что сумма седьмых степеней нескольких из этих*

этих чисел. Остается заметить, что эти семь остатков-единиц нельзя разбить на две группы с равными суммами.

Г. А. Гальперин

чисел не может равняться сумме седьмых степеней остальных чисел.

◆

M850*. *Через точку пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC и отрезка, соединяющего основания двух других биссектрис, проведена прямая, параллельная стороне BC. Докажите, что длина меньшего основания образовавшейся трапеции равна полусумме длин ее боковых сторон.*

Введем следующие обозначения: a, b, c — длины сторон данного треугольника ABC, A_1, B_1, C_1 — основания его биссектрис, K — точка пересечения биссектрисы AA_1 с отрезком B_1C_1, MN — проведенный через нее параллельно стороне BC отрезок (см. рис. 1). Поскольку треугольники AMN и ABC гомотетичны, справедливы следующие соотношения:

$$|MN|:|BC|=|AK|:|AA_1|,$$

$$|BM|:|AB|=|CN|:|AC|=|A_1K|:|AA_1|.$$

Выражая отсюда $|BM|$, $|CN|$ и $|MN|$, получим

$$\frac{|BM|+|CN|}{|MN|}=\frac{(|AB|+|AC|)\cdot|A_1K|/|AA_1|}{|BC|\cdot|AK|/|AA_1|}=$$

$$=\frac{b+c}{a}\cdot\frac{|A_1K|}{|AK|}.$$

Теперь остается доказать, что $|A_1K|:|AK|=2a/(b+c)$.

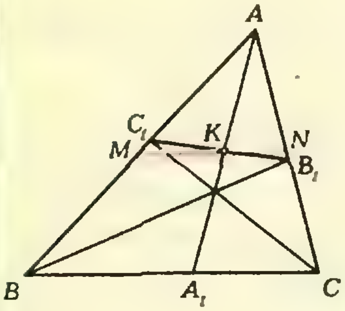


Рис. 1.

Самое короткое доказательство дает метод центров масс, о котором подробно рассказывалось в статье М. Б. Балка и В. Г. Болтянского («Квант», 1984, № 4, с. 18). Поместим в точку A массу $2a$, в точки B и C — массы b и c. (рис. 2). Центр двух масс — массы b в точке B и массы a в точке A — находится в точке C_1 (поскольку по известному свойству биссектрисы треугольника*) $|AC_1|:|C_1B|=b:a$); аналогично, центр массы c в точке C и оставшейся массы a в точке A находится в B_1. Следовательно, общий центр масс лежит на отрезке B_1C_1. С другой стороны, центр масс b и c — это точка A_1 ($|BA_1|:|A_1C|=c:b$), поэтому общий центр масс лежит на отрезке AA_1, а значит, в точке K, и делит его в отношении $|A_1K|:|KA|=2c:(a+b)$, что и требовалось доказать.

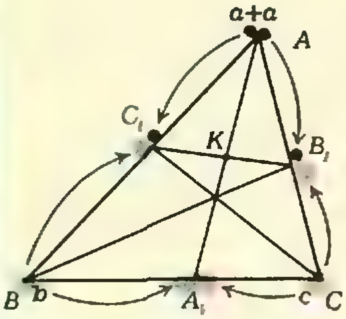


Рис. 2.

Приведем еще одно, векторное, доказательство. Выразим вектор $\overrightarrow{AA_1}$ через векторы $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ и $c=\overrightarrow{AB}$ и их длины, пользуясь свойством биссектрисы:

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{|BA_1|}{|BC|}\cdot\overrightarrow{BC}=$$

$$=\vec{c}+\frac{c}{b+c}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\frac{b\vec{c}+c\vec{b}}{b+c}.$$

Аналогично выражается вектор $\overrightarrow{AK}$ через $\vec{b}_1=\overrightarrow{AB_1}$ и $\vec{c}_1=\overrightarrow{AC_1}$ и длины этих векторов b_1 и c_1:

$$\overrightarrow{AK}=\frac{b_1\vec{c}_1+c_1\vec{b}_1}{b_1+c_1}.$$

Но $\vec{b}_1=\frac{c\vec{b}}{a+c}$, $\vec{c}_1=\frac{b\vec{c}}{a+b}$, а $\overrightarrow{AK}=k\overrightarrow{AA_1}$, где $k=|AK|:|AA_1|$.

Отсюда легко получить, что

$$\vec{AK}=\frac{b\vec{c}+c\vec{b}}{2a+b+c}=k\frac{b\vec{c}+c\vec{b}}{b+c},$$

то есть $k=(b+c)/(2a+b+c)$. Следовательно, $|A_1K|:|KA|=(1/k)-1=2a/(b+c)$.

Из решения задачи вытекает, что каждый из отрезков MK и KN вдвое короче прилежащей к нему стороны трапеции.

В. Н. Дубровский

◆

Ф858. *После удара футболиста мяч полетел в направлении ворот, находящихся на расстоянии* $L=32$ *м, со скоростью* $v=25$ *м/с под углом* α *к горизонту* ($\cos\alpha=0{,}8$). *Из-за бокового ветра, дующего вдоль ворот перпендикулярно скорости* $\vec{v}$, *горизонтальное смещение мяча в плоскости ворот оказалось равным* $s=2$ *м. Найти время полета мяча до плоскости ворот. Мяч не вращается; скорость ветра* $u=10$ *м/с.*

Рассмотрим движение мяча в системе отсчета K, движущейся со скоростью $\vec{u}$. Свяжем с K прямоугольную систему координат XYZ с началом в точке удара A такую, что плоскость XY горизонтальна, а ось X параллельна плоскости ворот P (см. рисунок).

Начальная скорость мяча в этой системе

$$\vec{v}_1=\vec{v}-\vec{u}.$$

В системе K воздух неподвижен, и траектория мяча ABC будет находиться в вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{v}_1$, причем траектория не будет параболой, поскольку на мяч действует кроме силы тяжести еще и сила сопротивления со стороны воздуха, направленная против мгновенной скорости мяча. Заметим сразу, что характер зависимости силы сопротивления от скорости в задаче не дан и для решения не потребуется.

За время полета t до плоскости ворот мяч переместится в системе K вдоль оси Y на расстояние L, а вдоль оси X — на расстояние s_1, причем (см. рисунок; точка C лежит на плоскости P)

$$\frac{s_1}{L}=\frac{u}{v\cos\alpha},$$

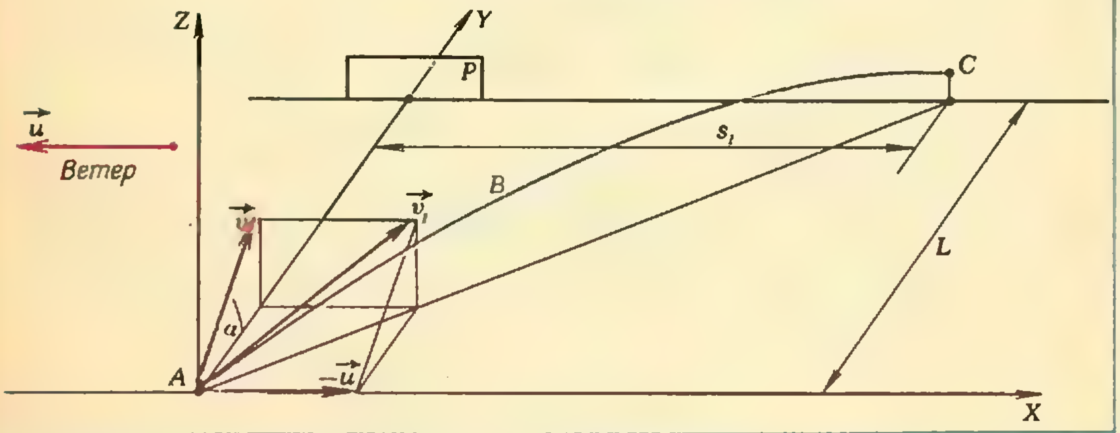
откуда

$$s_1=\frac{Lu}{v\cos\alpha}. \qquad (1)$$

За это же время t система K сместится вдоль оси X в противоположном направлении на расстояние

$$s_2=ut. \qquad (2)$$

Реальное горизонтальное смещение мяча (в непод-



вижной системе отсчета) происходит в отрицательном направлении оси X и равно

$$s=s_2-s_1.$$

Учитывая (1) и (2), получаем уравнение для нахождения t:

$$s=ut-\frac{Lu}{v\cos\alpha},$$

откуда

$$t=\frac{L}{v\cos\alpha}+\frac{s}{u}.$$

Подстановка численных значений дает $t=1{,}8$ с.

В. И. Чивилёв

◆

Ф859. *Шар радиуса R и массы m движется по горизонтальной поверхности под действием постоянной силы натяжения $\vec{F}$ легкой нерастяжимой нити. Точка закрепления нити находится на высоте h над поверхностью (см. рисунок), нить все время горизонтальна, шар движется поступательно. При каком максимальном коэффициенте трения это возможно? Чему равно ускорение шара?*

При движении шара нить может быть параллельна горизонтальной поверхности лишь при условии, что между шаром и поверхностью есть трение. В противном случае (при отсутствии трения) отличный от нуля момент силы F (относительно точки O) вращал бы шар, то есть шар двигался бы не поступательно.

Запишем условие поступательного движения шара (равенство нулю суммы моментов действующих на шар сил относительно точки O):

$$F_{\text{тр}}R=F(R-h).$$

Отсюда

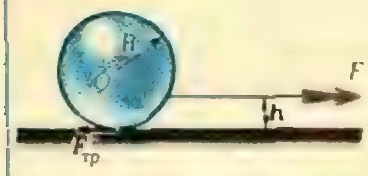
$$F_{\text{тр}}=F\left(1-\frac{h}{R}\right).$$

С другой стороны,

$$F_{\text{тр}}=\mu mg.$$

Из двух последних уравнений находим μ:

$$\mu=\frac{F}{mg}\left(1-\frac{h}{R}\right).$$



Ускорение шара найдем из II закона Ньютона:

$$ma=F-F_{\text{тр}}=F\frac{h}{R},$$

откуда

$$a=\frac{F}{m}\frac{h}{R}.$$

Л. Г. Маркович

◆

Ф860. *В конической непроводящей лунке с углом 2α при вершине на глубине h находятся два небольших одинаково заряженных тела, связанных нитью (рис. 1); масса каждого тела m. После пережигания нити тела начинают скользить вверх по поверхности лунки и вылетают из лунки на высоте H над ее основанием со скоростью v. Коэффициент трения тел о поверхность лунки $\mu=a\,\mathrm{tg}\,\alpha$ ($a<1$). Определить заряды тел.*

В начальный момент времени (в момент пережигания нити) всю энергию системы составляет электрическая энергия тел:

$$W_1=E_1=k\frac{Q^2}{2(H-h)\,\mathrm{tg}\,\alpha}$$

(потенциальную энергию на глубине h принимаем равной нулю). В момент вылета тел из лунки энергия системы складывается из электрической энергии $E_2=k\frac{Q^2}{2H\,\mathrm{tg}\,\alpha}$, кинетической энергии тел $K=mv^2$ и их потенциальной энергии $\Pi=2mgh$:

$$W_2=E_2+K+\Pi.$$

Согласно закону сохранения энергии, $W_1=W_2+A$,

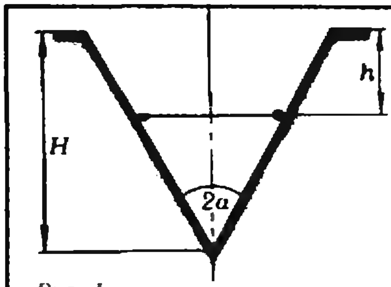


Рис. 1.

или

$$E_1=E_2+K+\Pi+A \Rightarrow E_1-E_2=K+\Pi+A,$$

где A — энергия, потраченная на преодоление сил трения. Найдем эту энергию.

Рассмотрим движение тела на малом участке Δs поверхности лунки таком, что силу электростатического отталкивания $f_э$ на этом участке можно считать постоянной. Сила трения $f_{тр}$, действующая на тело, на этом участке постоянна и равна (рис. 2)

$$f_{тр}=\mu N=\mu(f_э\cos\alpha+mg\sin\alpha).$$

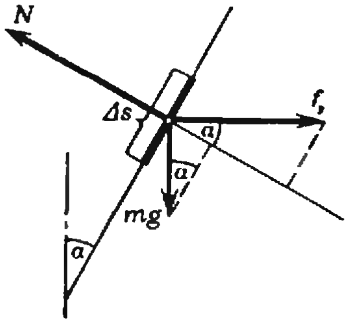


Рис. 2.

Работа силы трения на участке Δs численно равна

$$\Delta a=f_{тр}\cdot\Delta s=\mu f_э\cos\alpha\cdot\Delta s+\mu mg\sin\alpha\cdot\Delta s=$$
$$=\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha\, f_э(\sin\alpha\cdot\Delta s)+\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha\, mg(\cos\alpha\cdot\Delta s)=$$
$$=\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,(f_э\cdot\Delta x)+\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha\,(mg\cdot\Delta h)$$

(см. рис. 3). Но $f_э\cdot\Delta x$ — это изменение электрической энергии тела, а $mg\cdot\Delta h$ — изменение его потенциальной энергии. Таким образом, полная работа сил трения при движении тел равна по абсолютной величине

$$A=\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot(E_1-E_2)+\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\Pi.$$

Итак, согласно закону сохранения энергии,

$$E_1-E_2=K+\Pi+\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot(E_1-E_2)+\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\Pi.$$

Подставляя выражения для E_1, E_2, K, Π и $\mu=a\,\mathrm{tg}\,\alpha$, получаем

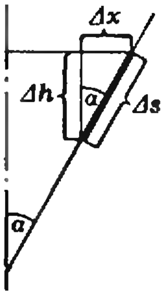


Рис 3.

$$\frac{kQ^2}{2(H-h)\,\mathrm{tg}\,\alpha}-\frac{kQ^2}{2H\,\mathrm{tg}\,\alpha}=$$
$$=mv^2+2mgh+a\left(\frac{kQ^2}{2(H-h)\,\mathrm{tg}\,\alpha}-\frac{kQ^2}{2H\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right)+$$
$$+2a\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\cdot mgh.$$

Отсюда находим заряд Q:

$$Q=\sqrt{\frac{2mH(H-h)\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot(v^2+2gh(1+a\,\mathrm{tg}^2\,\alpha))}{kh(1-a)}}.$$

О. Я. Савченко

◆

Ф861. *В колебательном RLC контуре сопротивление невелико, так что колебания затухают в нем слабо. Для получения незатухающих колебаний поступают следующим образом: дважды за период в моменты, когда ток в цепи максимален, катушку индуктивности быстро растягивают от длины l до длины $l+\Delta l$, а в моменты, когда максимален заряд на конденсаторе, катушку быстро сжимают до прежнего размера (параметрический резонанс). При каком относительном изменении длины катушки $\Delta l/l$ колебания в контуре будут незатухающими? Индуктивность катушки считать пропорциональной ее длине.*

При растягивании катушки совершается работа против сил притяжения ее витков. Эта работа идет на увеличение энергии колебательной системы и должна быть не меньше убыли энергии из-за джоулевых потерь на сопротивлении.

По закону индукции Фарадея $\mathscr{E}_{инд}=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ и $I_{инд}=-\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. При быстром растягивании катушки $\Delta t\to 0$, а поскольку ток не может достигать бесконечно больших значений, то в этом случае и $\Delta\Phi\to 0$, то есть в этом процессе сохраняется магнитный поток Φ.

Работа, совершаемая при растягивании, идет только на увеличение энергии магнитного поля:

$$\Delta A=\Delta W_+=\frac{L'I'^2}{2}-\frac{LI^2}{2}=\frac{L'^2I'^2}{2L'}-\frac{L^2I^2}{2L}=$$
$$=\frac{\Phi^2}{2L}\left(\frac{L}{L'}-1\right)=\frac{\Phi^2}{2L}\left(\frac{l+\Delta l}{l}-1\right)=\frac{\Phi^2}{2L}\frac{\Delta l}{l}=\frac{LI_a^2}{2}\frac{\Delta l}{l},$$

где штрихи проставлены у величин, относящихся к состоянию системы после растягивания катушки, I_a — амплитудное значение силы тока (в момент растягивания ток максимален).

Катушку сжимают, когда максимален заряд на конденсаторе и, следовательно, ток в цепи равен нулю. Поэтому при сжатии никакой работы не совершается.

При малом затухании убыль энергии за счет выделения тепла на сопротивлении мала по сравнению с полной энергией системы, поэтому можно считать, что за период амплитуда колебаний изменяется мало, ток почти синусоидален. Тогда можно получить следующую оценку для потерь энергии за половину периода:

$$\Delta W_- = I_д^2 R \frac{T}{2} = \frac{1}{2} I_a^2 R\pi\sqrt{LC},$$

где $I_д$ — действующее значение тока.

Колебания будут незатухающими, если $\Delta W_+ \geqslant \Delta W_-$, то есть

$$\frac{LI_a^2}{2}\frac{\Delta l}{l} \geqslant \frac{1}{2} I_a^2 R\pi\sqrt{LC},$$

откуда

$$\frac{\Delta l}{l} \geqslant \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

А. И. Киркинский

Метод производящих функции

(Начало см. на с. 11)

Указание. Воспользуйтесь соотношениями (доказав их)

$$\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-z^3}\cdot\frac{1}{1-z^5}\cdot\ldots=$$
$$=(1+z+z^2+z^3+\ldots)\cdot(1+z^3+z^6+z^9+\ldots)\times$$
$$\times(1+z^5+z^{10}+\ldots)\cdot\ldots=(1+z)(1+z^2)\times$$
$$\times(1+z^3)(1+z^4)\ldots=(1-z^m)(1+z^m)(1+z^{2m})\times$$
$$\times(1+z^{4m})(1+z^{8m})\ldots=1.$$

4. Найдите явную формулу для общего члена последовательности $(u_n)=(0,\ 1,\ 5,\ 19,\ 65,\ \ldots)$, заданной рекуррентными соотношениями $u_0=0$, $u_1=1$, $u_{n+1}=5u_n-6u_{n-1}$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что ряд $u_0+u_1z+u_2z^2+\ldots$ можно представить в виде

$$\frac{z}{6z^2-5z+1}=\frac{1}{1-3z}-\frac{1}{1-2z}=$$
$$=(1+2z+2^2z^2+2^3z^3+\ldots)\times$$
$$\times(1+3z+3^2z^2+3^3z^3+\ldots).$$

5. Пусть $n>2$ — фиксированное натуральное число. Рассмотрите ряды

$$f(z)=z^n+z^{n^2}+z^{n^3}+\ldots;$$
$$[f(z)]^2=c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\ldots$$

и покажите, что число целых решений $(k_1;\ k_2;\ k_3)$ *уравнения Ферма* $k_1^n+k_2^n=k_3^n$ равно c_m при $m=k_3^n$.

Замечание. К сожалению, к вычислению коэффициентов c_m для любого m подходов не видно!

6. Найдите v_n — количество различных разбиений выпуклого n-угольника непересекающимися диагоналями на треугольники (например, $v_5=5$, $v_6=9$).

Указание. Положите $v_2=v_3=1$ и докажите рекуррентное соотношение

$$v_n=v_2v_{n-1}+v_3\cdot v_{n-2}+\ldots+v_{n-1}v_n,\quad n>3.$$

Воспользуйтесь этим, чтобы доказать соотношение $(\alpha(z))^2-\alpha(z)=z$, где $\alpha(z)=v_2z+v_3z^2+v_4z^3+\ldots$, найдите отсюда $\alpha(z)$ и дифференцируйте.

Ответ. $v_n=\dfrac{(2n-4)!}{(n-2)!(n-1)!}$. Эти числа называются *числами Каталана*.

Ижевскому НОУ — 5 лет

Ученье — путь к звезде открытий

Ижевск — город промышленный, рабочий. И одна из основных проблем города — рабочие руки, талантливые специалисты. Именно поэтому серьезное внимание уделяется в городе профориентации среди старших школьников, обучению уже в школе будущей жизненной профессии, поиску среди школьников и учащихся ПТУ, техникумов талантливых целеустремленных ребят.

Ижевскому городскому НОУ «Мысль» исполнилось пять лет. Общество создано по инициативе ГК ВЛКСМ при поддержке городского отдела народного образования, Дома техники НТО, республиканского общества «Знание». В НОУ приходят школьники, стремящиеся расширить свои знания в определенной области науки, техники, искусства, желающие уже в школе попробовать: а какой из меня получится физик, математик, биолог, медик, юрист. Основная база для занятий — Удмуртский государственный университет. Секции НОУ созданы в Ижевском государственном медицинском институте, в Ижевском механическом институте, в Физико-техническом институте УНЦ АН СССР, в Музее изобразительных искусств, в кружках и факультативах школ, во Дворце пионеров. В городском Дворце пионеров и школьников находится и методический центр НОУ, где еженедельно собираются ребята — старосты секций, которые образуют Ученический Совет. В его ведении — вся работа НОУ в течение года. Научной и методической работой руководит Совет кураторов общества.

В 24 кружках и секциях НОУ сейчас занимается около 350 учащихся 7—10 классов и ПТУ. Под руководством преподавателей, ученых, специалистов члены НОУ учатся работать со специальной литературой, получают практические навыки в той или иной области науки, техники, искусства. За время работы НОУ сложились определенные традиции. Учебный год начинается в октябре организационной сессией, на которой ребята вместе со своими руководителями планируют работу на учебный год. В течение года они встречаются не только на занятиях секции, но и на общегородских лекториях: «Химия вокруг нас», «Математика в современном мире», «Загадочный мир кристаллов», «На пороге совершеннолетия», в «Школе юного лектора». Одна из главных задач членов НОУ — не только заниматься любимой наукой, но и пропагандировать ее среди своих товарищей путем чтения лекций, организации кружков в младших классах.

Каждый год итоги работы НОУ подводятся на научно-практической конференции «Юность — науке». И если на первой конференции 4 секции объединяли 32 члена НОУ, работавших под руководством 26 научных руководителей, то на четвертой конференции на 9 секциях выступали с итогами своей работы 143 члена НОУ, работавших под руководством 107 преподавателей, специалистов научных учреждений города и студентов. Были отмечены работы: «Дешифрование космических снимков на примере пустынных территорий Аравии» ученицы 10 класса Т. Полянцевой; «Динамика ЭКГ в ранние сроки ишемии» ученицы 9 класса М. Лопаткиной; «Построение функции полезности в задаче распределения семейного бюджета» ученика 10 класса О. Евстафьева; «Построение 32 точечных групп кристаллических решеток», выполненная учениками 8 и 9 классов А. Мацкевичем и Д. Гаем. Работа И. Козлова «Решение некоторых задач динамики с помощью АВМ» была отмечена на студенческой конференции ИМИ.

Интересен опыт работы ученых со школьниками физических классов в школе № 58: в 9 и 10 классах читаются два факультатива: «Введение в физику твердого тела» и «Программирование», в лабораториях в ВЦ университета ведутся занятия по труду со специализацией «лаборант-металловед» и «программист».

Большой интерес школьников вызывает работа Зимних школ НОУ. Зимние школы организуются ежегодно в последние предновогодние дни в одном из пригородов Ижевска — на турбазе «Югдон». Каждая школа обычно проводится по одной общей теме: «Симметрия в науке и природе», «Человек и природа», «Профессия — ученый», «Человек. Земля. Вселенная», «Наука и искусство». В течение трех дней 200 участников Школы — лучшие члены НОУ слушают лекции ведущих ученых города. Для ребят Школа — это еще и зимние спортивные соревнования, и «физбой», и традиционные КВН между командами школьников и комиссаров секций — студентов УдГУ, и новогодняя елка со всякими чудесами, и торжественная клятва верности науке. А самое главное — это общение единомышленников, ребят, стремящихся к «сияющим вершинам науки».

В 1983 году впервые была организована Летняя школа НОУ, где также читались лекции, проводились экскурсии, физические бои, наблюдения звездного неба. При этом школьники еще 3—4 часа ежедневно работали на полях совхоза «Удмуртский» и тем самым полностью оплатили расходы по организации лагеря. Летнюю школу также решено сделать ежегодной.

Своим девизом члены НОУ взяли слова «Ученье — путь к звезде открытий». И пусть пока школьники не совершают открытий в науке, главные открытия они делают в себе: а что я могу, куда приложить свои способности, кем быть? И организаторы НОУ «Мысль» верят в то, что ребята станут настоящими людьми, специалистами своего дела.

Председатель совета кураторов
Ижевского НОУ
И. А. Муртазин

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1983 году.

Новосибирский государственный университет имени Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты механико-математический, физический, экономический)

1. Решите уравнение

$$1+2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x.$$

2. При каких значениях параметра a среди решений неравенства

$$\log_2(x-100)-\log_{\frac{1}{2}}\frac{|x-101|}{(105-x)}+$$

$$+\log_2\frac{|x-103|\,(105-x)}{(x-100)}>a$$

содержится единственное целое число?

3. Расстояние между центрами двух окружностей равно $5r$. Одна из окружностей имеет радиус r, вторая — $7r$. Хорда большей окружности касается малой окружности и делится точкой касания в отношении 1:6. Найдите длину этой хорды.

4. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC' и DD'. Плоскость α перпендикулярна прямой $A'C'$, а плоскость β параллельна прямой CD'. Какова наименьшая возможная величина угла между плоскостями α и β?

5. Девятизначное целое число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из целого числа B перестановкой последней цифры на первое место. При этом известно, что число B взаимно просто с числом 18 и $B>222222222$. Найдите наибольшее и наименьшее среди чисел A, удовлетворяющих этим условиям.

Два натуральных числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, отличных от единицы.

Вариант 2

(факультеты геолого-геофизический, естественных наук)

1. Решите уравнение

$$\sin 2x\cos x=\operatorname{tg}3x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos 2x\sin x.$$

2. В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен $\frac{10}{3}$, косинус угла C равен $\frac{5}{13}$, а площадь треугольника равна 60. Найдите стороны треугольника.

3. По беговой дорожке длиной 400 м от одной стартовой линии одновременно стартовали два бегуна (разрядник и начинающий). Скорость разрядника на 200 м в минуту больше скорости начинающего. Через полминуты разрядник остановился на 20 секунд. За это время начинающий обогнал разрядника. Какой могла бы быть скорость разрядника, чтобы, несмотря на остановку, он смог закончить дистанцию первым, если известно, что скорости бегунов во время движения неизменны и постоянны?

4. При каких значениях параметра a для любого действительного числа x выполняется неравенство

$$\log_{(a^2-2)}[(a^2-1)x^2+2x+2]>1?$$

5. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, в основании которого лежит квадрат $ABCD$ со стороной длины 3, боковые ребра AA', BB', CC' и DD' имеют длину 5. Равносторонний треугольник расположен в пространстве так, что одна его вершина совпадает с вершиной C параллелепипеда, а две другие расположены на прямых BB' и $C'D'$ соответственно. Найдите длину медианы этого треугольника.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные численные значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи физические величины и их численные значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстраций.

Ниже после текста каждой задачи в скобках указан процент решивших ее.

Вариант 1

1. В конической лунке с вертикальной осью симметрии и углом раствора 2α прыгает шарик, ударяясь о противоположные точки A и B, расположенные на одной горизонтали, через одно и то же время T (рис. 1). Ускорение свободного падения g. Найдите максимальную и минимальную скорости движущегося шарика. (57 %)

2. Между конусом, сделанным из стекла с показателем преломления n, и экраном, перпендикулярным оси конуса, поместили собирающую линзу с фокусным расстоянием F, расположив ее на расстоянии F от экрана (рис. 2). Главная оптическая ось линзы совпадает с осью конуса. Вдоль оси конуса падает неширокий параллельный пучок света. Найдите форму изображения пучка на экране и определите максимальный размер изо-

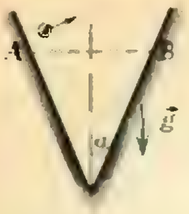


Рис. 1.

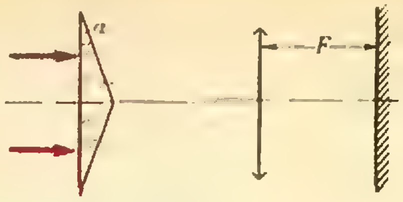


Рис. 2.

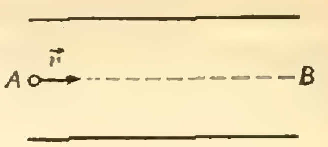


Рис. 3.

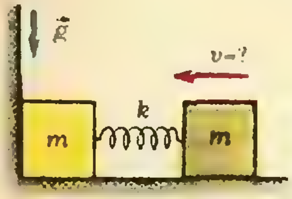


Рис. 4.

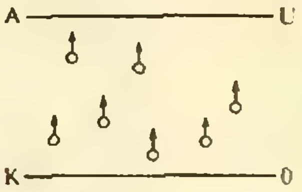


Рис. 5.

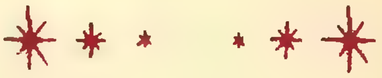


Рис. 6.

бражения. Угол α между образующей конуса и плоскостью его основания мал ($\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$). (60 %)

3. В теплоизолированной трубе под поршнем содержится один моль газа при давлении в два раза меньшем внешнего и температуре T. Поршень может свободно передвигаться в сторону увеличения объема и удерживается стопором от противоположного движения. Внутренняя энергия газа $U = cT$, газовая постоянная R. Какое количество теплоты надо подвести к газу, чтобы его объем увеличился в два раза? (73 %)

4. Оцените размеры неоднородностей вдоль дорожки звукозаписи на долгоиграющей пластинке. (42 %)

5. Через молоко, налитое в цилиндрический стеклянный сосуд, пропускают узкий пучок света вдоль оси сосуда и поперек и регистрируют интенсивность прошедшего светового сигнала. При разбавлении молока продольный сигнал не меняет свою интенсивность, а у поперечного она существенно увеличивается. Объясните явление. (55 %)

Вариант 2

1. Около вертикальной стены стоят два человека на расстояниях l_1 и l_2 соответственно от нее и на расстоянии r друг от друга. Первый громко произносит короткое слово. За какое время он должен произнести это слово, чтобы второй человек услышал его конец совпадающим с началом эха? Скорость звука в воздухе v. (54 %)

2. Электрон влетает в плоский заряженный конденсатор, двигаясь в начальный момент вдоль средней плоскости AB конденсатора со скоростью v (рис. 3). Через какое время нужно изменить направление электрического поля в конденсаторе на противоположное, не изменяя его абсолютной величины, чтобы на вылете из конденсатора электрон пересек плоскость AB? Длина конденсатора l. Силу тяжести не учитывать. (31 %)

3. Два одинаковых тела массой m каждое соединены пружиной жесткости k и лежат на горизонтальной плоскости (рис. 4). Левое тело касается вертикальной стенки. Какую минимальную скорость, направленную к стенке, надо сообщить правому телу, чтобы при обратном движении от стенки оно сдвинуло левое тело? Коэффициент трения о плоскость μ. Пружина в начальный момент не деформирована. Ускорение свободного падения g. (40 %)

4. Оцените отношение мощности, развиваемой кузнечиком при прыжке, к его массе (то есть удельную мощность). (45 %)

5. На блестящей консервной банке есть плоская вмятина, от которой отражается на экран свет. В банку наливают охлажденную жидкость — отраженный сигнал явно гаснет. Объясните явление. (72 %)

Вариант 3

1. Внутри сплошного шара радиуса R с показателем преломления $n = 2$ слева от центра вблизи поверхности находится точечный источник света S. На каком расстоянии справа от центра шара радиус светового пучка, вышедшего из шара, будет равен R? (40 %)

2. В центре закрытой с торцов трубы длиной $2l$ находится поршень массы m и площадью S, который может без трения перемещаться по трубе. Слева и справа от поршня имеется газ с давлением p. Трубу раскручивают в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Найдите угловую скорость вращения, если поршень сместился на $l/2$. Температуру газа считать постоянной. (78 %)

3. Вакуумный диод, у которого анод и катод — параллельные пластины (рис. 5), работает в режиме, когда между током и напряжением выполняется соотношение $I = cU^{3/2}$. Во сколько раз увеличится сила, действующая на анод из-за удара электронов, если напряжение на диоде увеличить в два раза? Начальной скоростью электронов, вылетающих с катода, пренебречь. (49 %)

4. Косточки домино поставлены так, что первая при падении сбивает вторую, вторая — третью и т. д. Оцените, за какое время упадет ряд из 100 косточек. (30 %)

5. При падении под небольшим углом на толстую стеклянную пластину узкого пучка света на экране отчетливо видны несколько пятен разной интенсивности (рис. 6). Объясните наблюдаемое явление. (66 %)

Публикацию подготовили
С. С. Гончаров, Г. В. Меледин,
А. А. Никитин

Московское высшее техническое училище имени Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Вычислите

$$1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}+\ldots+\operatorname{tg}^{n-1}\frac{\pi}{6}+\ldots$$

2. Решите уравнение

$$2\cos 2x\cdot\cos 5x=\cos 7x+\frac{1}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$25^{-x}+5^{1-x}=50.$$

4. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt{1+\log_5\frac{1}{x}}.$$

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A и B_1 и точки K и M на ребре CC_1 такие, что $|CK|=|KM|=|MC_1|$.

Вариант 2

1. Число 108 представить в виде произведения двух положительных чисел так, чтобы сумма куба одного из них с квадратом другого была наименьшей.

2. Решите уравнение

$$\sin 5x-\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right).$$

3. Решите уравнение

$$\frac{4}{2^x-3}=2^x.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(4-x)}{x-2}<0.$$

5. На основании прямого кругового конуса лежат три шара радиуса r. На них лежит четвертый шар того же радиуса. Каждый из этих четырех шаров касается боковой поверхности конуса и трех других шаров. Найти площадь боковой поверхности конуса.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Из брандспойта (шланг с металлическим наконечником), расположенного около поверхности Земли, вырывается струя воды со скоростью $v_0=10$ м/с. Брандспойт медленно вращается, вокруг вертикальной оси, одновременно с этим меняется угол его наклона к горизонту. Определите максимальную площадь, которую можно полить этим брандспойтом. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

2. Преграда массой $M=10$ кг, имеющая цилиндрический паз радиусом $R=0{,}2$ м, расположена на горизонтальной плоскости (рис. 1). Тело массой $m=1$ кг с начальной горизонтальной скоростью $v_0=3$ м/с поднимается по цилиндрической поверхности паза. Определите скорость тела на высоте R. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

3. На идеально гладкой горизонтальной плоскости расположен брусок массой $M=1$ кг, скрепленный с пружинами, жесткость каждой из которых $k=30$ Н/м (рис. 2). На бруске лежит шайба массой $m=0{,}5$ кг. Система брусок — шайба приводится в колебательное движение. Определите максимальную амплитуду колебаний, при которой система будет двигаться как единое целое, то есть без проскальзывания шайбы по бруску. Коэффициент трения между бруском и шайбой $\mu=0{,}4$. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

4. Идеальная тепловая машина, работающая при нормальных условиях окружающего воздуха, который для нее является холодильником, поднимает груз массой $m=400$ кг. Рабочее тело машины получает от нагревателя с температурой $t=200\,^\circ$C количество теплоты $Q=80$ кДж. На какую максимальную высоту поднимет груз эта тепловая машина? Трением пренебречь. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

5. В однородное горизонтальное электрическое поле с напряженностью $E=10^3$ В/м помещена система, состоящая из двух одинаковых и противоположно заряженных шариков, соединенных тонким изолирующим стержнем длиной $l=0{,}1$ м. Система может только вращаться в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Масса и модуль заряда каждого шарика равны $m=5$ г и $q=10^{-6}$ Кл. Система кратковременным воздействием выводится из состояния устойчивого равновесия и приводится во вращательное движение с начальной угловой скоростью $\omega_0=2$ с$^{-1}$. Определите максимальный угол поворота этой системы. Массой стержня пренебречь. Шарики рассматривать как материальные точки.

6. Источники тока, имеющие одинаковые внутренние сопротивления $r=0{,}5$ Ом, подключены к резисторам, каждый из которых имеет сопротивление R (рис. 3). ЭДС источников тока соответственно равны $\mathcal{E}_1=12$ В и $\mathcal{E}_2=6$ В. Определите величину сопротивления R, при котором ток в цепи $ABCD$ не течет.

7. Плоский замкнутый металлический контур площадью $S_0=10$ см^2 деформируется в однородном магнитном поле, индукция которого $B=10^{-2}$ Тл. Площадь контура за время $\tau=2$ с равномерно уменьшается (плоскость контура при этом остается перпендикулярной магнитному по-

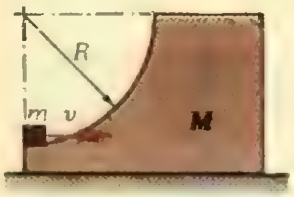


Рис. 1.

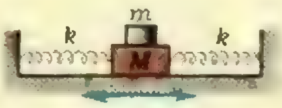


Рис. 2.

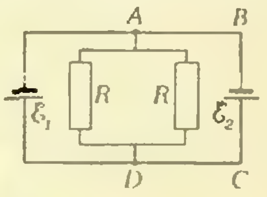


Рис. 3.

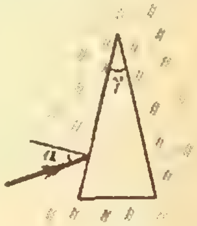


Рис. 4.

лю) до величины $S=2$ см². Определите силу тока, протекающего по контуру в течение времени τ, если сопротивление контура $R=1$ Ом.

8. Внутри стекла имеется воздушная полость треугольного сечения (рис. 4). Угол при вершине треугольника $\gamma=30°$. Показатели преломления стекла и воздуха соответственно равны $n_с=\sqrt{3}$ и $n_в=1$. На боковую грань треугольной призмы падает луч света под углом $\alpha=30°$. Определите угол выхода луча из другой грани призмы.

9. Катод вакуумного фотоэлемента освещается светом с длиной волны $\lambda=0{,}5$ мкм. При задерживающей разности потенциалов между анодом и катодом $U=1{,}2$ В фототок прекращается. Определите работу выхода электрона из материала катода. Постоянная Планка $h=6{,}6\times10^{-34}$ Дж·с; заряд электрона $e=1{,}6\times10^{-19}$ Кл; скорость света $c=3\cdot10^8$ м/с.

10. При термоядерной реакции слияния дейтерия ${}^2_1H$ и трития ${}^3_1H$ образуются нейтрон, неизвестная частица и выделяется $E_0=17{,}6$ МэВ энергии. Определите неизвестную частицу и полную энергию, которая выделится, если прореагирует $m=1$ г дейтерия. Число Авогадро $N_А=6\times10^{23}$ моль⁻¹; 1 эВ $=1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж.

Публикацию подготовили
Н. А. Гладков, В. Ф. Панов

Московский архитектурный институт

Математика

Задачи устного экзамена

1. Упростите выражение

$$\sqrt{(1-\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2\ \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}.$$

2. Вычислите без таблиц
а) $\operatorname{tg}1°\cdot\operatorname{tg}3°\cdot\operatorname{tg}5°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}89°$.
б) $\cos5°\cdot\cos55°\cdot\cos65°$,
в) $\cos20°\cdot\cos40°\cdot\cos60°\cdot\cos80°$.

3. Докажите тождество
а) $32\cos^6\alpha=10+15\cos2\alpha+6\cos4\alpha+\cos6\alpha$,
б) $\sin^2\alpha\cdot\cos^4\alpha=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cos2\alpha-\frac{1}{16}\cos4\alpha-\frac{1}{32}\cos6\alpha$,
в) $\cos9\alpha+3\cos7\alpha+3\cos5\alpha+\cos3\alpha=8\cos6\alpha\cdot\cos^3\alpha$.

4. Решите уравнение
а) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$.
б) $3\cdot16^x+2\cdot81^x=5\cdot36^x$.
в) $\sin^6x+\cos^6x=\frac{7}{16}$.
г) $\sqrt{y^2+4y+8}+\sqrt{y^2+4y+4}=\sqrt{2(y^2+4y+6)}$.

5. Решите неравенство
а) $\frac{1}{2^x+3}>\frac{1}{2^{x+2}-1}$.
б) $x^2-3>\sqrt{x^2-2x+1}$.
в) $\log_{x^2}(4x+5)\leqslant1$.

6. Постройте график
а) $y=|x|-|x+1|+2$.
б) $y=\frac{x}{|x-1|}$.

7. Решите систему

$$\begin{cases}x+xy+y=11,\\ x^2y+xy^2=30.\end{cases}$$

8. При каких целых «n» решение системы

$$\begin{cases}nx-y=5,\\ 2x+3ny=7\end{cases}$$

удовлетворяет условиям $x>0$, $y<0$?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Воздушный шар объемом $V=600$ м³ находится в равновесии. Какое количество балласта надо выбросить за борт, чтобы шар начал подниматься с ускорением $a=0{,}1$ м/с²? Плотность воздуха $\rho=1{,}29$ кг/м³.

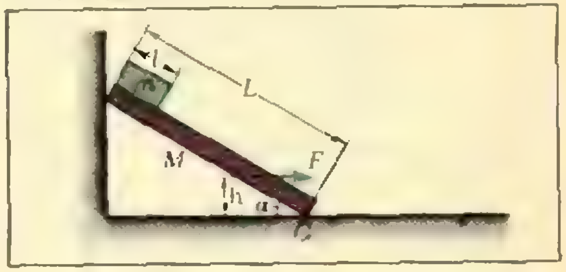
2. Тело массой $m=2$ кг тянут по гладкой горизонтальной поверхности с помощью пружины, которая при движении растянулась на $\Delta l=1$ см. Жесткость пружины $k=100$ Н/м. Определите ускорение, с которым движется тело.

3. Тело без начальной скорости начинает скользить по наклонной плоскости высотой $h=5$ м. Угол наклона $\alpha=30°$, коэффициент трения $\mu=0{,}05$. Найдите время движения тела.

4. Найдите силу тяжести, действующую на тело массой $m=12$ кг, поднятое над Землей на расстояние, равное трети земного радиуса.

5. Шарик массой $m=0{,}5$ кг, подвешенный на нерастяжимой нити длиной $l=1$ м, совершает колебания в вертикальной плоскости. Найдите силу натяжения нити в момент, когда она образует с вертикалью угол $\alpha=60°$. В этот момент скорость шарика $v=1{,}5$ м/с.

6. К верхнему краю доски длиной L и массой M прибит брусок, длина которого l и масса m (см. рисунок). Доска закреплена в точке O и прислонена к стенке под углом α к основанию. При какой горизонтальной силе F, приложенной на высоте h, равновесие доски не нарушится, если стенку убрать?



7. Тело массой m, скатившись с горы высотой h, останавливается. Какую работу нужно совершить, чтобы поднять тело обратно на вершину горы?

8. Подъемный кран должен в течение $t=8$ ч поднять $m=3000$ т строительных материалов на высоту $h=12$ м. Чему равна мощность, потребляемая двигателем крана, если коэффициент полезного действия мотора $\eta=60$ %?

9. Тело, имеющее массу $m=2$ кг и объем $V=1000$ см³, находится в озере на глубине $h=5$ м. Какая работа должна быть совершена при его подъеме на высоту $H=5$ м над поверхностью воды?

10. Шарик неподвижно висит на пружине, когда она растянута на $\Delta l=4$ см. Определите период колебаний такого вертикального пружинного маятника.

Публикацию подготовили
Ю. М. Мещеряков, Ю. А. Морозов,
В. А. Смирнов

Инверсия

4. в) При инверсии с центром в точке O прямые l_1 и l_2, пересекающиеся в некоторой точке A, переходят в окружности, проходящие через точку O. Через точку O проведем касательные t_1 и t_2 к окружностям l_1' и l_2'. Легко видеть, что $t_1 \| l_1$, $t_2 \| l_2$, а касательные к l_1' и l_2' в точке A' образуют такой же угол, как l_1 и l_2.

5. **б.** Поскольку касательные к окружностям переходят в окружности или прямые, касающиеся образов данных окружностей, достаточно заменить окружности касательными к ним в их общих точках.

9. Выполним инверсию относительно окружности произвольного радиуса с центром в точке A (см. рис. 11 на стр. 30). Тогда окружности, проходящие через центр инверсии, перейдут в параллельные прямые, а другие две окружности в касающиеся этих прямых и друг друга окружности (рис. 1). Три точки касания будут лежать на одной прямой (докажите!), которая при повторном выполнении инверсии перейдет в окружность.

10. Выполним инверсию относительно окружности с центром в точке B радиуса $\sqrt{|AB|\cdot|AM|}$. Тогда полуокружность C_2 перейдет в себя, полуокружность C_1 и луч m перейдут друг в друга, так как прямые углы с прямой (AB) сохраняются. Следовательно, окружность C_3 перейдет в себя и точка касания D окружностей C_2 и C_3 останется на месте, поэтому прямая BD перейдет в себя, но в таком случае BD имеет единственную общую точку и с C_2 и с C_3, то есть касается обеих окружностей.

11. Пусть Γ — окружность с центром в точке A такая, что при инверсии относительно нее окружность T переходит в себя. Радиус окружности Γ равен длине отрезка касательной, проведенной из точки A к окружности T. При инверсии относительно Γ луч AB перейдет в себя, полуокружности C_1 и C_2 отобразятся на лучи C_1' и C_2' пересекающиеся с (AB) под прямым углом в точках B' и M' (см. рис. 2). Образом полуокружности C_3 является полуокружность C_3', построенная на отрезке $B'M'$ как на диаметре. Точка O, конечно, не останется на месте, однако окружность T перейдет в себя, поэтому интересующее нас расстояние от центра T до прямой AB не изменится. Это расстояние равно $2r$, так как окружность T касается всех трех линий C_1', C_2', C_3', следовательно, $|B'M'| = 2r$.

14. Инверсией с центром в любой из точек данной окружности задела сводится к разобранной в параграфе 4 задаче 7.

15. б) После инверсии с центром в точке A задача сводится к следующей: построить прямую, параллельную данной прямой и касающейся данной окружности (см. рис. 3). Пункт а) инверсией относительно произвольной точки, не лежащей на прямой l и окружности с сводится к пункту б).

16. Увеличим радиусы всех трех окружностей на одну и ту же величину d так, чтобы две из них касались в некоторой точке A (рис. 4). Выполним инверсию с центром в точке A относительно окружности произвольного радиуса. Задача сводится к следующей: построить окружность T', касающуюся двух данных параллельных прямых и данной окружности. Остается найти образ T окружности T' при повторном выполнении инверсии и увеличить радиус T на величину d.

17. Выполним инверсию с центром в точке D, при этом точки A и B перейдут в A' и B'. Задача сводится к следующей: построить две параллельные прямые, равноудаленные от точки D так, чтобы одна из них проходила через точку A', а другая — через B'. Это легко сделать, если заметить, что эти прямые параллельны отрезку DM, соединяющему D с серединой M отрезка $A'B'$ (рис. 5).

Непослушные задачи

1. $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)^2$, $n \in \mathbf{N}$. **2.** Если $a>0$, то $x \geqslant -b/a$. Если $a<0$, то $x \leqslant -b/a$. Если $a=0$ и $b \geqslant 0$, то x может быть любым. Если $a=0$ и $b<0$, решений нет. **3.** $\{(x; y): x \geqslant 0, y=0\}$. **4.** $]-\infty; 0[$.

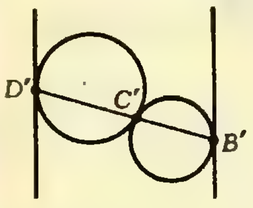


Рис. 1.

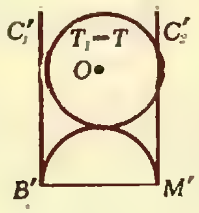


Рис. 2.

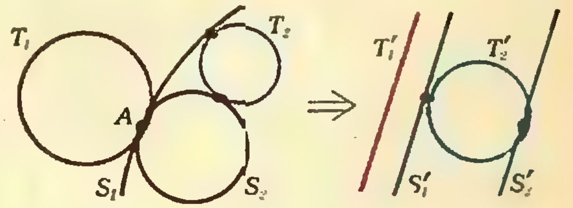


Рис. 3.

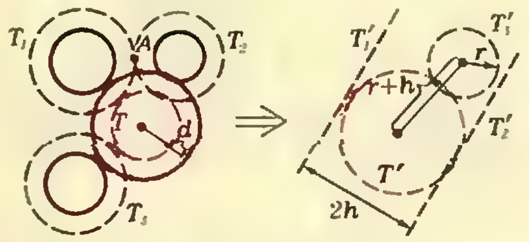


Рис. 4.

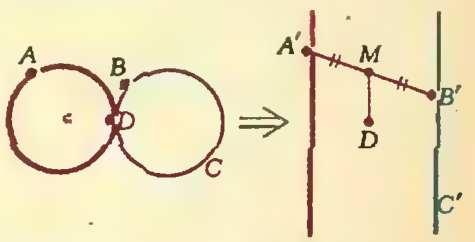


Рис. 5

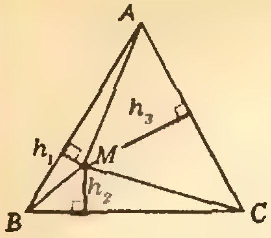


Рис. 6

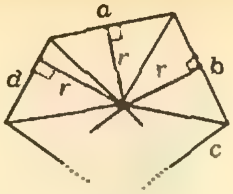


Рис. 7.

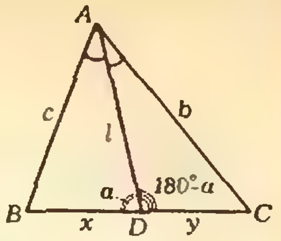


Рис. 8.

5. $[-1;\ 4]$. **6.** $]-1;\ 1[$ (при любых значениях числа a). **7.** $\log_5 8<\log_2 3$. **8.** График совпадает с осью абсцисс на участке $[0;\ 1[$ и с прямой $y=1$ на участке $]1,\ +\infty[$, а при $x=1$ имеет «изолированную точку» $(1,\ 1/2)$. **9.** **Указание.** Площадь сектора OCD, где O середина отрезка AB, равна площади фигуры F. **10.** **Указание.** Постройте окружность на диагонали (содержащей вершину острого угла), как на диаметре. **11.** 0. **12.** Да. **13.** В отношении 1:27.

Избранные школьные задачи

1. а) Пусть M — произвольная точка внутри треугольника, h_1, h_2 и h_3 — ее расстояния до сторон, a и h — соответственно длины сторон и высоты правильного треугольника (рис. 6). Запишем, что сумма площадей треугольников MAB, MBC и MAC равна площади треугольника ABC: $\frac{ah_1}{2}+\frac{ah_2}{2}+\frac{ah_3}{2}=\frac{ah}{2}$, откуда $h_1+h_2+h_3=h$, что и требовалось. Случай, когда M — граничная точка треугольника, разбирается аналогично.

б) Отрезки, соединяющие центр вписанной окружности с вершинами многоугольника, разбивают его на треугольники, основаниями которых служат стороны многоугольника, а высотами — радиусы окружности, проведенные в точки касания со сторонами (рис. 7). Пусть a, b, c, ..., d — длины сторон многоугольника. Поскольку сумма площадей треугольников, на которые разбит многоугольник, равна площади многоугольника, получаем, что $\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}+\ldots+\frac{dr}{2}=S$, откуда $S=r\cdot\frac{a+b+c+\ldots+d}{2}$, то есть $S=p\cdot r$.

2. **Ответ:** $(0;\ 0)$, $(1;\ -2)$ и $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

Решение. Поскольку p и q — корни уравнения, то, подставив каждое из них в уравнение, мы получим два верных равенства:

$$p^2+p^2+q=0 \text{ и } q^2+pq+q=0.$$

Решив полученную систему, находим ответ.

Замечание. Типичная ошибка; поскольку p и q — корни уравнения, то $p+q=-p$ и $pq=q$, откуда находим, что $p=q=0$ или $p=1$, $q=-2$. В этом рассуждении предполагается то, чего нет в условии — что p и q — два корня уравнения (ср. с последним ответом в нашем решении: при $p=q=-\frac{1}{2}$ уравнение принимает вид $x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=0$ и имеет корни 1 и $-\frac{1}{2}$).

3. Поскольку треугольники ABD и ACD имеют общую высоту, опущенную из вершины A (рис. 8), то их площади относятся, как длины соответствующих оснований: $S_{ABD}:S_{ACD}=x:y$. Так как точка D лежит на биссектрисе, она одинаково удалена от сторон AB и AC. Поэтому высоты треугольников ABD и ACD, опущенные из вершины D, одинаковы и площади этих треугольников относятся, как длины сторон, на которые опущены эти высоты: $S_{ABD}:S_{ACD}=c:b$. Из этого равенства и предыдущего равенства получаем утверждение задачи.

б) По теореме косинусов из треугольников ABD и ACD получаем: $c^2=x^2+l^2-2xl\cos\alpha$ и $l^2=y^2+b^2+2yl\cos\alpha$, где $\alpha=\widehat{ADB}$. Умножим первое из этих соотношений на y, второе на x и сложим: $c^2y+b^2x=l^2(x+y)+xy(x+y)$, то есть $l^2=\frac{c^2y+b^2x}{x+y}-xy$. Так как, по теореме о биссектрисе (см. п. а)), $cy=bx$, получаем $c^2y=bcx$, $b^2x=bcy$, откуда $\frac{c^2y+b^2x}{x+y}=bc$ и $l^2=bc-xy$.

4. **Ответ:** $\sqrt{2}$. **Решение.** Так как $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, получаем

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2-(\sqrt{3}-1)}=$$

$$=\frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{6})(3-\sqrt{3})+(2\sqrt{2}-\sqrt{6})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{6\sqrt{2}}{9-3}=\sqrt{2}.$$

5. **Ответ:** а) $2^{300}<3^{200}$; б) $2^{91}>5^{35}$. **Решение.** а) Поскольку $2^{300}=(2^3)^{100}=8^{100}$, а $3^{200}=9^{100}$, то $2^{300}<3^{200}$. б) Поскольку $2^{91}=(2^{13})^7$, $5^{35}=(5^5)^7$, то достаточно сравнить числа 2^{13} и 5^5. Так как $2^5>5^2$, то $2^{10}>5^4$, поэтому $2^{13}=8\cdot 2^{10}>5\cdot 5^4=5^5$.

6. **Ответ:** 15. **Решение.** Пусть x — количество членов кружка. Из условия следует, что, с одной стороны, менее 7 % членов кружка — восьмиклассники, а с другой — что хотя бы один восьмиклассник (Миша) в кружке занимается, поэтому $1<0{,}07x$, откуда $x>14{,}2$ .... Поскольку число членов кружка целое, получаем, что наименьшее возможное число участников равно 15. При этом выполняются все условия.

7. **Ответ:** 7. **Решение.** Любая из искомых плоскостей должна пересекать тетраэдр. Действительно, в противном случае четыре его вершины находятся на одинаковом расстоянии от плоскости и лежат по одну сторону от нее, — значит, они лежат в плоскости, параллельной данной, чего нет на самом деле. Далее, искомая плоскость разделяет вершины тетраэдра на две группы: или на группы в одну и в три вершины, или на две группы по две вершины. В первом случае (рис. 9 а) она проходит через середину высоты тетраэдра, опущенной на грань, которой при-

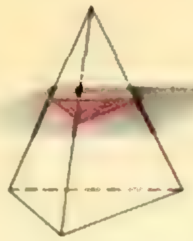


Рис. 9а.

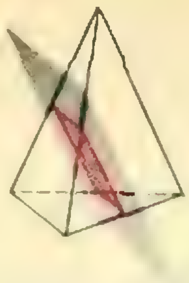


Рис. 9б.

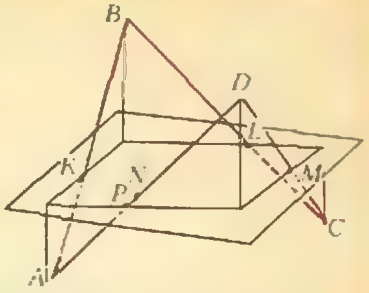


Рис. 10.

надлежит группа из трех вершин, параллельно этой грани. Таких плоскостей, очевидно, столько же, сколько высот у тетраэдра — четыре. Во втором случае искомая плоскость (рис. 9 б) параллельна скрещивающимся ребрам тетраэдра, соединяющим по две вершины каждой группы, и проходит через средние *линии соответствующих* граней. Таких плоскостей три. Итак, всего существует семь плоскостей, удовлетворяющих условию.

8. Докажем, что $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$. Из условий $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, $b>0$, $d>0$ вытекает, что $ad<bc$. Прибавив к обеим частям этого неравенства число ab, получим, что $a(b+d)<b(a+c)$, откуда, разделив *обе части на положительное число* $b(b+d)$, приходим к неравенству $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$. Аналогично можно доказать, что $\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

9. Ответ: C — точка пересечения плоскости α с отрезком AB_1, где B_1 — точка, симметричная точке B относительно плоскости α. Указание. Для любой точки $M\neq C$ плоскости α $|AM|+|MB|=|AM|+|MB_1|>|AB_1|$ в силу неравенства треугольника, а $|AB_1|=|AC|+|CB_1|=|AC|+|CB|$.

10. Ответ: 90°. Указание. Искомый угол равен углу между касательными к параболе, проходящими через точку M (0; −0,25) (не лежащую на параболе!). Касательная к параболе в ее точке M $(x_0;\ x_0^2)$ имеет уравнение $y=2xx_0-x_0^2$ и проходит через точку M (0; −0,25) при $x_0^2=0{,}25$; уравнения соответствующих касательных: $y=x$ и $y=-x$.

11. Так как $0<a<1$, то $a^{10}<a^2$, аналогично $b^{10}<b^2$, поэтому $a^{10}+b^{10}<a^2+b^2=1$.

12. Соединим центр сферы со всеми вершинами многогранника. При этом многогранник разобьется на пирамиды, основаниями которых являются грани многогранника, с общей вершиной — центром сферы. Высотами этих пирамид, опущенными из центра сферы, являются радиусы сферы, *проведенные в точки касания. Записав,* что сумма объемов пирамид равна объему многогранника, получим требуемую формулу (сравните с задачей 1, б).

13. Для доказательства воспользуемся двумя утверждениями: 1) длины отрезков касательных, проведенных из одной точки к сфере, равны; 2) если из одной точки (не лежащей в плоскости) *к плоскости проведены две наклонные,* то равные наклонные образуют с плоскостью равные углы, а большая наклонная образует с плоскостью меньший угол.

Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около сферы и пусть K, L, M, N — точки касания сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Проведем плоскость α через точки K, L и M. Поскольку точки A и D лежат по разные стороны от α, отрезок AD пересекает α в некоторой точке P (рис. 10).

Требуется доказать, что P совпадает с N.

Обозначим угол между (AB) и α через φ. По свойству *касательных к сфере* $|BK|=|BL|$, а так как длины наклонных BK и BL, проведенных из точки B к плоскости α равны, то прямые AB и BC образуют с этой плоскостью равные углы, то есть угол между (BC) и α также равен φ. Аналогично, $|CL|=|CM|$ и угол между (CD) и α равен φ (так как он равен углу между (CB) и α).

Предположим теперь, что P не совпадает с N и пусть $|AP|<|AN|$, тогда $|DP|>|DN|$. Обозначим угол между (AD) и α через ψ. Теперь, так как $|AP|<|AK|=|AN|$, получаем $\psi>\varphi$ (в силу утверждения 2)), с другой стороны, из $|DP|>|DM|=|DN|$, следует $\psi<\varphi$. Аналогично придем к противоречию, положив $|AP|>|AN|$. Следовательно, точки P и N совпадают.

14. Ответ: 120°. **Решение.** Рассмотрим сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса. В сечении получается равнобедренный треугольник с боковой стороной — образующей конуса. Докажем, что чем ближе сечение к высоте конуса, тем больше угол при вершине соответствующего сечения. Действительно, с приближением сечения к высоте конуса уменьшается длина высоты сечения, опущенной из вершины конуса (так как проекция этой высоты на плоскость основания уменьшается (рис. 11), поэтому уменьшается отношение этой высоты и *образующей — косинус половины угла при вершине сечения.* Но с уменьшением косинуса острого угла сам угол возрастает. Таким образом, с приближением сечения к высоте конуса угол при вершине сечения растет. Поскольку площадь сечения равна половине произведения квадрата длины образующей на синус угла при вершине сечения, площадь сечения максимальна, если максимален синус угла при вершине сечения. Максимальный угол при вершине сечения — когда сечение осевое. Поскольку осевое сечение, по условию, имеет *не максимальную площадь,* это возможно только при условии, что угол при вершине осевого сечения тупой, причем его синус в два раза меньше максимального значения синуса — единицы. Таким образом, угол при вершине осевого сечения равен 120°.

15. а) Пусть a, b, c — координаты точек *пространства. Тогда условие* $a+b+c=1$ определяет плоскость, пересекающую каждую координатную ось *на расстоянии* 1 *от начала координат* в положительном направлении (рис. 12 а). Учитывая, что $a^2+b^2+c^2$ — квадрат расстояния от начала координат до точки $(a;\ b;\ c)$, данную за-

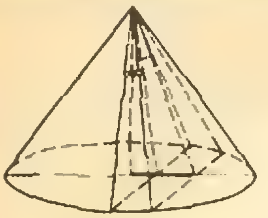


Рис. 11.

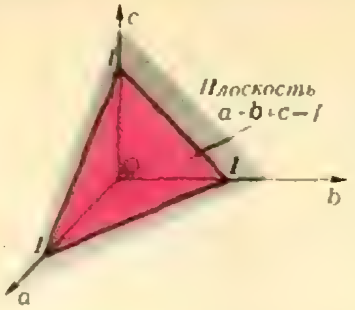


Рис. 12а.

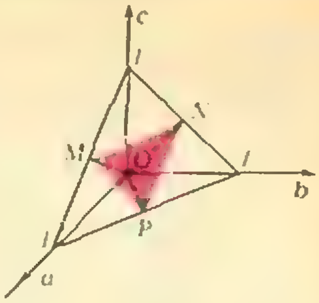


Рис. 12б.

дачу можно переформулировать так: доказать, что точки плоскости $a+b+c=1$ удалены от начала координат не меньше, чем на $1/\sqrt{3}$. Используя формулу расстояния от точки до плоскости (см. § 62 учебника «Геометрия 9—10»), найдем, что расстояние от начала координат до рассматриваемой плоскости равно $1/\sqrt{3}$. Отсюда следует доказываемое неравенство.

б) Дополнительное (по сравнению с а)) условие означает, что для координат точек $(a;\ b;\ c)$ выполняются неравенства $a<b+c$, $b<a+c$ и $c<a+b$, которые задают полупространства. Пересечение этих полупространств вырезает на плоскости $a+b+c=1$ треугольник MNP из средних линий (рис. 12 б). Поскольку вершины этого треугольника, точки M, N и P, максимально удалены от начала координат, по сравнению с остальными точками этого треугольника, а $|OM|=|ON|=|OP|=\frac{1}{\sqrt{2}}$, доказываемое неравенство имеет место.

Новосибирский государственный университет имени Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\ (k\in Z)$.
2. $0\leqslant a<\log_2 3$.
3. $x_1=7\sqrt{3}\,r$. $x_2=\frac{7\sqrt{143}}{6}r$.
4. $\frac{\pi}{6}$.
5. 9 999 999 998 и 122 222 224.

Вариант 2

1. $x_1=\frac{n\pi}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{12}+\frac{m\pi}{2}\ (n, m\in Z)$.
2. $|AB|=13$, при этом либо $|AC|=10$, $|BC|=13$, либо $|AC|=13$; $|BC|=10$.
3. Если v — скорость разрядника, то 500 м/мин$<v<$600 м/мин.
4. $\sqrt{3}<|a|<\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.
5. $\frac{3\sqrt{30}}{2}$.

Физика

Вариант 1

1. Очевидно, что скорость шарика максимальна в момент удара о стенку. Из симметрии и с учетом перпендикулярности скорости шарика у стенки и касательной плоскости найдем $v_{max}=gT/(2\sin\alpha)$. При пересечении оси лунки скорость шарика минимальна (она же — горизонтальная скорость): $v_{min}=v_{max}\cos\alpha=(gT\operatorname{ctg}\alpha)/2$

2. Получится окружность (рис. 13) с диаметром

$$2r=2F\operatorname{tg}\theta\approx 2F\theta=2F(\beta-\alpha)\approx 2F\alpha(n-1).$$

3. Количество теплоты Q переходит в изменение внутренней энергии ΔU и в работу A' по расширению газа:

$$Q=\Delta U+A'=c\Delta T+p\Delta V.$$

Из уравнения Менделеева — Клапейрона, записанного для начального состояния газа: $(p/2)V=RT$ и для конечного: $p\cdot 2V=RT_1$, найдем

$$\Delta U=c\Delta T=c(T_1-T)=3cT;$$
$$A'=p\Delta V=pV=RT_1/2=2RT.$$

Тогда окончательно

$$Q=(3c+2R)T.$$

4. При скорости иглы v и частоте ν характерного звука соответствующий размер неоднородности $l\sim v/\nu$. Выбрав радиус звуковой дорожки $R\sim 10$ см и учитывая, что число оборотов в минуту для долгоиграющей пластинки $n=33$ об/мин$\approx 0{,}5$ об/с, имеем $v=2\pi nR\sim 30$ см/с. Полагая характерную частоту звука $\nu\sim 10^3$ Гц, получаем

$$l\sim v/\nu\sim 3\cdot 10^{-2}\text{ см}.$$

5. Число рассеивающих и поглощающих свет частиц вдоль оси не меняется при разбавлении, поскольку площадь сечения сосуда и полное число частиц сохраняются. Значит, число частиц, встреченных светом на пути вдоль оси, сохраняется (во сколько раз увеличивается путь, во сколько же раз уменьшается концентрация молока, воду считаем абсолютно прозрачной) и интенсивность прошедшего сигнала практически не изменяется. При прохождении света поперек оси число встреченных светом частиц при разбавлении уменьшается (концентрация уменьшилась, а путь остался прежним). Таким образом, интенсивность прошедшего света в этом случае увеличится.

Вариант 2

1. Для учета эха вместо источника звука в точке A (рис. 14) можно взять мнимый источник A', симметричный относительно стенки (как при отражении света от плоского зеркала). Чтобы отраженный сигнал пришел сразу же вслед идущему по прямой, необходимо выполнение условия

$$vt=|AC|+|CB|-r=|A'B|-r=$$
$$=\sqrt{(l_1+l_2)^2+r^2-(l_2-l_1)^2}-r.$$

Откуда

$$t=(\sqrt{r^2-4l_1l_2}-r)/v.$$

2. Через время t высота электрона над плоскостью AB $y=at^2/2$, где a — его ускорение, в вертикаль-

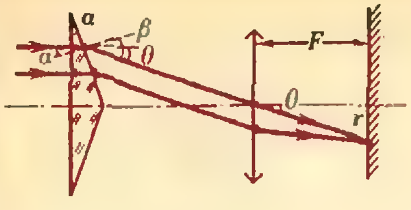


Рис. 13.

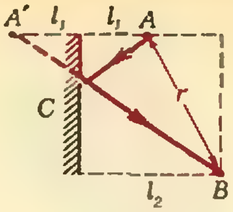


Рис. 14.

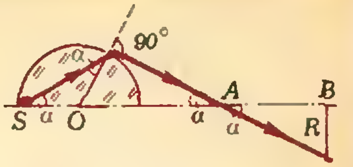


Рис. 15.

ная проекция скорости $v_y=at$. Через время $l/v-t$ координата $y=0$. Таким образом,

$$\frac{at^2}{2}+at\left(\frac{l}{v}-t\right)-\frac{a}{2}\left(\frac{l}{v}-t\right)^2=0.$$

Однозначно, так как $t<l/v$, получаем

$$t=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\,\frac{l}{v}.$$

3. Пусть x_1 — смещение правого тела влево, а x_2 — вправо от начального положения. Тогда из закона сохранения энергии получаем

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{kx_1^2}{2}+\mu mgx_1,$$

$$\frac{kx_1^2}{2}=\frac{kx_2^2}{2}+\mu mg(x_1+x_2).$$

Требование сдвига левого груза дает условие

$$kx_2=\mu mg.$$

Решая систему трех уравнений, получаем

$$x_1=3x_2,\ \text{и}\ v=\mu g\sqrt{15m/k}.$$

4. За время τ кузнечик, распрямляя ногу длиной l, набирает скорость v и затем взлетает на высоту H:

$$\frac{v\tau}{2}\sim l,\ v\sim\sqrt{2gH}.$$

Средняя мощность кузнечика

$$N\sim\frac{E_{\text{кин}}}{\tau}\sim\frac{mv^2}{2\tau}.$$

Отсюда

$$\frac{N}{m}\sim\frac{v^3}{4l}\sim\frac{(2gH)^{3/2}}{4l}.$$

Полагая $l\sim3\cdot10^{-2}$ м, $H\sim1$ м, $g=10$ м/с^2, имеем $N/m\sim1$ кВт/кг.

5. Вследствие охлаждения банки на ней конденсируются пары воды и создают помутнение отражающей поверхности. Вместо отражения в определенном направлении свет начинает рассеиваться в довольно широком диапазоне углов. В итоге освещенность экрана в районе первоначального зайчика уменьшается.

Вариант 3

1. Максимальное расхождение лучей, выходящих из шара вправо, определяется явлением полного отражения света (рис. 15):

$$n\sin\alpha=1,\ \alpha=\arcsin(1/2)=30^\circ.$$

Тогда

$$x=|AO|+|AB|=R/\sin30^\circ+R/\operatorname{tg}30^\circ=$$
$$=R(2+\sqrt{3}).$$

2. Пусть p_2 — большее давление, а p_1 — меньшее. По закону Бойля — Мариотта

$$p_2l/2=pl\ \text{и}\ p_1\cdot3l/2=pl.$$

Второй закон Ньютона дает

$$m\omega^2l/2=(p_2-p_1)S.$$

Решая систему, получаем

$$\omega=2\sqrt{\frac{2pS}{3ml}}.$$

3. Рассмотрим небольшой промежуток времени Δt. За это время к аноду подлетят $N=I\Delta t/e$ электронов (здесь e — заряд электрона) и сообщат ему импульс $P=mvN$. Скорость v электрона у анода определим из закона сохранения энергии $mv^2/2=eU$. Согласно второму закону Ньютона,

$$F\Delta t=\Delta P,\ \text{или}\ F\Delta t=mvI\Delta t/e.$$

Отсюда, с учетом связи $I=cU^{3/2}$, найдем

$$F=\frac{I}{e}mv=c\sqrt{\frac{2m}{e}}\,U^2.$$

Таким образом, отношение сил

$$F/F_0=(U/U_0)^2=4.$$

4. Выберем самую простую физическую модель (рис. 16): будем считать, что угол отклонения косточки от вертикали в момент встречи с другой косточкой невелик и от толчка следующая косточка начинает падать, но на запас энергии толчок практически не влияет. По закону сохранения энергии (с учетом малости угла φ)

$$\frac{mv^2}{2}\sim mg\left(\frac{l}{2}-\frac{l\cos\varphi}{2}\right)\sim$$
$$\sim mgl\sin^2\frac{\varphi}{2}\sim\frac{mgl\varphi^2}{4}\sim\frac{mgx^2}{4l}.$$

Тогда

$$v\sim x\sqrt{\frac{g}{2l}},\quad v_{x\,\text{средн}}\sim\frac{v}{2}\sim\frac{x}{2}\sqrt{\frac{g}{2l}}\ \text{и}$$

$$T=100\frac{x}{v_{x\,\text{средн}}}\sim100\sqrt{\frac{8l}{g}}.$$

При $l\sim5$ см $T\sim20$ с.

5. Вследствие многократных отражений от обеих поверхностей толстой пластины (рис. 17) наблюдается несколько вышедших по обе стороны пластины пучков, последовательно ослабленных, так как каждый раз при встрече с поверхностью пластины пучок частично отражается поверхностью, а частично преломляется. Самыми яркими, как видно из рисунка, должны быть самые крайние пятна.

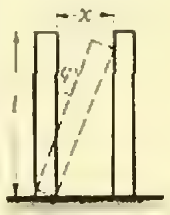


Рис. 16.

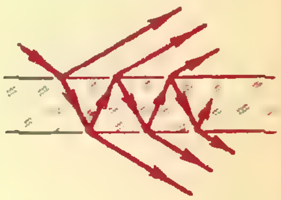


Рис. 17.

Московское высшее техническое училище имени Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $\frac{3+\sqrt3}{2}$. 2. $x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$ $(k\in Z)$. 3. $\{-1\}$.
4. $]0;3]$. 5. $R=\frac{a}{18}$.

Вариант 2

1. $108=6\cdot18$. 2. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2=(-1)^{l+1}\frac{\pi}{18}+\frac{l\pi}{3}$ $(k, l\in Z)$. 3. $\{2\}$. 4. $]-\infty;2[\cup]3;4[$.
5. $\pi\frac{r^2\sqrt3}{2}\left(1+\sqrt3+\frac{2\sqrt6}{3}\right)^2$.

Физика

1. $S_{max}=\pi v_0^4/g^2=314$ м².
2. $v=\sqrt{v_0^2(1-Mm/(m+M)^2)-2gR}\approx2$ м/с.
3. $x_m\leqslant(m+M)\mu g/(2k)=0{,}1$ м.
4. $h_m=Q(1-T_0/T)/(mg)=8{,}45$ м (здесь $T_0=273$ К, $T=473$ К).
5. $\varphi_m=\arccos(1-m\omega_0^2l/(4qE))=60°$.
6. $R=2\mathcal{E}_2r/(\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2)=1$ Ом.
7. $I=B(S_0-S)/(R\tau)=4$ мкА.
8. $\beta=\arcsin(1/2\sqrt3)\approx17°$.
9. $A=hc/\lambda-eU\approx2\cdot10^{-19}$ Дж $\approx1{,}25$ эВ.
10. Кроме нейтрона образуется еще ядро атома гелия ${}^4_2\mathrm{He}$. Полная энергия равна $E=E_0N_Am/M\approx\approx8{,}5\cdot10^{11}$ Дж, где $M=2\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса дейтерия.

Московский архитектурный институт

Математика

Задачи устного экзамена

1. $|\cos\alpha-\cos\beta|$.
2. а) 1; б) $\frac{\sqrt2}{16}(\sqrt3+1)$; в) $\frac{1}{16}$.
4. а) $\{1;2\}$; б) $\left\{0;\frac12\right\}$; в) $\left\{\frac{\pi}{6}(3n\pm1)\right\}$, $n\in Z$; г) $\{-2\}$.
5. а) $]-\infty;-2[\cup]2-\log_2 3;+\infty[$.
б) $\left]-\infty;-\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right[\cup]2;+\infty[$.
в) $\left]-\frac54;-1\right[\cup]-1;0[\cup]0;1[\cup]5;+\infty[$.
7. $\{(1;5), (5;1), (2;3), (3;2)\}$.
8. $n_1=0$, $n_2=1$.

Физика

1. $\Delta m=\varrho Va/(g+a)\approx7{,}8$ кг.
2. $a=k\Delta l/m=0{,}5$ м/с².
3. $t=\sqrt{\frac{2h}{g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\sin\alpha}}\approx2{,}1$ с.
4. $F_т=(3/4)^2mg\approx66$ Н.
5. $T=m(g\cos\alpha+v^2/l)\approx3{,}6$ Н.
6. $F=\frac{(MgL+mg(2L-l))\cos\alpha}{2h}$.
7. $A=2mgh$.
8. $N=\frac{mgh}{t\eta/100\%}\approx20{,}4$ кВт.
9. $A=mg(H+h)-\varrho Vgh\approx150$ Дж.
10. $T=2\pi\sqrt{\Delta l/g}\approx0{,}4$ с.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 4)

1. В первом случае — при любом соотношении радиусов, во втором — никогда, поскольку одна из шестеренок должна вращаться сразу... в две противоположные стороны (см. рисунок 18).

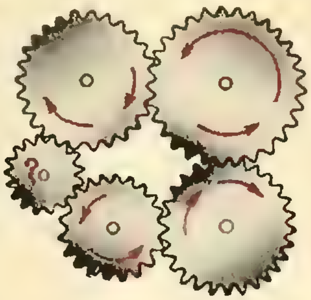


Рис. 18.

2. Рассмотрим три квадратика, примыкающих к одной из вершин куба. Очевидно, что все они обязаны иметь разный цвет. Из этого замечания и следует утверждение задачи.

3.
$$\begin{array}{r}+\begin{array}{r}85679\\85679\end{array}\\\hline 171358\end{array}.$$

4. Первые два действия над числом можно заменить умножением его на 21, а всю процедуру — умножением на число $21\cdot481=10\,101$. Ясно, что при умножении на 10 101 из любого двузначного числа получается шестизначное число, записывающееся, как троекратное повторение первоначального числа.

5. Цифра 2 бывает на первом месте в течение 4 часов (от 20.00 до 00.00). В остальные 20 часов она бывает на втором месте 2 часа (от 02.00 до 03.00 и от 12.00 до 13.00). В оставшиеся 18 часов цифра 2 бывает на третьем месте по 10 минут, а в остальные 50 минут каждого часа еще 5 раз по одной минуте на четвертом месте, итого по 15 минут в каждый из 18 часов, то есть 4 часа 30 минут. Всего получаем

4 ч + 2 ч + 4 ч 30 мин = 10 ч 30 мин.

Для цифр 0 и 1 аналогично получаем 15 часов 00 минут, для цифры 3 — 8 часов 15 минут, для цифр 4 и 5 — по 7 часов 30 минут, для остальных цифр (6, 7, 8 и 9) — по 4 часа 12 минут.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 2)

Задание 3 (Рудаковский — Ботвинник, чемпионат СССР, 1945 г.). **1... К:с1 2. Лb:c1 Л:c1 3. Л:c1 Фh6!** На первый взгляд, двойной удар не опасен, так как есть защита — **4. Фс4.** Но теперь ферзь перегружен, и черные пользуются этим. **4... Сb5 5. Фс5 b6!** Белые сдались.

Задание 4 (Тайманов — Воротников, Ленинград, 1978 г.). **1... Кf3!!** Выясняется, что чуть ли не все белые фигуры перегружены. Ни одна из них не может отвлечься от своих дел и безнаказанно взять коня на f3: 2. К4:f3 Кe3+, 2. К2:f3 Кe3+ 3. Крg1 К:d1 4. Л:d1 С:f4, наконец, 2. С:f3 Кe3+, и черные выигрывают. **2. Л:f3 Фh4! 3. Лg3 Фh1+ 4. Лg1 Кe3+ 5. Крf2 Фh2+**. Белые сдались.

Победители шахматного конкурса 1983 года

Победителями конкурса признаны: *С. Александров* (п. Черноголовка Московской обл.), *М. Ахмадеева* (с. Еткуль Челябинской обл.), *Г. Бедный* (Бердичев), *А. Боярский* (Бендеры), *В. Воронцов* (Ижевск), *В. Гаевский* (Бендеры), *М. Германов* (с. Чаши Курганской обл.), *Г. Гончаренко* (Киев), *И. Грачев* (Москва), *В. Гриндей* (Черновцы), *В. Ефимов* (п. Сазоново Вологодской обл.), *А. Каган* (Ташкент), *Б. Калинский* (с. Нижнедевицк Воронежской обл.), *О. Кальченко* (Норильск), *С. Катаргин* (Омутнинск), *И. Кваша* (Новочеркасск), *С. Киречко* (Жданов), *В. Колпаков* (Сухуми), *Д. Красиков* (Ростов-на-Дону), *М. Креймер* (Житомир), *Г. Леонов* (Курган), *Н. Малик* (Баку), *П. Малюта* (Львов), *В. Москаленко* (Ворошиловград), *К. Мусаханян* (с. Суренаван Арм. ССР), *Р. Нижегородцев* (Харьков), *Н. Пархоменко* (Винница), *А. Рустамов* (Баку), *А. Рябов* (Куйбышев), *С. Самоленко* (Лубны), *А. Скороход* (Чернигов), *Д. Станкович* (Сараево, СФРЮ), *М. Федорив* (Львов), *А. Шаров* (Железногорск), *Р. Энхбат* (Улан-Батор, МНР), *А. Ярцев* (ст. Брюховецкая Краснодарского края).

Редакция поздравляет победителей. Все они награждаются дипломами журнала «Квант», книгой А. Е. Карпова и Е. Я. Гика «Неисчерпаемые шахматы» с автографами авторов и им присваивается II разряд по шахматам.

Поправка

В «Кванте» № 4 на с. 27 по вине типографии на девятой строчке правой колонки пропущена формула

$$y = x^2 \cdot \ln x^3.$$

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, $\boxed{\text{П. Л. Капица}}$, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. К. Гуров, М. Б. Дубах, В. С. Коваль, А. Я. Коршунов, Н. С. Кузьмина, Ю. П. Мартыненко, Э. В. Назаров, А. А. Орехов, А. Е. Остаев, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина

Фото представили:
А. Н. Виленкин, Э. А. Смирнов

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Е. В. Сидоркина

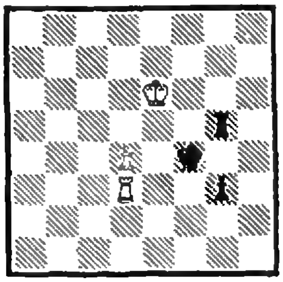
103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54
Сдано в набор 21.3.84. Подписано к печати 19.4.84
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Усл. кр. от. 23,8
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,56. Т-09726
Цена 40 коп. Заказ 688 Тираж 179382 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

«БЕРМУДСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК» В ЦЕНТРЕ ДОСКИ

В прошлом году мы рассказывали об успехе советских гроссмейстеров Г. Каспарова и В. Смыслова в четвертьфинальных матчах претендентов. Уверенно провели они и полуфинальные поединки.



В. Корчной — Г. Каспаров

Это положение возникло в шестой партии матча. Белые сделали естественный ход **63.d5** — ведь в эндшпиле пешка должна идти вперед. Если теперь 63 g2?, то 64. Лd4+ Крf3 65 Лd1 g1Ф 66 Л:g1 Л:g1 67. d6 с ничьей. Однако промежуточный шах **63...Лg6+!** разрушил надежды белых. Только после **64. Кре 7** (64. Крf7 g2 65. Лd1 Лd6 с неотвратимой угрозой 66. Л:d5) пешка тронулась с места — **64... g2 65. Лd1 Кре5 66. d6 Ле6+ 67. Крd7 Л:d6+ 68. Л:d6 g1Ф.** Ферзь легко справляется с ладьей, и белые вскоре сдались.

Оказывается, в позиции на диаграмме белые могли этюдно спастись посредством 63. Лd1! (Первым это обнаружил шахматный мастер и кандидат химических наук С. Розенберг.) Изюминка маневра ладьи состоит в том, что черному королю пока что недоступно поле e5 — пешка «d» сохранила контроль над ним. Чтобы попасть на это поле, королю придется двигаться по треугольнику f4—e4—e5 В пешечных окончаниях король, перемещаясь по треугольнику, часто обеспечивает победу. В данном же случае, наоборот, он бы упустил ее. 63... Кре4 64. d5 Лg6+ 65. Кре7 Кре5. В результате белые могли выиграть важный темп, которого им так не хватило в партии, и сыграть 66. d6 с простой ничьей.

Сравняв счет, Каспаров на глазах преобразился и одержал вслед за этой победой еще три — белыми. Матч был убедительно выигран со счетом 7:4 Таким образом, не исключено, что судьбу поединка решил «бермудский треугольник», скрытый в самом центре шахматной доски. Предлагаем вам ознакомиться еще с одной победой Каспарова, в девятой партии матча. И здесь его соперника погубил треугольник.

Г. Каспаров — В. Корчной
Каталонское начало

1. d4 Кf6 2. c4 e6 3. g3 d5 4. Сg2 dc 5. Кf3 Кbd7 6. 0—0 Лb8. В первой партии Корчной решил все дебютные проблемы при помощи неожиданного фианкеттирования слона, правда, на королевском фланге. Теперь он применяет ту же идею на ферзевом фланге, но с гораздо меньшим эффектом. **7. a4 b6 8. Кfd2!** Этот ход белых, типичный для закрытых позиций, здесь выглядит весьма нешаблонно. Белых не смущает, что многие их фигуры еще не вступили в бой, и они делают второй ход одним и тем же конем. **8... e5.** После 8... Сb7 9. С:b7 Л:b7 ладья на b7 выглядит неэстетично, но в конце концов ей все равно придется оказаться на этом поле. **9. К:c4 ed 10. Ф:d4 Сc5 11. Фd3 0—0 12. Кc3.** К игре подключился второй конь. Черные больше не хотят терпеть белого слона на большой диагонали и разменивают его. **12...Сb7 13. С:b7 Л:b7 14. Фf3 Фa8.** Итак, ладья переместилась по треугольнику a8—b8—b7, и неестественность расположения черных фигур видна теперь невооруженным глазом. Каспаров легко и изящно превращает свой перевес в очко. **15. Сf4 a6 16. e4 Лa7 17. Кd5 b5 18. Кa5 ba 19. Лfc1 Сd4 20. Л:a4 С:b2 21. Кe7+ Крh8 22.Лc2 Фe8 23. Л:b2 Ф:e7 24.Кc6 Фc5 25.К:a7 Ф:a7 26.e5 Кg8 27.Сe3 Фa8 28.Ф:a8 Л:a8 29.f4 Кe7 30.Лd2. Черные сдались.**

Приведем теперь седьмую партию другого матча. В ней дело обошлось без вмешательства геометрии.

В. Смыслов — З. Рибли
Ферзевый гамбит

1.d4 Кf6 2.Кf3 e6 3.c4 d5 4.Кc3 c5 5.cd К:d5 6.e3 Кc6 7.Сd3 Сe7 8.0—0 0—0 9.a3 cd 10.ed Сf6 11.Сe4 Кce7 12.Кe5 g6 13. Сh6 Сg7 14.С:g7 Кр:g7 15.Лc1 b6 16.К:d5. В позиции с изолированной пешкой у белых размены, как правило, входят в планы черных. Таким образом, белые как будто идут навстречу пожеланиям соперника. Но не спешите с выводами. **16...К:d5 17.С:d5 Ф:d5 18.Лc7 Сb7 19.Фg4.** Белая ладья проникла на седьмую горизонталь, и это решает исход поединка. **19...Лad8 20.Лd1 a5 21.h4 Лc8 22.Лd7 Фe4 23.Фg5 Сc6 24.f3 Фf5 25.Лa7 Сa4 26.Лe1 Лc2 27.b4 Сb3 28.ba ba 29.Лe4 h6 30.Фe3 Лb2 31.Лg4 g5 32.hg h5.**

Действия белых настолько ясны и понятны, что комментарии не требуются. В сильном цейтноте Рибли придумал способ обострить ситуацию, но логика игры Смыслова достигает полного торжества. **33.Лg3 h4 34.Лg4 h3 35.g6 h2+ 36.Кр:h2 Лh8+ 37.Крg3 Л:g2+ 38.Кр:g2 Фc2+ 39.Фf2 Лh2+ 40.Кр:h2 Ф:f2+ 41.Крh3 Фf1+ 42.Лg2.** Здесь партия была отложена, и у черных оставались надежды на вечный шах Однако Рибли сдался без доигрывания, убедившись при анализе, что максимум, на что может рассчитывать, это два-три шаха... Защиты от хладнокровного g6:f7, Лa8 и f8Ф у черных нет.

После этой победы Смыслова судьба матча была практически решена — все оставшиеся встречи закончились вничью и Смыслов выиграл матч со счетом 6,5:4,5.

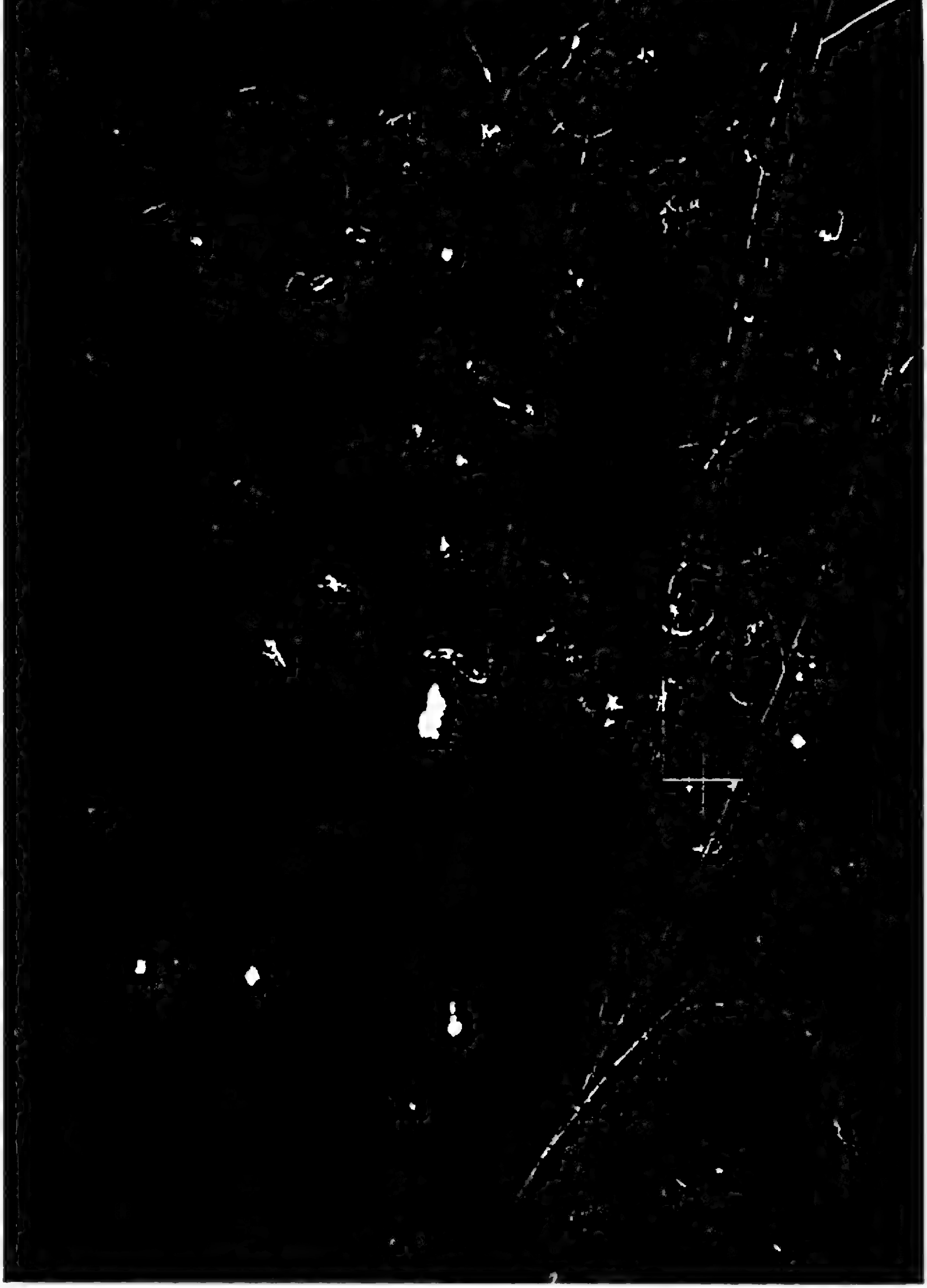
Конкурсные задания

9. Белые: Крd2, п. п. b4, d3; черные: Крf3, п. b5. Белые начинают и выигрывают.

10. Белые: Крe7, Лd4; черные: Крe5, п. d5. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 июля 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 9, 10»)

По итогам шахматного конкурса 1984 года победителям будут присуждаться спортивные разряды: за 12 решенных заданий (из 24) — третий разряд, за 16 — второй разряд.

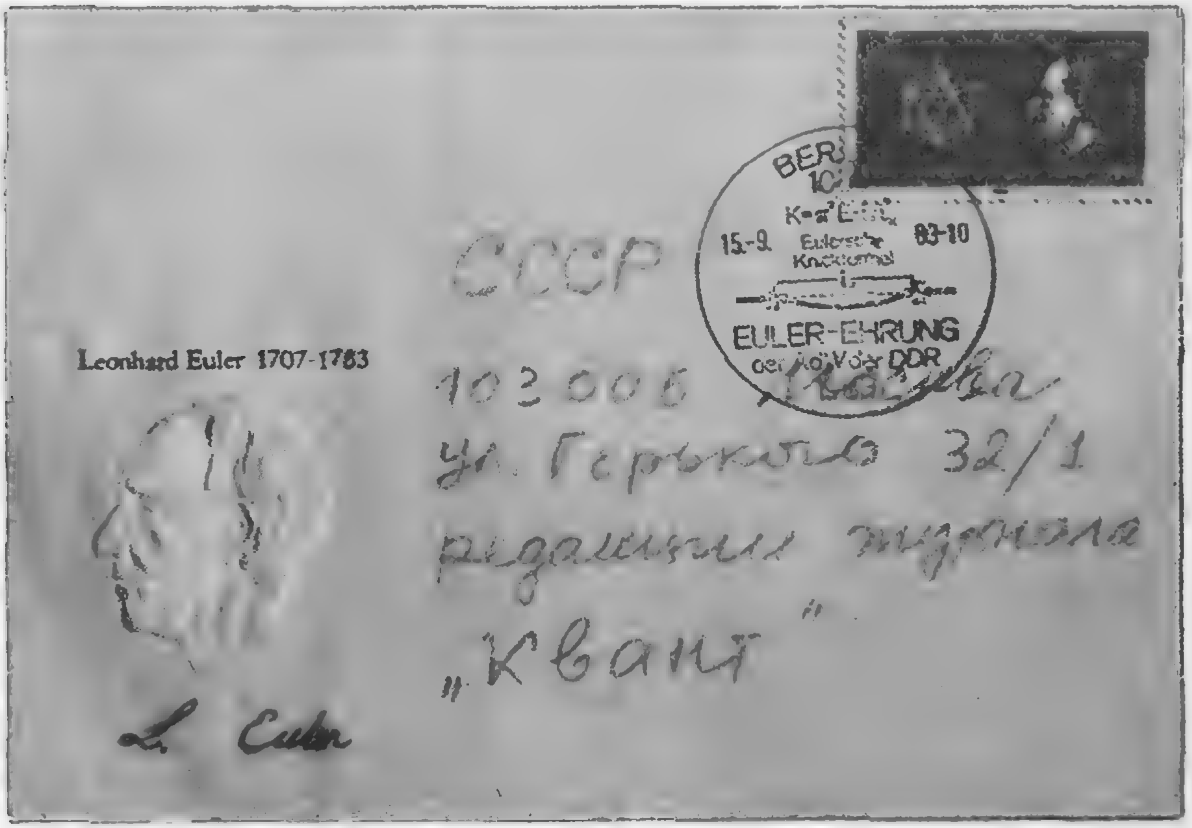


Перед вами фотография треков заряженных частиц, зарегистрированных в пузырьковой камере. Одни треки — одиночные, пересекающие все поле фотографии и соответствующие частицам, которые попадают в камеру извне. Другие — это парные треки (похожие на бараньи рога), закрученные в противоположные стороны. Они начинаются в точках внутри камеры и соответствуют рождению электронно-позитронных пар при столкновении γ-квантов с ядрами атомов жидкого вещества, заполняющего камеру. О том, как происходит процесс образования электронно-позитронной пары и обратный ему процесс аннигиляции электрона и позитрона, можно прочитать в статье «Физика 8, 9, 10», опубликованной в этом номере журнала.

Цена 40 коп.
Индекс 70465

В сентябре 1983 года во всем мире отмечалось 200-летие со дня смерти великого петербургского математика Леонарда Эйлера (1707—1783). Специально созданный Эйлеровский комитет при Академии наук ГДР провел приуроченную к этой дате научную конференцию с участием зарубежных математиков. К открытию конференции была выпущена памятная медаль из мейсенского фарфора (см. снимок ниже), вышла в свет марка с портретом Эйлера и одной из наиболее знаменитых его формул $e-k+f=2$, конверты с факсимиле его подписи и тисненым портретом, были организованы специальные почтовые гашения. Такой конверт был прислан в редакцию А. Я. Халамайзером — участником конференции, посвященной памяти Эйлера.

LEONHARD EULER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER DDR
EULER-KOMITEE BERLIN 1983



Leonhard Euler 1707-1783

L. Euler

СССР

103006 Москва
ул. Горького 32/1
редакция журнала
„Квант"

BERLIN
15.-9. 83-10
Eulersche Knickformel
EULER-EHRUNG der AdW der DDR

НОМЕР
6

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант **6** 1984

Основан в 1970 году

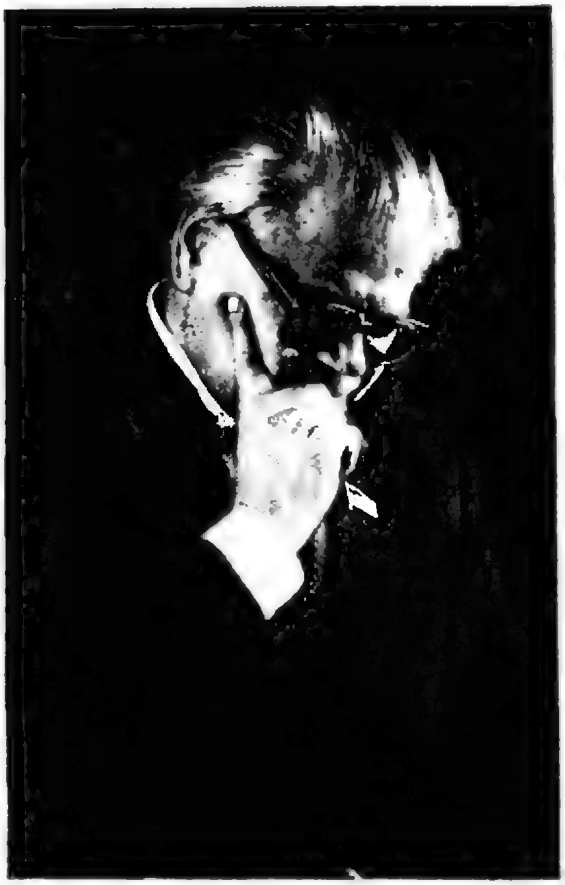
Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	Беседа с академиком А. А. Логуновым	A talk with academician A. A. Logunov
5	*К. Л. Самаров, В. М. Уроев.* Модель Пуанкаре	*K. L. Samarov, V. M. Uroev.* Poincaré's model
12	*П. Б. Бернштейн.* От Солнца до Земли	*P. B. Bernstein.* From Sun to Earth
19	*А. Б. Гончаров.* Решетки и зоны Бриллюэна	*A. B. Goncharov.* Lattices and Brillouin zones
	Новости науки	**Science news**
11	Зачем может понадобиться нейтрино?	What can neutrino be used for?
	Наш календарь	**Our calendar**
18	Космологические взгляды Джордано Бруно	Giordano Bruno's cosmological views
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
24	*С. Л. Гаврилов.* Фонтаны в парках и дома	*S. L. Gavrilov.* Fountains in parks and at home
	Математический кружок	**Mathematics circle**
28	*Ю. И. Ионин, А. И. Плоткин.* Выбор модуля	*Yu. I. Ionin, A. I. Plotkin.* Choosing the modulus
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
30	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
31	Задачи	Problems
32	Задача в картинках	A problem in pictures
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
33	Задачи М866—М870; Ф878—Ф882	Problems M866—M870; P878—P882
36	Решения задач М851—М855; Ф862—Ф866	Solutions M851—M855; P862—P866
44	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
	Геометрическая страничка	**Geometric page**
46	Эвольвенты	Evolvents
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
48	*Ю. А. Самарский.* Движение по окружности	*Yu. A. Samarski.* Circular motion
	Информация	**Information**
52	МАН «Искатель»	"The researcher" Junior academy of sciences
54	**Варианты вступительных экзаменов**	**College entrance examination problems**
60	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь *(45)*	**Miscellaneous** *(45)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	ЭВМ против чемпиона мира *(3-я с. обложки)*	Computer vs. world champion *(3rd cover page)*

Снимок солнечной короны, который воспроизведен на первой странице обложки, был сделан во время полного солнечного затмения 31 июля 1981 года вблизи поселка Шортанды в Казахстане. По виду короны можно судить об активности Солнца. О том, как влияет солнечная активность на различные явления на Земле, рассказано в статье «От Солнца до Земли» (с. 12). Фото Г. М. Никольского (СССР) и С. Кучми (Франция).

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1984



Мы предлагаем нашим читателям встречу с ректором Московского государственного университета, вице-президентом АН СССР, известным физиком-теоретиком академиком А. А. Логуновым. Интервью у А. А. Логунова взял член редакционной коллегии нашего журнала кандидат физико-математических наук С. С. Кротов.

Беседа с академиком А. А. Логуновым

— Анатолий Алексеевич, вы возглавляете крупнейший вуз страны. Не могли бы вы вкратце охарактеризовать Московский государственный университет — каким вы его видите сегодня, каким хотели бы видеть его завтра?

— Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова — крупнейший центр науки, образования и культуры. В университете учатся около 27 тысяч студентов. Коллектив преподавателей, научных и других сотрудников насчитывает свыше 25 тысяч человек, из них свыше тысячи профессоров и докторов наук. Ежегодно Московский университет оканчивают около 5 тысяч молодых специалистов. В аспирантуре университета обучаются свыше 4 тысяч человек. За время существования аспирантуры в МГУ подготовлено свыше 20 тысяч специалистов высшей научной квалификации. Четверть ученых, работающих в системе Академии наук СССР,— выпускники МГУ. В настоящее время в Московском университете работают свыше 120 академиков и членов-корреспондентов АН СССР и союзных республик.

В нашем университете представлены практически все основные направления современной науки. В его стенах возник целый ряд научных школ, получивших мировую известность. Говоря о дальнейшем развитии университетской науки, мы понимаем, что не все ее области мы можем развивать на собственной экспериментальной базе. Поэтому мы не ставим себе цели иметь в университете, скажем, крупнейшие ускорители или реакторы. Но мы всесторонне развиваем сотрудничество с крупными научными центрами, и это позволяет нашим ученым в подготовке кадров использовать громадный научно-технический потенциал страны и одновременно творчески участвовать в решении наиболее важных проблем.

Однако пока нельзя утверждать, что научный потенциал мы используем с максимальной эффективностью. Еще недостаточна оснащенность наших лабораторий современной вычислительной техникой. Большие шаги в этой области предпринимаются. За последние несколько лет мы удвоили свои вычислительные мощности. Вычислительные машины широко внедряются в учебный процесс, студенты почти всех естественных специальностей обучаются обращению с быстродействующей вычислительной техникой. Но останавливаться на достигнутом мы не собираемся, ведь это только начало.

— Бытует мнение, что молодежь сейчас тяготеет к гуманитарным наукам; якобы наметилось охлаждение к физике и математике. Сказывается ли это на конкурсе на естественные факультеты?

— Должен сказать, что конкурс на естественные факультеты в среднем не уменьшается. Однако уровень подготовки абитуриентов, поступающих, скажем, на физический или механико-математический факультет, на мой взгляд, не достаточно высок. Многие школьники непосредственно перед поступлением в вуз усиленно готовятся самостоятельно, решают задачи, тренируются дополнительно. Но основной багаж знаний и навыков должна давать школа. А как показывают результаты вступительных экзаменов, зачастую абитуриентов ставят в тупик простейшие тригонометрические уравнения, плохо обстоит дело с техникой алгебраического счета, умением делать оценки, в целом культура вычислений стала ниже. Это заставляет нас несколько снижать уровень сложности экзаменационных вариантов. Сейчас задачи, предлагаемые абитуриентам, проще, чем, скажем, десять лет назад. Может быть, общее понимание школьниками каких-то вопросов сейчас и лучше, но именно техника зачастую страдает и очень существенно.

Я уже сказал, что конкурс на естественные факультеты в среднем не уменьшается. Но тот факт, что он не растет, не может нас радовать. Я думаю, что в какой-то момент мы, ученые, ослабили свое внимание к средней школе, и это сказалось на подготовке школьников. По этому вопросу я уже выступал на сессии Верховного Совета СССР. То, что многие ведущие ученые страны сейчас проявляют большой интерес к проблемам преподавания математики в средней школе, надеюсь, в скором времени изменит сложившуюся ситуацию. Несомненно, кардинальную роль в улучшении среднего образования будет иметь реформа, к осуществлению которой приступает вся страна.

— Поговорим теперь о тех, кто, успешно сдав вступительные экзамены, проучился положенные годы в МГУ. Что ждет их после окончания университета?

— Тот, кто хорошо учится и успешно оканчивает МГУ, может не беспокоиться. Он всюду найдет себе применение — или в системе Академии наук, или у нас в университете, или в отраслевых научно-исследовательских институтах, или в ведущих отраслях производства. Главное — хорошо учиться. К сожалению, еще попадаются студенты, которые просто занимают чужие места. Этого, конечно, быть не должно; по этому поводу нам есть над чем подумать. Учеба никогда не должна быть в тягость, и если она в тягость, то это значит, что студенту необходимо заняться чем-то другим, найти дело по душе и в то же время необходимое обществу.

— Известно, что университетское образование отличается фундаментальностью, широтой. Но выпускник, скажем, физического факультета должен сразу после окончания университета включаться в сегодняшнюю, современную науку, участвовать в решении конкретных научных проблем. Поэтому уже в процессе обучения необходимо вводить студента в проблематику, возникшую совсем недавно. Какое внимание вы, как заведующий кафедрой физики высоких энергий и одновременно лектор важнейшего курса теоретической физики — электродинамики, уделяете этим вопросам?

— Научить, как пользоваться общими методами, дать фундаментальные знания — это главная задача университетского образования. Ведь научить всему — невозможно, важно дать глубокие представления о физических явлениях, выработать творческий подход к изучаемым законам и уравнениям, умение понимать границы их применимости. После окончания университета такой подход позволит выпускникам достаточно быстро адаптироваться в соответствующей узкой области знаний, суметь творчески обогатить ее достижениями науки в других областях и сделать весомый вклад в развитие науки.

— Анатолий Алексеевич, а когда у вас пробудился интерес к физике и математике? Почему вы выбрали физику?

— Физику, нужно сказать, я выбрал не сразу. Сначала мне нравилась математика. В школе у нас был очень хороший учитель математики, который постоянно предлагал интересные задачи. Атмосфера на уроках была деловая и дружелюбная. Мы очень любили математику, любили учителя, всегда старались его порадовать. Физика преподавалась совсем на другом уровне. Особого интереса у меня она не вызывала. В те годы мы думали больше об авиации. В журнале «Математика в школе» я прочитал, что авиация — это на девять десятых математика. Поэтому после школы я решил пойти учиться в авиационный институт. Уже позднее, в институте, я почувствовал, что это не моя специальность, что мне интересны именно те вопросы, которые на лекциях и семинарах не рассматривались. Например, мы изучали катодную лампу, формулы, описывающие ее работу. Меня интересовали скорее не сами формулы, которые нам приводили, а то, откуда они берутся, насколько они точны и где границы их применимости. Мне хотелось все это глубже понять. И тогда я решил заняться делом по душе. Сдал экстерном экзамены и перевелся в Московский университет на физический факультет.

В университете я должен был бы учиться на пятом курсе, но решил все же пойти на четвертый — мне хотелось лучше прочувствовать дух университета, его специфику. Мне нравились практически все предметы, которые нам преподавали, и на все занятия я ходил с большим удовольствием, хотя некоторые мои сокурсники считали какие-то лекции скучными, маловажными.

Именно в университете состоялось мое настоящее знакомство с теорией Максвелла, оставившее неизгладимый след на всю жизнь. Еще раньше меня поразила красота и простота уравнений Максвелла. Сначала было просто восхищение перед ними. Затем я начал изучать различные явления, которые они описывают. На меня произвела сильнейшее впечатление исключительная общность, фундаментальность теории. Меня начал интересовать вопрос: насколько правильно, точно существующие теории, уравнения описывают мир? Где граница наших знаний о мире? Постепенно я почувствовал свой основной интерес в науке. Хотя я тогда не знал, что существуют физики-теоретики.

Потом я попал к очень хорошему учителю — академику Н. Н. Боголюбову, и дальнейшее мое формирование как научного сотрудника происходило в «школе» Боголюбова.

— Анатолий Алексеевич, известно, что ваша научная деятельность связана с такими глобальными проблемами, как квантовая теория поля, физика высоких энергий, теория относительности. Не могли бы вы рассказать о современном состоянии этих областей науки?

— Рассказать коротко и в доступной школьникам форме — довольно сложно. Но я попытаюсь сделать это так, чтобы читатель мог составить хотя бы общее представление.

Наше время можно, пожалуй, сравнить с эпохой создания квантовой теории, с двадцатыми — тридцатыми годами нашего столетия, когда создавалась та наука, которая составляет основу современного научно-технического прогресса. Мы являемся свидетелями кардинального продвижения физической науки.

Так же как атом, который с древности считался неделимым, оказался сложным образованием, элементарные частицы оказались не элементарными. Мы еще полностью не знаем, из чего они состоят, но уже само по себе открытие их сложного строения позволило объяснить многие явления микромира.

Элементарные частицы, как известно, являются носителями взаимодействий. Поэтому, вскрывая роль и свойства элементарных частиц, мы глубже изучаем фундаментальные взаимодействия в природе. А изучение свойств элементарных частиц неразрывно связано с созданием мощных ускорителей.

Около 50 лет назад были открыты так называемые слабые взаимодействия, и лишь совсем недавно было показано, что слабые взаимодействия — это не что иное, как электромагнитные взаимодействия. Выяснилось, что распад нейтрона обязан электромагнитным взаимодействиям. Виртуальными продуктами этого распада являются бозоны, масса которых в 100 раз больше массы нейтрона. Ранее их не могли наблюдать, так как не хватало энергий для их рождения. После того как бозоны были обнаружены экспериментально, удалось объединить в единую схему слабые и электромагнитные взаимодействия.

Теперь намечается более широкое объединение, включающее сильные взаимодействия. Но для решения этой проблемы очень важны эксперименты при сверхвысоких энергиях. Именно они должны помочь теоретикам в построении теории, чтобы светом сознания осветить глубины микромира.

Далее встанет вопрос с гравитационным взаимодействием. Но это, безусловно, следующий шаг.

Сейчас, как известно, происходит сближение физики элементарных частиц и космологии. Оказывается, что

(Окончание см. на с. 27)

Модель Пуанкаре

Кандидат физико-математических наук
К. Л. САМАРОВ,
Кандидат физико-математических наук
В. М. УРОЕВ

> *Ни одна геометрия не может быть более истинна, чем другая.*
> Анри Пуанкаре

Ко второму веку до нашей эры завершилось аксиоматическое построение геометрии, изложенное Евклидом в тринадцатитомном труде «Начала». Накопленный поколениями практический опыт измерения углов, длин и площадей превратился в стройную математическую теорию с аксиомами и постулатами, теоремами, определениями, доказательствами. Выявились основные действующие лица геометрии: точка, плоскость, прямая.

Но нечто таинственное ощущалось в этих абстрактных понятиях. Практическая деятельность людей, особенно в то время, не могла подсказать, что же происходит с прямыми линиями очень далеко, «на бесконечности». Возможно, по этой причине знаменитую аксиому о параллельных (V постулат) Евклид сформулировал осторожно: *если прямая пересекает две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении этих двух прямых они пересекутся с той стороны, где углы меньше двух прямых.*

По-видимому, древние опасались оперировать с бесконечностью, считая плоскость как бы склеенной из привычных сознанию одинаковых конечных кусков. Это не случайно. Согласно господствовавшим тогда представлениям, Земля считалась большим плоским диском. Настолько большим, что измерить его было невозможно. Да и не нужно, не было в этом необходимости — слишком уж узкими были пространственные границы познанного мира.

В эпоху дальних странствий и географических открытий эти границы значительно раздвинулись; но потребовались еще столетия, прежде чем изменение представлений об окружающем мире сказалось на развитии геометрии. Так или иначе, в XVIII веке, в книге английского педагога Плейфера, постулат о параллельных появился в своей современной, более смелой и лаконичной, формулировке: *через точку вне прямой можно провести только одну прямую, не пересекающую данную и лежащую с ней в одной плоскости.*

В двадцатых годах XIX века рождается геометрия Лобачевского*). В ней сохраняются все аксиомы и постулаты геометрии Евклида, кроме одного — пятый постулат заменяется на следующее утверждение: *через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную и лежащие с ней в одной плоскости.*

Почти все современники Лобачевского были уверены, что его геометрия — ошибочна. Они не только отрицали ее применимость к внешнему миру, но считали ее порочной изнутри — *внутренне противоречивой,* то есть считали, что при дальнейшем развитии теории из постулата о параллельных, принятого Лобачевским, неизбежно будут получены противоречащие друг другу утверждения.

Мы не будем касаться здесь сложного вопроса о связи геометрии Лобачевского с внешним миром — он раскрывается во всей глубине лишь в теории относительности, созданной в начале нашего века**). Наша цель иная — рассказать о том, как математикам удалось снять с геометрии Лобачевского обвинение в противоречивости. Именно для этой цели в конце прошлого века французский математик А. Пуанкаре построил модель геометрии Лобачевского (1882 г.). Но чтобы рассказать, что представляет собой модель Пуанкаре и почему она устанавливает непротиворечивость геометрии Лобачевского, нам придется сначала заняться свойствами... обыкновенной окружности.

Построение ортогональных окружностей и прямых

Назовем две линии — окружности или прямые — *ортогональными,* если они пересекаются под прямым углом. Напомним, что под углом между двумя окружностями понимается угол между касательными, проведенными к ним в точке пересечения, под углом между прямой и окружностью — угол между прямой и касательной, проведенной к окружности в точке пересечения.

Заметим, что прямая, ортогональная окружности, обязательно проходит через ее центр, и касательная к одной из двух ортогональных окружностей в точке их пересечения проходит через центр другой (рис. 1). Это наблюдение позволяет легко решить следующие две задачи на построение, которые нам пригодятся в дальнейшем.

1. *Через данные точки A и B окружности γ провести ортогональную ей окружность.*

Решение. Центр искомой окружности находится на пересечении перпендикуляра, опущенного из центра O окружности γ на прямую AB и перпендикуляра к прямой OA, восставленного из точки A (см. рис. 1). Решение единственно, если перпендикуляры пересекаются. Если перпендикуляры не пересекаются, то точки A и B диаметрально противоположны (подумайте, почему) и задача решения не имеет; однако *в этом случае сама прямая AB ортогональна* окружности γ.

2. *Дана окружность γ и точка O_1 вне ее. Провести окружность с центром O_1, ортогональную окружности γ.*

Решение. Если A — одна из точек пересечения окружности, построенной на отрезке OO_1 как на диаметре, с окружностью γ, то $(O_1, |O_1A|)$ — искомая окружность.

Следующая задача на построение, нужная нам (через произвольные две точки плоскости провести окружность, ортогональную данной окружности), уже не решается так просто. Для ее решения — и для других целей — нам потребуется важное понятие инверсии.

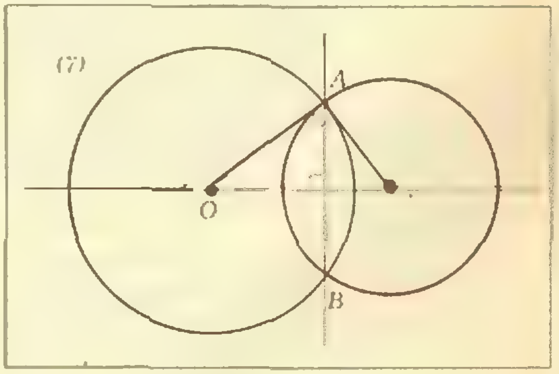


Рис. 1.

---

*) Об истории ее становления см. Квант, 1982, № 11, с. 12 и № 12, с. 7.

**) Об этом написано, например, в книге «Релятивистский мир» В. Н. Дубровского, Я. А. Смородинского, Е. Л. Суркова (М., Наука, 1984).

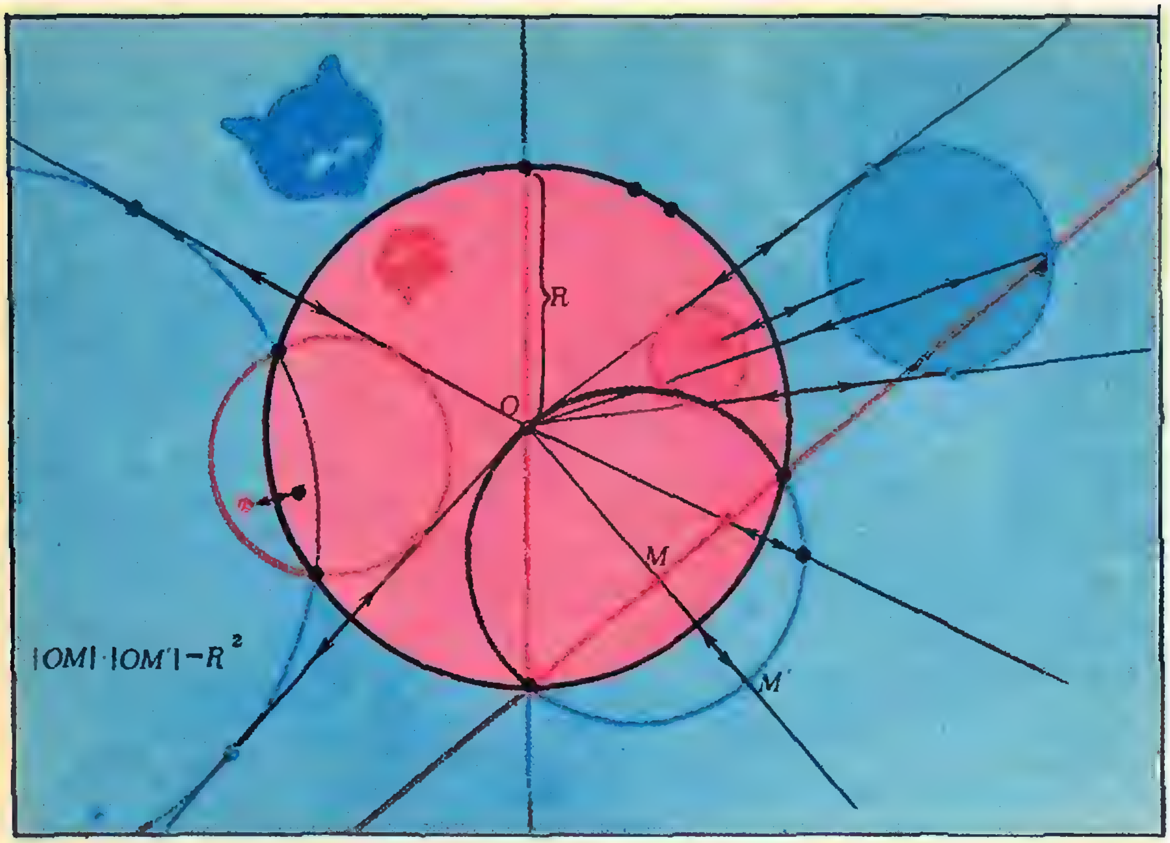


Рис. 2.

Инверсия и ее свойства

Инверсией (*O, r*) (или *симметрией относительно окружности* с центром *O* и радиусом *r*) называется преобразование плоскости, при котором каждой точке *M* ставится в соответствие такая точка *M'* на луче *OM*, что

$$|OM|\cdot|OM'|=r^2.$$

Точку *O* называют *центром инверсии* (это единственная точка, где преобразование не определено), число *r* — *радиусом инверсии*, а окружность (*O, r*) — *окружностью инверсии*.

Инверсия — действительно своего рода симметрия относительно окружности: она «выворачивает» внутренность окружности в ее внешность (и наоборот), своеобразно искажает форму и размеры фигур (см. иллюстрации к статье «Инверсия» в «Кванте» № 5, с. 26). Основные свойства инверсии (*O, R*) показаны на рисунке 2, где можно проследить, что

1) *точки, лежащие внутри окружности инверсии, переходят в точки, лежащие вне нее, и наоборот;*

2) *точки окружности инверсии, и только они, остаются на месте;*

3) *прямые, проходящие через центр инверсии, переходят в себя;*

3') *прямые, не проходящие через центр инверсии, переходят в окружности;*

4) *окружности, проходящие через центр инверсии, переходят в прямые;*

4') *окружности, не проходящие через центр инверсии, переходят в окружности;*

5) *величина углов между линиями сохраняется;*

6) *инверсия, как и другие виды симметрий, обратна самой себе; другими словами, двукратное применение инверсии возвращает все точки (кроме O) на место.*

Эти свойства несложно доказываются; читатель может найти их доказательства в статье «Инверсия» в предыдущем номере «Кванта», однако для понимания дальнейшего их разбор не обязателен. Приведем (уже с доказательством) еще одно важное свойство инверсии.

7) *Любая окружность, ортогональная окружности инверсии, переходит в себя при этой инверсии.*

Доказательство. По свойству 4'), данная окружность γ переходит в окружность γ'. По свойству 2), точки пересечения *A* и *B* окружности γ с окружностью инверсии остаются на месте, значит, γ' проходит через *A* и *B*. По свойству 5), окружность γ' ортогональна окружности инверсии. Но через A, B проходит единственная окружность, ортогональная окружности инверсии (см. задачу на построение 1), значит, γ' и γ совпадают.

Обратите внимание, что окружность γ переходит в себя, но только две ее точки (A и B) остаются на месте; точки окружности γ, лежащие внутри окружности инверсии, перескакивают (в точки окружности γ) вне нее и наоборот. Оказывается, что этим свойством обладают только окружности, ортогональные окружности инверсии:

8) *Если окружность, отличная от самой окружности инверсии, переходит в себя, то она ортогональна окружности инверсии.*

Доказательство. В силу свойства 1), данная окружность γ пересекает окружность инверсии в некоторых точках A и B, которые остаются на месте (свойство 2)). Проведем через центр инверсии O и точку A прямую OA. Если A — не единственная общая точка (OA) и γ, а они пересекаются еще в некоторой точке D, то они пересекутся еще в образе D' точки D, так как (OA) переходит в себя (свойство 3)). Трех точек пересечения у прямой и окружности быть не может, значит, A — единственная общая точка γ и (OA), то есть (OA) — касательная к γ. Это значит, что окружность γ ортогональна окружности инверсии.

Можно дать и другое доказательство. Пусть φ_1 и φ_2 — дуги, на которые точки A и B разбивают окружность γ. При нашей инверсии дуги φ_1 и φ_2 переходят друг в друга. В силу сохранения углов при инверсии, углы, образованные окружностью инверсии с дугами, равны, а в сумме они составляют $180° = 2 \cdot 90°$.

Построение инверсий

Забегая вперед, можно сказать, что инверсии в модели Пуанкаре будут играть роль перемещений. Поэтому нам предстоит научиться находить инверсии, обладающие теми или иными наперед заданными свойствами. Мы их сформулируем в виде очередных задач на построение.

3. *Для данной точки X внутри окружности γ с центром Q построить окружность, ортогональную γ, относительно которой точки X и Q симметричны.*

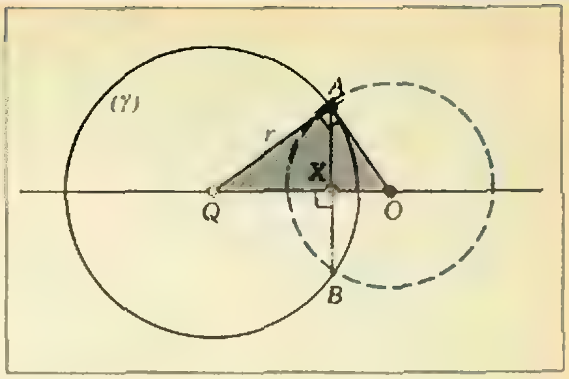


Рис. 3.

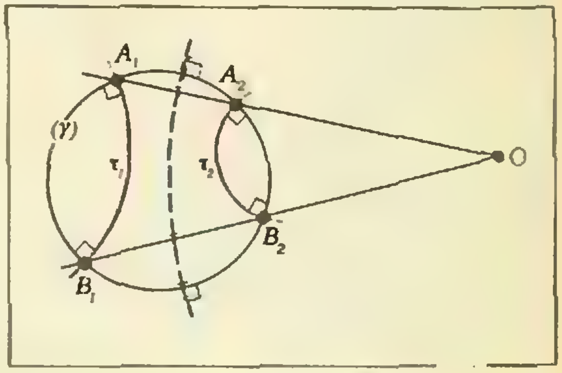


Рис. 4.

Указание. Восставим перпендикуляр из точки A к прямой QA до пересечения с (QX) в точке O (рис. 3). Искомая окружность — $(O, |OA|)$. Для доказательства воспользуйтесь подобием прямоугольных треугольников.

4. *Для двух данных окружностей τ_1 и τ_2, ортогональных окружности γ, построить окружность или прямую, ортогональную γ, относительно которой окружности τ_1 и τ_2 симметричны.*

Решение. Пусть A_1, B_1 и A_2, B_2 — точки пересечения окружностей γ и τ_1, γ и τ_2 соответственно. Если прямые A_1A_2 и B_1B_2 параллельны, то τ_1 и τ_2 симметричны относительно диаметра окружности γ, перпендикулярного этим прямым. Если же прямые A_1A_2 и B_1B_2 пересекаются в точке O, то согласно задаче 2 можно провести окружность с центром O, ортогональную окружности γ (рис. 4). Эта окружность — искомая. Действительно, симметрия относительно нее переводит окружность γ и прямые A_1A_2 и B_1B_2 в себя, то есть меняет местами точки A_1 и A_2, B_1 и B_2. Углы при инверсии сохраняются (свойство 5)), а через данные две точки проходит ровно одна окружность, ортогональная данной (задача 1), поэтому τ_1 переходит в τ_2.

Замечание. Утверждение задачи остается в силе, если вместо обеих окружностей τ_1, τ_2 или вместо одной из них рассматривать прямые, ортогональные окружности γ, то есть ее диаметры.

5. *Построить инверсию, переводящую данную окружность γ в себя и оставляющую на месте две ее внутренние точки A, B.*

Решение. Если точки A и B лежат на одном диаметре, задача не имеет решения (однако симметрия относительно этого диаметра оставляет на месте A и B и переводит γ в себя!). Если A и B не лежат на одном диаметре, мы рассмотрим инверсию относительно окружности τ, переводящую A в центр O окружности γ (такая инверсия есть — см. задачу **3**). При этом точка B перейдет в некоторую точку B'. Через точки O и B' проведем диаметр δ окружности γ. Повторно делая инверсию относительно τ, вернем все точки на свои места (свойство 6)). Диаметр δ перейдет в дугу окружности δ', ортогональную γ. Симметрия относительно окружности δ' — искомая.

Попутно мы решили упомянутую выше задачу о проведении окружности или прямой, ортогональной данной, через две точки. Сформулируем ее следующим образом.

Следствие. *Через две точки A и B, лежащие в круге λ или на его границе, можно провести ровно одну окружность или прямую, ортогональную граничной окружности γ круга λ.*

Это утверждение действительно следует из решений задач **5** и **1**.

Модель Пуанкаре

Модель Пуанкаре — это одна из возможных евклидовых моделей геометрии Лобачевского.*) Что представляет собой такая модель? Это конкретная небольшая часть геометрии Евклида, в которой выделены специальные понятия, играющие роль основных понятий геометрии Лобачевского — таких, как точка, прямая, перемещение и т. п. Выделенные понятия выбираются с таким расчетом, чтобы для них выполнялись все основные положения (аксиомы) геометрии Лобачевского.

— Как такое может быть? — спросит читатель. — Разве могут аксиомы Лобачевского выполняться в геометрии Евклида?

Оказывается, могут. Дело в том, что в роли основных понятий геометрии Лобачевского выступают не обычные точки, прямые, перемещения евклидовой геометрии, а более специальные понятия. Для задания модели, таким образом, используется своего рода «словарь» — перечень основных понятий геометрии Лобачевского и их «перевод»: соответствующие специальные понятия из выбранной части евклидовой геометрии.

Вот как выглядит этот словарь для модели Пуанкаре.

Плоскостью Лобачевского называется внутренность круга λ обычной (евклидовой!) плоскости, ограниченного окружностью γ с центром Q. *Точка* плоскости Лобачевского — это любая внутренняя точка круга λ. *Прямая линия* — любой диаметр (без концов) круга λ или лежащая внутри λ дуга окружности, ортогональной окружности λ. (Таким образом, хорды окружности γ, не совпадающие с диаметром, «прямыми» не являются.)

Далее, ***перемещением*** плоскости Лобачевского называется любое из следующих основных преобразований круга λ:

1) поворот круга λ относительно его центра Q на любой угол;

2) симметрия круга λ относительно диаметра или любой окружности, ортогональной его граничной окружности γ;

а также любая композиция этих преобразований.

Оказывается (мы это подробнее проверим ниже), что при таком толковании слов «точка», «прямая», «плоскости», «перемещение плоскости» выполняются все аксиомы геометрии Лобачевского. А это как раз и значит, что геометрия Лобачевского — непротиворечива. Почему? Вот как это объясняет сам автор модели, Анри Пуанкаре:

«Возьмем теоремы Лобачевского и переведем их с помощью нашего словаря, как мы переводим немецкий текст на французский язык с помощью немецко-французского словаря. Мы получим, таким образом, теоремы обыкновенной геометрии. (...) Стало быть, как бы далеко мы ни развивали следствия из допущений Лобачевского, мы никогда не натолкнемся на противоречие. В самом деле, если бы две теоремы Лобачевского находились в противоречии, то то же самое имело бы место и для переводов этих двух теорем, сделанных при помощи нашего словаря; но эти переводы суть теоремы обыкновенной геометрии (...), которая свободна от противоречий».

---

*) Первую такую модель построил в 1868 г Э Бельтрами (1835—1900) Хорошо известна также модель Ф Клейна (1849—1925)

Это рассуждение показывает, что *из непротиворечивости евклидовой геометрии следует непротиворечивость геометрии Лобачевского.* Именно в этом смысле Пуанкаре говорил, что ни одна геометрия не может быть более истинна, чем другая.

Таким образом, чтобы установить непротиворечивость геометрии Лобачевского, осталось проверить, что все ее аксиомы выполнены для построенной выше модели.

Проверка аксиом

Мы не будем проверять все аксиомы геометрии Лобачевского для модели Пуанкаре — это скучное и утомительное дело, а ограничимся доказательством лишь нескольких характерных основных положений геометрии Лобачевского. Именно следующих.

I. *Любое перемещение переводит «плоскость» λ в себя, причем «прямые» переходят в «прямые».*

II. *Через любые две «точки» плоскости λ проходит одна и только одна «прямая».*

III. *«Перемещения плоскости» λ сохраняют углы между «прямыми».*

IV. *Любые две «прямые» конгруэнтны, то есть существует «перемещение плоскости», переводящее одну в другую.*

V. *Через каждую точку, не принадлежащую данной «прямой», проходят по крайней мере две «прямые», не имеющие с ней общих точек.* (Это «аксиома параллельных» Лобачевского; рис. 5).

Докажем утверждения I—V.

I. Поворот круга λ вокруг его центра и симметрия относительно его диаметров, очевидно, переводят λ в себя. Что же касается инверсии относительно любой окружности τ, ортогональной γ, то она переводит γ в себя (свойство 7)), притом две области, на которые τ разбивает λ, меняются местами, то есть λ переходит в себя.

II. Это вытекает из следствия задачи **5**.

III. Это верно для всех основных перемещений (см., в частности, свойство 5)), а значит, и для их композиций.

IV. Это следует из задачи **4**.

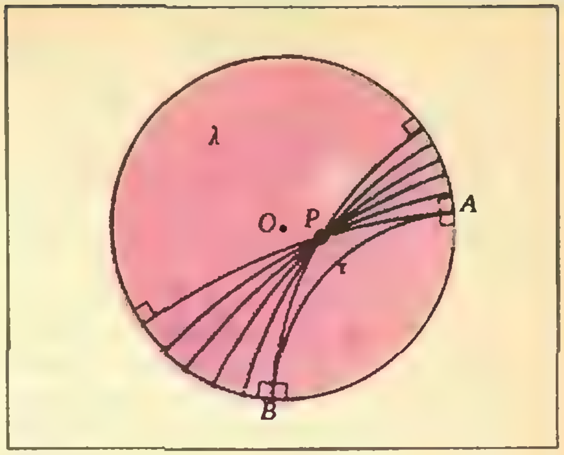


Рис. 5.

V. Пусть данная прямая τ пересекает γ в точках *A* и *B*. Рассмотрим сперва частный случай, когда данная точка не что иное, как центр *O* круга λ. Тогда диаметры (*OA*) и (*OB*) — прямые, не пересекающие τ. Напомним, что точки окружности γ, в частности точки *A* и *B*, «точками» «плоскости Лобачевского» не являются. Общий же случай сводится к рассмотренному частному случаю с помощью задачи **3**.

Итак, основные положения (I—V) геометрии Лобачевского доказаны в модели Пуанкаре. Тем, кто хотел бы дальше изучать геометрию Лобачевского на этой модели, в конце статьи мы предлагаем несколько задач. А пока ответим на один из вопросов, возникший еще в начале статьи.

А что же все-таки происходит «на бесконечности»?

Одно из преимуществ модели Пуанкаре состоит в том, что на ней — с нашей евклидовой точки зрения — можно увидеть таинственное множество «бесконечно удаленных» точек геометрии Лобачевского.

Покажем, что граничную окружность γ естественно рассматривать как «бесконечно удаленную окружность» плоскости Лобачевского λ. Для этого возвратимся ненадолго в обычную евклидову плоскость и посмотрим, как с помощью перемещений евклидовой плоскости сдвинуть заданную фигуру сколь угодно далеко от ее первоначального положения. Например, это можно сделать так. Выберем на евклидовой плоскости две параллельные несовпадающие прямые l_1, l_2 и отразим плоскость симметрично относительно пря-

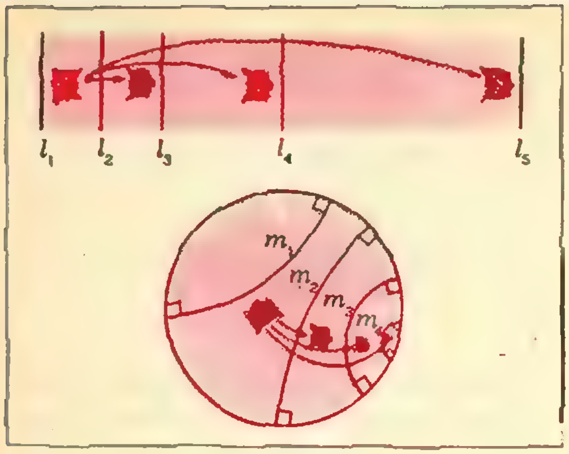


Рис. 6.

мой l_2. Тогда прямая l_1 перейдет в прямую l_3. Отразим плоскость симметрично относительно l_3, обозначим l_4 образ прямой l_1 при этом отображении. Продолжая дальше этот процесс, получим семейство параллельных прямых. *При отражении заданной фигуры относительно этих прямых последовательность ее образов уходит в бесконечность* (рис. 6).

Аналогичное построение можно выполнить на плоскости Лобачевского λ. Выберем две произвольные *параллельные* «прямые» m_1, m_2 и на каждом шаге вместо осевой симметрии будем производить симметрию относительно окружности. В результате возникает семейство ортогональных γ окружностей. При последовательном отражении в них произвольная фигура будет передвигаться все ближе и ближе к окружности γ (рис. 6). Точки окружности γ, таким образом, играют роль бесконечно удаленных точек.

Задачи

1. Докажите, что сумма углов «треугольника» в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского меньше 180°, а сумма углов «четырехугольника» — меньше 360°.

2. Докажите, что через данную точку A плоскости λ, *не принадлежащую «прямой» φ, можно* провести одну «прямую» ψ, ортогональную φ. (Точка пересечения «прямых» φ и ψ называется *ортогональной проекцией* точки A на прямую φ.)

3. Пусть «прямые» φ_1 и φ_2 пересекаются. Докажите, что ортогональной проекцией всех точек «прямой» φ_1 на (φ_2) (см. задачу 2) является *«отрезок прямой» φ_2, а не вся (φ_2), как* в евклидовой плоскости.

4. Докажите, что если «прямые» φ_1 и φ_2 плоскости λ параллельны, то есть не пересекаются, то может существовать лишь одна «прямая», ортогональная одновременно φ_1 и φ_2.

5. Докажите, что если три угла одного *«треугольника» в плоскости λ соответственно* равны трем углам другого «треугольника», то треугольники конгруэнтны в λ.

Зачем может понадобиться нейтрино?

В нарушение традиций здесь речь пойдет не об открытии, а о... фантазии. Фантазии, которая, если окажется реальностью, будет великолепной иллюстрацией того, как очень далекие сейчас от практики эксперименты могут привести к промышленным установкам.

Конечно, и раньше было множество примеров такого рода — когда-то атомный ледокол тоже казался фантазией. Но все-таки придумать, как можно заставить «работать» нейтрино, не так-то просто.

К сожалению, фантазия часто уводит в ложную сторону. Несколько лет назад, например, появились слухи о том, что пучки нейтрино использовались для связи с подводными лодками. *Другая версия связывала нейтрино с телепатией.* Да мало ли что могут придумать те, кто не обременяет себя ни доказательствами, ни сколько-нибудь правдоподобной аргументацией!

Почему же трудно найти практическое применение для нейтрино? Прежде всего потому, что они чрезвычайно слабо взаимодействуют с веществом. Так, *нейтрино, летящие от Солнца, на*сквозь пронизывают Земной шар, не отклоняясь от своего пути. С большим трудом на установке, которая состоит из огромного числа счетчиков, удается зарегистрировать нейтрино, пришедшие «с другой стороны» Земли.

Однако оказывается, что с увеличением энергии нейтрино вероятность взаимодействия растет. При энергии в несколько тераэлектронвольт (1 ТэВ = 10^{12} эВ) нейтрино, пролетая сквозь Землю, сталкивается хотя бы с одним атомным ядром. Вот это свойство нейтрино и предполагается использовать в пока еще фантастическом, но, возможно, в будущем реальном проекте.

*Идея проекта, высказанная испанским физи*ком де Рухало, состоит в том, чтобы энергичным пучком нейтрино «просвечивать» Землю и таким способом искать в ее глубинах, скажем, нефть или воду. Другими словами, предлагается использовать нейтрино подобно рентгеновским лучам!

Но где взять такие энергичные нейтрино? Оказывается, они возникают при распаде быстрых пи-мезонов, который происходит по схеме $\pi \to \mu + \nu$ (π — пи-мезон, μ — мю-мезон, ν — нейтрино). А откуда взять пи-мезоны? Тоже ясно — они возникают при взаимодействии протонов с ядрами мишени в ускорителе. Но, наконец, где найти такой ускоритель? *В этом-то* и суть проблемы.

В различных странах мира сейчас обсуждаются планы строительства ускорителей с энергией протонов порядка нескольких десятков тераэлектронвольт. Такие ускорители, вероятно, появятся уже в этом десятилетии. Сейчас к идее нейтринного просвечивания *отношение пока весьма скеп*тическое. Возможно, в будущем скептики изменят свою точку зрения.

Я. С.

От Солнца до Земли

Кандидат физико-математических наук
П. Б. БЕРШТЕЙН

Вылетали частицы гелия,
ядра стронция...
И чего оно не наделало,
это Солнце!
Прерывалось и глохло радио,
и бессовестно
врали компасы,
лихорадила
нас бессонница.
Гибли яблони, падал скот
от бескормицы.
Беспокойное
в этот год
было Солнце.

Эти строчки взяты из стихотворения замечательного поэта Семена Кирсанова «Солнце перед спокойствием». И в этом отрывке упомянуто большинство эффектов, изучением которых занимается солнечно-земная физика.

Давайте же последуем за поэтом и выясним, что же «наделало это Солнце». Но сначала поговорим о самом Солнце.

I

Солнце — звезда, находящаяся на расстоянии около 33 000 световых лет от центра Галактики, в одном из ее спиральных рукавов — в рукаве Ориона. Масса Солнца $M_\odot = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг; радиус $R_\odot = 6{,}96 \cdot 10^5$ км, и средняя плотность *вещества Солнца* $\varrho_\odot = 1{,}41 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3}, то есть в 4 раза меньше средней плотности вещества Земли. А сила тяготения на Солнце в 28 раз больше, чем на Земле.

Эти свойства — низкая средняя плотность и громадная сила тяготения — наиболее важны для понимания того, что происходит внутри Солнца. Изучение спектра излучения Солнца показало, что вещество Солнца состоит из тех же химических элементов, которые найдены на Земле.*) Температура внутри Солнца настолько высока, что в твердом и жидком состоянии вещества не могут там существовать, то есть Солнце представляет собой раскаленный газовый шар. Температура в недрах Солнца, по оценкам, должна быть выше 10^7 К. При таких температурах газ полностью ионизуется, превращаясь в плазму — вещество, состоящее из ионов и электронов. Так что Солнце — раскаленный плазменный шар. Столь высокая температура поддерживается за счет происходящих в недрах Солнца термоядерных реакций.

Выделяющаяся в реакциях тепловая энергия излучается во все стороны, и часть ее попадает на Землю.

Внешнюю часть Солнца называют солнечной атмосферой. По физическим особенностям — главным образом, по различным значениям плотности и температуры — в солнечной атмосфере выделяют три слоя: фотосферу, хромосферу и корону.

---

*) Напомним, что элемент гелий впервые был обнаружен при изучении спектра солнечного света, откуда и его название.

Фотосфера (по-русски — сфера света) — наиболее глубокий слой солнечной атмосферы, доступный нашим наблюдениям. Название — «сфера света» — очень хорошо иллюстрирует то значение, которое она имеет для нас, ибо от нее мы получаем бо́льшую часть света и тепла. Толщина фотосферы очень невелика — около 100 км, и этим обусловлены совершенно резкие очертания Солнца, похожие на очертания твердой поверхности. Уровень фотосферы интересен еще и тем, что именно здесь наблюдаются солнечные пятна, число и размеры которых служат наиболее яркими характеристиками солнечной активности.

Область над фотосферой характеризуется резко уменьшающейся плотностью. Называется эта область хромосферой (по-русски — «окрашенной сферой»). Во время полного солнечного затмения, когда интенсивный свет фотосферы экранируется проходящей между Солнцем и Землей Луной, хромосфера видна как кольцо красноватого цвета, окружающее диск Солнца. Такой цвет обусловлен тем, что хромосфера в значительной степени состоит из водорода, а у этого газа наиболее яркая видимая спектральная линия находится в красной области спектра.

Следующая область солнечной атмосферы — корона — видна во время полного солнечного затмения как великолепный венец белого цвета, контрастирующий с красноватым светом хромосферы. Солнечная корона состоит из разреженной плазмы с температурой порядка 10^6 К. Исследования показали, что постоянно истекающий от Солнца горячий корональный газ (плазма) доходит вплоть до Земли. Но плотность его у Земли столь мала, что он не может иметь сколь-нибудь существенного значения.

Непрерывное истечение коронального газа называют солнечным ветром. Солнечный ветер состоит в основном из ионов H^+ и $^4He^{++}$, но были обнаружены и другие составляющие, в том числе $^3He^{++}$, $^4He^+$, O^{+5}, O^{+6}, O^{+7}. Общепринятой теории, объясняющей физические процессы, происходящие в солнечном ветре, до сих пор не создано, хотя существует несколько гипотез, дающих различные значения для плотности — от 6,75 до 13 частиц/см^3 (при 0 °С и атмосферном давлении газа плотность $\approx 3 \cdot 10^{19}$ частиц/см^3), температуры — от $9 \cdot 10^4$ до $2{,}8 \cdot 10^5$ К и скорости солнечного ветра — от 165 до 350 км/с.

Солнце вращается около своей оси в том же направлении, что и Земля, но в отличие от Земли оно вращается не как твердое тело. Полярные области Солнца вращаются медленнее, чем экваториальные, — такое свойство называют дифференциальным вращением. Частота вращения на различных широтах Солнца приближенно определяется эмпирической формулой

$$\omega = \frac{1}{T_0}\left(1-\frac{1}{8}\sin^2\varphi-\frac{1}{6}\sin^4\varphi\right)$$ оборота

за земные сутки, где φ — гелиографическая широта, T_0 — продолжительность солнечных суток на экваторе; $T_0 = 26$ земных суток. Период вращения изменяется от 26 суток на экваторе до 37 суток на полюсах, где $\varphi = 90° = \pi/2$.

Из спектральных наблюдений известно, что вокруг Солнца существует магнитное поле. В полярных областях Солнца напряженность поля около 10^{-4} Тл, и векторы напряженности направлены в противоположные стороны. Однако, в отличие от земного магнитного поля, поле Солнца не симметрично. Источник его — сложные движения плазмы, которая представляет собой вещество с большой электропроводностью.

Наибольший интерес представляют участки солнечной поверхности, в которых напряженность магнитного поля достигает больших значений — 0,2—0,4 Тл. Такое сильное магнитное поле действует на движущиеся заряды плазмы, то есть на ионы и электроны, со значительной силой и тем самым препятствует их перемешиванию. Ведь движущиеся заряды это электрический ток, на который магнитное поле действует с силой, пропорциональной току и напряженности поля. В силу этого участки с сильным магнитным полем оказываются более холодными и при наблюдениях видны более темными. Называют эти темные «острова» пятнами. Площадь пятен обычно измеряют в миллионных долях площади полусферы Солнца (мдп). Солнечные пятна иногда достигают размеров до нескольких тысяч мдп, а самое большое из зарегистрированных пятен (наблюдалось 7 апреля 1947 года) имело площадь более 6000 мдп, то есть более 15 миллиардов квадратных километров! На такой площади могли бы поместить-

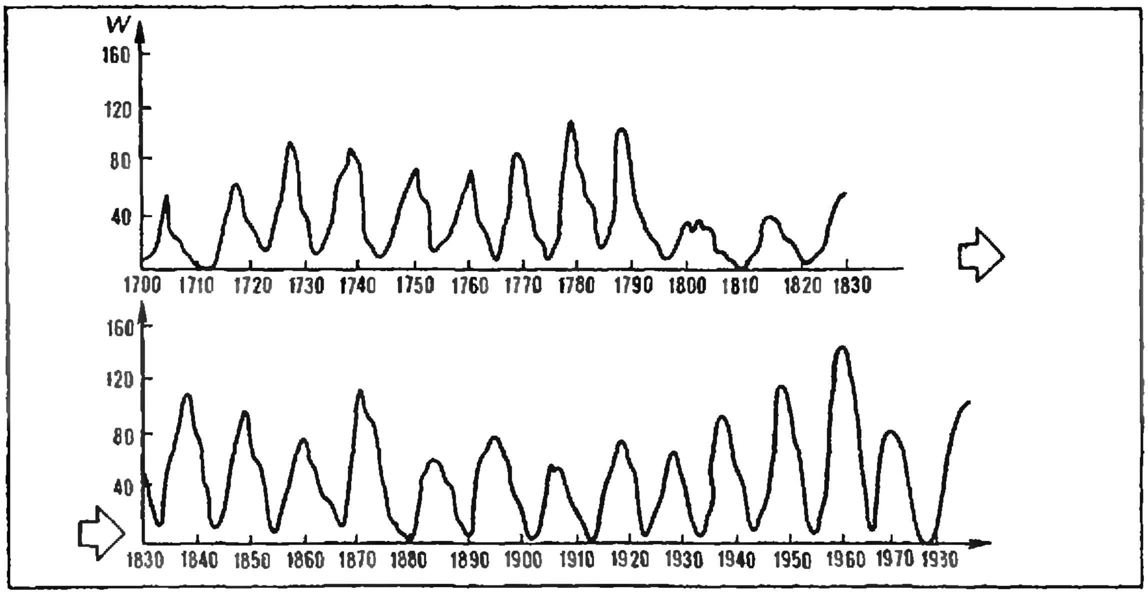


Рис 1

ся почти все планеты солнечной системы.

Большие пятна можно наблюдать даже с помощью небольшого бинокля. (Только не смотрите на Солнце, не защитив предварительно глаза!) Лучше всего сфокусировать изображение на белый экран, помещенный за окуляром. Если вам повезет, и вы направите прибор на Солнце во время нахождения на его наблюдаемой поверхности большой группы пятен, то вы сможете увидеть также вокруг пятен более яркие площадки — флоккулы. Если же очень повезет, то вы сможете увидеть, как вдруг около группы пятен возникает яркое свечение, захватывающее значительную площадь. Знайте, что вы увидели очень большую солнечную вспышку.

Солнечные вспышки зарождаются в нижних слоях солнечной короны, когда в сравнительно небольшой области за короткое время выделяется огромная энергия — до 10^{25} Дж (примерно столько же, сколько при взрыве $2 \cdot 10^{15}$ тонн стандартного взрывчатого вещества). Температура вещества в области вспышки может достигать 10^8 К. Вспышка сопровождается мощным излучением. Наибольшая интенсивность этого излучения приходится на рентгеновскую и ультрафиолетовую области его спектра, а также на видимую красную область спектра. И только самые мощные вспышки бывают видны в белом свете. Это очень редкое событие.

До настоящего времени еще нет удовлетворительной теории, объясняющей происхождение солнечных вспышек. Но многие ученые считают наиболее вероятной причиной вспышки так называемую аннигиляцию сильного магнитного поля в солнечной короне, при которой энергия магнитного поля переходит в кинетическую энергию заряженных частиц, составляющих корональный газ.

Многолетние наблюдения показали, что картина солнечных пятен меняется со временем. Бывают дни, когда пятен нет совсем, потом они появляются, растут, количество их увеличивается, достигает максимума, а затем уменьшается до минимума. Пятнообразовательная деятельность Солнца имеет периодический характер. В среднем этот период равен 11 годам, но вообще пятнообразование представляет собой очень сложное явление, и в действительности продолжительность цикла колеблется от 7 до 17 лет. Для характеристики активности Солнца используют так называемое число Вольфа W, которое определяется выражением

$$W = k(10f + g),$$

где g — число отдельных пятен на данный момент времени, f — число групп пятен, k — коэффициент пропорциональности, зависящий от конкретного прибора, использованного для наблюдения. На рисунке 1 представлен график изменения числа Вольфа со временем (с 1700 года наблюдения пятен ведутся регулярно).

II

Как известно, радиосвязь на Земле между пунктами, находящимися на большом расстоянии друг от друга, возможна только благодаря наличию в земной атмосфере хорошо электропроводящих слоев, называемых ионосферой. Слои эти расположены на высотах от ~70 до 400 км. Их электропроводность вызвана ионами и электронами, возникающими вследствие ионизации воздуха ультрафиолетовым излучением Солнца.

Возможность дальней радиосвязи обусловливается способностью ионосферы отражать радиоволны, которые могут, таким образом, уходить далеко за пределы видимого горизонта. Радиоволны отражаются от ионосферы потому, что она обладает электропроводностью. Точно так же, как металлы отражают видимый свет вследствие их большой электропроводности. В металлах велика плотность электронов (около 10^{22} электронов/см^3). Радиоволны разной частоты отражаются на различных высотах. Дело в том, что волна отражается от ионосферы, если частота ν волны меньше некоторой критической величины. Значение же этой критической частоты зависит от плотности электронов в ионосфере и определяется формулой

$$\nu = \frac{e^2}{m\varepsilon_0} n,$$

где e, m — заряд и масса электрона, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная, а n — плотность электронов. Волны с большей частотой проходят сквозь слой ионосферы, не отражаясь от нее. Ясно, что чем больше длина волны (чем меньше частота), тем при меньшей плотности заряженных частиц произойдет отражение.

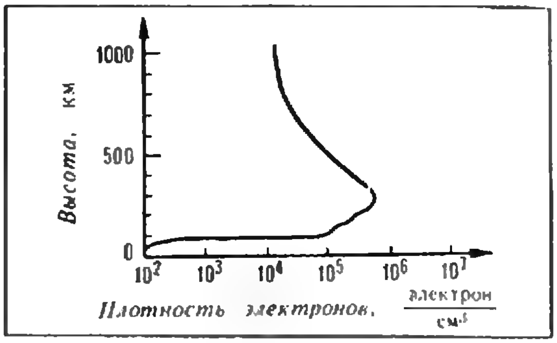


Рис. 2.

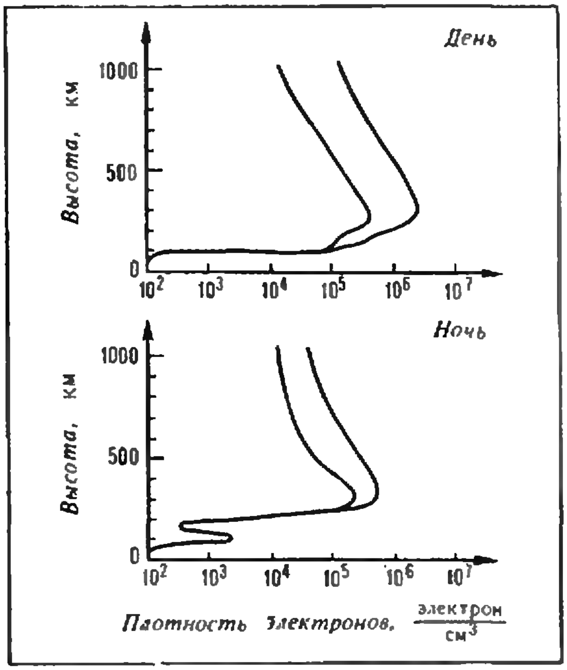


Рис. 3.

Плотность электронов в атмосфере различна на разных высотах (рисунок 2). Однако и значение электронной плотности на данной высоте постоянно меняется вследствие многих причин. Так как верхняя атмосфера ионизуется под действием солнечного излучения, то ясно, что наибольшая ионизация наступает в полдень, когда Солнце выше всего на небе. Наименьшая ионизация наблюдается ночью, незадолго до рассвета. Наверное, любители крутить ручки радиоприемника давно заметили, что радиостанция, которую днем можно услышать только на коротких волнах, ночью хорошо слышна и в средневолновом диапазоне. Если вы отметили этот эффект — знайте, что вы столкнулись с одним из эффектов солнечно-земной физики!

Разумеется, кроме суточных вариаций электронной плотности существуют еще и другие причины изменения плотности электронов. Попробуйте объяснить, как должна радиостанция изменять частоту радиовещания в зависимости от времени года и фазы цикла солнечной активности. Ответить на этот вопрос вам поможет рисунок 3, на котором представлено типичное распределение электронной плотности в атмосфере в моменты максимумов (правые кривые на рисунках) или минимумов (левые кривые) солнечного цикла.

Происходящие на Солнце вспышки также оказывают сильное влияние на ионосферу. Значительное увеличение интенсивности ультрафиолетового излучения во время вспышки приводит к повышению ионизации и, следовательно, плотности электронов в ионосфере. Радиоволны, которые до этого отражались от данного слоя, теперь могут проходить сквозь него без отражения (критическая частота возросла и превысила значение частоты радиоволны). Это явление называют замиранием радиосвязи. Замирания могут продолжаться от минут до нескольких часов. Предсказания свойств ионосферы для всей Земли содержат основные данные для составления любых сводок о средних условиях слышимости радиостанций. Зная свойства ионосферы, радисты могут выбрать частоты, которые вероятнее всего позволят установить радиосвязь. Но здесь существует очень серьезная проблема — прогноз изменений, возникающих в результате возмущений на Солнце.

III

С деятельностью Солнца связано и такое явление на Земле, как магнитная буря. Но, прежде чем рассказать о магнитных бурях, поговорим немного о магнитном поле Земли.

Геомагнитное поле, как известно, симметрично: картина силовых линий этого поля такая же, как у постоянного магнита (напомним, что источником магнитного поля Земли считают движения электропроводящего жидкого вещества, из которого состоит ядро Земли. Магнитная ось проходит через центр Земли и отклонена от оси вращения Земли приблизительно на 12° в сторону Тихого океана.

Испускаемый Солнцем поток заряженных частиц (солнечный ветер) попадает в магнитное поле Земли, которое действует на эти частицы так называемой силой Лоренца. Эта сила направлена перпендикулярно линиям магнитной индукции поля и направлению потока частиц. Под действием этой силы заряженные частицы отклоняются от своего первоначального направления, могут не попасть на поверхность Земли. Поток солнечной плазмы обтекает Землю и продолжает свое течение далеко за ней — как говорят, «на ночной» стороне. Линии магнитной индукции как бы сжимаются на «дневной» стороне. На поверхности Земли это воспринимается как усиление магнитного поля. Чем выше активность Солнца, тем больше усиливается геомагнитное поле — начинается магнитная буря. Теория утверждает, что магнитное поле Земли должно быть сосредоточено в определенной области, находящейся внутри потока солнечной плазмы. Эту область называют магнитосферой. Земля находится внутри магнитосферы (рисунок 4) на расстоянии 10—12 земных радиусов от дневной границы; за Землей (на «ночной» стороне) расположен так называемый «хвост» магнитосферы, причем, до сих пор не известно, замыкаются ли на «ночной» стороне линии индукции геомагнитного поля или происходит их «пересоединение» с линиями магнитной индукции межпланетного магнитного поля.

С «утренней» и «вечерней» стороны Земли располагаются так называемые нейтральные точки в магнитосфере. Это очень интересные точки. Здесь линии индукции геомагнитного поля как бы расходятся. В районе этих нейтральных точек находятся своеобразные «бреши» в магнитосфере. Магнитное поле в этих областях очень слабое, и некоторое количество заряженных частиц солнечного ветра проникает в магнитосферу. Здесь движением частиц управляет геомагнитное поле. Влияние поля приводит к тому, что частицы вовлекаются в постоянное смещение вокруг Земли вдоль магнитных параллелей. При этом положительно заряженные частицы смещаются с востока на запад, а отрицательно заряженные — с запада на восток. В результате этого процесса вокруг Земли создается кольцевой электрический ток, который создает собственное магнитное поле. Направлено это поле так, что, складываясь с собственным геомагнитным полем, оно приводит к его уменьшению. Ослабление поля — вторая фаза магнитной бури.

На поверхности Земли о магнитной буре можно судить по колебаниям стрелки компаса. Из-за изменения магнитного поля возникают дополнительные (паразитные) токи в линиях электропередачи; паразитные токи вмешиваются в сигналы телеуправления, работу телефонных и телеграфных аппаратов. Наибольшее впечатление производят происходящие во время магнитных бурь полярные сияния.

Полярные сияния возникают в результате столкновения быстрых заряженных частиц, проникших в магнито-

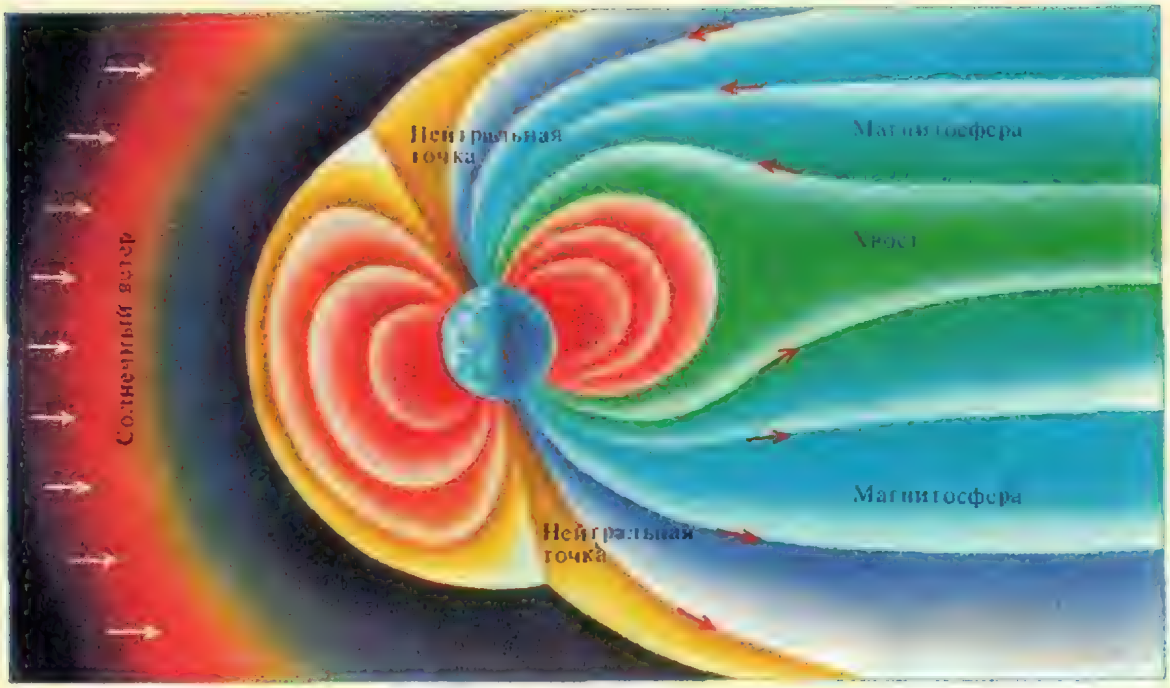


Рис. 4.

сферу, с различными нейтральными атомами или молекулами воздуха верхних слоев атмосферы. При этих столкновениях атомы ионизуются, то есть от них отрываются электроны. При обратном процессе, когда электрон снова соединяется с ионом, образуя нейтральный атом, излучается свет. Длина волны этого света зависит от сорта атомов. Так, кислород окрашивает небо в зеленый цвет, а темно-красное свечение обязано азоту.

Довольно давно было замечено, что геомагнитные возмущения и яркие полярные сияния бывают чаще и сильнее во время максимума солнечного цикла. Большинство возмущений удается уверенно связать с проходящими по диску Солнца пятнами или с мощными вспышками. Но в то же время точно такие же пятна проходят по диску, не вызывая геомагнитных возмущений; бывают сильные вспышки, не имеющие последствий на Земле. Поэтому приходится сделать вывод, что сами по себе солнечные пятна и вспышки непосредственно не связаны с геомагнитными возмущениями. Но есть один постоянный эффект, который свидетельствует о наличии потоков заряженных частиц, движущихся от Солнца. Это — тенденция магнитных бурь повторяться с периодом около 27 дней. Число это близко к периоду вращения Солнца. Отсюда следует, что солнечный «агент», их вызывающий, распространяется в виде ограниченного пучка, следующего за солнечным вращением. Интересно, что 27-дневная повторяемость ярче выражена во время минимума солнечной активности, когда «запятненность» мала. Эти таинственные области Солнца, вызывающие геомагнитные возмущения, называли М-областями, и долгое время не могли отождествить их с какими-либо определенными образованиями на Солнце. Ситуация несколько прояснилась в последнее время, когда были обнаружены так называемые корональные дыры. Такое название получили области солнечной короны с исключительно низкой плотностью и температурой. Эти области характеризуются низким уровнем излучения в крайнем ультрафиолетовом, рентгеновском микроволновом диапазонах. Предполагают, что наличие дыр связано со структурой магнитного поля Солнца — в окрестностях дыры поле направлено так, что оно не оказывает заметного влияния на движение заряженных частиц коронального газа, и именно из этой области в космическое пространство устремляются наиболее мощные потоки заряженных частиц.

IV

Наверное, многим школьникам и студентам приходила в голову мысль: «Эх, опоздал я родиться! Все в науке уже открыто». Что ж, действительно, многое уже сделано. Но наука о Солнце и его влиянии на Землю дает обширное поле для приложения своих знаний. С какими же нерешенными проблемами столкнутся будущие исследователи? Что им предстоит сделать?

1. Создать теорию солнечной цикличности, в частности — объяснить различную продолжительность циклов.

2. Внести полную ясность в теорию солнечных вспышек.

3. Разработать физически обоснованные методы прогноза различных проявлений солнечной активности.

4. Выяснить подробности физических процессов, приводящих к ионосферным и геомагнитным возмущениям.

5. Решить много других проблем, с которыми вы столкнетесь, если будете заниматься солнечно-земной физикой.

Послесловие

Конечно, в небольшой статье невозможно рассказать обо всех аспектах солнечно-земной физики. Но автор и не ставил перед собой такой задачи. Главная цель статьи — заинтересовать читателя проблемами этой важной науки. И можно считать, что цель эта достигнута, если вы хотя бы захотите прочитать рекомендуемую литературу.

1. Казимировский Э. С. *Волшебное зеркало планеты.* — Иркутск: Восточно-Сибирское книжное изд-во, 1978.

2. Дональд Г. Мензел. *Наше Солнце.*— Москва: Физматгиз, 1963.

3. *Солнечная и солнечно-земная физика.* Иллюстрированный словарь терминов под ред. А. Бруцека и Ш. Дюрана — Москва: «Мир», 1980.

Наш календарь

Космологические взгляды Джордано Бруно

(к 400-летию выхода в свет книги «О бесконечности, Вселенной и мирах»)

17 февраля 1600 года по приговору трибунала святой инквизиции был «предан смерти без пролития крови» (сожжен на костре) талантливейший мыслитель средневековья Джордано Бруно.

На протяжении долгих столетий в умах людей господствовали представления о мироздании, основанные на геоцентрической системе Аристотеля — Птолемея. Эта система была освящена средневековой церковью, так как находилась в хорошем согласии с религиозным учением. Всякое сомнение в истинности подобных представлений считалось ересью и сурово наказывалось.

Но в конце первой половины XVI столетия Николай Коперник обосновал гелиоцентрическую систему мира, доказав, что видимые перемещения небесных светил — движения кажущиеся, результат вращения Земли вокруг своей оси и ее обращения вокруг Солнца.

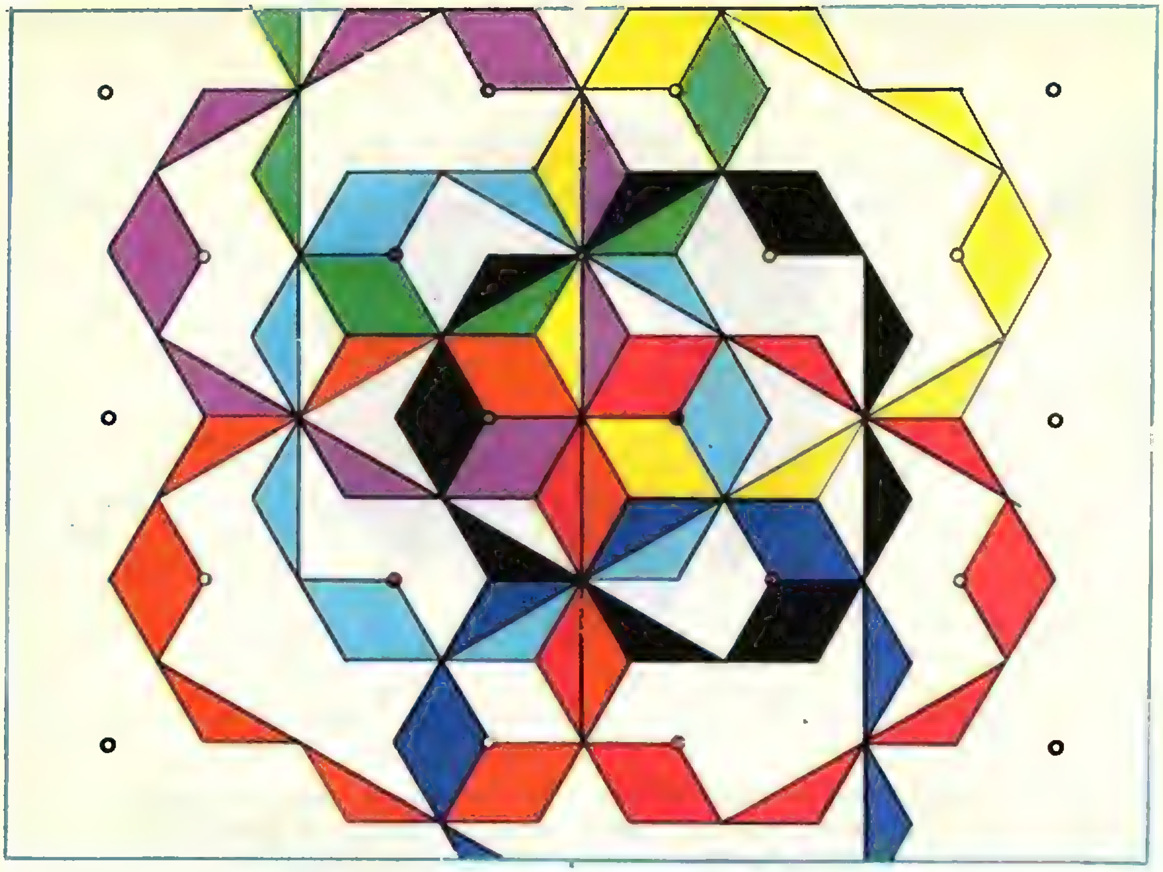
Однако мир Коперника все еще был ограничен сферой неподвижных звезд. Джордано Бруно пошел значительно дальше, отказавшись от неподвижности звезд и от замкнутой конечной Вселенной. Бруно решительно отверг и представления средневековой схоластики о двигателях, будто бы приводящих в движение небесные сферы.

Основные космологические взгляды Джордано Бруно были изложены им в книге «О бесконечности, Вселенной и мирах», написанной в Лондоне в 1584 году. В словах персонажей книги мы видим призыв Бруно, обращенный к самому себе:

«Проповедуй нам учение о бесконечной Вселенной. Низвергай во прах эти воображаемые своды и небесные сферы, которые будто бы должны отграничивать столько-то небес и стихий... Даруй нам учение о всеобщности земных законов во всех мирах и о единстве мировой материи. Ниспровергай теории о том, что Земля будто бы является центром мироздания. Разбей вдребезги внешние движители и границы так называемых небесных сфер. Распахни перед нами дверь, чтобы мы могли через нее взглянуть на неизмеримый и единый звездный мир».

Разумеется, многие положения, изложенные Джордано Бруно в его книге, представляли собой гениальные догадки. Не все выводы нашли подтверждение в ходе дальнейшего развития естествознания. Но главное состояло в том, что Бруно, исходя из достижений науки своего времени, построил картину мира, освобожденную от влияния схоластики и религиозных представлений, и тем самым создал важные предпосылки для развития нового естествознания. Не случайно на пьедестале памятника, установленного на Поле цветов в Риме, начертаны слова: «Джордано Бруно — от века, который он предвидел».

В. Н. Комаров



Решетки и зоны Бриллюэна

А. Б. ГОНЧАРОВ

В этой заметке мы познакомим читателей с некоторыми красивыми фактами из геометрии решеток. Наиболее приятной частью нашего рассказа будут картинки. Если в них как следует разобраться, сразу становятся ясными все конструкции и основные идеи доказательств.

Сразу же заметим, что задачи, о которых пойдет речь, возникли не случайно, а пришли из физики кристаллов. В конце заметки мы поговорим об этом подробнее.

А пока начнем с того, что отметим на плоскости все точки с целочисленными координатами — узлы квадратной решетки, и среди них выделим один «начальный» узел O. Для каждого из остальных узлов P проведем прямую, относительно которой узлы O и P симметричны, — серединный перпендикуляр к отрезку OP. Проведенные прямые разбивают плоскость на мелкие части (треугольники и выпуклые многоугольники). Припишем каждой из них натуральное число — *ранг* — по следующему правилу: часть, содержащая точку O (она имеет форму квадрата), получает *ранг 1*, части, граничащие с ней по стороне, — *ранг 2*, части, граничащие с ними по стороне (и отличные от уже рассмотренных), — *ранг 3* и т. д.

Раскрасим кусочки разных рангов с небольшими номерами в разные цвета (часть получившейся картинки показана на четвертой странице обложки). Оказывается, что области всех цветов имеют одинаковую площадь.

Проделав то же самое с решеткой из правильных треугольников (рис. 1), а также для решетки из 6-угольников (рис. 2), убедимся, что справедлива та же закономерность: площади областей, закрашенных в один цвет, одинаковы.

Обозначим через $D_r(O)$ объединение всех многоугольников ранга r ($r=1$, 2, 3, ...) для выбранного «центрального» узла O решетки. Мы докажем, что для *любой решетки площадь области $D_n(O)$ одна и та же для всех r**).

---

*) Это утверждение — содержание задачи М800.

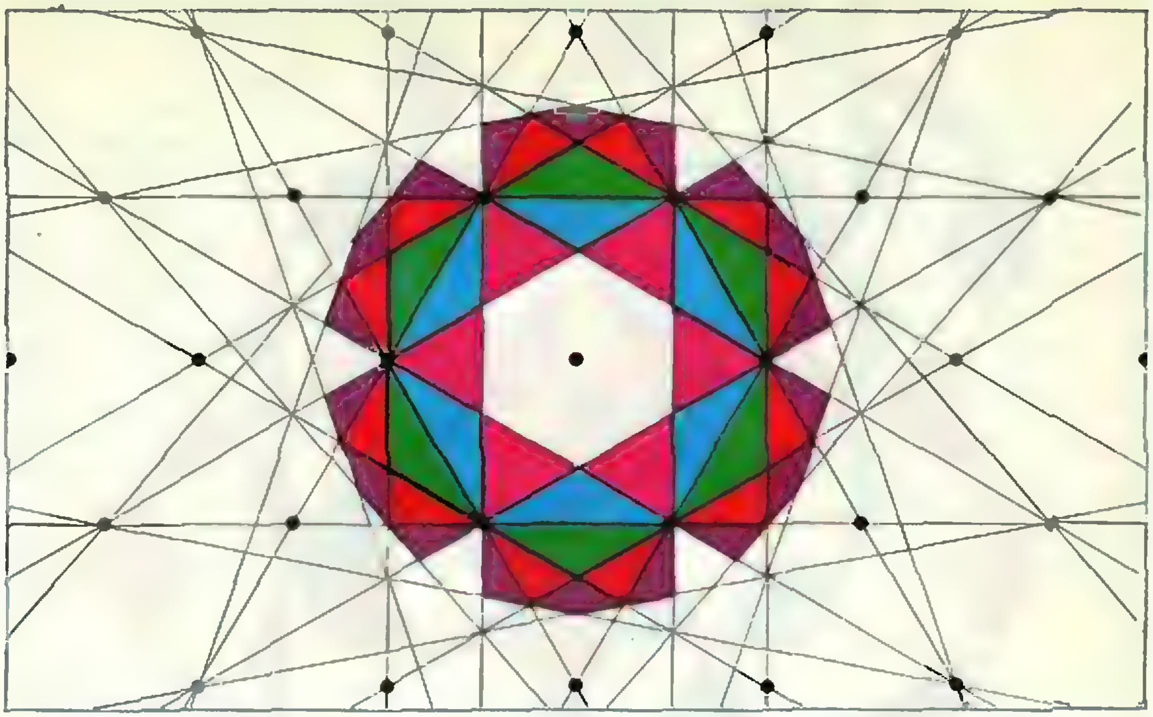


Рис. 1.

Повозившись с картинками, можно сделать два наблюдения, подсказывающие идеи двух разных доказательств. С них мы и начнем.

Наблюдение 1. Рассмотрим самую простую квадратную решетку. На рисунке 3 красным цветом выделена область $D_6(O)$; кроме того, жирными черными линиями плоскость разбита на одинаковые квадраты так, что каждый узел Q служит центром одного из квадратов; этот квадрат — обозначим его $D(Q)$ — получается переносом центрального квадрата $D(O)=D_1(O)$ на вектор $\overrightarrow{OQ}$. Если разрезать всю плоскость по жирным линиям на квадраты $D(Q)$ и перенести все квадраты так, чтобы они совместились с центральным $D(O)$, то красные кусочки $D_6(O)$ в точности заполнят квадрат в один слой, не налегая друг на друга (то же самое будет верно для кусочков области $D_r(O)$ при каждом $r=2, 3, \ldots$; предлагаем это проверить читателям для стольких r, чтобы в этом не осталось сомнений). Отсюда, конечно, сразу будет следовать, что $D_6(O)$ (и $D_r(O)$ при каждом r) имеет ту же площадь, что $D_1(O)$.

Наблюдение 2 проиллюстрируем, отчасти для разнообразия, на примере решетки из вершин правильных шестиугольников, заполняющих плоскость. На рисунке 2 показаны области $D_r(O)$ для $r=1, 2, \ldots, 6$.

Аналогично можно построить области $D_r(Q)$, приняв за центральный любой другой узел Q решетки. На рисунке на с.19 выделено несколько областей D_4Q — каждая имеет тот же цвет, что и ее центр Q; все *области D_4Q для разных Q заполняют плоскость в один слой,* не налегая друг на друга. (То же самое верно для областей $D_r(Q)$ при каждом $r=1, 2, \ldots$.) Таким образом, площадь D_4Q (и $D_r(Q)$ при каждом r) — это «средняя» площадь, приходящаяся на один узел. Что это такое, мы уточним ниже, а пока сформулируем лемму, которая объясняет оба наблюдения.

Ключевая лемма. *Область $D_r(O)$ состоит из тех точек M плоскости, для которых узел O является r-м по удаленности от точки M.*

Разберем сначала случай $r=1$. Заметим, что перпендикуляр, проведенный к отрезку PO в его середине, делит плоскость на две полуплоскости так, что точки M в одной из них (содержащей O) ближе к O, чем к P, в другой — наоборот. Область $D(O)=D_1O$ — пересечение таких (содержащих O) полуплоскостей для всевозможных узлов P, отличных от O. Поэтому $D(O)$ состоит из точек M, для которых узел O ближе всех других узлов P *).

---

*) Аналогичное разбиение на «области Дирихле» использовано в решении задачи М765 (см. Квант, 1983, № 2, с. 41 и 1984, № 3, с. 47).

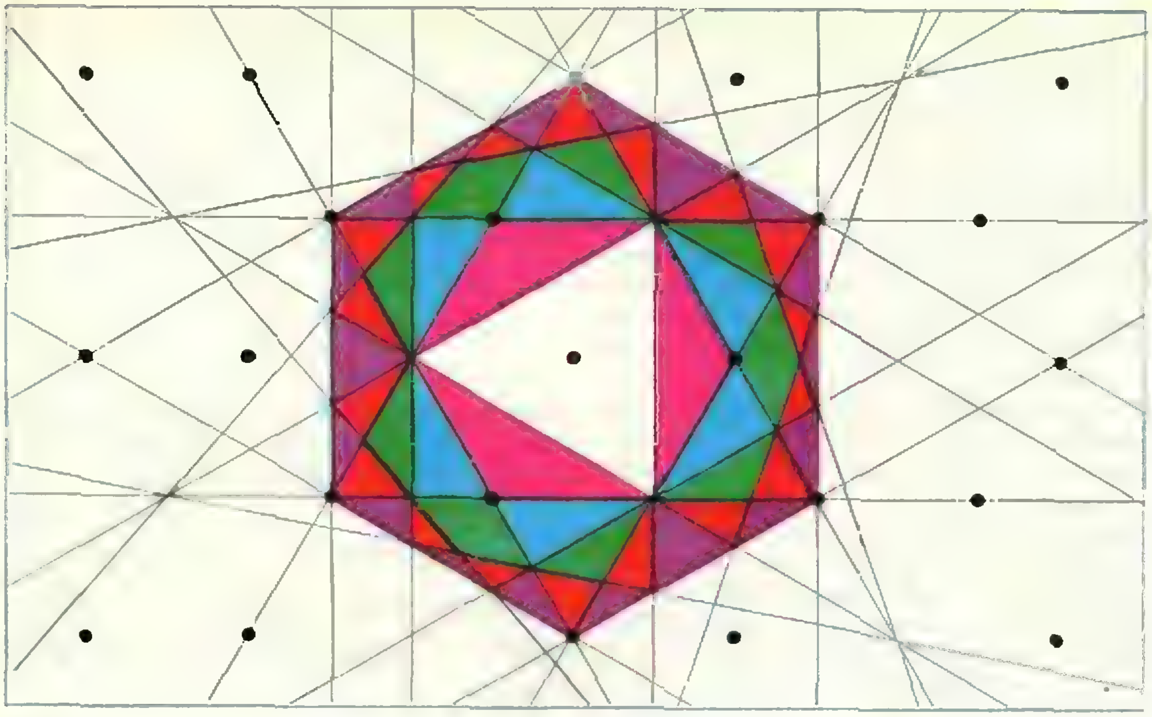


Рис. 2.

Пусть теперь M — точка ранга $r>1$ (по отношению к центру O). Из определения ранга, данного в условии, следует, что, двигаясь по *некоторому пути* от точки M к O, мы пересечем ровно $r-1$ проведенных прямых — серединных перпендикуляров некоторых отрезков OP_1, OP_2, ..., OP_{r-} . (Этот путь можно построить так: сначала мы идем по *прямолинейному* отрезку от точки M до любой пограничной точки областей $D_r(O)$ и $D_{r-1}(O)$, затем — по другому отрезку до пограничной точки областей $D_{r-1}(O)$ и $D_{r-2}(O)$ и т. д. Дойдя до области $D_1(O)=D(O)$, мы по прямолинейному отрезку идем в точку O. Это означает, что имеется $r-1$ узлов P_1, ..., P_{r-1}, к которым M ближе, чем к O. *Лемма доказана.*

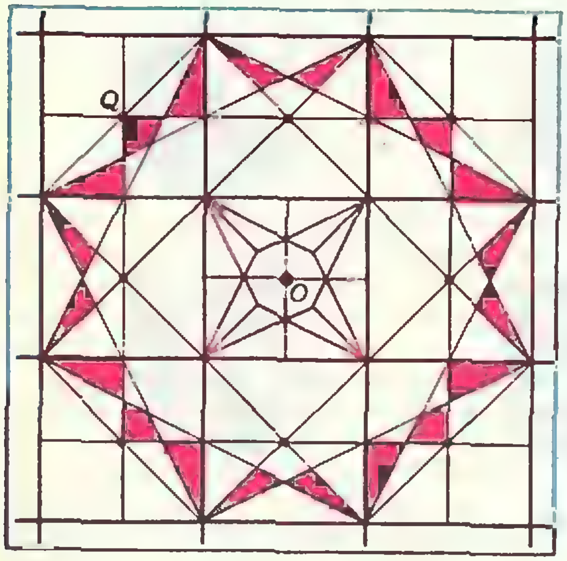


Рис. 3.

Теперь применим лемму для анализа наших наблюдений.

1°. Пусть решетка такова, что при переносе на вектор $\overrightarrow{OQ}$; где O и Q — любые ее узлы, вся решетка совмещается с собой. (Этому условию удовлетворяют квадратная решетка, «треугольная» решетка на рисунке 1 и вообще любая решетка из концов векторов $m\cdot\overrightarrow{OA}+n\cdot\overrightarrow{OB}$, где OAB — фиксированный треугольник, а m и n — произвольные целые числа.) Будем ниже «переносами» называть лишь параллельные переносы на векторы $\overrightarrow{OQ}$. Докажем, что для любой внутренней точки M «области Дирихле» $D(O)$ найдется перенос T такой, что $T(M)\in D_r(O)$, причем если $T(M)$ лежит внутри области $D_r(O)$, то существует ровно один такой перенос T. Другими словами, область $D(O)$ разбивается на куски, при переносах T которых составляется область $D_r(O)$. Пусть M — такая точка, что r-м по удаленности от нее узлом является Q. *По ключевой лемме* $M\in D(O)\cap D_rQ$, и поэтому при переносе T на вектор $\overrightarrow{OQ}$ мы получим, что $T(M)\in D_r(O)$. Перенос T определен однозначно, если не существует узла решетки X, для которого $|MQ|=|MX|$.

Легко видеть, что этому условию удовлетворяют все точки внутренности $D(O)$, которые лежат вне конечного числа отрезков. Эти отрезки — в точности те линии, по которым надо разрезать $D(O)$, чтобы из полученных кусочков сложить $D_r(O)$.

2°. Пусть решетка такова, что для любых узлов P и Q можно указать некоторое самосовмещение решетки, переводящее P в Q (в отличие от 1°, это может быть и поворот, а не только перенос).

По ключевой лемме для каждой точки M есть лишь один узел Q, для которого $M \in D_r(Q)$ — это r-й по удаленности от точки M узел. Ясно, что области $D_r(Q)$ для разных Q пересекаются лишь по границам. Наложенные условия показывают, что все области $D_r(Q)$ одинаковы — при совмещении решетки, переводящем Q в O, $D_r(Q)$ переходит в $D_r(O)$.

Объясним теперь, почему отсюда следует, что $D_r(Q)$ равновелики для разных r. Назовем для данной решетки «плотностью» следующий предел: $\alpha = \lim \frac{K(N)}{N^2}$, где $K(n)$ — число узлов, лежавших в квадрате размером $N \times N$ с центром O. Докажем, что $\alpha = \frac{1}{S_r}$ (S_r — площадь области $D_r(Q)$) для каждого r. Пусть L_r — наибольшее расстояние точек области $D_r(O)$ от O, $N > L_r$. Тогда для всех $K(N)$ узлов Q квадрата $N \times N$ объединение областей $D_r(Q)$ покрывает квадрат $(N-L_r) \times (N-L_r)$ и содержится в квадрате $(N+L_r) \times (N+L_r)$, поэтому

$$\left(1-\frac{L_r}{N}\right)^2 = \frac{(N-L_r)^2}{N^2} < \frac{S_r \cdot K(N)}{N^2} < \frac{(N+L_r)^2}{N^2} = \left(1+\frac{L_r}{N}\right)^2.$$

При $N \to \infty$ правая и левая части сколь угодно близки к 1, поэтому существует предел $\lim\limits_{N \to \infty} = \frac{S_r \cdot K(N)}{N^2} = 1$, так что $\alpha = \frac{1}{S_r}$; величина $\frac{1}{\alpha}$ — это и есть «средняя площадь на один узел», в частности, площадь S_1 области $D(O)$ тоже равна $\frac{1}{\alpha}$.

Замечание. На тех же идеях основано доказательство знаменитой леммы Минковского о выпуклом теле, имеющей много неожиданных приложений в теории чисел.

Лемма Минковского. *Пусть C — выпуклая центрально-симметричная фигура с центром в узле O решетки. Тогда если отношение площадей C и $D_1(O)$ больше 4, то внутри C есть узел решетки, отличный от O.*

Набросок доказательства. Сначала доказываем, что существуют узлы решетки P и Q

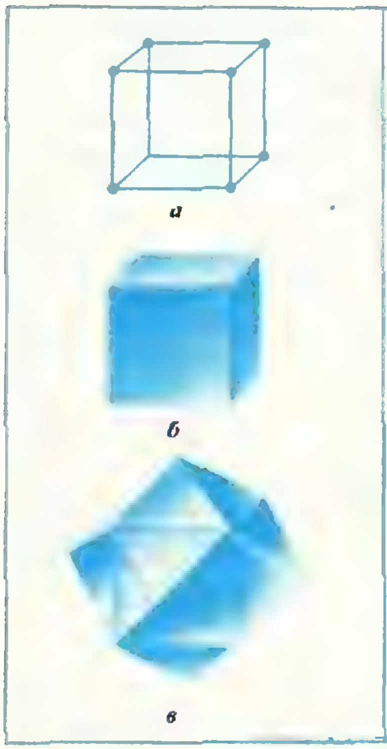


Рис. 4.

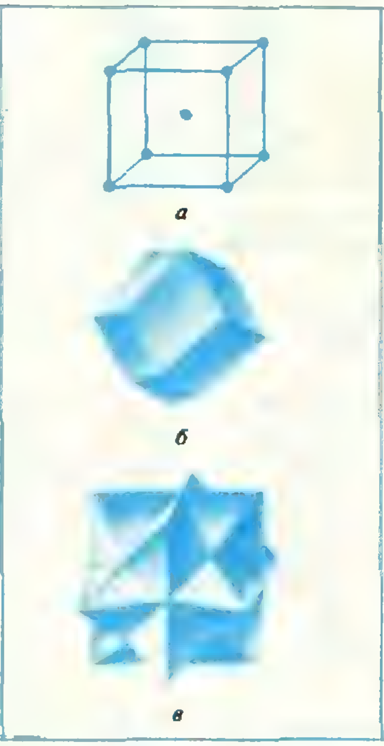


Рис. 5.

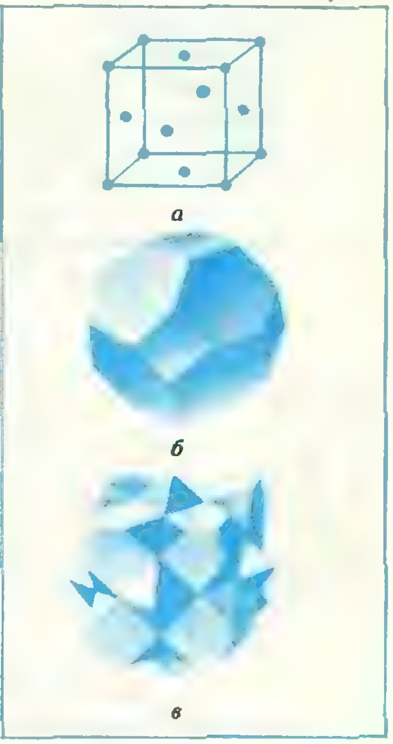


Рис. 6.

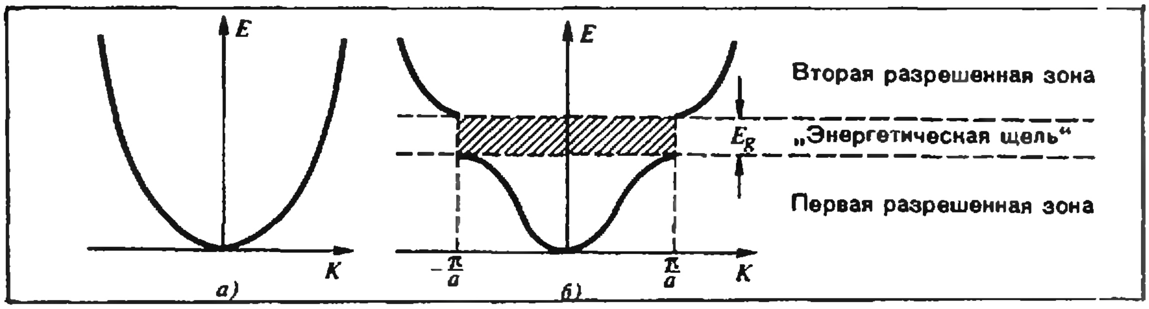


Рис 7

такие, что если сдвинуть фигуру $\frac{1}{2}C$ на векторы $\vec{OP}$ и $\vec{OQ}$, то полученные области будут иметь общую точку X (эта часть абсолютно аналогична проведенному выше рассуждению). Обозначим через Y и Z точки, полученные из точки X сдвигами на векторы $\vec{PO}$ и $\vec{QO}$. Эти точки лежат в области $\frac{1}{2}C$. Далее, $\vec{OY}-\vec{OZ}=\vec{OP}-\vec{OQ}$, так что точка A, являющаяся концом вектора $\vec{OY}-\vec{OZ}$ — узел решетки Заметим, что из выпуклости и центральной симметрии фигуры C следует, что конец вектора $\vec{OY}-\vec{OZ}=\frac{1}{2}(\vec{OY}+2(-\vec{OZ}))$ лежит в C

Ясно, что рассуждения 1° и 2° вполне применимы к пространственным решеткам: для них речь будет идти о «серединных плоскостях» к парам узлов O, P и об объемах соответствующих «ячеек» $D_1(O)$ и $D_r(O)$. На рисунках 4, *а*—6, *а* представлены три наиболее популярных решетки — простая кубическая, объемно-центрированная кубическая и гранецентрированная кубическая. Соответствующие им области $D(O)$ и $D_2(O)$ приведены на рисунках 4, *б* — 6, *б* и 4, *в* — 6, *в*. Многогранники на рисунках 4, *в* и 5, *б* называются *ромбододекаэдрами*, а многогранник на рисунке 6, *б* — *усеченным октаэдром*.

Геометрические конструкции, которые были в центре нашего сюжета, играют важную роль в физике твердого тела. Области $D_r(O)$ известны в физике кристаллов под названием *зон Бриллюэна*, по имени французского ученого Леона Бриллюэна, который в начале 30-х годов детально исследовал квантовые законы движения электронов в кристалле. В нескольких словах это можно пояснить так.

Свойства электропроводности кристалла в основном зависят от наличия «энергетических щелей» — интервалов, в которые не попадают возможные значения энергии электронов. Для свободного электрона (не взаимодействующего с кристаллом) график зависимости энергии от импульса — парабола (кинетическая энергия пропорциональна квадрату скорости, рис. 7, *а*). Если же электрон взаимодействует с ионами кристаллической решетки, то в графике зависимости энергии от импульса при некоторых значениях импульса появляются разрывы. Для «одномерного» кристалла график будет выглядеть примерно так, как показано на рисунке 7, *б*. Для «двумерного» и реального — «трехмерного» — кристалла импульс $\vec{p}$ — вектор. Условившись откладывать эти векторы $\vec{p}$ от одной точки O — начала координат, мы получим (двумерное или трехмерное) пространство, точкам которого соответствуют значения импульсов — так называемое *импульсное пространство*. Заданной решетке A атомов в обычном пространстве естественным образом ставится в соответствие некоторая «двойственная» по отношению к A решетка P в импульсном пространстве (физики обычно называют ее *обратной решеткой*). При подходящем выборе масштаба в импульсном пространстве она задается так: вектор $\vec{p}$ принадлежит P, если скалярное произведение $\vec{a}\vec{p}$ — целое число для всех векторов $\vec{a}$, соединяющих две точки решетки A.

Упражнение. а) Объясните, почему концы P таких векторов $\vec{p}=\vec{OP}$ образуют решетку б) Нарисуйте двойственные решетки P для решеток A, изображенных на рисунках 1, 2, 3.

Оказывается, что разрывы энергии (как функции на импульсном пространстве) возникают как раз на плоскостях, являющихся «серединными перпендикулярами» отрезков OP, где P — точки двойственной решетки. Физический смысл имеет также параллельный перенос всех кусочков зоны Бриллюэна $D_r(O)$ r-го ранга в основную зону $D_1(O)$, который мы использовали в решении задачи М800.

Фонтаны в парках и до́ма

С. Л. ГАВРИЛОВ

Предок современного фонтана появился очень давно — когда первобытный человек облицевал родник камнями. Вода полилась струйкой, и стало удобно наполнять ею глиняную и деревянную посуду. Спустя тысячелетия каменная облицовка приобрела эстетическое значение. Появились такие произведения искусства, как фонтаны Древней Греции, Рима, а затем Версаля и Петродворца (Петергофа). Но вплоть до конца прошлого столетия сохранилось и утилитарное назначение фонтанов — население брало из них воду. Это и понятно: само слово «фонтан» происходит от латинского fons — источник.

Большое внимание внешнему виду фонтанов уделяли русские архитекторы. С XVIII века фонтаны в России — неотъемлемая часть дворцово-парковой архитектуры. Самый яркий пример этому — фонтаны Петродворца, загородной резиденции русских царей, основанной Петром I в 1709 году (см. фотографию вверху). В его строительстве принимали участие такие прославленные архитекторы, как Растрелли, Кваренги и др. Гидротехническими работами руководил инженер Туволков.

Вот что писал о Петродворце русский художник Александр Бенуа: «Это — резиденция царя морей. Фонтаны в Петергофе не придаток, а главное. Они являются символическим выражением водяного царства, тучей брызг того моря, которое плещется у берегов Петергофа».

Примечательно, что из-за благоприятного расположения территории дворца для питания фонтанов не пришлось строить никаких водоподъемных сооружений. Вода собиралась в окрестных реках и по разветвленному трубопроводу поступала к Петродворцу. А необходимое для действия фонтанов давление создавалось за счет естественного перепада уровней.

Не меньший интерес к фонтанам проявляли и западноевропейские архитекторы. Со времен эпохи Возрождения в Европе было построено много красивейших фонтанов, которые до сих пор производят неизгладимое впечатление. Но самый выдающийся памятник садово-парковой архитектуры с использованием фонтанов — это Версаль, резиденция французских королей, построенная во второй половине XVII века по проекту архитектора Андре Ленотра.

Фонтан «Самсон» в Петродворце.

Версаль расположен значительно выше долины, по которой катит свои воды Сена. Поэтому, чтобы били фонтаны, пришлось строить мощную, по тем временам, насосную станцию. *Любопытно, что насосы приводились в движение водяным колесом, вращающимся за счет течения реки.*

Лучшие традиции зодчих прошлого продолжили советские архитекторы. За годы советской власти в нашей стране было построено много интересных фонтанов. Особенно широкое распространение фонтаны получили в южных республиках нашей страны.

Мы привыкли к тому, что место фонтана — на площади или в саду. Но можно устроить фонтаны (конечно, гораздо меньших размеров) и в *домашних условиях*. Предлагаем вашему вниманию несколько наиболее интересных и легко осуществимых устройств.

Создание одного из самых остроумных по конструкции фонтанов приписывается древнегреческому ученому Герону Александрийскому (I век нашей эры). Этот фонтан состоит из трех сосудов (рис. 1) — одного открытого плоского (*А*) и двух закрытых шарообразных (*Б* и *В*), соединенных между собой тонкими трубками. Достаточно наполнить водой сосуд *Б* и налить немного воды в сосуд *А*, как фонтан начнет действовать. Вода, переливаясь из сосуда *А* в сосуд *В*, вытесняет оттуда воздух в сосуд *Б*. Там создается избыточное, по сравнению с атмосферным, давление, которое и заставляет воду бить фонтаном. (Очевидно, что это избыточное давление равно разности давлений, создаваемых столбами воды *АВ* и *АБ*: $p_{\text{изб}} = \varrho g H_{AB} - \varrho g H_{AБ} = \varrho g \times (H_{AB} - H_{AБ})$.) Когда сосуд *В* наполнится водой, фонтан перестанет работать. Но достаточно его перевернуть, чтобы вода из *В* перелилась в *Б*, и фонтан снова готов к работе.

Я. И. Перельман в книге «Занимательная физика» приводит упрощенную конструкцию фонтана Герона, которую любой может повторить в домашних условиях. Автором этой модернизации был школьный учитель из Италии. Не имея возможности воспроизвести конструкцию старинного фонтана в точности,

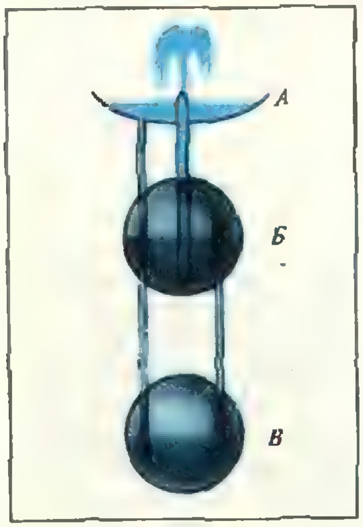


Рис. 1

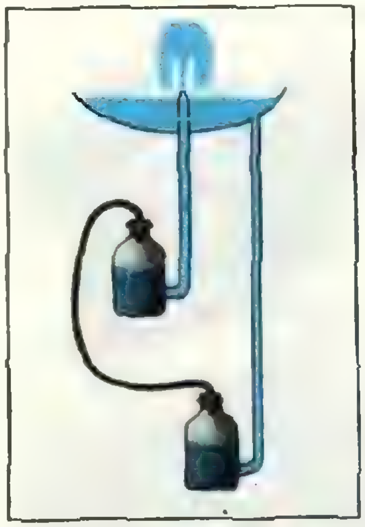


Рис. 2.

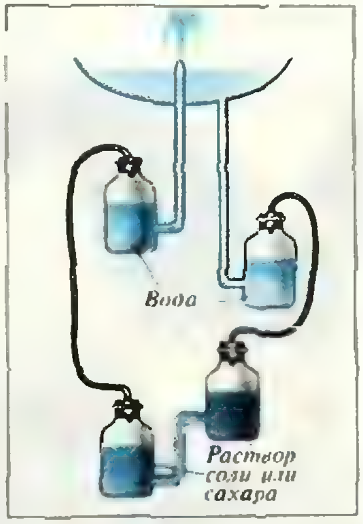


Рис 3.

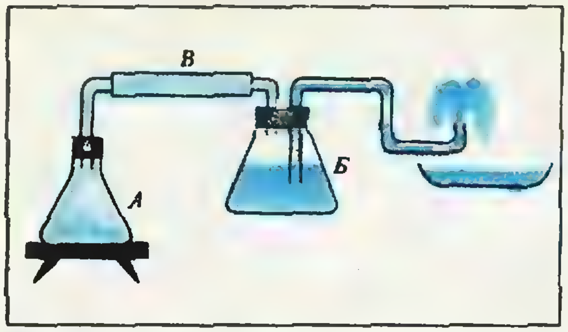


Рис. 4.

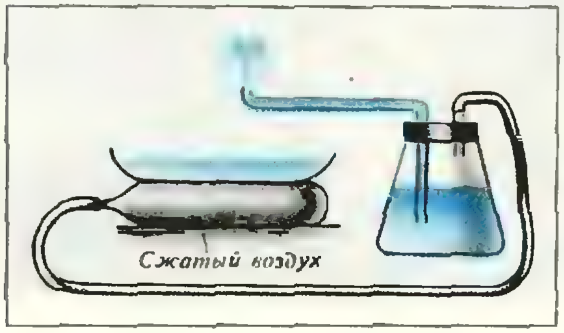


Рис. 5.

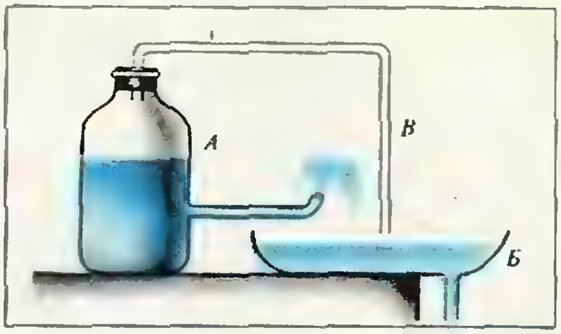


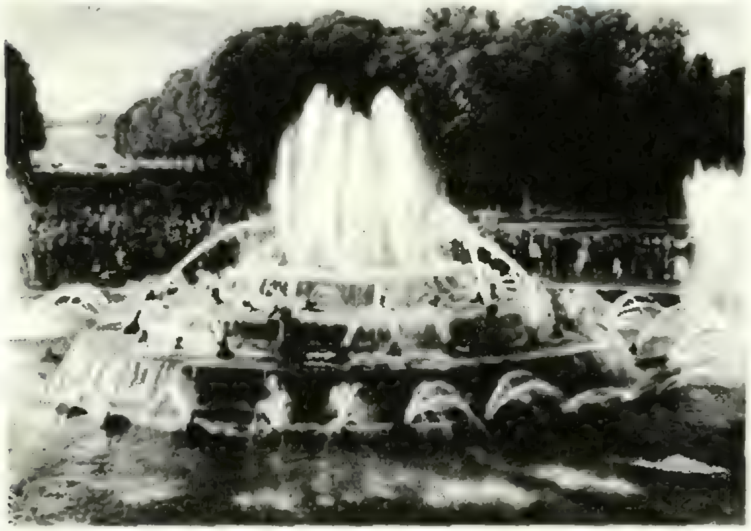
Рис. 6.

он употребил вместо шаров аптечные склянки с двумя отверстиями, а вместо стеклянных трубок — резиновые (рис. 2). Не обязательна и специально изготовленная верхняя ванночка. Ее вполне может заменить обычная миска, к которой соответствующим образом крепятся резиновые трубки. Такая конструкция интересна еще и тем, что, меняя относительное расположение склянок, можно изменять высоту струи фонтана.

Этого же можно добиться, если в разрез трубки, передающей давление воздуха из сосуда *В* в сосуд *Б*, поместить своеобразный «гидроусилитель давления» — склянки с жидкостью большой плотности (рис. 3). Наибольшего эффекта можно было бы добиться, используя ртуть, которая тяжелее воды в 13,6 раза. Но работать с ней опасно, поэтому лучше воспользоваться раствором поваренной соли или сахара в воде. Сахар несколько предпочтительнее, так как он, в отличие от соли, не дает насыщенного раствора и позволяет получить «сироп» с плотностью, в 1,5 раза превышающей плотность воды.

А можно устроить фонтан, который будет приводиться в действие паром. Подобные конструкции использовались на практике, когда человечество еще не знало насосов с электрическим приводом. Пример схемы «парового» фонтана приведен на рисунке 4. При нагревании воды в колбе *А* образуется пар, который создает избыточное давление в сосуде *Б*, вытесняя из него воду.

Такой фонтан воспроизвести нетрудно. Нужно помнить только, что колба *А* должна быть из термостойкого стекла (можно использовать металлический сосуд), а соединения — достаточно герметичными. Пробки для колб легко изготовить из плотной резины, а отвер-



Фонтан Латоны в Версале. Фонтан состоит из четырех круглых бассейнов, поднимающихся один над другим. В центре на круглом пьедестале стоит фигура богини Латоны. Лягушки и ящерицы на трех верхних бассейнах выбрасывают из насадок струи воды, почти закрывающие фигуру Латоны. Струящимися каскадами вода из верхних бассейнов переливается в нижний.

стия в них — прорезать с помощью тонкостенной металлической трубочки с заостренными краями.

Этот фонтан может действовать также, если вместо пара использовать сжатый воздух. Для этого колбу нужно заменить предварительно накачанной камерой от волейбольного мяча или любой другой подходящей резиновой емкостью. По мере уменьшения давления в камере фонтан, естественно, будет ослабевать. Чтобы это происходило не так быстро, на камеру можно поставить сосуд, как это изображено на рисунке 5. Наполняясь водой, сосуд будет давить на камеру с большей силой, что, в некоторой степени, замедлит падение давления в камере.

Фонтан возможно привести в действие и с помощью газов, выделяющихся при некоторых химических реакциях. Например, используя реакцию нейтрализации уксусной кислоты пищевой содой, при которой выделяется достаточное количество углекислого газа.

Фонтан, изображенный на рисунке 6, интересен тем, что он сам периодически прекращает свое действие, а через определенное время возобновляет его. Пока нижний конец трубки *В* открыт, пространство над жидкостью в сосуде *А* соединено с атмосферой, давление в нем равно атмосферному и фонтан функционирует. Когда уровень воды в сосуде *Б* достигнет трубки *В*, воздух перестанет поступать в сосуд *А* и по мере расхода воды в нем будет создаваться разрежение. По истечении некоторого времени фонтан иссякнет. Если же в сосуде *Б* сделать небольшой сток, часть воды из сосуда выльется, отверстие в трубке *В* откроется и фонтан снова заработает. Для того чтобы фонтан действовал периодически, поступление воды в сосуд *Б* должно быть больше расхода. Тогда при работающем фонтане уровень воды будет подниматься, а после остановки фонтана — опускаться, и, когда конец трубки *В* окажется в воздухе, фонтан снова заработает.

В заключение хочется напомнить, что многие современные большие фонтаны в темное время суток украшают самой разнообразной подсветкой. Не надо забывать о таких возможностях, создавая и мини-фонтаны в домашних условиях. Используя обычные осветительные приборы и разноцветные светофильтры и призвав на помощь немного фантазии, можно домашний фонтан превратить в красочное зрелище.

Беседа с академиком А. А. Логуновым

(Начало см. на с. 2)

многие явления, наблюдаемые в астрофизике, невозможно понять, не зная физики элементарных частиц. Происходит своеобразное взаимное дополнение и обогащение: с одной стороны — астрофизика, приносящая новые открытия, с другой — микромир, изучение которого дает возможность понять многие проблемы, связанные не только со строением материи, но и со строением и эволюцией Вселенной.

— И в заключение — вопрос к вам как члену редакционного совета «Кванта». Как вы оцениваете журнал? Ваши пожелания его читателям?

— Мне журнал нравится. Он, несомненно, очень полезен школьникам, увлекающимся физикой и математикой, тем, кто хочет в дальнейшем заниматься ими серьезно. Но, возможно, мы недостаточно уделяем внимания тем, кто еще не определил свои интересы, нашему «начинающему» читателю. Увлечь его математикой и физикой, возбудить у него интерес к этим наукам — наша задача. По-видимому, нужен спектр статей и задач разного уровня сложности, чтобы постепенно вводить читателя в круг трудных проблем.

Очень важно, конечно, как читать журнал. Необходимы и постепенность, и внимательность, и терпеливость. И главное — это поиск оригинальных решений. Именно с этого и начинается самостоятельное творчество. Это требует большого труда, но и приносит истинное удовлетворение. Трудиться надо не ради того, чтобы кого-то удивить, а для того, чтобы узнать что-то новое, в чем-то разобраться, глубже проникнуть в сущность явлений.

Это, если хотите, и пожелание, и призыв...

Выбор модуля

Кандидат педагогических наук
Ю. И. ИОНИН,
кандидат физико-математических наук
А. И. ПЛОТКИН

Практически на любой математической олимпиаде встречаются задачи о целых числах. Они часто бывают трудными, но имеется несколько общих приемов для их решения. Об одном из наиболее популярных таких приемов рассказывается в этой статье.

Прием состоит в следующем: данные в задаче целые числа заменяются их остатками от деления на специально подобранное для этой задачи целое число, которое в этом случае называют *модулем*.

Начнем с очень простого примера.

Пример 1. *Существуют ли целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению $x^3+x+10y=20\,004$?*

Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что, зная последнюю цифру числа x, можно легко узнать последнюю цифру числа x^3 и (при любом y) последнюю цифру числа $x^3+x+10y$. Составим таблицу:

Последняя цифра числа											
	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	x^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
	$x^3+x+10y$	0	2	0	0	8	0	2	0	0	8

Мы видим, что число $x^3+x+10y$ при любых целых x и y оканчивается одной из цифр 0, 2, 8 и, следовательно, не может быть равно 20 004.

Рассуждения такого рода вам, наверное, знакомы. Но давайте вдумаемся в их смысл.

Последняя цифра числа — это остаток от деления этого числа на 10. Решение основывалось на том, что для вычисления последней цифры числа x^3+x достаточно знать лишь последнюю цифру числа x. Это верно не только для остатков от деления на 10, но и для остатков от деления на любое другое целое число. Так, приведенное решение можно было сократить, заменяя рассматриваемые числа их остатками от деления не на 10, а на 5.

Пример 2. *Найти все такие натуральные числа n, что числа $n+1$, $n+71$ и $n+99$ — простые.*

Решение. Рассмотрим остатки от деления данных чисел на 3 (как часто говорят, «будем рассуждать *по модулю 3*»). Заметим, что 1, 71 и 99 дают различные остатки при делении на 3, а, значит, числа $n+1$, $n+71$, $n+99$ также *различны по модулю 3*. Но различных остатков при делении на 3 лишь три: 0, 1 и 2. Поэтому одно из данных чисел делится на 3, а так как это число простое, то оно равно 3. Отсюда находим, что $n=2$.

Подобного рода рассуждения будет легче проводить, если ввести следующее определение. Будем говорить, что числа a и b *равны по модулю m* (a, b, m — целые числа, $m\neq 0$), если a и b дают одинаковые остатки при делении на m, иначе говоря, $a-b$ делится на m.

Введенное понятие удобно благодаря такому свойству: если числа a_1 и b_1 равны по модулю m и числа a_2 и b_2 равны по модулю m, то по этому же модулю равны числа a_1+a_2 и b_1+b_2, a_1-a_2, и b_1-b_2, a_1a_2 и b_1b_2. Это очень легко следует из следующих тождеств:

$$(a_1+a_2)-(b_1+b_2)=(a_1-b_1)+(a_2-b_2),$$
$$(a_1-a_2)-(b_1-b_2)=(a_1-b_1)-(a_2-b_2),$$
$$a_1a_2-b_1b_2=a_1(a_2-b_2)+b_2(a_1-b_1).$$

Сформулированное свойство позволяет в выражении, полученном из целых чисел с помощью действий сложения, вычитания и умножения, заменять слагаемые и сомножители любыми числами, равными им по модулю m. В частности, можно найти все значения, которые заданное выражение принимает по данному модулю, как и было сделано в решении примера 1.

Рассуждения «по модулю» можно применять для доказательства того, что данное целое число не является квадратом или кубом целого числа. При этом часто бывают полезны следующие простые леммы:

а) *квадрат целого числа равен 0 или 1 по модулю 3*;

б) *квадрат целого числа равен 0 или 1 по модулю 4*;

в) *куб целого числа равен 0,1 или —1 по модулю 9;*

г) *куб целого числа равен 0,1 или —1 по модулю 7;*

д) *при нечетном n числа n^n и n равны по модулю 8.*

Задача **1.** Докажите эти леммы

Задача **2.** Докажите, что любое натуральное число по модулям 3 и 9 равно сумме своих цифр в десятичной записи.

Проиллюстрируем применение лемм а)—б), ответив на следующий вопрос. Является ли число 97 531 квадратом или кубом целого числа? Нет. Оно не является квадратом хотя бы потому, что равно 3 по модулю 4, и не является кубом, так как равно 7 по модулю 9 (поскольку сумма его цифр равна 25). Как видите, успех часто определяется удачным выбором модуля.

Пример 3. *Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не является квадратом целого числа.*

Решение. Попробуем рассуждать по модулю 3. Если первое из чисел делится на 3, то их квадраты образуют по модулю 3 последовательность 0, 1, 1, 0, 1 и, значит, их сумма равна 0 по модулю 3. Мы не получили противоречия: квадрат целого числа может равняться 0 по модулю 3. Что ж, это означает, что мы неудачно выбрали модуль. Попробуем рассуждать по модулю 4. Легко видеть, что в этом случае, в зависимости от того, четно или нечетно первое число, мы приходим либо к последовательности 0, 1, 0, 1, 0 с суммой 2, либо к последовательности 1, 0, 1, 0, 1 с суммой 3. Но результат леммы б) говорит о том, что квадрат целого числа не может равняться ни 2, ни 3 по модулю 4.

Задача **3.** Докажите, что каждое из следующих чисел не может быть квадратом целого числа:

а) сумма квадратов трех нечетных чисел;

б) число, десятичная запись которого состоит из 20 единиц и некоторого числа нулей;

в) $2^2+4^4+6^6+ \ldots +50^{50}$

Разумеется, не всегда удается решить задачу такого типа, рассуждая лишь по модулю 3 или 4.

Задачи

4. Найдите все натуральные числа n, для которых число $1!+2!+3!+ \ldots +n!$ является квадратом целого числа.*)

5. Докажите, что число 222...2 (1982 двойки) нельзя представить в виде $xy(x+y)$, где x и y — целые числа.

6. Докажите, что сумма квадратов трех последовательных целых чисел не может быть кубом целого числа.

Разберем два более трудных примера.

Пример 4. *Докажите, что число $1^1+2^2+3^3+\ldots+1983^{1983}$ нельзя представить в виде m^k, где m и k — натуральные числа, $k \geqslant 2$.*

Решение. Начнем с рассуждения по модулю 3. Так как любое целое число равно 0, 1 или —1 по модулю 3, то a^n равно a^2 по модулю 3 при четном n и a^n равно a по модулю 3 при нечетном n. Отсюда можно вывести, что числа 1^1, 2^2, 3^3, ... образуют по модулю 3 периодическую последовательность с периодом длины 6, состоящим из чисел 1, 1, 0, 1, —1, 0. Используя эту периодичность, нетрудно показать, что данная сумма равна 2 по модулю 3 и, следовательно, не может быть квадратом. Но как показать, что эта сумма не может быть кубом, пятой степенью и т. д.? Необходимую помощь оказывает модуль 4. По этому модулю числа 1^1, 2^2, 3^3, ... также образуют периодическую последовательность с периодом 1, 0, —1, 0 длины 4, откуда следует, что сумма $1^1+2^2+3^3+\ldots+1983^{1983}$ делится на 4. Поэтому, если бы эта сумма имела вид m^k, где $k \geqslant 3$, то она делилась бы на 8. Исследуем ее по модулю 8. Если n четно, и $n \neq 2$, то n^k делится на 8, а если n нечетно, то n^n равно n по модулю 8 (см. лемму д)), так что данная сумма равна по модулю 8 сумме $2^2+1+3+\ldots+1983$. Но эта сумма не делится на 8 (она равна 984068).

Пример 5. *Две последовательности целых чисел (x_n) и (y_n) построены так, что $x_1=x_2=10$, $y_1=y_2=-10$, $x_{n+2}=(x_{n+1}+1)x_n+1$, $y_{n+2}=(y_{n+1}+1)y_n+1$ при всех натуральных n. Возможно ли при каких-нибудь k и l равенство $x_k=y_l$?*

Решение. Попробуем подобрать модуль m таким образом, чтобы обе последовательности были по этому модулю постоянны, то есть равны соответственно 10 и —10. Если x_n, x_{n+1} и x_{n+2} равны 10 по модулю m, то по модулю m равны числа 10 и $(10+1)10+1=111$. Следовательно, в качестве m нужно взять число 101. Легко убедиться, что по этому модулю последовательность (y_n) также окажется постоянной и равной —10. Но 10 и —10 не равны по модулю 101. Следовательно, равенство $x_k=y_l$ невозможно.

---

*) Запись $n!$ обозначает *факториал* числа n, то есть $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

Задачи

7. Найдите все простые числа p, для которых число $2p^4-p^2+16$ является квадратом целого числа.

8. Найдите все натуральные n, для которых число 3^n+55 является квадратом целого числа.

9. Натуральное число n таково, что число n^2+1 десятизначное. Докажите, что в записи этого десятизначного числа встречаются две одинаковые цифры.

10. Натуральное число n таково, что число $n^{n+1}+(n+1)^n$ делится на 3. Докажите, что $n-1$ делится на 6.

11. Докажите, что куб целого числа равен 0, 1 или —1 по модулю 7.

12. Докажите, что уравнение $15x^3+13y^3=101$ не имеет решений в целых числах.

13. Докажите, что при $n \geqslant 2$ число $1!+2!+3!+\ldots+n!$ нельзя представить в виде m^k, где m, k — натуральные числа, $m \geqslant 3$.

Заметим в заключение, что сферой применения рассуждений «по модулю» являются, разумеется, не только олимпиадные задачи. Глубокий анализ идеи, на которой основаны эти рассуждения, привел к разработке методов, позволивших решить ряд проблем теории чисел. Интересующемуся читателю мы можем порекомендовать книгу Боревича З. И. и Шафаревича И. Р. «Теория чисел» (М.: Наука, 1972).

Школа в «Кванте»

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Вычислите:

$$\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{8}}-\frac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}.$$

2. а) Диагонали выпуклого четырехугольника разбивают его на 4 треугольника, площади которых равны S_1, S_2, S_3, S_4 (рис. 1). Докажите, что $S_1S_3=S_2S_4$.

б) В трапеции $ABCD$ проведены диагонали (рис. 2). Известно, что $S_{BOC}=S_1$, $S_{AOD}=S_2$. Найдите S — площадь треугольника ABO.

3. Переход из порта A в порт B длится 15 суток. Каждый день в 12 часов дня из A в B и из B в A выходит по пароходу. Сколько пароходов, идущих из B в A, встретит в открытом море каждый пароход, идущий из A в B?

4. Докажите, что в любом треугольнике

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c},$$

где r — радиус вписанной в треугольник окружности, h_a, h_b, h_c — его высоты.

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+2y+1=0, \\ y^2+2z+1=0, \\ z^2+2y+1=0. \end{cases}$$

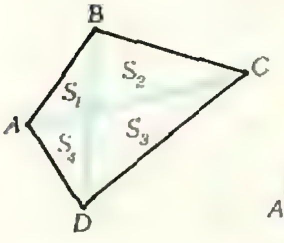


Рис. 1.

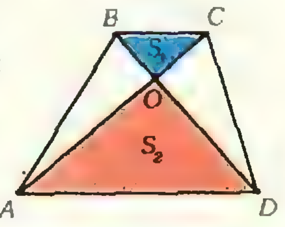


Рис. 2.

Девятый класс

6. Даны два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равной длины. Найдите угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$.

7. Вычислите:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{1984^2}\right).$$

8. Докажите иррациональность чисел: а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

9. Решите уравнения:

а) $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=40$,

б) $(x+1)^4+(x+3)^4=82$.

10. Могут ли: а) четная, б) нечетная, в) периодическая функции — иметь в точности n точек экстремума, если $n=0$; 1; 3; 4?

Десятый класс

11. Докажите, что если a, b, c — положительные действительные числа и $abc=1$, что

$$a+b+c+ab+ac+bc \geqslant 6.$$

12. Докажите, что в сечении любого выпуклого четырехгранного угла плоскостью можно получить параллелограмм.

13. Докажите, что в любом тетраэдре (произвольной треугольной пирамиде)

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4},$$

где r — радиус вписанной в тетраэдр сферы, h_1, h_2, h_3, h_4 — его высоты.

14. Решите уравнения:

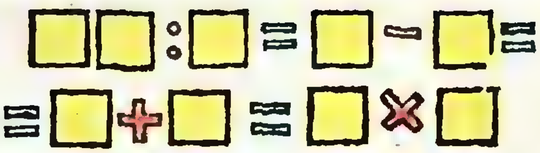
а) $x^4-2x^3-13x^2-2x+1=0$,

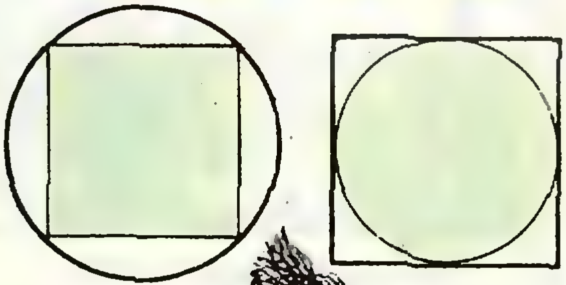
б) $x^4+3x^3-2x^2-6x+4=0$.

15. В трехгранном угле все плоские углы при вершине O прямые. На ребрах этого угла выбирается по точке: A, B, C. а) Докажите, что треугольник ABC — остроугольный. б) Докажите, что точки A, B и C можно выбрать так, чтобы треугольник ABC был конгруэнтен данному остроугольному треугольнику.

Публикацию подготовил Б. М. Ивлев

Квант для младших школьников





Задачи

1. Впишите в квадратики цифры от 1 до 9 так, чтобы все эти девять цифр были использованы и выполнялись указанные равенства.

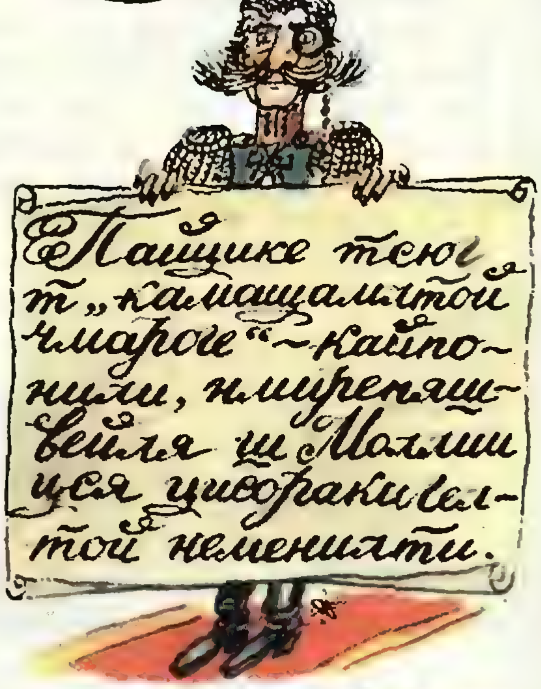
2. Круг и квадрат имеют одинаковые площади. В круг вписали квадрат, а в квадрат вписали круг. Что больше — площадь квадрата, вписанного в круг, или площадь круга, вписанного в квадрат?

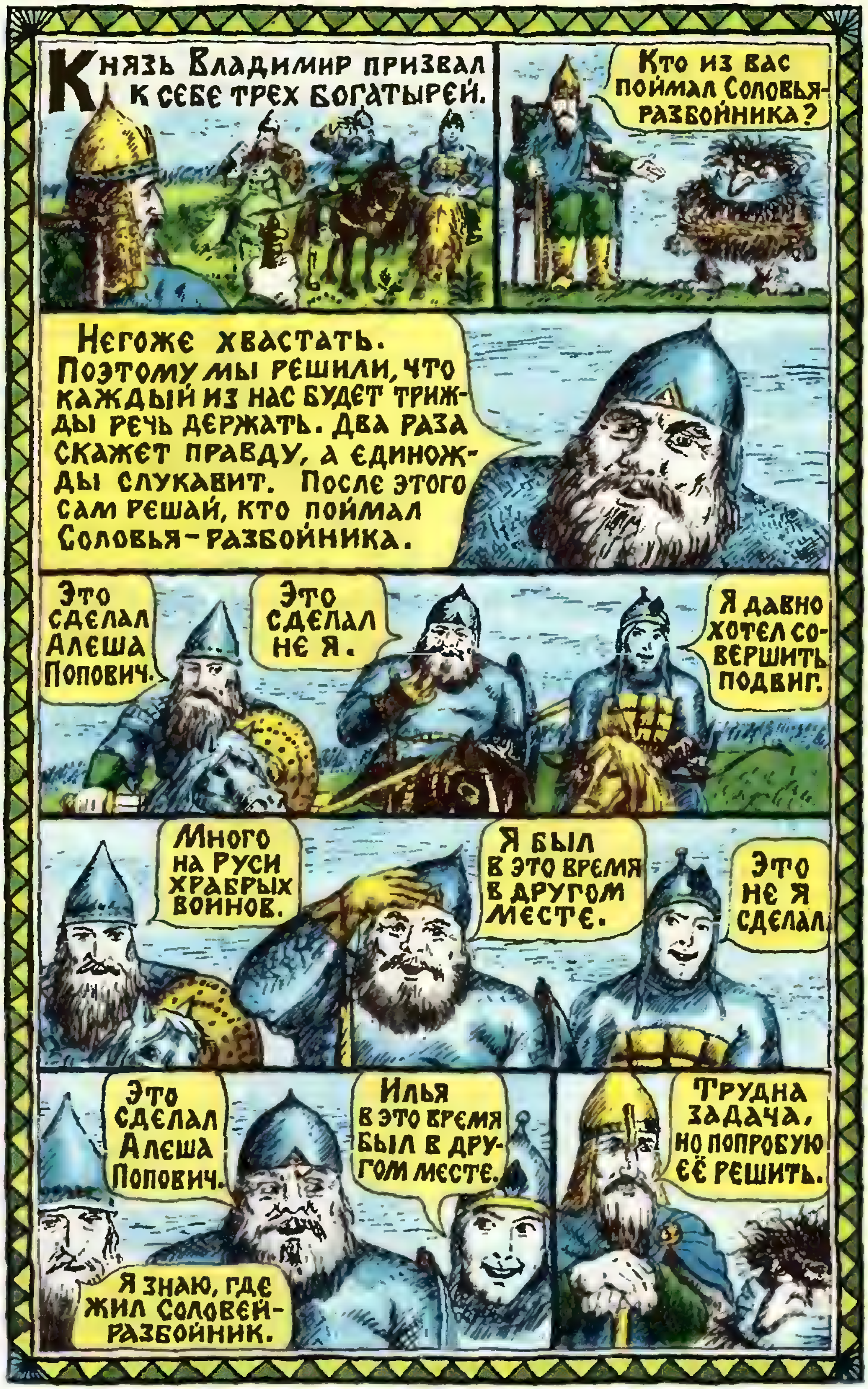
3. Какое число нужно поставить вместо знака «?» в последовательности: 7, 17, 37, 77, ?, 317,...?

4. Найдите ключ к «тарабарской грамоте» — *тайнописи, применявшейся* ранее в России для дипломатической переписки: «Пайцике тсюг т «камащамлтой чмароке» — кайпонили, нмирепяшвейля ш Моллии цся цисоракигелтой неменилти.»

5. В большом зеркале отражается ваза. Рита сдвинула зеркало на метр, и отражение сместилось на метр. Женя сдвинула зеркало на метр, а отражение сместилось на два метра. Лиля сдвинула зеркало на метр — отражение не сместилось вообще. Гриша же к зеркалу не прикасался, а отражение сдвинулось на метр. Как вы все это объясните?

Эти задачи нам предложили: *Л. П. Мочалов, А. П. Савин, Н. К. Антонович, С. В. Дворянинов, Н. Ю. Нецветаев*




Князь Владимир призвал к себе трех богатырей.
Кто из вас поймал Соловья-разбойника?
Негоже хвастать. Поэтому мы решили, что каждый из нас будет трижды речь держать. Два раза скажет правду, а единожды слукавит. После этого сам решай, кто поймал Соловья-разбойника.
Это сделал Алеша Попович.
Это сделал не я.
Я давно хотел совершить подвиг.
Много на Руси храбрых воинов.
Я был в это время в другом месте.
Это не я сделал.
Это сделал Алеша Попович.
Илья в это время был в другом месте.
Я знаю, где жил Соловей-разбойник.
Трудна задача, но попробую её решить.

Текст А. П. Савина, рисунки Э. В. Назарова

задачник Кванта

Задачи

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 августа 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М866, М867», или «Ф878». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи по математике этого номера предлагались на «Турнире городов» в апреле этого года.

М866—М870; Ф878—Ф882

М866. а) Во всех клетках квадрата 20×20 стоит по одному солдатику. Для какого наибольшего d можно переставить солдатиков в другие клетки так, чтобы каждый передвинулся на расстояние не меньше d? (Расстояние измеряется по прямой между центрами старой и новой клеток; сторона клетки равна 1.)

Решите эту же задачу

б) для квадрата 21×21;

в) для прямоугольника $m\times n$ клеток.

С. С. Кротов

М867. На уроке танцев 17 мальчиков и 17 девочек построили двумя параллельными рядами так, что образовалось 17 пар. При этом в каждой паре рост мальчика отличается от роста девочки не более чем на десять сантиметров. Докажите, что если в каждом ряду перестроить мальчиков и девочек по росту, то по-прежнему в каждой паре мальчик и девочка будут отличаться по росту не более чем на десять сантиметров.

А. Г. Печковский

М868. Из вершин основания тетраэдра в боковых гранях проведены высоты. Докажите, что три прямые, соединяющие основания высот в каждой грани, параллельны одной плоскости. (Плоские углы при вершине — не прямые.)

И. Ф. Шарыгин

М869*. Пары последовательных натуральных чисел (8, 9); (288, 289) обладают тем свойством, что каждое из этих чисел содержит любой простой множитель не менее чем во второй степени.

а) Найдите еще одну такую пару последовательных чисел.

б) Докажите, что существует бесконечно много таких пар.

А. В. Анджанс

М870. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некоторое конечное число пианистов. (В одной комнате может жить и несколько пианистов.) Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах — k-й и $(k+1)$-й — приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(k-1)$-ю и $(k+2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.

В. Г. Ильичев

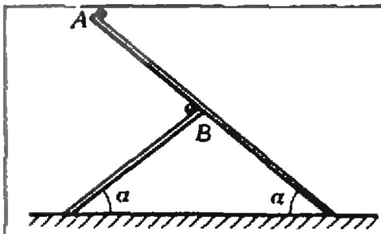


Рис 1

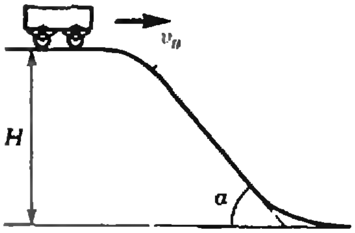


Рис 2.

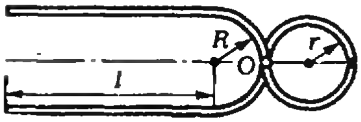


Рис 3.

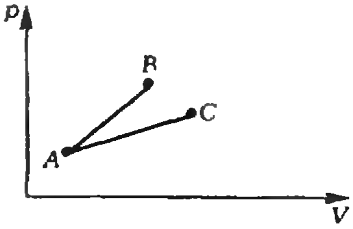


Рис 4.

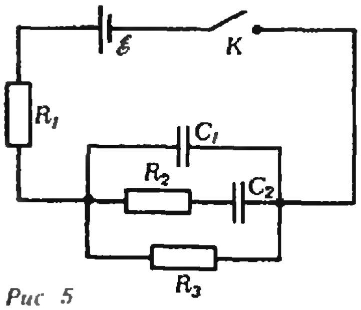


Рис 5

Ф878. Два гладких желоба, образующих с горизонтом углы α, расположены в одной вертикальной плоскости (рис. 1). Из точки A одного желоба и из точки B другого желоба одновременно без начальных скоростей начинают соскальзывать два шарика. Время движения до горизонтальной плоскости первого шарика (из точки A) — t_1, второго — t_2. Через какое время после начала движения шариков расстояние между ними было наименьшим?

П. Шихалиев

Ф879. Вагон массы M, установленный на рессорах с жесткостью k, катится по горизонтальному участку пути со скоростью v_0. После прохождения прямолинейного наклонного участка пути с перепадом высот H, составляющего угол α с горизонтом (рис. 2), вагон приобретает скорость v_x. Определить значение v_x, пренебрегая трением в колесах. Считать, что период колебаний вагона на рессорах много меньше времени прохождения наклонного участка пути и много больше времени прохождения скруглений, сопрягающих наклонный и горизонтальные участки пути; рессоры «пружинят» только в направлении, перпендикулярном плоскости рельсов.

И. П. Крылов

Ф880. Клещи состоят из двух одинаковых частей, скрепленных осью в точке O (рис. 3). Какова сила, действующая на ось, если свободные концы клещей сжимают с силой F? Трение в оси отсутствует.

Л. Г. Маркович

Ф881. Над газом совершают два тепловых процесса, нагревая его из одного и того же состояния до одной и той же конечной температуры. На p—V-диаграмме процессы изображаются прямыми линиями (рис. 4). При каком из процессов газу сообщается большее количество тепла?

А. И. Буздин, С. С. Кротов

Ф882. В схеме, приведенной на рисунке 5, $R_1 = R_2 = R_3 = R$, $C_1 = C_2 = C$. Определить величину тока через источник с ЭДС ℰ а) в первый момент времени после замыкания ключа K; б) спустя большой промежуток времени.

С. К. Строков

Problems

M866—M870; P878—P882

M866. a) A toy soldier stands in each little square of a 20 by 20 square. For what largest d can we interchange the soldiers so that each is moved a distance no less than d? The distance is the one between the centres of the corresponding little squares, whose sides are 1. Solve the same problem

b) for a 21 by 21 square;

c) for an m by n rectangle.

S. S. Krotov

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the

problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than August 31st, 1984, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words „KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). The mathematics problems in this issue are taken from the 1984 Intercity Math Tournament („Turnir gorodov").

M867. In a ballroom dance class 17 boys and 17 girls are lined up in parallel rows so that 17 couples are formed. It so happens that the difference in height between the boys and girls in all the couples is not more than 10 cm. Prove that if the boys and the girls are placed in each line in order of decreasing height, then the height difference in each of the newly formed couples will still be less than 10 cm.

A. G. Pechkovski

M868. Six altitudes are constructed from the three vertices of the base of a tetrahedron to the opposite sides of the three lateral faces. Prove that all three straight lines joining the base points of the altitudes in each lateral face are parallel to a certain plane. (The planar angles at the summit are not right angles.)

I. F. Sharygin

M869*. The two pairs of consecutive natural numbers (8, 9), (288, 289) possess the following property: each of them contains each of its prime factors to a power no less than 2.

a) Find one more pair of consecutive numbers with that property.

b) Prove that there are infinitely many such pairs.

A. V. Andjans

M870*. An infinite (in both directions) sequence of rooms is situated on one side of an infinite hallway. The rooms are numbered by successive integers and each contains a grand piano. A finite number of pianists live in these rooms. (There may be more than one of them in some of the rooms.) Every day some two pianists living in adjacent rooms (the k-th and $(k+1)$-st) decide that they interfere with each other's practice — they move to the $(k-1)$-st and $(k+2)$-nd rooms respectively. Prove that these moves will cease after a finite number of days.

V. G. Il'ichev

P878. Two smooth troughs, forming angles equal to α with the horizon, are in the same vertical plane (see figure Рис. 1). From the point A in one trough and the point B in the other, two small ball bearings simultaneously begin sliding down. The first (from A) reaches the horizontal plane in time t_1, the second — in time t_2. At what time after they start will the distance between them be minimal?

P. Shikhaliev

P879. A wagon of mass M, with a suspension on springs of elasticity k, rolls along a horizontal stretch of the railroad with velocity v_0. After going through a rectilinear downgrade (of angle α with the horizon) where it loses the height H (see figure Рис. 2), the wagon acquires the velocity v_x. Determine v_x, assuming friction in the wheels to be negligible. You can suppose that the period of oscillation of the wagon on its springs is much less than the time it takes to roll down the downgrade and much more than the time it takes to pass over the curved parts of the rails joining the horizontal and inclined stretches; the

springs "work" only in the direction perpendicular to the plane of the rails.

I. P. Krylov

P880. A pair of pliers consists of two identical parts, connected by an axis at the point O (see figure Рис. 3). What is the force acting on the axis when the ends of the handles are pressed together with the force F? The axis is friction-free.

L. G. Markovich

P881. Two different heating processes are carried out on the same gas, bringing it from the same initial state to the same terminal temperature. The processes are represented by straight lines on the p—V-diagram (see figure Рис. 4). In which of the two processes more heat is communicated to the gas?

A. I. Buzdin, S. S. Krotov

P882. On the circuit shown on figure Рис.5, $R_1=R_2=R_3=R$, $C_1=C_2=C$. Determine the current through the source of EMF $\mathscr{E}$ a) at the initial moment, when the switch K is turned on; b) a long time later.

S. K. Strokov

Решения задач

M851 — M855; Ф862 — Ф866

M851. *Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 1. На сторонах AB и AD выбраны точки P и Q так, что периметр треугольника APQ равен 2. Доказать, что $\widehat{PCQ}=45°$.*

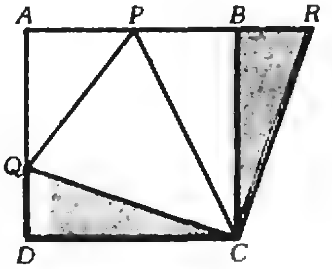


Рис. 1.

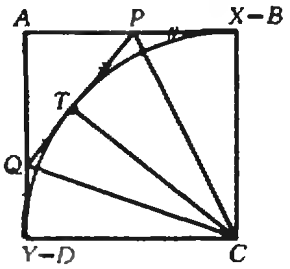


Рис. 2.

Приведем два решения задачи.

Первое решение. Повернем треугольник CDQ вокруг точки C на 90° так, чтобы сторона CD совместилась с CB; пусть точка Q при этом повороте перейдет в R (рис. 1). Очевидно, что точка R лежит на продолжении AB, $|BR|=|DQ|$, $|CR|=|CQ|$, $\widehat{QCR}=90°$. В треугольниках CQP и CRP сторона CP — общая, стороны CQ и CR равны; докажем, что и третьи стороны PQ и PR тоже равны. По условию,

$$|PQ|+|AP|+|QA|=|AB|+|AD|,$$

но $|AD|=|DQ|+|QA|=|BR|+|QA|$,

поэтому

$$|PQ|+|AP|+|QA|=|AP|+|PB|+|BR|+|QA|=$$
$$=|PR|+|AP|+|QA|,$$

то есть $|PQ|=|PR|$.

Итак, треугольники CQP и CRP конгруэнтны, следовательно, $\widehat{QCP}=\widehat{RCP}=\widehat{QCR}/2=45°$.

Второе решение. Рассмотрим окружность, касающуюся продолжений катетов AP и AQ треугольника APQ (в точках X и Y) и гипотенузы PQ (в точке T) — см. рис. 2. (Для построения этой окружности достаточно провести биссектрисы углов DQP и BPQ — они пересекутся в ее центре. Отметим, что такая окружность называется *вневписанной* в треугольник APQ.) По свойству касательных $|PX|=|PT|$, $|QY|=|QT|$ и $|AX|=|AY|$. Следовательно,

$$|AX|+|AY|=(|AP|+|PT|)+(|AQ|+|QT|)=|AP|+|AQ|+|PQ|=2,$$

то есть $|AX|=|AY|=1$ или $X=B$, $Y=D$. Точка P равноудалена от прямых CB и CT ($|PB|=|PT|$), поэтому CP — биссектриса угла BCT, аналогично, CQ — биссектриса угла DCT. Отсюда вытекает, что $\widehat{QCP}=\widehat{DCB}/2=45^\circ$.

А. Б. Ходулев

◆

M852. *Пусть x, y, z — длины сторон треугольника. Докажите, что величина*

$$\left|\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}\right|$$

меньше а) 1; *б)** 1/8.

Докажем сначала, что рассматриваемая сумма трех дробей по абсолютной величине равна их произведению. Заменяя числитель последней дроби $z-x$ на $(z-y)+(y-x)$, получим:

$$\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}=$$

$$=(x-y)\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{z+x}\right)+(y-z)\left(\frac{1}{y+z}-\frac{1}{z+x}\right)=$$

$$=\frac{(x-y)(y-z)}{z+x}\left(-\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)=$$

$$=\frac{(x-y)(y-z)(x-z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Теперь будем оценивать это произведение.

а) Поскольку x, y, z — положительные числа, справедливы неравенства $|x-y|<x+y$, $|y-z|<y+z$, $|z-x|<z+x$, поэтому

$$\left|\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{y-z}{y+z}\cdot\frac{z-x}{z+x}\right|<1.$$

(Для этого пункта условие, что x, y, z — длины сторон треугольника, несущественно.)

б) Длины сторон треугольника удовлетворяют следующим неравенствам: $|x-y|<z$, $|y-z|<x$, $|z-x|<y$, поэтому

$$\left|\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{y-z}{y+z}\cdot\frac{z-x}{z+x}\right|<\frac{zxy}{(x+y)(y+z)(z+x)}=$$

$$=\overline{\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\cdot\frac{\sqrt{yz}}{y+z}\cdot\frac{\sqrt{zx}}{z+x}}\leqslant\frac{1}{8}$$

(в последнем переходе мы использовали неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим: $\sqrt{ab}\leqslant(a+b)/2$ при $a>0$, $b>0$).

Более подробное исследование средствами математического анализа позволяет установить точную оценку:

$$\left|\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}\right|<\frac{16\sqrt{2}-10\sqrt{5}}{3}\approx 0{,}089;$$

равенство в этой оценке достигается для вырожденного треугольника со сторонами $z=1$, $y=(\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}+1)/2$, $x=z+y$. Попробуйте получить эту точную оценку самостоятельно.

А. В. Ермилов

М853. *Квадрат ABCD вращается вокруг своего неподвижного центра. Найдите множество, которое описывает середина отрезка PQ, где P — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на неподвижную прямую l, а Q — середина стороны AB.*

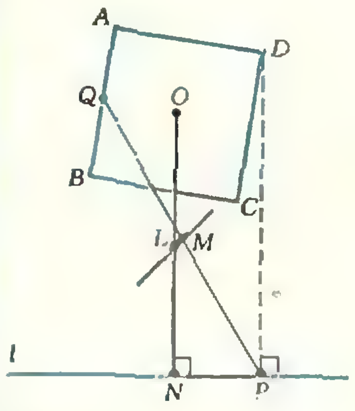


Рис. 1.

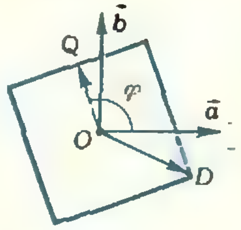


Рис. 2.

О т в е т: искомое множество — это отрезок, концы которого отвечают двум положениям квадрата, таким что сторона AB параллельна прямой l. Длина его равна *половине диагонали квадрата*, его середина совпадает с серединой перпендикуляра, опущенного из центра квадрата на прямую l и он составляет угол 45° с прямой l (рис. 1).

Ответ можно угадать, рассмотрев несколько положений квадрата, а потом обосновать традиционными геометрическими средствами. Однако здесь перед нами тот, не столь уж частый случай, когда общность и «автоматизм» векторного решения искупают его некоторую неуклюжесть.

Пусть N — проекция центра квадрата O на прямую l, L — середина отрезка ON, M — середина PQ (рис. 1). Тогда

$$\vec{LM} = \vec{LO} + \vec{OQ} + \vec{QM},$$
$$\vec{LM} = \vec{LN} + \vec{NP} + \vec{PM}.$$

Складывая эти равенства и деля сумму пополам, получим

$$\vec{LM} = \frac{1}{2}(\vec{OQ} + \vec{NP}).$$

Рассмотрим вектор $\vec{a}$ длины $|OA|$, коллинеарный прямой l, и перпендикулярный ему вектор $\vec{b}$ той же длины. Ясно, что при повороте на угол α вектор $\vec{a}$ перейдет в вектор $\vec{a}\cos\alpha + \vec{b}\sin\alpha$. Поэтому, обозначая через φ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{OQ}$ (рис. 2), получим, что

$$\vec{OQ} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}\cos\varphi + \vec{b}\sin\varphi),$$
$$\vec{OD} = \vec{a}\cos(\varphi - 135°) + \vec{b}\sin(\varphi - 135°),$$

а поскольку $\vec{NP}$ — проекция $\vec{OD}$ на прямую l,

$$\vec{NP} = \vec{a}\cos(\varphi - 135°) = \frac{\vec{a}}{\sqrt{2}}(\sin\varphi - \cos\varphi).$$

Следовательно, $\vec{LM} = (\vec{a} + \vec{b})\sin\varphi/2\sqrt{2}$. *Отсюда* и вытекает приведенный выше ответ, так как при изменении φ от 0° до 360° величина $\sin\varphi$ меняется в пределах от -1 до 1.

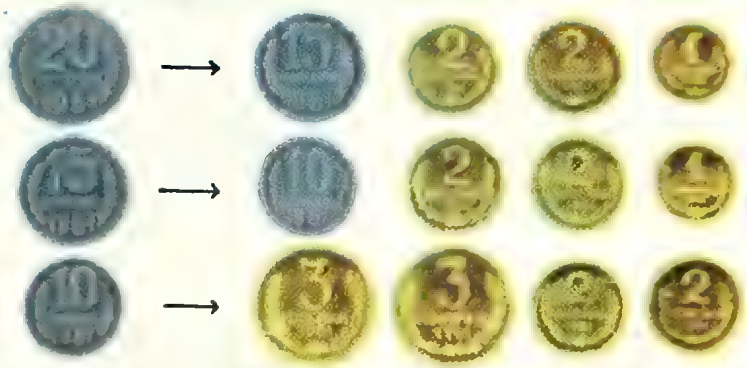
Й. Табов

◆

М854. *На переговорном пункте установлены автоматы для размена серебряных монет достоинством 10, 15 и 20 копеек, действующие так, как показано на рисунке. У Пети было 1 руб. 25 коп. серебряными монетами и он все их разменял в автоматах на медь. Вася, посчитав сколько каких монет стало у Пети, сказал:*
— А я знаю, какие у тебя были серебряные монеты!
Узнайте это и вы.

О т в е т: 11 монет достоинством 10 копеек и одна — 15 копеек.

Заметим, что две монеты по 15 коп. размениваются так же, как монета 20 коп. и монета 10 коп. А поскольку Вася сумел однозначно восстановить первоначальный набор монет у Пети, в этом наборе было не более одной монеты 15 коп., а значит, была ровно одна такая монета, потому что общая сумма 125 коп. не делится на 10; кроме того, в этот набор не могли входить одновременно монеты по 10 коп. и 20 коп. Следовательно, он мог быть только таким, как указано в ответе (125—15=110 не делится на 20).



Остается еще доказать, что указанный набор можно восстановить по результатам размена. Действительно, среди меди имеется только одна монета достоинством 1 коп., поэтому в исходном наборе все монеты, кроме одной, должны быть десятикопеечными, а оставшаяся, очевидно, может быть только пятнадцатикопеечной.

Б. И. Бегун

◆

М855. *Можно ли жесткий правильный тетраэдр с ребром 1 протащить сквозь обруч диаметра а) 1; б) 0,95; в)* 0,9; г) 0,85?*

а) Ответ: можно. Для этого располагаем тетраэдр так, чтобы прямая, проходящая через середины двух его скрещивающихся ребер, была перпендикулярна плоскости окружности и проходила через ее центр (рис. 1).

б) Ответ: можно. Покажем, что тетраэдр можно протащить сквозь окружность диаметра $3/\sqrt{11} \approx$ $\approx 0{,}905 < 0{,}95$; это диаметр окружности, проходящей через вершину тетраэдра и середины двух ребер основания.

Наденем такую окружность на вершину A тетраэдра $ABCD$ и продвинем ее так, чтобы она прошла через вершину B и середины M и N ребер AC и AD (рис. 2). После этого будем поворачивать окружность вокруг оси MN за вершину B. Плоскость окружности будет пересекать тетраэдр по трапеции MNL_1K_1. Диаметр окружности, описанной около этой трапеции, равен $|NK_1|/\sin \widehat{NMK_1}$; нетрудно подсчитать, что при вращении он уменьшается ($|NK_1|$ уменьшается, а $\sin \widehat{NMK_1}$ растет). Поэтому окружность можно поворачивать беспрепятственно, пока она не попадет в плоскость $MNLK$, где K и L — середины ребер BC и BD. Теперь ее можно снять с тетраэдра через ребро CD точно так же, как мы надели ее через AB (осью вращения, аналогичной MN, при этом будет прямая MK или NL).

в) Ответ: можно. Поступаем примерно так же, как в случае б), но точки M и N берем на расстояниях $|AM| = |AN| = 1/3$ от вершины A (на тех же ребрах). Тогда диаметр окружности, описанной около треугольника BMN, равен $14/9\sqrt{3} \approx 0{,}898 < 0{,}9$. Последовательность протаскивания чуть-чуть изменяется: после того как в результате вращения вокруг MN плоскость окружности станет параллельной ребру AB, окружность нужно параллельно перенести так, чтобы она коснулась ребер CA и CB в точках,

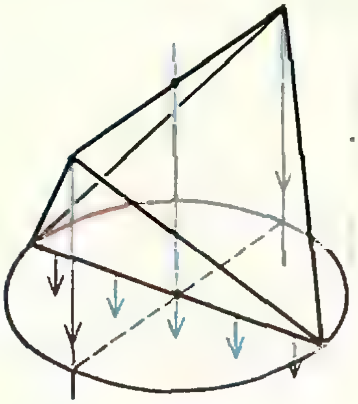


Рис. 1.

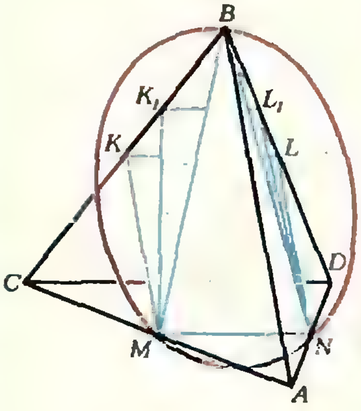


Рис. 2.

отстоящих от вершины C на расстояние $1/3$, а затем «обратным порядком» снимать окружность через CD.

г) Ответ: нельзя. Равносторонний треугольник со стороной 1 нельзя протащить сквозь окружность, диаметр которой меньше высоты этого треугольника, то есть меньше $\sqrt{3}/2>0{,}85$. Но тогда тем более сквозь окружность диаметра 0,85 нельзя протащить тетраэдр, все грани которого — такие равносторонние треугольники.

В. В. Произволов

От редакции. После того как эта задача была подготовлена к печати и независимо от этого, она появилась и в только что вышедшей в серии Библиотечка «Квант» книге И. Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии (стереометрия)» (М., 1984, задача 261). Там же приводится вычисление диаметра наименьшей окружности, сквозь которую можно протащить тетраэдр с ребром длины 1. Этот диаметр примерно равен 0,896; протаскивание осуществляется по тому же принципу, что в решении задачи в).

◆

Ф862. *Линза с фокусным расстоянием F и диаметром d вставлена в отверстие такого же диаметра в экране из светопоглощающего материала ($d/F<2$). Экран расположен так, что оптическая ось линзы совпадает с биссектральной плоскостью и перпендикулярна ребру двугранного прямого угла (рис. 1). Грани угла посеребрены. Расстояние от ребра угла до фокуса линзы равно a $(a>F)$. Экран освещается широким пучком, параллельным оси линзы. Какая доля светового пучка, отраженного от зеркал, выйдет наружу, пройдя через линзу? На каком расстоянии от линзы эти пучки дадут изображение?*

Пучок лучей, прошедших через линзу, собирается в ее фокусе (рис. 2). Лучи, идущие из фокуса, падают на зеркала под тупыми углами (так как $d/F<2$). Поэтому после первого отражения от одного из зеркал лучи падают на второе зеркало. После отражения от двух зеркал все лучи (весь световой поток) падают на экран с линзой.

Для линзы источником этих лучей является мнимое изображение S фокуса линзы, создаваемое зеркальными гранями угла на расстоянии $2a+F$ от линзы. Сквозь линзу наружу проходят лишь лучи, лежащие внутри телесного угла Ω (на рисунке 2 показаны лучи, ограничивающие выходящий наружу пучок).

Доля k светового потока, отраженного от зеркал и проходящего повторно через линзу, равна отношению светового потока, распространяющегося внутри телесного угла Ω, к световому потоку, отраженному от зеркал. Но световой поток, распространяющийся внутри телесного угла Ω, равен световому потоку, входящему в линзу внутри пучка диаметра δ (рис. 2), а световой поток, отраженный от зеркал, равен всему световому потоку, входящему в линзу, то есть световому потоку внутри

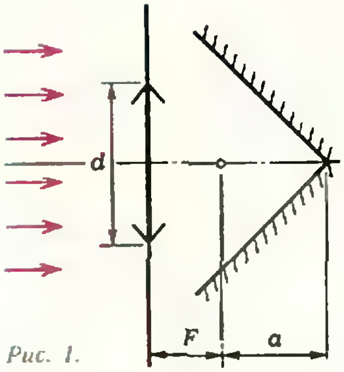


Рис. 1.

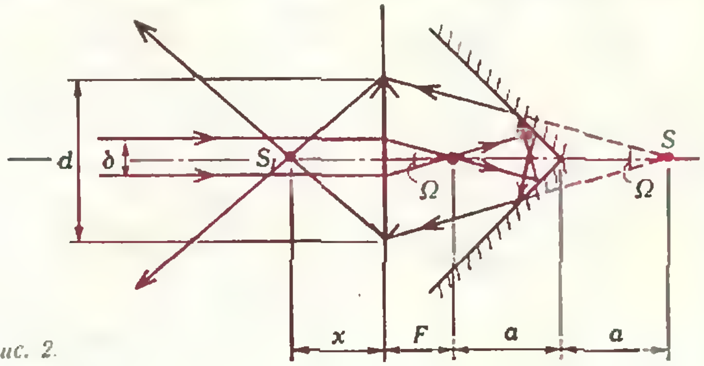


Рис. 2.

пучка диаметра d. Следовательно,

$$k=\left(\frac{\delta}{d}\right)^2.$$

Каждый прошедший через линзу луч после двукратного отражения от зеркал меняет свое направление на обратное. Следовательно (см. рис. 2),

$$\frac{\delta}{d}=\frac{F}{F+2a} \quad \text{и}$$

$$k=\left(\frac{F}{F+2a}\right)^2.$$

Действительное изображение S_1 источника S, создаваемое линзой, находится на главной оптической оси линзы. Расстояние x от S_1 до линзы определяется по формуле линзы:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{F+2a}+\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{F(F+2a)}{2a}.$$

А. А. Лапидес

◆

Ф863. *В конической лунке с углом 2α при вершине прыгает шарик, упруго отражаясь от стенки лунки. Точки соударения шарика со стенкой лежат на одной и той же высоте (рис. 1); время от удара до удара постоянно и равно T. Чему равна средняя угловая скорость движения шарика вокруг оси лунки, если максимальная скорость шарика v лежит в диапазоне от $\frac{1}{2}gT$ до $\frac{gT}{2\sin\alpha}$?*

На рисунке 2 изображены: *1* — плоскость, в которой лежат векторы скоростей падающего и отраженного шарика, *2* — горизонтальная плоскость, *3* — плоскость, касательная к поверхности лунки в точке удара. Время от удара до удара будет оставаться постоянным только в том случае, когда плоскость *1* будет перпендикулярна плоскости *3*, а угол φ — угол между вектором скорости шарика сразу же после удара и горизонтальной плоскостью — будет таким, что $\sin\varphi=gT/2v$. В этом случае $\cos\gamma$ (γ — половина угла между проекциями скоростей шарика до и после удара на горизонтальную плоскость) можно определить по формуле

$$\cos\gamma=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha}=\left(\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\left(1-\frac{g^2T^2}{4v^2}\right)\right)^{-1/2}$$

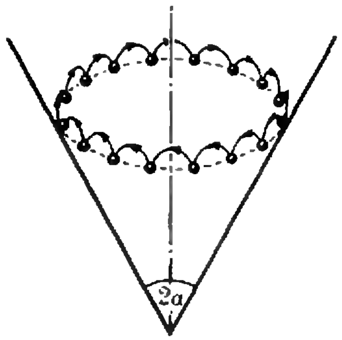


Рис. 1.

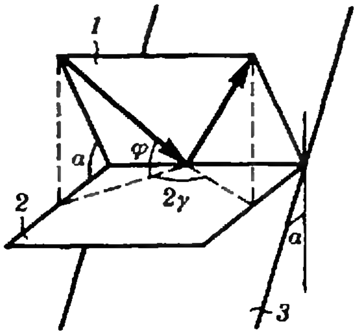


Рис. 2.

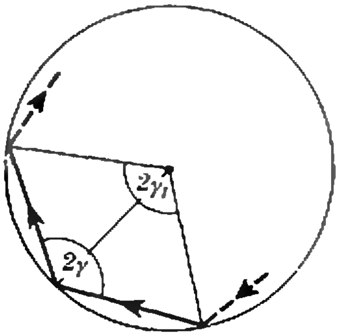


Рис. 3.

Но $\cos\gamma=\sin\gamma_1$ (рис. 3; $2\gamma_1=(\pi-2\gamma)$ — угол поворота плоскости движения шарика вокруг оси лунки за время T). Значит, средняя угловая скорость шарика равна

$$\omega=\frac{2}{T}\arcsin\left(\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\left(1-\frac{g^2T^2}{4v^2}\right)\right)^{-1/2}$$

О. Я. Савченко

◆

Ф864. *Мальчик медленно поднимается на снежную горку и*

Работа A по поднятию санок складывается из двух частей: работы против силы тяжести $A_1=mgH$

тащит за собой на веревке санки. Веревка все время параллельна касательной к горке в той точке, в которой находится мальчик. Вершина горки расположена на высоте H и на расстоянии l от ее основания (рис. 1). Какую работу совершит мальчик при поднятии санок на горку? Масса санок m, коэффициент трения санок о снег μ.

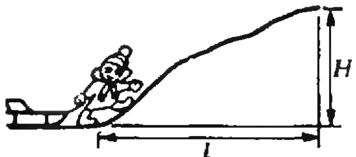


Рис 1.

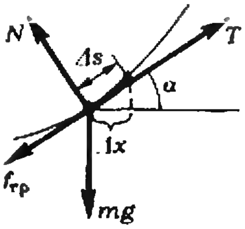


Рис 2.

Ф865. *Оцените размер атома ртути, если известны: σ — коэффициент поверхностного натяжения ртути (в единицах $\frac{\text{энергия}}{\text{площадь}}$), ϱ — плотность ртути, r — удельная теплота парообразования ртути.*

и работы против силы трения A_2. Чтобы найти A_2, рассмотрим небольшое перемещение Δs санок вдоль горки. Пусть касательная к горке в этом месте составляет угол α с горизонтом (рис. 2). Поскольку подъем медленный и сила натяжения веревки T направлена вдоль касательной (вдоль Δs), можно считать, что санки все время находятся в равновесии, и

$$f_{тр}=\mu N=\mu mg\cos\alpha.$$

Работа ΔA_2, совершаемая против силы трения при перемещении на Δs, равна

$$\Delta A_2=\mu mg\cos\alpha\cdot\Delta s.$$

Как видно из рисунка 2, $\Delta s\cdot\cos\alpha=\Delta x$ — перемещение санок в горизонтальном направлении. Так что ясно, что результирующая работа против силы трения при поднятии санок на высоту H равна

$$A_2=\mu mgl,$$

так как l — суммарное горизонтальное перемещение санок при подъеме.

Таким образом, полная работа, совершаемая мальчиком, равна

$$A=A_1+A_2=mgH+\mu mgl=mg(H+\mu l)$$

и не зависит от профиля горки.

А. И. Буздин

◆

При плотной упаковке молекул (что вполне справедливо для жидкостей) каждая молекула имеет 12 соседей. (Покажите это самостоятельно. Подсказка: рассмотрите телесные углы, в которых видны из центра молекулы ее соседи.) Из этих 12 молекул 6 окружают ее кольцом, а еще по три молекулы находятся с каждой стороны от плоскости кольца. Когда мы создаем плоскую свободную поверхность, мы отрываем от молекулы по 3 молекулы из 12, то есть разрываем четверть всех связей.

Итак, создавая свободную поверхность площади S, мы совершаем работу

$$A=\sigma S=\frac{1}{4}rm=\frac{1}{4}rV\varrho=\frac{1}{4}rSd\varrho,$$

где d — диаметр молекулы («высота» одного слоя). Отсюда

$$d=\frac{4\sigma}{r\varrho}.$$

Для ртути $\sigma=0{,}47$ Дж/м^2, $\varrho=13{,}6\cdot10^3$ кг/м^3, $r=2{,}82\cdot10^5$ Дж/кг, и $d\approx5\cdot10^{-10}$ м.

Оценим диаметр молекулы стандартным способом — по объему, занимаемому 1 молем: на 1 молекулу приходится объем

$$v=\frac{\mu}{\varrho N_A}=\frac{1}{6}\pi d^3,$$

откуда

$$d=\left(\frac{6\mu}{\pi\varrho N_A}\right)^{1/3}$$

Для ртути $\mu=0{,}2$ кг/моль, и $d\approx3{,}6\cdot10^{-10}$ м, то есть наша оценка по энергии связей вполне разумна.

Подумайте, годится ли такой способ оценки (по энергии связей) для многоатомных молекул.

Ю. А. Родионов, А. Я. Яковлев

Ф866. *Электролитическая ванна подключена через идеальный диод к сети переменного напряжения (рис. 1). Найти показание теплового амперметра (А), если известно, что за время $t=1$ ч на катоде выделяется $m=1{,}078$ г меди. Электрохимический эквивалент меди $k=0{,}33\cdot10^{-6}$ кг/Кл.*

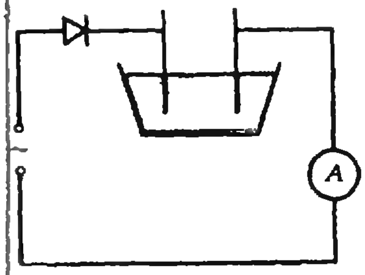


Рис. 1.

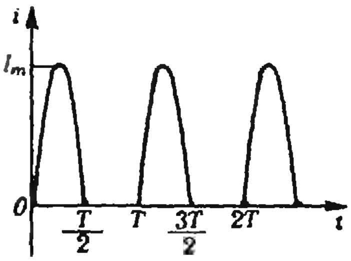


Рис. 2.

◆

Согласно I закону Фарадея, $m=kq$, откуда

$$q=\frac{m}{k}, \tag{1}$$

где q — заряд, прошедший через электролит за время t.

На рисунке 2 показано изменение тока в цепи с идеальным диодом. Как видно из рисунка, суммарный заряд, прошедший по цепи за время t, равен $q=q_{T/2}\cdot\frac{t}{T}$, где $q_{T/2}$ — заряд, проходящий по цепи за половину периода колебаний тока в сети, равный

$$q_{T/2}=\int\limits_0^{T/2} I_m\sin\omega t\,dt=-\frac{I_m}{\omega}\cos\omega t\Big|_0^{T/2}=\frac{I_m}{\pi}T.$$

Таким образом,

$$q=\frac{I_m}{\pi}T\cdot\frac{t}{T}=\frac{I_m}{\pi}t. \tag{2}$$

Из (1) и (2) находим амплитудное значение тока в сети:

$$I_m=\frac{\pi m}{kt}. \tag{3}$$

Количество тепла, выделяющееся на амперметре за время t, равно $Q=Q_{T/2}\cdot\frac{t}{T}$, где $Q_{T/2}$ — тепло, выделяющееся за половину периода изменения тока, равное

$$Q_{T/2}=\frac{I_m^2}{2}R\,\frac{T}{2}.$$

Следовательно,

$$Q=\frac{I_m^2}{4}Rt.$$

При установившемся тепловом равновесии средняя мощность, выделяющаяся на амперметре, равна

$$\bar{p}=\frac{I_m^2}{4}R.$$

Тепловой амперметр проградуирован по действующему значению тока. Значит, показание амперметра I_A определяется соотношением

$$\bar{p}=I_A^2R=\frac{I_m^2}{4}R\Rightarrow I_A=\frac{I_m}{2}.$$

Подставляя найденное выражение для I_m (см. (3)), находим:

$$I_A=\frac{\pi m}{2kt}=\frac{3{,}14\cdot1{,}078\text{ г}}{2\cdot0{,}33\cdot10^{-3}(\text{г/Кл})\cdot3600\text{ с}}\approx1{,}43\text{ А}.$$

Б. А. Мукушев

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М821—М835, Ф833—Ф847, справились с задачами М821, М826, М831, М832 и Ф833, Ф834, Ф836, Ф844, Ф846. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Р. Алексеев (Ленинград) 22, 24, 25, 33; *А Артюх* (Чернигов) 27; *А. Астрелин* (Новосибирск) 22—25, 27—30, 33, 34; *Я. Бабкин* (Петрозаводск) 24; *Л. Байрак* (Белгород) 24; *А. Барабаш* (Киев) 22, 25, 29, 33; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 24, 25, 27, 29, 33; *Ю. Баркагин* (Пенза) 22, 24; *М. Барон* (Ленинград) 22, 24; *А. Биргер* (Иваново) 22, 33, 35; *Г. Борщевская* (Казань) 24; *А. Ванин* (Днепропетровск) 33; *В. Васильев* (Воткинск) 22, 27, 33; *С. Велесько* (Минск) 24; *Л. Вертгейм* (Новосибирск) 27, 33; *И. Воронков* (Гатчина) 24, 33; *Б. Галицкий* (Москва) 22; *М. Гараев* (Физули) 22, 24, 25, 33, 35; *Р. Гендлер* (Ташкент) 22, 24, 25, 27, 33, 35; *М. Гордина* (Ленинград) 24; *В. Горюшкин* (Петрозаводск-Камчатский) 24; *Ю. Грабовский* (Киев) 33; *И. Григорьев* (Челябинск) 22, 24, 27, 33; *Н. Григорьева* (Рыбинск) 22, 25, 33, 34; *А. Губирев* (Фатеж) 22; *Р. Гут* (Изобильный) 27; *З. Джафаров* (с. Тьюркоба Аз. ССР) 24, 27, 29, 33, 34; *Е. Долгоборец* (Киев) 27; *Е. Доманицкая* (Ленинград) 22, 24; *Е. Дорофеев* (Ленинград) 24; *В. Журавлев* (Гайворон) 24; *Д. Земляной* (Севастополь) 22, 24, 25, 27—30, 33, 34; *Л. Зосин* (Киев) 22, 24, 25; *А. Иванов* (Петрозаводск) 24; *В. Ивлев* (Джезказган) 33; *В. Калович* (Хабаровск) 27; *И. Карчевский* (Алма-Ата) 24; *П. Касинский* (Алма-Ата) 24, 25; *О. Козловский* (Москва) 24, 27, 33; *Д. Коломиец* (Москва) 22, 24; *К. Копотун* (Киев) 24, 34; *С. Коршунов* (Целиноград) 24, 25; *Р. Кукльер* (Париж, Франция) 33; *А. Лазарев* (Москва) 24; *М. Лев* (Свердловск) 22, 24, 25, 27—29, 33; *А. Лукьянов* (Севастополь) 24, 25, 27—30, 33, 34; *М. Макаров* (Севастополь) 22, 27—30, 33; *Т. Маливанчук* (Киев) 22—25, 33; *Д. Михов* (Толбухин, НРБ) 24, 25, 33, 35; *Е. Мишин* (Севастополь) 22, 24, 27—29; *П. Молодчик* (Киев) 27; *А. Молотков* (Ленинград) 22, 24, 25, 28, 29; *В. Назаренко* (Киев) 27; *С. Найден* (Днепропетровск) 29, 33; *П. Наумов* (Москва) 24; *В. Николаев* (Хабаровск) 22, 24; *О. Овецкая* (Донецк) 27—29; *И. Онучин* (Пермь) 24; *В. Панич* (Севастополь) 24, 25, 27—29; *Н. Панченко* (Ленинград) 22, 24; *А. Петрунин* (Ленинград) 22, 24; *С. Пиунихин* (Москва) 27—29; *М. Половинник* (Киев) 25; *Р. Полянова* (София, НРБ) 33, *К. Постригач* (Барнаул) 33; *Е. Рогаль* (Ровно) 24; *Д. Рубленко* (Хмельницкий) 24, 34; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) 24, 29; *И. Сандлер* (Москва) 22; *А. Сергиенко* (Ленинград) 24; *Р. Сибилев* (Ленинград) 33; *И. Слуцкий* (Алма-Ата) 25, 27, 28; *Н. Стойсиу* (Белград, СФРЮ) 33; *И. Стоянов* (Димитровград, НРБ) 27; *С. Струков* (Воронеж) 33—35; *Р. Суник* (Киев) 27; *Д. Тананко* (Ворошиловград) 22; *М. Тейтель* (Киев) 22, 24, 25, 27—30, 33; *Д. Терешин* (Саратов) 24, 25, 27—30; *С. Триунихин* (Москва) 22, 24; *Ю. Факторович* (Москва) 33; *Д. Федотов* (Новокузнецк) 27, 30, 33; *Е. Финк* (Ленинград) 23, 24; *М. Фоменко* (Алма-Ата) 28; *М. Холмянский* (Москва) 24; *В. Хрычиков* (Севастополь) 22, 24, 25, 27—30, 33; *С. Цветков* (Киев) 24; *С. Цонев* (София, НРБ) 33; *С. Чернышев* (Александров) 22, 24; *С. Чичинский* (Днепропетровск) 33; *Т. Шаглеев* (Севастополь) 24, 27; *А. Шаник* (Москва) 24; *П. Шипков* (Пущино) 24, 25; *В. Щепинов* (Севастополь) 24, 28; *Л. Эрдёш* (Будапешт, ВНР) 22, 24, 25, 27, 29, 33—35; *П. Этингоф* (Киев) 22, 24, 25, 27—29; *Е. Юдицкий* (Киев) 24, 27; *Г. Юшин* (Воронеж) 24, 25; *А. Ярин* (Севастополь) 24, 27—30, 33, 34.

Физика

А. Абанов (Красноярск) 35, 37, 38, 40, 42, 45, 47; *В. Аносов* (Киев) 35, 37—39, 41—43, 45, 47; *В. Апальков* (Харьков) 35, 37—41, 43; *В. Байбиков* (Новосибирск) 35, 37, 43, 45, 47; *А. Барабаш* (Киев) 43, 47; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 33—47; *А. Башлаков* (Москва) 38, 41; *А. Белопольский* (Киев) 43; *И. Берхин* (Донецк) 35, 38, 41, 42; *Е. Беспалов* (Курган) 35, 39, 41—43, 45; *В. Бражников* (Запорожье) 35, 37, 39, 40, 45; *А. Брезгунов* (Новосибирск) 43, 45, 47; *Н. Бурдейная* (Винница) 35; *В. Вергелюк* (Винница) 35; *Л. Вертгейм* (Новосибирск) 35, 43; *О. Гаврилов* (Киев) 35, 38, 39,43, 45; *В. Глаголев* (Тула) 35, *П. Глазырин* (Воткинск) 41—43; *О. Голинский* (Тамбов) 35, 37—39, 41—43, 45; *Ю. Гордиенко* (Винница) 38, 41; *Ю. Грабовский* (Киев) 45; *С. Гребенщиков* (п. Черноголовка Московской обл.) 35, 37—43; *И. Григорьев* (Челябинск) 35, 37, 38, 40—43, 45; *М. Гринберг* (Красноярск) 35, 39—42; *М. Демидова* (Винница) 35; *П. Докучаев* (Хабаровск) 43; *Е. Долгоборец* (Киев) 39; *Г. Долгопятов* (Донецк) 35, 37—39, 41, 42, 45; *С. Дубовик* (Брест) 39, 43; *С. Дудко* (Донецк) 39, 43; *Д. Ермошин* (Москва) 35, 38, 39, 42, 43, 47; *О. Ефремов* (Воронеж) 35, 37—40; *С. Загоруйко* (Винница) 35, 37; *С. Зинченко* (Краматорск) 35, 37—39, 42; *М. Имас* (Донецк) 35, 37; *Б. Иричанин* (Белград, СФРЮ) 35; *М. Йотов* (София, НРБ) 35, 37; *И. Калиновский* (Киев) 35, 37—39, 42, 43, 45; *В. Карасев* (Алма-Ата) 35, 38—40, 43; *А. Кириченко* (Пермь) 43, 45,47; *М. Козлов* (Москва) 45, 47; *М. Коняев* (Ленинград) 43; *С. Кравчук* (Киев) 35, 37—39, 41, 42, 45; *А. Крапивин* (Киев) 35; *В. Краснов* (Чебоксары) 37, 41, 43; *А. Крюченков* (Ульяновск) 43, 45; *Д. Кузнецов* (Куйбышев) 39, 41, 43, 45; *Д. Купцов* (Москва) 33—47; *Д. Кузютин* (Алма-Ата) 43; *Н. Кухаркин* (Москва) 37; *С. Лауринавичус* (Мажейкяй) 37—39, 41—43, 45; *И. Левин* (Донецк) 37; *Ю. Литвиненко* (Воронеж) 43; *Д. Лунц* (Саратов) 35, 38, 39, 42, 43, 45; *П. Лушников* (Москва) 45; *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.) 33—47; *К. Макарчук* (Киев) 38; *Т. Маливанчук* (Киев) 35, 39, 42, 47; *Г. Макметов* (Москва) 47; *Л. Маркович* (Минск) 35, 37; *О. Маров* (Канев) 43; *А. Михеев* (Кимры) 35, 39, 42, 43, 47; *С. Молчанов* (Саратов) 35, 37, 43, 45; *А. Монахов* (п. Перевоз Горьковской обл.) 45; *К. Мосейчев* (Зеленоград) 39, 43, 45; *С. Мягчилов* (Одесса) 39; *А. Найфонов* (Апатиты) 43; *Г. Николаев* (Горький) 43; *С. Никоненко* (Киев) 35, 37—39, 42, 43, 47; *А. Онуфриев* (Москва) 43; *Е. Пархименко* (Киев) 37—43, 45; *Д. Пастухов* (Витебск) 35, 38—40; *А. Петренко* (Винница) 35, 37—39, 41—43, 45, 47; *И. Пильников* (Тамбов) 38, 39; *А. Погорелов* (Алма-Ата) 38, 40, 43, 45; *М. Половинник* (Киев) 40, 45, 47; *А. Поляков* (Златоуст) 39; *Э. Преображенский* (Краснодар)

(Окончание см. на с. 47)

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Микроистории

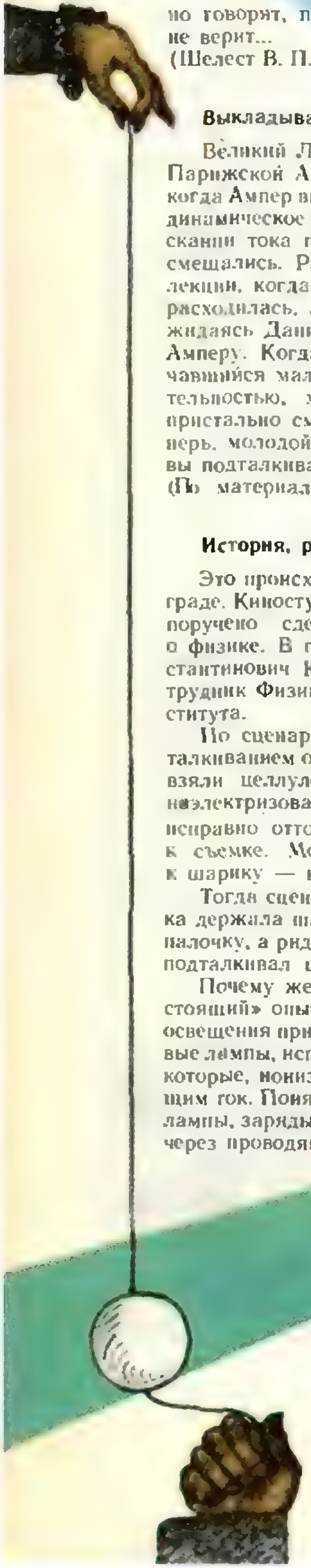
История, рассказанная В. Вайскопфом о Н. Боре

Однажды коллега-физик зашел в кабинет к Нильсу Бору и к своему удивлению увидел подкову, прибитую к двери.

— Профессор,— неужели Вы верите в это?

— Нет, конечно,— спокойно отвечал Бор,— но говорят, подкова помогает и тем, кто в нее не верит...

(Шелест В. П. *Новый круг.* М.: Атомиздат, 1978.)



Выкладывайте начистоту

Великий Лаплас присутствовал на заседании Парижской Академии наук 18 сентября 1820 г., когда Ампер впервые продемонстрировал электродинамическое взаимодействие токов — при пропускании тока по двум проводникам они взаимно смещались. Рассказывают, что после окончания лекции, когда полная впечатлений публика уже расходилась, Лаплас остановился в дверях, дожидаясь Даниэля Колладона, ассистировавшего Амперу. Когда тот приблизился, Лаплас, отличавшийся малоприятным характером и подозрительностью, хлопнул Колладона по плечу и, пристально смотря ему в глаза, сказал: «А теперь, молодой человек, признавайтесь! Ведь это вы подталкивали провод.»

(По материалам Льоцци М. *История физики.* М.: Мир, 1970.)

История, рассказанная И. К. Кикоиным

Это происходило в конце 20-х годов в Ленинграде. Киностудии вместе с группой физиков было поручено сделать научно-популярный фильм о физике. В группе физиков был и Исаак Константинович Кикоин, тогда еще — молодой сотрудник Физико-технического рентгеновского института.

По сценарию надо было отснять опыт с отталкиванием одноименных зарядов. На репетиции взяли целлулоидный шарик, поднесли к нему наэлектризованную эбонитовую палочку — шарик исправно оттолкнулся. После этого приступили к съемке. Мотор, камера... подносят палочку к шарику — никакого эффекта.

Тогда сценарий немного изменили. Лаборантка держала шарик на ниточке, подносила к нему палочку, а рядом стоял И. К. Кикоин и незаметно подталкивал шарик. Съемка прошла блестяще.

Почему же не получился такой простой «настоящий» опыт? Дело в том, что в те годы для освещения при съемке применялись мощные дуговые лампы, испускающие ультрафиолетовые лучи, которые, ионизируя воздух, делают его проводящим ток. Понятно, что как только были включены лампы, заряды с шарика и палочки быстро стекли через проводящий воздух.

Подобные трудности встретились и в други опытах, так что в результате половина кинокадро была «настоящей», а половина — тем, что сейча называется «комбинированной съемкой». Само интересное — когда готовый фильм показал специалистам-физикам, предупредив их, что половина опытов — поддельные, они все назвали поддельными как раз настоящие опыты. В подделанных опытах все было «как надо», и они сомнени не вызывали.

Эвольвенты

Под редакцией Д. Б. Фукса

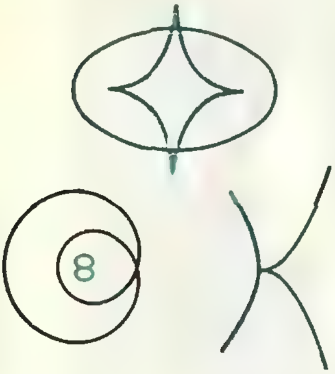


Рис. 1.

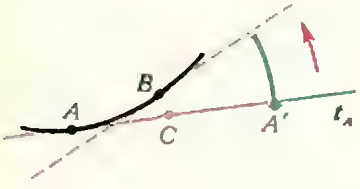


Рис. 2.

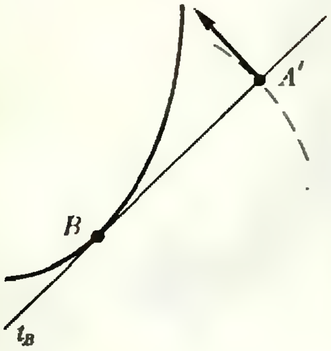


Рис. 3.

На предыдущей геометрической страничке мы подробно рассказывали об *эволютах*. Напомним о них то немногое, что потребуется сегодня. По гладкой кривой c на плоскости строится другая кривая — ее эволюта e. Среди замечательных свойств эволюты выделим такое: *всякая нормаль к кривой c (то есть перпендикуляр к касательной, восстановленный в точке касания) касается кривой e*. Это свойство эволюты можно принять за ее определение, *что мы и делаем*. В прошлый раз мы должны были построить эволюты трех кривых: эллипса, «вывернутой восьмерки» и полукубической параболы. Результаты построения всех трех эволют показаны на рисунке 1, где черная линия изображает заданную кривую, синяя — эволюту. Сегодня нас интересует обратная задача: по кривой e восстановить кривую c, эволютой которой она является. Эта кривая называется *эвольвентой* кривой e (то есть если e — эволюта кривой c, то c — эвольвента кривой e). Мы обучимся совсем простому способу построения эвольвент и увидим, что у гладкой кривой без прямолинейных кусков всегда имеется бесконечное количество эвольвент*).

Построение эвольвент. Пусть e — данная кривая, A — ее точка, l_A — касательная к кривой e в точке A. Выберем на прямой l_A точку A' (точка A' выбирается на l_A произвольно, и этот произвол определяет неоднозначность построения: возьмем другую точку — получим другую эвольвенту). Представим себе, что прямая l_A катится по кривой e без проскальзывания (то есть когда она занимает положение l_B касательной в точке B, то с B совмещается такая точка C прямой l_A, что длина отрезка CA равна длине дуги BA нашей кривой (рис. 2). Кривая, описываемая при этом качении точкой A', и есть эвольвента.

Причина здесь проста. Поскольку прямая катится по кривой без скольжения, то скорость точки в тот момент, когда она касается кривой, равна нулю — эта точка представляет собой «мгновенный центр вращения» прямой l_B. При этом скорость любой точки на l_B, например A', в этот момент направлена перпендикулярно l_B (рис. 3) — то есть l_B есть нормаль к траектории точки A'; значит, эта траектория и есть эвольвента.

На практике наш способ удобнее всего применять к выпуклым замкнутым кривым. Достаточно вырезать кусок картона, граница которого имеет форму заданной кривой, положить его на лист бумаги, приложить к нему линейку и поворачивать ее вокруг куска картона, следя, чтобы она не проскальзывала. Если при этом все время держать карандаш около выбранного деления линейки, мы нарисуем на бумаге эвольвенту нашей кривой. Например, построение эвольвенты окружности показано на рисунке 4. Заметьте, что в некоторый момент эвольвента вонзается в нашу окружность под прямым углом и тут же отскакивает от нее под прямым углом — в этом месте у эвольвенты *точка возврата*. (С подобным явлением вы сталкивались, готовясь к предыдущей геометрической страничке, когда рисовали

---

*) Красивые примеры эвольвент можно посмотреть на второй странице обложки.

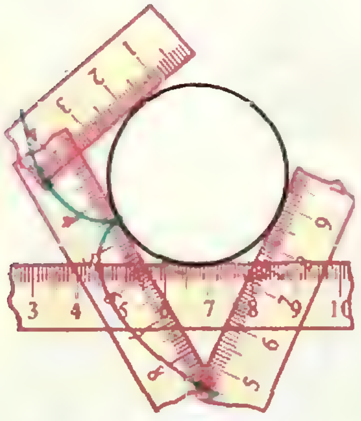


Рис. 4.

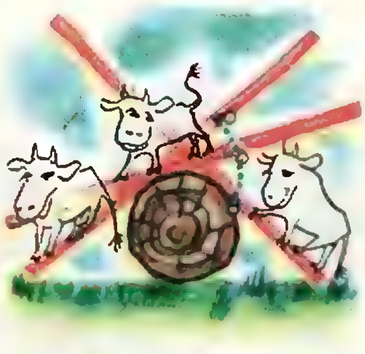


Рис. 5.

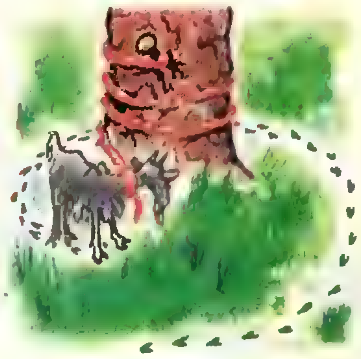


Рис. 6.

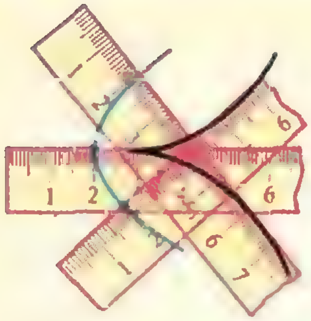


Рис. 7.

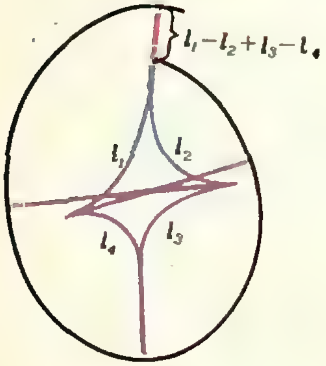


Рис. 8.

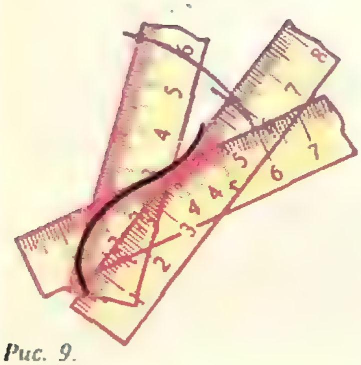


Рис. 9.

эволюту полукубической параболы: как и эвольвента окружности, полукубическая парабола своим острым клювом вонзается в свою эволюту: см. рис. 1.)

Если продолжить эвольвенту окружности в любую сторону, мы получим спираль, за один виток удаляющуюся от окружности примерно на ее длину. Похожим образом устроена эвольвента любой замкнутой кривой; в частности, она не может быть замкнутой.

Наш способ построения эвольвент допускает различные выразительные интерпретации. Например, его можно представить как «способ белого бычка» (когда бычок идет-качается по доске, положенной на опору, гвоздь, вбитый в доску, описывает эвольвенту границы опоры; рис. 5) или как «способ серенького козлика» (если серенький козлик обходит дерево, к которому его привязала бабушка, и при этом все время держит веревку в натянутом состоянии, то он движется по эвольвенте границы дерева; рис. 6).

Рассмотрим эвольвенты более сложных кривых. В прошлый раз мы убедились, что эволюта гладкой кривой как правило имеет точки возврата. Поэтому естественно поинтересоваться, как устроена эвольвента кривой, имеющей точку возврата.

Как видно из рисунка 7, эвольвента в этом месте не имеет видимых особенностей. Но имеет «невидимую особенность»: расстояние от отмеченной точки линейки до точки касания после прохождения точки возврата из растущего делается убывающим (или наоборот). Легко показать (это — упражнение вам), что если замкнутая кривая имеет нечетное число точек возврата, то всякая ее эвольвента замкнута. В случае замкнутой кривой с $2k$ точками возврата обозначим через $l_1, l_2, \ldots, l_{2k}$ длины дуг, на которые точки возврата делят кривую. Если $l_1+l_3+\ldots+l_{2k-1}=l_2+l_4+\ldots+l_{2k}$, *то все эвольвенты кривой замкнуты*, в противном случае не замкнута ни одна из них (рис. 8). Например, эволюта эллипса имеет 4 точки возврата, и указанное условие выполнено. Поэтому эвольвенты этой кривой замкнуты, в том числе и сам эллипс.

Очень интересно устроены эвольвенты кривой, имеющей точку перегиба. Когда мы движемся по кривой, касательная поворачивается — по часовой стрелке или против часовой стрелки. При прохождении точки перегиба касательная изменяет направление вращения, достигая в этой точке экстремального положения. Поскольку эвольвента всегда перпендикулярна касательной, она вонзается в это экстремальное положение под прямым углом и под прямым же углом от него отходит — снова точка возврата. Более внимательное рассмотрение этой точки возврата показывает, что она отличается от ранее открытых точек возврата. Именно, она острее и имеет форму клюва хищной птицы: обе ее ветви расположены по одну сторону от их общей касательной (рис. 9).

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 44)

47; *С. Рекун* (Винница) 35, 37; *М. Рудык* (Винница) 35; *Д. Русинов* (Ленинград) 37, 42, 43, 45; *М. Савченко* (Белгород) 45; *И. Сивыков* (Москва) 35, 39, 41—43, 45, 47; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) 38—42, 45; *А. Самойлович* (Донецк) 37; *М. Самсонов* (Ленинград) 35, 37, 38, 43; *С. Сахарук* (Брест) 43; *М. Скорик* (Киев) 37, 41—43, 45; *М. Скоробогатов* (Киев) 35, 39, 41; *Л. Слободян* (Коломыя) 43; *А. Соловьев* (Куйбышев) 35, 37—43, 45; *А. Сучилин* (Калининград Московской обл.) 43, 45; *А. Сурков* (Ленинград) 39; *В. Тартаковский* (Киев) 38, 39, 41—43, 47; *В. Темченко* (Краматорск) 39; *И. Терез* (Симферополь) 37—39, 42, 45; *Д. Третьяков* (Винница) 35, 37—39, 41—43, 45, 47; *С. Тужанский* (Винница) 35; *И. Федин* (Омск) 37, 38, 40, 43, 45, 47; *Л. Фельдман* (Саратов) 35, 39, 42, 43, 45; *С. Феринчук* (Минск) 45, 47; *Ю. Цыганков* (с. Старое Дрожжаное ТАССР) 43, 45, 47; *О. Черп* (Минск) 38, 39, 45, 47; *И. Чечеткин* (Киев) 35—39, 41, 42; *А. Чудновский* (Киев) 35, 37—41, 47; *А. Шагинов* (Иваново) 47; *И. Шендерович* (Северодвинск) 35, 38, 39, 42, 47; *А. Шлезберг* (Киев) 39; *А. Шнирман* (Донецк) 37; *И. Штрайх* (Винница) 35; *М. Яковлев* (Харьков) 45; *Г. Ящин* (п. Черноголовка Московской обл.) 35, 37—39, 41—43.

Движение по окружности

Кандидат физико-математических наук
Ю. А. САМАРСКИЙ

Движение тел по окружности часто встречается в природе и технике. Это полеты спутников Земли и движение автомашин на закруглениях дороги, вращение шарика на нитке и движение заряженных частиц в магнитном поле, вращение деталей различных механизмов и движение самолета при выполнении летчиком «мертвой петли».

Если размеры тела много меньше радиуса окружности, тело можно считать материальной точкой. Напомним основные особенности движения материальной точки по окружности.

Как известно, скорость $\vec{v}$ тела всегда направлена по касательной к окружности и может изменяться как по модулю, так и по направлению. Вектор ускорения тела при этом не совпадает с направлением скорости, а составляет с ней некоторый угол. Для анализа движения удобно вместо ускорения $\vec{a}$ рассматривать две его проекции — на направление скорости (по касательной к окружности) и на направление, перпендикулярное скорости (по радиусу окружности). Первую проекцию называют касательным ускорением $a_к$, а вторую — центростремительным ускорением $a_ц$ (рис. 1). Касательное ускорение характеризует изменение модуля скорости, а центростремительное — изменение направления скорости.

Модуль центростремительного ускорения в каждой точке траектории равен квадрату модуля скорости, деленному на радиус окружности: $a_ц=v^2/R$. Модуль касательного ускорения зависит от характера движения тела по окружности. В частности, при равномерном движении $a_к=0$ и полное ускорение совпадает с центростремительным, изменяя только направление скорости. В этом случае бывает удобно выразить центростремительное ускорение через угловую скорость ω или период T движения тела по окружности радиуса R: $a_ц=\omega^2R=4\pi^2R/T^2$.

Для тела, движущегося по окружности, так же как и для всякого движения, справедлив второй закон Ньютона: векторная сумма всех действующих на тело сил равна произведению массы тела на его ускорение. При движении по окружности тело все время остается в одной плоскости, поэтому второй закон Ньютона удобно представить системой двух скалярных уравнений, записанных для проекций всех векторов на направление вдоль радиуса окружности и перпендикулярное к нему.

Физическая природа сил, обеспечивающих движение материальной точки по заданной окружности, может быть весьма разнообразной. Покажем это на нескольких конкретных задачах. Почти все они в разные годы предлагались на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Выезд с горки на горизонтальную плоскость представляет собой дугу окружности радиуса $R=4$ м (рис. 2). Горка гладкая, а горизонтальная плоскость шероховатая, с коэффициентом трения $\mu=0{,}2$. Санки, съехав*

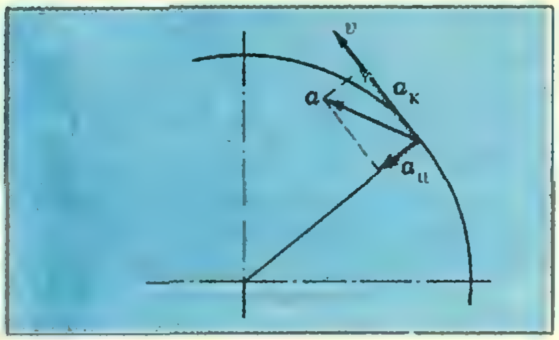


Рис. 1.

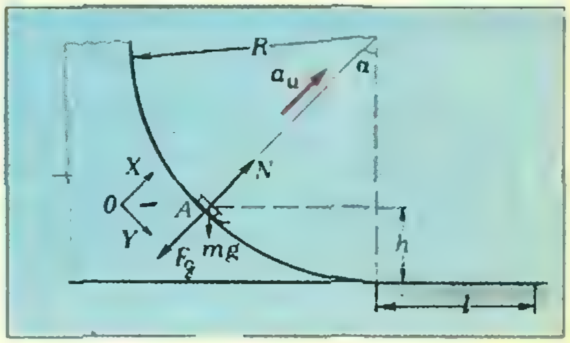


Рис. 2.

с горки, остановились на расстоянии $l=30$ м от ее конца. На какой высоте санки давили на горку с силой, в два раза превышающей по модулю их силу тяжести?

Пусть искомая высота h соответствует точке A, как показано на рисунке 2. Рассмотрим силы, действующие на санки в этой точке. Это сила притяжения к Земле (сила тяжести) $m\vec{g}$ и сила реакции горки $\vec{N}$. По третьему закону Ньютона сила реакции горки равна по модулю силе давления санок:

$$N=F_д=2mg.$$

Напишем уравнение движения санок (второй закон Ньютона), приняв за положительное направление оси OX направление центростремительного ускорения $\vec{a}_ц$:

$$N-mg\cos\alpha=ma_ц.$$

Здесь $\cos\alpha=(R-h)/R$ и $a_ц=v_A^2/R$. Подставляя значения N, $\cos\alpha$ и $a_ц$, имеем

$$2mg-mg\frac{R-h}{R}=\frac{mv_A^2}{R}. \qquad (1)$$

Скорость v_A можно определить из закона сохранения и превращения энергии — работа сил трения на участке l равна полной энергии санок в точке A:

$$\mu mgl=\frac{mv_A^2}{2}+mgh. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2), получим

$$h=\frac{2\mu l-R}{3}\approx 2{,}7 \text{ м}.$$

Задача 2. *Шарик радиуса r висит на нити длины l и касается вертикально расположенного вала электродвигателя (рис. 3). Радиус вала R. При какой угловой скорости вращения «системы» шарик перестанет давить на вал?*

Рассмотрим силы, действующие на шарик при небольшой угловой скорости вращения, пока шарик еще оказывает давление на вал (см. рис. 3). На него действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила реакции вала $\vec{N}$. С увеличением угловой скорости должно расти и центростремительное ускорение шарика, что возможно только за счет уменьшения модуля силы реакции $\vec{N}$, поскольку силы $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ остаются постоянными.

При некоторой угловой скорости ω_0 взаимодействие шарика с валом прекратится, и сила $\vec{N}$ исчезнет (обратится в нуль). Запишем уравнения движения шарика в этот момент в проекциях на оси координат OX и OY:

$$T\sin\alpha=m\omega_0^2(R+r),$$
$$T\cos\alpha-mg=0.$$

Решая их, найдем искомую угловую скорость:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{R+r}}.$$

Используя рисунок 3, легко определить, что

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{R+r}{((l+r)^2-(R+r)^2)^{1/2}}.$$

Тогда окончательно

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{((l+r)^2-(R+r)^2)^{1/2}}}.$$

Задача 3. *На полюсе некоторой планеты тело весит вдвое больше, чем на экваторе. Определите период обращения планеты вокруг собственной оси. Планету считать шаром. Плотность вещества планеты ϱ_0.*

Напомним, что весом тела $\vec{P}$ называется сила, с которой тело вследствие притяжения к планете действует на неподвижную относительно него опору или подвес. По третьему закону Ньютона со стороны опоры на тело действует

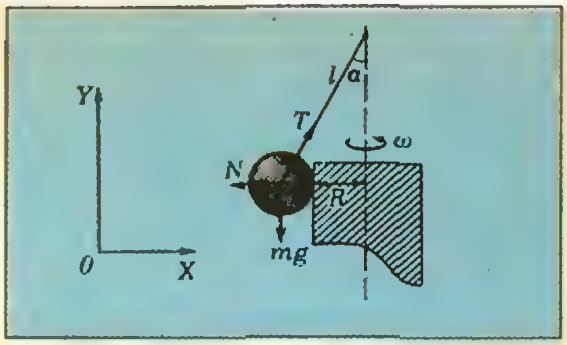


Рис. 3.

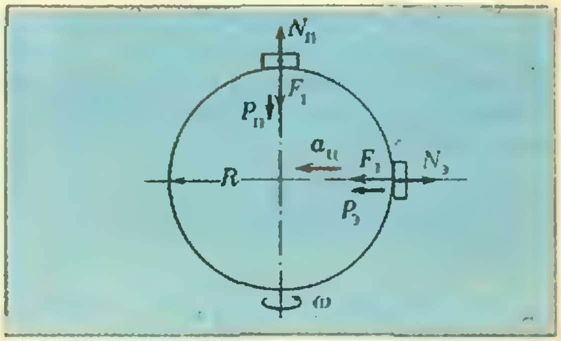


Рис. 4.

сила реакции $\vec{N}$, равная по модулю и противоположная по направлению силе $\vec{P}$. На рисунке 4 показаны силы, действующие на тела, расположенные на полюсе и экваторе планеты.

Уравнение движения тела на экваторе имеет вид

$$F_т - N_э = m\frac{4\pi^2}{T^2}R,$$

где $F_т$ — сила тяготения, T — искомый период обращения планеты. Отсюда можно найти вес тела на экваторе:

$$P_э = N_э = F_т - m\frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

На полюсе скорость и центростремительное ускорение равны нулю; следовательно,

$$P_п = N_п = F_т.$$

По условию $P_э = 0{,}5P_п = 0{,}5F_т$, поэтому получаем

$$m\frac{4\pi^2 R}{T^2} = 0{,}5F_т.$$

Согласно закону всемирного тяготения, $F_т = GmM/R^2$, где m — масса тела, $M = {}^4/_3\pi R^3\varrho_0$ — масса планеты, R — ее радиус. Таким образом, из последнего уравнения имеем

$$T = \sqrt{\frac{6\pi}{G\varrho_0}}.$$

Задача 4. *Велосипедист движется по горизонтальному кругу радиуса R с постоянной скоростью. Определите максимальную возможную скорость такого движения. Коэффициент трения между шинами и дорогой μ.*

Кто катался на велосипеде, тот знает, что движение по кругу возможно только при определенном наклоне велосипедиста в сторону центра закругления. Чем больше скорость, с которой велосипедист хочет пройти закругление, тем бо́льшим должен быть угол наклона (угол отклонения от вертикали). Однако существует предельный угол наклона, превысив который велосипедист непременно упадет. Почему это происходит?

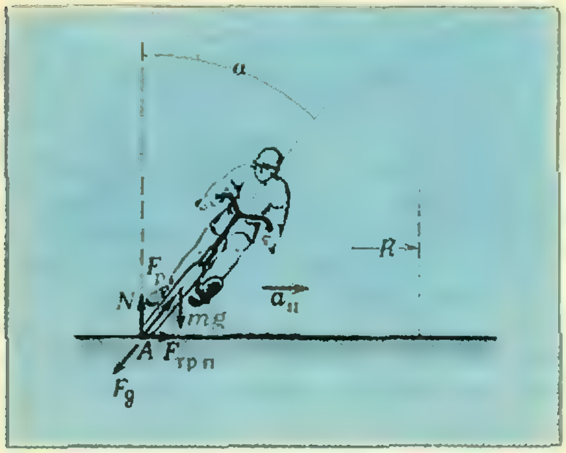


Рис. 5.

На рисунке 5 показан момент движения велосипедиста по кругу радиуса R с некоторой скоростью $\vec{v}$, направленной «на нас» перпендикулярно плоскости рисунка. Пусть этой скорости соответствует угол наклона α. При движении велосипедист действует на дорогу с некоторой силой $\vec{F}_д$. Реакция дороги, приложенная к велосипеду, равна $\vec{F}_р$. Легко видеть, что горизонтальная проекция силы $\vec{F}_р$ есть не что иное, как сила трения покоя $F_{тр\,п}$ (точка A колеса не скользит по поверхности), а вертикальная проекция — сила нормальной реакции со стороны дороги N. Кроме того, на систему велосипед—велосипедист действует еще сила тяжести $m\vec{g}$.

Как видно из рисунка 5, единственная сила, действующая на велосипед в сторону центра закругления, это сила трения покоя. Она-то и сообщает центростремительное ускорение: $F_{тр.п} = ma_ц$. Эта сила перпендикулярна вектору скорости движения и изменяет только ее направление. Напомним, что в зависимости от условий сила трения покоя может изменяться в пределах от 0 до μN. А каково ее значение в нашем случае?

Учитывая, что $N = mg$ (нет движения в вертикальной плоскости), из силового треугольника на рисунке 5 имеем

$$F_{тр\,п} = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Следовательно, в зависимости от угла наклона велосипедиста сила трения может принимать значения

$$0 \leqslant (F_{тр\,п} = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha) \leqslant \mu N.$$

Если велосипедист движется прямолинейно, $\alpha = 0$ и $F_{тр\,п} = 0$. Другой предельный случай соответствует максимальному углу наклона велосипедиста при движении по закругленному пути:

$$mg\,\mathrm{tg}\,\alpha_{max} = \mu N, \text{ где } N = mg.$$

Отсюда $\qquad \mathrm{tg}\,\alpha_{max} = \mu.$

Если движение происходит по кругу фиксированного радиуса, то каждому значению скорости соответствует определенный угол наклона, такой, чтобы сила трения покоя обеспечила необходимое центростремительное ускорение:

$$mg \operatorname{tg} \alpha = \frac{mv^2}{R}.$$

Умелый велосипедист инстинктивно наклоняется в сторону поворота ровно настолько, чтобы выполнялось данное условие. Таким образом, максимальная скорость движения велосипедиста определяется формулой

$$\mu mg = \frac{mv^2_{\max}}{R},$$

откуда

$$v_{\max} = \sqrt{\mu g R}.$$

Попытка велосипедиста проехать закругление с еще большей скоростью, превысив угол наклона $\alpha_{\max}$, приведет к его падению. Это и понятно: сила трения, достигнув максимального значения, не сможет обеспечить необходимого центростремительного ускорения, точка A колеса начнет скользить вдоль радиуса от центра, и велосипедист упадет.

Однако можно увеличить максимальную скорость движения, используя либо покрытие с бо́льшим μ, либо дорогу специального, наклонного профиля, называемую треком.

Задача 5. *Автомобиль, трогаясь с места, равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги AB, который представляет собой дугу окружности радиуса $R=100$ м, опирающуюся на угол $\alpha=30°$ (рис. 6). С какой максимальной скоростью автомобиль может выехать на прямой участок пути? Коэффициент трения колес о дорогу $\mu=0{,}3$.*

Прежде всего напомним, что внешняя сила, сообщающая автомобилю ускорение, это сила трения колес о дорогу. При движении автомобиля по горизонтальному закругленному участку вместо силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ в каждый момент времени удобно рассматривать две его проекции (см. рис. 6): касательную проекцию $F_{\text{тр к}}$, обеспечивающую разгон автомобиля, и центростремительную $F_{\text{тр ц}}$, создающую центростремительное ускорение и обусловливающую движение по окружности.

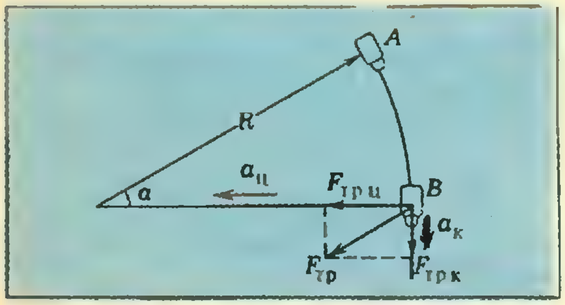


Рис. 6.

Напишем уравнения движения автомобиля в точке перехода с закругленного участка дороги на прямой:

$$F_{\text{тр ц}} = ma_{\text{ц}}, \quad F_{\text{тр к}} = ma_{\text{к}}.$$

По условию автомобиль набирает скорость равномерно, то есть $a_{\text{к}} = \text{const}$. Это означает, что скорость, которую будет иметь автомобиль в конце разгона, равна

$$v_B = \sqrt{2a_{\text{к}} l}, \text{ где } l = \pi R/6.$$

Отсюда касательное ускорение равно

$$a_{\text{к}} = \frac{v_B^2}{2l} = \frac{3v_B^2}{\pi R}.$$

Учитывая, что центростремительное ускорение $a_{\text{ц}} = v_B^2/R$, уравнения движения можно записать в виде

$$F_{\text{тр ц}} = \frac{mv_B^2}{R}, \quad F_{\text{тр к}} = \frac{3mv_B^2}{\pi R}.$$

В момент перехода автомобиля на прямой участок дороги (в точке B) его скорость по условию должна быть максимальной: $v_B = v_{\max}$. Следовательно, в точке B сила трения должна достигнуть своего максимального значения: $F_{\text{тр}} = F_{\text{тр max}} = \mu mg$. Из рисунка 6 следует, что $F^2_{\text{тр}} = F^2_{\text{тр ц}} + F^2_{\text{тр к}}$. Подставляя соответствующие значения, найдем максимальную скорость автомобиля:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{\mu g R}{\sqrt{1+(3/\pi)^2}}} \approx 14{,}6 \text{ м/с} \approx$$
$$\approx 52{,}6 \text{ км/ч}.$$

Упражнения

1. На дно сферы радиуса R насыпали горсть песка. Определите, где будут находиться песчинки после того, как сферу привели во вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Трением песчинок о сферу пренебречь.

2. Внутрь камеры велосипедного колеса попал небольшой камешек. Радиус колеса $r=0{,}4$ м. При какой минимальной скорости движения велосипеда камешек будет вращаться вместе с колесом? Толщиной шины пренебречь.

3. Во сколько раз увеличится максимально допустимая скорость движения мотоциклиста по наклонному треку с углом наклона β по сравнению с допустимой скоростью по горизонтальному треку при одинаковом радиусе закругления и коэффициенте трения μ?

4. Автомобиль движется по выпуклому мосту, имеющему форму дуги окружности радиуса $R=40$ м. Какое максимальное ускорение в горизонтальном направлении может развивать автомобиль в высшей точке моста, если в этой точке его скорость $v=50{,}4$ км/ч? Коэффициент трения колес автомобиля о мост $\mu=0{,}57$.

МАН «Искатель»

В 1983 году малой академии наук «Искатель» Крымской области Украинской ССР, республиканскому научному обществу «Вииторул» Молдавской ССР, школе естественных наук Института атомной энергии им. И. В. Курчатова и юношеской геологической экспедиции Свердловской области были присуждены премии Ленинского комсомола за большую работу по коммунистическому воспитанию молодежи и развитию научно-технического творчества учащихся.

О школе ИАЭ и НОУ «Вииторул» уже рассказывалось в нашем журнале (см. «Квант» № 4 за 1983 г. и № 4 за 1977 г.). Сегодня мы знакомим читателей с работой МАН «Искатель».

МАН — это «малая академия наук» — научное общество учащихся Крыма. Создано оно было более 20 лет назад (20—21 апреля 1963 года состоялась учредительная сессия «Искателя»). Это было первое в нашей стране НОУ, в то время и слов таких — «научное общество учащихся» — еще не было.

Ныне в «Искателе» 11 секций: математики, физики, химии, астрономии, кибернетики, истории и краеведения, сельского хозяйства, малой механизации, биологии, инженерно-техническая, журналистики (пресс-центр). Работают школы: вечерняя и заочная юных кибернетиков, заочная юных изобретателей и рационализаторов, областная школа юных корреспондентов. Есть также 24 городских и районных филиала, которые объединяют 153 школьных отделения. Всего в МАН занимаются более 16 тысяч школьников.

Что же отличает «Искатель», дает ему возможность вести работу с таким размахом?

«Искатель» — организация общественная, она работает под руководством областного отдела народного образования, Крымского обкома комсомола. Оперативно руководит работой «Искателя» президиум МАН во главе с президентом (научным сотрудником) и тремя вице-президентами (школьники). Первым президентом МАН был Я. Д. Козин, профессор, доктор геолого-минералогических наук; с 1973 года МАН возглавил доцент Симферопольского университета В. Н. Касаткин. Вице-президенты «Искателя» регулярно меняются, раньше их было два, теперь добавлен третий — специально по сельскохозяйственным наукам с целью усиления работы по пропаганде знаний о сельском хозяйстве.

Методическое руководство «Искателем» осуществляет областной институт усовершенствования учителей. В президиум МАН входят представители облоно, обкома ЛКСМУ, зав. кабинетами института усовершенствования учителей.

Система приема в МАН требует от школьников постоянной активной работы. Основной элемент этой системы — творческий взнос. Это может быть успешное выступление на секции, серия экспериментальных работ, самоделка или другая самостоятельная работа. Активисты МАН (сейчас их более 16 тысяч) на основании творческого взноса принимаются в кандидаты МАН (их около 2 тысяч), следующий этап — действительный член МАН (их сейчас более 400). Здесь надо проявить настойчивость и склонность к научно-исследовательской работе, регулярно вносить творческие взносы. При этом, если школьник в течение года не имеет творческих взносов, то он переводится на ступеньку ниже. Но надо сказать, что школьники не гонятся за званием. Их больше всего привлекает в МАН возможность общения с учеными и занятий под их руководством.

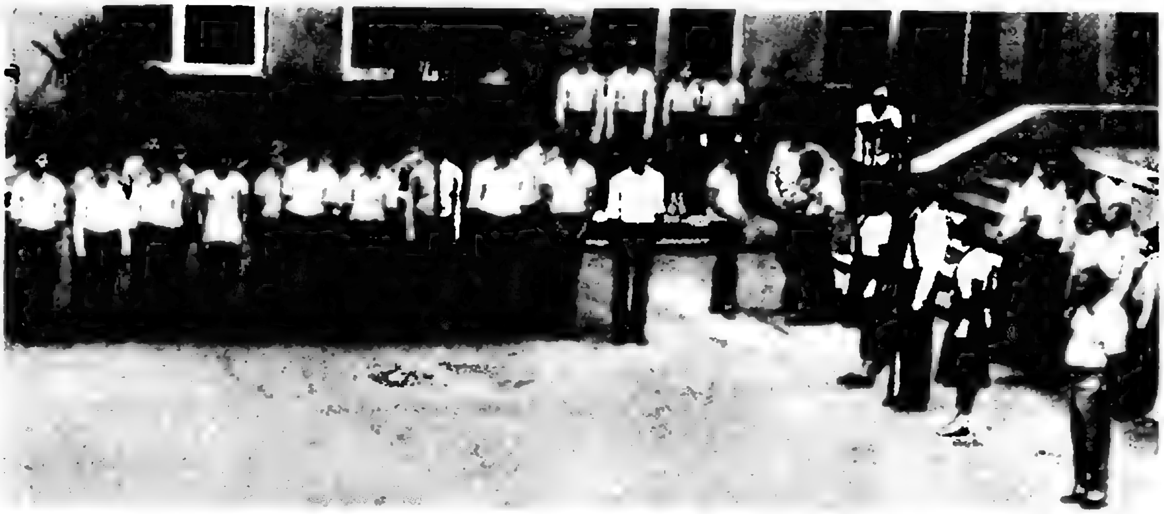
О научном руководстве «Искателем» надо сказать особо. В «Положении» о МАН «Искатель» сказано: «Руководство исследовательской работой членов МАН «Искатель» осуществляют высшие учебные заведения и научно-исследовательские учреждения. Опорными пунктами для выполнения практических и исследовательских работ в филиалах МАН «Искатель» являются: все внешкольные учреждения Крымской области; лаборатории, кабинеты, мастерские и библиотеки школ, в которых учатся члены МАН «Искатель»; лаборатории и кабинеты научно-исследовательских учреждений и высших учебных заведений области».

За 20 лет перед ребятами выступили более 500 ведущих специалистов в разных областях науки, передовики производства, изобретатели. В каждом научно-исследовательском учреждении или организации области привыкли к тому, что рядом с учеными там частые гости — школьники. Здесь можно назвать Крымскую астрофизическую обсерваторию АН СССР в пос. Научный Бахчисарайского района, многие вычислительные центры, Никитский ботанический сад и другие организации.

Существенно также то, что «Искатель» помогает школьникам лучше понять связи между разными науками. В днях физики, химии, математики и др. участвуют представители разных секций, и это позволяет им познакомиться со смежными науками, не дает замкнуться в какой-либо одной области.

МАН отличает также систематичность работы и постоянный контроль за развитием школьников. Раз в месяц проводят заседания школьные предметные научные общества, ежегодно в ноябре проводится сессия МАН, а в июле — конференция в летнем научно-оздоровительном лагере, куда ежегодно приезжает более 200 школьников и до 30 ученых — докторов и кандидатов наук, научных сотрудников из разных институтов и университетов. В течение месяца школьники слушают лекции ученых, выполняют различные исследования, знакомятся со сверстниками, так же, как они, увлеченными наукой, набираются здоровья и энергии на целый год. В лагерях прошлых лет опробовались курсы математической логики, основ программирования, конструирования различных приборов и наглядных пособий, которые затем были прочитаны во всех отделениях МАН. В 1983 году испытывался курс языка фортран для школьников.

За 20 лет через систему МАН «Искатель» прошло около 150 тысяч школьников. Ныне среди них немало докторов и кандидатов наук, научных сотрудников, педагогов. Многие продолжают работу в МАН уже в роли лекторов. За свои успехи «Искатель» к 15-летию был удостоен премии комсомола Украины, а 1983 году — премии Ленинско-



Летний лагерь-83

Торжественное открытие летнего лагеря 1983 г. в пос. Фрунзенское.

Встречу школьников с ветеранами МАН ведет ее президент В. Н. Касаткин.

Занятие со школьниками ведет ветеран МАН, ныне доктор физико-математических наук Б.И. Фукс.

Встреча школьников с учеными.

го комсомола. О значении МАН для крымских школьников очень хорошо сказал ее президент В. Н. Касаткин на встрече школьников с учеными: «Если школьник в Крыму хочет попробовать свои силы в науке или технике, то он знает, куда ему идти. При каждом высшем учебном заведении в Симферополе, Севастополе, Керчи работают учебные подразделения МАН. Отделения МАН есть во многих школах городов и области».

В этом — огромное достижение «Искателя». Пожелаем же ему дальнейшей успешной работы.

А. Н. Виленкин

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1983 году

Предлагаем подборку задач вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Белорусский, Донецкий, Казанский, Киевский, Саратовский, Ташкентский и институты — Кишиневский политехнический, Ленинградский филиал московского технологического института, Московский авиационный технологический, Московский гидромелиоративный, Тбилисский педагогический.

Математика

Письменный экзамен

Алгебра

1. Сумма квадратов двух последовательных целых чисел на 29 больше утроенного меньшего числа. Найдите эти числа.

2. Определите три числа, образующих геометрическую прогрессию, если сумма этих чисел равна 31, а сумма их квадратов равна 651.

3. От пристани A одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 часов. Найдите скорость катера в стоячей воде, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A.

4. Точки A и B находятся на окружности радиуса R см. Если точки начнут двигаться навстречу друг другу по меньшей дуге, то встретятся через 5 с, а если по большой дуге, то встреча произойдет через 11 с. Если точки будут двигаться в одном направлении, то первая точка нагонит вторую через 20 с. Найдите скорости точек.

5. Трое рабочих разной квалификации выполнили некоторую работу, причем первый работал 6 часов, второй — 4 часа, третий — 7 часов. Если бы первый рабочий работал 4 часа, второй — 2 часа и третий 5 часов, то было бы выполнено лишь 2/3 всей работы. За сколько часов рабочие закончили бы работу, если бы они работали все вместе одно и то же время?

6. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

7. Упростите:

а) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}}-\dfrac{1}{a}$,

б) $\dfrac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}$,

в) $\dfrac{\left[1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}\right]\cdot a^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}}$,

г) $\left[\dfrac{(a+\sqrt[3]{a^2x}):(x+\sqrt[3]{ax^2})-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}-x^{-\frac{1}{3}}\right]^{\text{[illegible]}}$.

8. Докажите тождество:

а) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha$,

б) $2\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=1-2\cos^2\alpha$,

в) $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos2\alpha\cos2\beta=1$,

г) $1-\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\cos2\alpha=\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$.

9. Известно, что $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$. Найдите $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$.

10. Вычислите $\sin\left(2\alpha+\dfrac{5}{4}\pi\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2}{3}$.

11. При каких значениях p оба корня квадратного уравнения

$$(p-2)x^2-2px+p-1=0$$

положительны?

12. Найдите все значения b, при которых ровно один корень уравнения

$$x^2+2bx-2b=1$$

удовлетворяет неравенству $x>2$.

13. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=5$,

б) $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$,

в) $\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x-2}}=\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x-2}}$.

г) $x^{\lg x+2}=100x$,

д) $2+\log_3(2^x-2)=\log_3 2+\log_3(4^{x-1}-1)$,

е) $4^{x+1,5}+9^x=6^{x+1}$,

ж) $\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg2+\lg5$,

з) $\log_{16x}x^3+\log_{\sqrt{x}/2}\sqrt{x}=2$,

и) $\cos4x+2\cos^2x=1$,

к) $5\operatorname{ctg}x-4\operatorname{tg}x=\dfrac{9}{\sin x}$,

л) $5\sin2x-12(\sin x-\cos x)+12=0$,

м) $\sin x\sin2x\cdot\sin3x=\dfrac{1}{4}\sin4x$,

н) $\sin^4x+\cos^4x=\sin x\cdot\cos x$,

о) $4\log_2\sin x+2\log_{\frac{1}{2}}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1=0$,

п) $4^{\sin x}-2^{\frac{1}{2}-\sin x}=1$,

р) $\cos\left(\dfrac{4\pi x}{x^2+x+1}\right)=1$.

14. Определите, какие значения x из отрезка $[-\pi;\pi]$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{\cos x}=\sin x+\cos x.$$

15. Найдите все решения уравнения

$$\frac{2}{\cos6x-\cos2x}=\frac{1}{\cos8x\cos2x},$$

удовлетворяющие неравенству $0<x<\pi/2$.

16. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение

$$\left|x+\frac{1}{x}-4\right|=a?$$

17. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{2a-3-3\cos 2x}=\sqrt{2}(1-\cos x)$$

имеет решения? Найдите их.

18. Решите неравенство:

а) $7-3\sqrt{x+1}>2x$,

б) $\sqrt{x^2-x-6}<x+5$,

в) $x^6+\sqrt{x^2-1983}>1983^3$,

г) $x\cdot\sqrt{1983-x^2}<\sqrt{1982}$,

д) $\sqrt{\log_2\frac{3-2x}{1-x}}<1$,

е) $|1-\log_{1983}x|+|\log_{1983}x-3|>4$,

ж) $\log_{\frac{1}{2}|x-1|}(\log_2(6-x))<0$,

з) $\dfrac{|1-3x|-2}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1}>0$,

и) $\log_{|x-1|}(x^2-1)<1$,

к) $\log_2(x^2+x-2)-\dfrac{2}{\log_{|x-6|}4}>0$,

л) $(x^2+2x+2)\cos(x+1)\geqslant 2x^2+4x+3$.

19. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3},\\ x^2+y^2=5;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}=2,\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\log_2 y\cdot\log_{1/x}2=1-\log_x 2,\\ \log_{y^2}2\cdot\log_{\sqrt{2}}x=1;\end{cases}$

г) $\begin{cases}10^{3-\lg(x-y)}=250,\\ \sqrt{x-y}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x+y}=\dfrac{26-y}{\sqrt{x-y}}.\end{cases}$

Анализ

1. Вычислите

$$\lim_{x\to-\frac{3}{4}}\frac{4x^2-5x-6}{4x^2+11x+6}.$$

2. В каких точках касательные к кривой $y=\frac{x^3}{3}-x^2-x+1$ параллельны прямой $y=2x-1$?

3. Решите неравенство

$$y'<-3,\ \text{если}\ y=5x^2-2\ln x-6x.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

а) $y=x^3-3x^2-6x+10$ на отрезке $[-1;\ 3]$,

б) $y=(x-2)^2\cdot\sqrt{x^2-4x+6}$ на отрезке $[1;\ 4]$.

5. Найдите координаты точки пересечения с осью OX касательной к кривой $y=x^2+3x+3$ в точке $A(-2;\ 1)$.

6. Найдите точки экстремума функции

а) $y=e^{2x}-2e^x-4x+2$,

б) $y=-2\cdot 3^{-4x^2}-2\cdot 3^{-3x^2}+3^{-2x^2}+1$.

7. Найдите интервалы монотонности функции

$$y=2x^2+5x+11+6\ln\frac{2}{x}.$$

8. При каких a функция

$$y=-x^3+ax^2+a^2x+5$$

возрастает на промежутке $[-6;\ 2]$?

9. Пусть x_1 и x_2 — соответственно точка минимума и точка максимума функции $y=-2x^3+3(1-2a)x^2+12ax-1$. При каком значении a $x_1^2=x_2$?

10. Найдите все значения параметра a, при которых функция $f(x)=\left(\frac{\sqrt{a+4}}{1-a}-1\right)x^5-3x+\lg 5$ убывает.

11. По двум взаимно перпендикулярным дорогам к перекрестку движутся две автомашины со скоростями 40 км/ч и 50 км/ч соответственно. В данный момент они находятся от перекрестка на расстоянии 20 км и 30 км соответственно. Через сколько времени расстояние между машинами будет минимальным?

12. К графику функции $y=(x-1)^2$, $x\in[0;\ 1]$ проводятся касательные. В какой точке нужно провести касательную к графику этой функции, чтобы площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, была наибольшей? Найдите эту площадь.

13. Представьте число 48 в виде суммы двух натуральных слагаемых так, чтобы сумма куба первого числа с квадратом второго была минимальна.

14. Найдите расстояние между ближайшими точками графиков функций: $y_1=x^2+x+1$ и $y_2=2x-2$.

Геометрия

1. Даны три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, каждые два из которых не коллинеарны. Найдите их сумму, если вектор $\vec{a}+\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{c}$, а вектор $\vec{b}+\vec{c}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$.

2. Вычислите $\widehat{ABC}$ треугольника ABC, заданного координатами его вершин

$$A(2;\ 2\sqrt{3}),\ B(0;\ 0),\ C(-\sqrt{3};\ 1).$$

3. В правильный треугольник вписана окружность радиуса $r=5\sqrt{3}$ м и через центр окружности проведена прямая, параллельная одной из сторон треугольника. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами треугольника.

4. Найдите площадь квадрата, вписанного в правильный треугольник со стороной a.

5. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при основании вписан прямоугольник наибольшей площади так, что одна его сторона лежит на основании треугольника. Найдите площадь и периметр прямоугольника.

6. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 27 см и 29 см, а медиана третьей стороны равна 26 см.

7. Найдите периметр прямоугольного треугольника, если 10 и 4 — радиусы описанного и вписанного в него кругов.

8. В прямоугольном треугольнике ABC (C — вершина прямого угла) на гипотенузе выбрана точка D так, что $BD/DA=2$. Найдите площадь этого треугольника, если длина катета AC равна a, а длина другого катета равна двум длинам отрезка CD.

9. Вычислите длину биссектрисы угла C треугольника ABC, если $|AB|=c$, $|AC|=b$, $|BC|=a$.

10. Длина большего основания трапеции равна b; меньшего — a, углы при большем основании 30° и 45°. Найдите площадь трапеции.

11. Диагонали равнобочной трапеции взаимно перпендикулярны, а высота равна h. Найдите площадь трапеции, если нижнее основание в два раза длиннее верхнего.

12. В прямоугольной трапеции длины оснований равны a и $3a$, а меньшая боковая сторона равна b. Найдите расстояния от точки пересечения диагоналей трапеции до большего основания и до меньшей боковой стороны.

13. Диагонали четырехугольника имеют длины a и b и образуют угол α. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного.

14. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$. При этом $|AA_1|:|A_1B|=|BB_1|:|B_1C|=|CC_1|:|C_1D|=|DD_1|:|D_1A|=3:4$. Определите площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна S.

15. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки H и M так, что $|BH|:|HC|=|CM|:|MD|=1:2$. Отрезки $[AH]$ и $[BM]$ пересекаются в точке P. Найдите отношение $|AP|:|PH|$.

16. На сторонах равнобедренной трапеции $ABCD$ (A, D — вершины острых углов) выбраны точки F, G, K так, что $|AF|/|FB|=|CG|/|DG|=|DK|/|AK|=4$. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются точки F, G, K, если длины сторон AD, BC, CD равны соответственно a, b, d.

17. Вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Угол A равен 60°. Найдите $|AB|$, если $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $d=3+\sqrt{13}$.

18. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а боковые ребра образуют угол β с плоскостью основания. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

19. Пусть α — угол наклона боковых ребер к основанию правильной треугольной пирамиды, а φ — угол между боковыми гранями этой пирамиды. Известно, что $\alpha=\varphi$. Определите α.

20. В правильную четырехугольную пирамиду, высота которой равна h, а стороны основания — a, вписан куб. Четыре вершины куба расположены на основании пирамиды, а другие четыре — на боковых ребрах. Определите площадь поверхности куба.

21. Основанием прямой призмы служит ромб; диагонали призмы равны 8 см и 5 см; высота 2 см. Найдите сторону основания призмы.

22. В прямоугольном параллелепипеде диагональ его а наклонена к основанию под углом α, а к боковой грани под углом β. Найдите объем параллелепипеда.

23. Грани параллелепипеда — конгруэнтные ромбы со стороной a и острым углом 60°. Определите объем параллелепипеда.

24. Найдите радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду с высотой H и углом между боковым ребром и плоскостью основания, равным α.

25. Определите объем шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой b, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α.

26. Проведены две параллельные плоскости по одну сторону от центра сферы на расстоянии 3 см друг от друга. Эти плоскости пересекают сферу по двум окружностям, радиусы которых соответственно равны 9 см и 12 см. Найдите площадь поверхности сферы.

27. Высота конуса равна диаметру основания. Найдите объем куба, вписанного в конус, если объем конуса равен V.

28. Угол при вершине осевого сечения прямого кругового конуса равен α, а площадь боковой поверхности — S. Найдите объем конуса.

29. Найдите отношение объема шара к объему вписанного в него конуса, если образующая конуса в n раз больше радиуса его основания.

30. Шар радиуса R вписан в конус. Из центра шара образующая конуса видна под углом α. Найдите объем конуса.

31. В конус вписан цилиндр, диагонали осевого сечения которого параллельны образующим конуса. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания конуса угол α. Найдите объем части пространства, ограниченной поверхностями конуса и цилиндра.

32. Конус и цилиндр имеют общее основание, а вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Чему равен угол между осью конуса и его образующей, если известно, что полная поверхность цилиндра относится к полной поверхности конуса как 7:4?

33. В правильную четырехугольную пирамиду $П$ вписан шар $Ш_1$. Шар $Ш_2$ касается шара $Ш_1$ и всех боковых граней пирамиды $П$. Радиус шара $Ш_2$ в γ раз меньше, чем радиус шара $Ш_1$. Найдите отношение объема шара $Ш_2$ к объему пирамиды $П$. При каком значении γ это отношение наибольшее?

Устный экзамен

Алгебра

1. Что больше $\log_{\frac{1}{2}} 7$ или $\log_{\frac{1}{3}} 7$?

2. Вычислите а) $5^{-\log_5 4}+9^{\log_3 2}$, б) $\log_4 5\times\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8$.

3. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$ и $180°<\alpha<270°$.

4. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}.$$

5. Сумма n членов арифметической прогрессии для любого n равна $3n^2-2n$. Найдите ее десятый член.

6. Решите уравнение:

а) $\sqrt{6-x-x^2}=x+1$,

б) $\left(1+\frac{9}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+4\left(1+\frac{9}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=4$,

в) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$,

г) $\lg(x-1)+\lg(x+2)=\lg 7-\lg 4$,

д) $x^2-4x+4+2\lg^2(xy)=0$,

е) $\sqrt{\log_2 x-0{,}5}=\log_2\sqrt{x}$,

ж) $\sqrt{\cos 2x}=\sqrt{2}\sin x$,

з) $\operatorname{tg}(\cos x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. Установите графически, сколько решений имеют уравнения:

а) $x^2+e^{-|1-x|}=2x$, б) $\log_2|x|+x^2=4$, в) $\operatorname{tg}x+10x=0$.

8. При каких x, y, z справедливо равенство $(\cos^2 x+\cos^{-2}x)(1+\operatorname{tg}^2 2y)(3+\sin 3z)=4$.

9. Решите неравенство:

а) $\left|\dfrac{2x-3}{x^2-1}\right|<2$,

б) $\log_{0,25}\dfrac{35-x^2}{x}>-\dfrac{1}{2}$,

в) $x^2-10^{\lg(-x)}\leqslant 20$,

г) $\log_{\frac{x}{2}}\dfrac{x^2-6x+8}{6}>1$,

д) $\dfrac{(x^2-1)(x^2-5x+6)\ln x}{x^2-4x-21}<0$,

е) $\log_2(x^2+3)+\sqrt{x^2-1}>2$.

10. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} x^2-(a+1)x+a<0, \\ x^2-(a+3)x<0 \end{cases}$$

имеет решения?

11. Изобразите на координатной плоскости все точки $(x;\,y)$, координаты которых удовлетворяют условиям:

а) $|x|+y^2<1$, б) $|\;|x|-y^2|<1$.

12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy=10, \\ x^3+x^2y=20. \end{cases}$$

13. Постройте графики функций

а) $y=\dfrac{x}{x-1}$, $y=\dfrac{|x|}{|x|-1}$, $y=\dfrac{|x|}{x-1}$;

б) $y=\log_{\frac{1}{2}}(2-x)$, $y=\log_{\frac{1}{2}}(2-|x|)$, $y=\log_{\frac{1}{2}}|2-|x||$;

в) $y=\cos\left(\pi x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $y=\cos\left(\pi|x|-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $y=\left|\cos\left(\pi x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$;

г) $y=\left|\log_2\dfrac{x-4}{x^2-16}\right|$;

д) $y=|\,||x-1|-2|-1|$.

14. Найдите все значения b, при которых уравнение

$$x^2-bx+1=0$$

не имеет действительных корней.

Анализ

1. Найдите производную функции

а) $y=e^{x^3-5x^2}$;

б) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ при $x=\dfrac{\pi}{2}$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=x+\cos^2 x$ на промежутке $\left[0;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. Найдите наименьшее значение функции $y=\sin^3 x+2\cos^3 x$ на промежутке $\left[0;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. Найдите промежутки возрастания (убывания) функции $y=x\cdot\ln x$.

5. При каких значениях a функция

$$y=(a+2)x^3-3ax^2+9ax-2$$

монотонно убывает на всей числовой оси?

Геометрия

1. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать арифметическую прогрессию?

2. Укажите, в каких пределах изменяется площадь S треугольника с основанием a и противоположным углом α.

3. Определите площадь треугольника по трем его высотам h_1, h_2, h_3.

4. Пусть A — одна из вершин правильного n-угольника. Докажите, что диагонали n-угольника, проведенные из этой вершины, делят внутренний угол A на равные части.

5. Радиус окружности l_1 равен r. Существует ли такая концентрическая с ней окружность l_2, чтобы в кольцо, образованное этими окружностями, можно было вписать n окружностей, каждая из которых касалась бы двух соседних (n — данное натуральное число, $n>3$). Найдите радиус окружности l_2.

6. Определите объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой высота боковой грани равна l, а величина двугранного угла, образованного двумя противоположными боковыми гранями, равна β.

7. Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен α. Определите угол наклона боковых граней к плоскости основания пирамиды.

8. В конус, радиус основания которого равен 1, вписан цилиндр, осевое сечение которого есть квадрат, а вокруг конуса описана сфера. Оказалось, что радиус основания цилиндра r и радиус сферы R связаны соотношением: $r=\dfrac{1}{R}$. Определите угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

Физика

Задачи устного экзамена

Механика

1. Первую половину своего пути автомобиль двигался со скоростью $v_1=80$ км/ч, а вторую — со скоростью $v_2=40$ км/ч. Какова средняя скорость движения автомобиля на всем пути?

2. Расстояние между двумя свободно падающими каплями через время $t=2$ с после начала падения второй капли было $l=25$ м. На сколько позднее первой начала падать вторая капля?

3. Пуля выпущена с начальной скоростью $v_0=8\cdot 10^2$ м/с под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Найдите время полета пули до падения на землю. Определите радиус кривизны траектории в ее верхней точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Две гири массой $m_1=4$ кг и $m_2=3$ кг подвешены на концах нити, перекинутой через неподвижный блок, причем меньшая гиря находится на $h=2,8$ м ниже, чем бо́льшая (рис. 1). Определите, через какое время гири окажутся на одной высоте, если дать им возможность двигаться под действием сил тяжести.

5. На каком расстоянии от центра Земли период обращения искусственного спутника равен $T=24$ ч, так что спутник относительно Земли занимает неизменное положение? Радиус Земли $R_З=6370$ км.

6. Когда к пружине длиной l подвесили груз, то ее длина стала равной l_1. До какой максимальной длины растянется пружина, если этот груз поднять так, чтобы пружина оказалась нерастянутой, и отпустить без начальной скорости?

7. Двое рабочих несут бревно, масса которого $m=50$ кг. Один поддерживает бревно на расстоянии $l_1=1$ м от его конца, а второй — противоположный конец бревна. Длина бревна $l=5$ м. Определите нагрузку, приходящуюся на каждого рабочего.

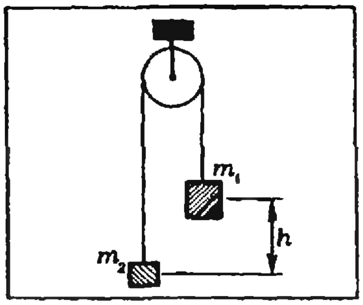


Рис. 1.

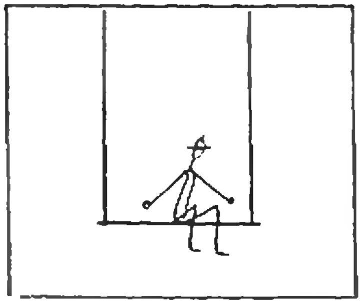


Рис. 2.

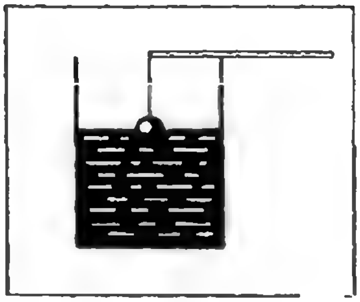


Рис. 3.

8. Человек, масса которого $m=70$ кг, сидит на середине трапеции (рис. 2). Палка трапеции подвешена на веревках длиной $l=8$ м. При качании человек проходит положение равновесия со скоростью $v=6$ м/с. Каково натяжение каждой веревки в этот момент?

9. К концу однородной палочки массой $m=4$ г подвешен на нити алюминиевый шар радиуса $R=0{,}5$ см (рис. 3). Палочку кладут на край стакана с водой, добиваясь равновесия при погружении в воду половины шарика. Определите, в каком отношении делится палочка точкой опоры. Плотность алюминия $\varrho_a=2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3.

10. Какой максимальный уклон может преодолеть электровоз мощностью $N=7\cdot10^5$ Вт, двигая состав массой $m=6\cdot10^6$ кг со скоростью $v=7{,}2$ км/ч, если коэффициент трения $\mu=0{,}002$?

11. Деталь, обрабатываемая на станке, прижимается к шлифовальному камню диаметром $D=4\cdot10^{-1}$ м с силой $F=1{,}0\cdot10^3$ Н. Какая мощность затрачивается на шлифовку, если коэффициент трения камня о деталь $\mu=2\cdot10^{-1}$ и камень вращается с частотой $n=2$ об/с?

12. Определите мощность гидротурбины при условии, что за время $t=1$ с с высоты $h=100$ м падает $V=250$ м^3 воды. КПД турбины $\eta=90$ %.

13. Брусок массой m_1 движется по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью $\vec{v}_1$. Пуля массой m_2, летевшая в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{v}_2$, застревает в бруске. Угол между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ $\alpha=90°$. Какое количество теплоты выделилось в бруске?

14. Пуля массой $m=10$ г, летящая горизонтально со скоростью $v=500$ м/с, попадает в ящик с песком массой $M=50$ кг, подвешенный на веревке, и застревает в нем. На какую высоту поднимется ящик, отклоняясь после попадания пули?

15. Нейтрон сталкивается с покоящимся ядром и после упругого удара отскакивает от него в прямо противоположном направлении. Измерения показали, что отношение энергии нейтрона после столкновения к его энергии до столкновения равно $(11/13)^2$. Определите массовое число ядра.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. Сколько кислорода вдыхает при каждом вдохе альпинист, находящийся на высоте, где давление воздуха $p=50\cdot10^3$ Па? Известно, что у поверхности Земли, где давление $p_0=100\cdot10^3$ Па, человек вдыхает за один раз $m_0=1{,}0\cdot10^{-3}$ кг кислорода. Изменением температуры воздуха с высотой можно пренебречь.

2. На сколько градусов необходимо нагреть газ при постоянном давлении, чтобы объем его увеличился вдвое по сравнению с объемом при 0 °C?

3. На какой глубине объем пузырька воздуха, поднимающегося со дна водоема, вдвое меньше, чем у поверхности? Наружное давление $p_0=760$ мм рт. ст.

4. В баллоне объемом $V=1{,}0\cdot10^{-3}$ м^3 находится газ. При постоянной температуре часть газа выпускается из баллона, при этом давление в нем уменьшается на $\Delta p=55$ кПа, а масса баллона с газом — на $\Delta m=1{,}0\cdot10^{-3}$ кг. Найдите плотность газа при нормальном давлении $p_0=101{,}3$ кПа и температуре опыта.

5. Два сосуда соединены тонкой трубкой с краном. В одном сосуде, объем которого $V_1=2$ л, находится азот при давлении $p_1=1{,}4\cdot10^5$ Па и температуре $t_1=7$ °C, в другом, объемом $V_2=4$ л, — углекислый газ при давлении $p_2=1{,}6\cdot10^5$ Па и температуре $t_2=47$ °C. Какое установится давление в сосудах, если кран будет открыт, а температура станет равной $t=27$ °C?

6. На сколько градусов надо нагреть воздух внутри сообщающегося с атмосферой воздушного шара, сферическая оболочка которого имеет диаметр $d=10$ м и массу $m=10$ кг, для того, чтобы шар взлетел? Атмосферное давление $p_в=735$ мм рт. ст., температура $t_в=27$ °C. Молярную массу воздуха принять равной $M=29$ кг/кмоль.

7. При изобарном нагревании $m=2$ кг кислорода была совершена работа $A=65$ кДж. На сколько градусов нагрели газ? Молярная масса кислорода $M=0{,}032$ кг/моль.

8. Автомобиль совершает пробег длиной $s=120$ км со средней скоростью $v=60$ км/ч.

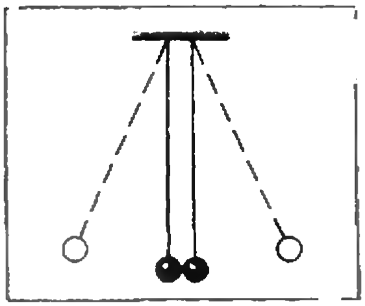


Рис. 4.

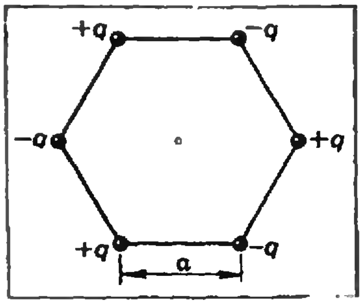


Рис. 5.

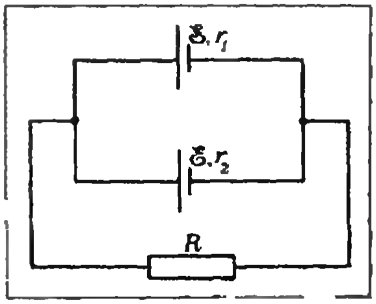


Рис. 6.

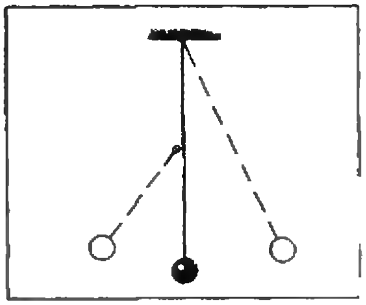


Рис. 7.

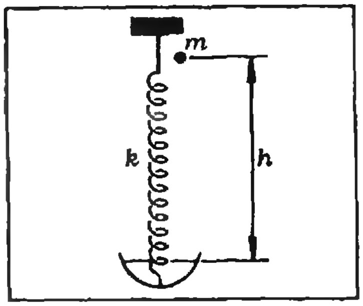


Рис. 8.

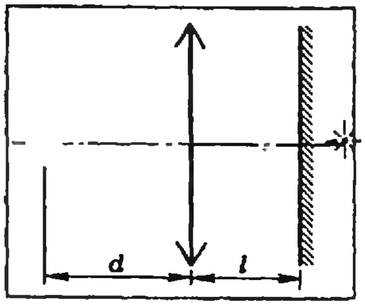


Рис 9

На этом пути израсходовано $V=15$ л бензина. КПД мотора $\eta=30\%$. Какую среднюю мощность развивал мотор во время пробега? Теплота сгорания бензина $q=4{,}6\cdot10^7$ Дж/кг, а его плотность $\rho=800$ кг/м^3.

9. Сколько необходимо сжечь угля, чтобы $M=6\cdot10^3$ кг воды, взятой при $T_1=283$ К, нагреть до $t_2=100$ °С и $m=1{,}0\cdot10^3$ кг ее обратить в пар? КПД котла $\eta=70\%$. Удельная теплоемкость воды $c=4190$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $r=2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг, теплота сгорания угля $q=3\cdot10^7$ Дж/кг.

10. Какую максимальную работу может совершить идеальный двигатель, если он в каждом цикле получает количество теплоты $Q=10^3$ Дж от нагревателя с температурой $T_н=1000$ К? Температура окружающей среды (холодильника) $T_х=20$ °С.

Основы электродинамики

1. На шелковых нитях длиной $l=1$ м висят, соприкасаясь друг с другом, два шарика малого диаметра с массой $m=1{,}5\cdot10^{-3}$ кг каждый (рис. 4). На какое расстояние разойдутся шарики, если каждому из них сообщить заряд $q=6\times10^{-9}$ Кл?

2. Поле создано двумя точечными зарядами $q_1=4\cdot10^{-9}$ Кл и $q_2=9\cdot10^{-9}$ Кл. В каких точках напряженность равна нулю, если расстояние между зарядами $l=2\cdot10^{-1}$ м?

3. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a поочередно расположены заряды $+q$ и $-q$ (рис. 5). Определите напряженность поля, создаваемого всеми зарядами, в центре фигуры.

4. Потенциал электрического поля на расстоянии $r=40$ см от точечного заряда равен $\varphi=200$ В. Какая сила будет действовать на точечный заряд $q=10^{-9}$ Кл, помещенный в эту точку?

5. Конденсатор, заряженный до напряжения $U_1=250$ В, соединяется с конденсатором такой же емкости, но заряженным до напряжения $U_2=150$ В, параллельно. Какое напряжение установится между обкладками? Рассмотреть два случая: соединение пластин одинаковой и различной полярностей.

6. Разность потенциалов между катодом и анодом электронной лампы $U=90$ В, расстояние между электродами $d=1$ мм. С каким ускорением движется электрон от катода к аноду? Какую скорость приобретает электрон, подлетая к аноду? Поле в пространстве между электродами считать однородным. Масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, а его заряд $e=-1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

7. В поле плоского конденсатора, расстояние между пластинами которого $d=1{,}0\cdot10^{-2}$ м, находится в равновесии частица массой $m=1{,}0\times10^{-7}$ кг и зарядом $q=1{,}0\cdot10^{-12}$ Кл. Определите разность потенциалов на пластинах конденсатора при условии, что между ними находится воздух.

8. Если вольтметр соединить последовательно с резистором с сопротивлением $R=10$ кОм, то при напряжении в цепи $U=120$ В он покажет $U_1=50$ В. Если соединить его последовательно с резистором с неизвестным сопротивлением, то при том же напряжении он покажет $U_2=10$ В. Определите величину неизвестного сопротивления.

9. Электродвижущая сила каждого из двух источников, соединенных параллельно, $\mathcal{E}=1{,}8$ В (рис. 6). Внутреннее сопротивление первого источника $r_1=0{,}9$ Ом, второго $r_2=0{,}45$ Ом. Батарея замкнута резистором, причем ток, проходящий в первом источнике, равен $I=1$ А. Чему равно сопротивление резистора?

10. Электрическая плитка мощностью $P_1=550$ Вт для сети с напряжением $U_1=220$ В была включена в сеть с напряжением $U_2=127$ В. Какая мощность выделяется в плитке при таком включении? На какую часть нужно укоротить спираль, чтобы плитка выделяла мощность P_1 при напряжении U_2?

11. Определите КПД электрического чайника, если при мощности $P=8\cdot10^2$ Вт за время $\tau=20$ мин можно вскипятить $V=2$ л воды при начальной температуре $t=20$ °С. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг · К).

12. От генератора, напряжение на выходе которого $U=300$ В, требуется передать на расстояние $l=1$ км мощность $P=10$ кВт. Какого сечения должен быть медный провод, чтобы потери напряжения на линии не превышали 5%? Удельное сопротивление меди $\rho=1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом · м.

13. Для получения меди включено последовательно $N=400$ электролитических ванн с площадью катодных пластин $S=16$ м^2 в каждой ванне. Плотность тока $j=200$ А/м^2. Найдите выпуск меди за время $t=24$ ч и расход энергии за то же время, если напряжение на ваннах $U=100$ В. Электрохимический эквивалент меди $k=0{,}33$ мг/Кл.

Колебания и волны

1. В кабине подъемника висит маятник. Когда кабина неподвижна, период его колебаний $T_0=1$ с. В движущейся с постоянным ускорением кабине период $T=1{,}2$ с. Определите модуль и направление ускорения кабины.

2. Математический маятник длиной l совершает колебания вблизи вертикальной стенки (рис. 7). Под точкой подвеса маятника на расстоянии $l/2$ от нее в стену забит гвоздь. Найдите период колебаний маятника.

3. На чашку, подвешенную на пружине жесткостью k (рис. 8), с высоты h падает груз массы m и остается на чашке (удар абсолютно неупругий). Определите амплитуду колебаний чашки (массой чашки можно пренебречь).

4. Капли воды падают через одинаковые интервалы времени с некоторой высоты на пластину, закрепленную на пружине. Частота собственных колебаний пластины ω_0. Известно, что амплитуда колебаний пластины при этом оказывается максимальной. Найдите расстояние между отрывающейся каплей и ближайшей к ней падающей каплей.

5. При какой скорости поезда рессоры вагонов будут особенно сильно колебаться под действием толчков колес о стыки рельсов? Длина рельса l, нагрузка на рессору F, рессора прогибается на h при нагрузке f.

6. Колебательный контур с периодом колебаний $T=1\cdot10^{-6}$ с имеет индуктивность $L=0{,}2$ Гн и активное сопротивление $R=2$ Ом. На сколько процентов уменьшится энергия этого контура за время одного колебания? На протяжении нескольких колебаний ток можно считать синусоидальным.

Оптика

1. На поверхности озера находится плот, длина которого $a=8$ м, ширина $b=6$ м. Определите размеры полной тени от плота на дне озера при освещении поверхности воды рассеянным светом. Глубина озера $h=2$ м, показатель преломления воды $n=1{,}33$.

2. Угол падения луча из воздуха на стеклянную пластину с толщиной d и показателем преломления n равен углу полного отражения для стекла, из которого изготовлена пластина. Вычислите смещение луча в результате прохождения сквозь указанную пластину.

3. Фокусное расстояние собирающей линзы $F=10$ см, расстояние от предмета до переднего фокуса $l=5$ см, а линейный размер предмета $h=2$ см. Определите величину изображения. Где нужно расположить предмет, чтобы получить изображение с увеличением $\Gamma=10$?

4. С помощью собирающей линзы на экране получено уменьшенное действительное изображение предмета. Размер предмета $h=6$ см, размер изображения $h_1=4$ см. Оставляя экран и предмет неподвижными, линзу перемещают в сторону предмета до тех пор, пока не получат второе четкое изображение предмета. Определите его величину.

5. На оптической оси на расстоянии $d=2$ м от собирающей линзы с оптической силой $D=1$ дптр помещена лампочка (рис. 9). За линзой на расстоянии $l=1{,}75$ м расположено плоское зеркало, установленное перпендикулярно оптической оси. На каких расстояниях от линзы будут находиться изображения предмета?

6. При освещении катода светом вначале с длиной волны λ_1, затем λ_2 обнаружили, что запирающее напряжение изменилось в n раз $(U_1/U_2=n)$. Определите работу выхода электрона из материала катода.

7. Какими лучами освещен стронций, если с его поверхности вылетают электроны с максимальной кинетической энергией $E=1{,}8\times10^{-19}$ Дж? Красная граница фотоэффекта для стронция $\lambda_{\max}=550$ нм.

Ответы, указания, решения

Избранные школьные задачи

1. Ответ: 0. Решение. $\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\dfrac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{8}}-\dfrac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{(\sqrt{8})^2-(\sqrt{7})^2}+\dfrac{2(\sqrt{10}-\sqrt{8})}{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{8})^2}-\dfrac{3(\sqrt{10}+\sqrt{7})}{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{7})^2}=\sqrt{8}+\sqrt{7}+\sqrt{10}-\sqrt{8}-\sqrt{10}-\sqrt{7}=0.$

2. а) I способ. Треугольники ABO и BCO имеют общую высоту, проведенную из вершины B, поэтому их площади относятся как длины оснований: $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{|AO|}{|CO|}$ (рис. 1); аналогично $\dfrac{S_4}{S_3}=\dfrac{|AO|}{|CO|}$. Следовательно, $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{S_4}{S_3}$ и поэтому $S_1S_3=S_2S_4$. II способ. Оба произведения равны $\dfrac{1}{4}|AO||BO||CO||DO|\sin^2\varphi$, где φ — угол между прямыми AC и BD.

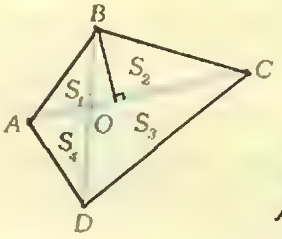


Рис. 1.

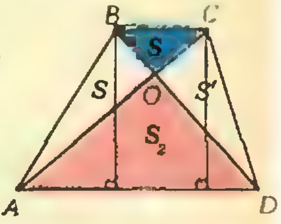


Рис. 2.

б) Ответ: $\sqrt{S_1S_2}$. Указание. (рис. 2) $S_{ABD}=S_{ACD}$ (у них общее основание AD и равны высоты, проведенные к AD), поэтому $S_{CDO}=S_{ABO}=S$; после чего ответ немедленно следует из утверждения п. а): $S^2=S_1S_3$. Другой способ: из подобия треугольников BOC и AOD следует, что $\dfrac{|AO|}{|OC|}=\sqrt{\dfrac{S_2}{S_1}}$. С другой стороны, $\dfrac{S}{S_1}=\dfrac{|AO|}{|OC|}$ (см. п. а)), откуда $\dfrac{S}{S_1}=\dfrac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}$ и $S=\sqrt{S_1S_2}$.

3. Ответ: 29. Решение. В момент выхода из порта A выбранный нами пароход встретит в порту A пароход, вышедший из B ровно 15 суток назад, в момент прибытия в B — пароход, выходящий из B ровно через 15 суток после отправления выбранного парохода. Значит, всего произойдет 31 встреча (столько же, сколько целых чисел от −15 до 15 включительно), из них — 29 в открытом море.

4. Умножив обе части доказываемого равенства на S, где S — площадь треугольника, получим равносильное равенство $\dfrac{S}{r}=\dfrac{S}{h_a}+\dfrac{S}{h_b}+\dfrac{S}{h_c}$, обе части которого равны полупериметру треугольника (в силу формул $S=pr=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$ для площади треугольника).

5. **Ответ**: $(-1; -1; -1)$. **Решение**. Сложив все три уравнения, после преобразований получим: $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=0$, что возможно лишь при $x=y=z=-1$ (каждое из слагаемых $(x+1)^2$, $(y+1)^2$, $(z+1)^2$ неотрицательно). Осталось проверить, что полученная тройка чисел удовлетворяет исходной системе уравнений.

6. **Ответ**: 90°. **Указание**. Оба вектора ненулевые и их скалярное произведение равно 0.

7. **Ответ**: $\frac{1985}{3968}$. **Указание**. Преобразуйте каждую из скобок по формуле $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$ и сократите общие множители числителя и знаменателя, получится, что указанное выражение равно $\frac{1\cdot 1985}{2\cdot 1984}$.

8. а) Предположим, что число $\sqrt{6}$ — рационально. Тогда оно представимо в виде $\sqrt{6}=\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа, так как $m^2=6n^2$, то m^2, а следовательно, и m, делится на 3, то есть $m=3m_1$, где m_1 — натуральное число. Подставляя $9m_1^2$ вместо m^2 в равенство $m^2=6n^2$, получим $3m_1^2=2n^2$, откуда следует, что и n делится на 3, что противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{m}{n}$.

б) Предположим противное: пусть $\sqrt{2}+\sqrt{3}=r$, где r — рациональное число. Тогда $r^2=2+3+2\sqrt{6}$, откуда получаем, что число $\sqrt{6}=\frac{r^2-5}{2}$ рационально, что противоречит результату, доказанному в п. а).

Замечание. Аналогично задаче 8 а) показывается, что если k не является квадратом натурального числа, то число $\sqrt{k}$ — иррационально: из равенства $\sqrt{k}=\frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь выводится, что и m и n делятся на p, где p — любое из простых чисел, входящих в нечетной степени в разложение числа k на простые множители.

9. **Ответ**: а) -6; 0; б) -4; 0. **Указание**. а) Уравнение «симметрично» относительно $x+3$ (точки $x+1$, $x+2$, $x+4$, $x+5$ расположены на числовой оси симметрично относительно точки $x+3$); замена $y=x+3$, приводит уравнение к биквадратному уравнению $y^4-5y^2-36=0$. (Возможна и замена $z=x^2+6x$, тогда $(x+1)(x+5)=z+5$, $(x+2)(x+4)=z+8$.) б) Замена $y=x+2$ приводит уравнение к биквадратному уравнению $y^4+6y^2-40=0$.

10. **Ответ**: а) Может во всех случаях; б) может только при четных n, то есть при $n=0$ и $n=4$; в) может только при $n=0$. **Указание**. Если четная (нечетная) функция имеет экстремум в точке $x_0\neq 0$, то она имеет экстремум и в точке $-x_0$; в точке 0 нечетная функция не может иметь экстремума (докажите это сами), четная может иметь, а может и не иметь (приведите соответствующие примеры). Периодическая функция может не иметь точек экстремума, например, функция $f(x)=\frac{\{x\}^2}{\{x\}}$ ($\{x\}$ обозначает дробную часть x, в целых точках f не определена).
Если же хотя бы один экстремум есть, скажем в точке x_0, то функция имеет бесконечно много экстремумов, так как точками экстремума являются все точки вида x_0+kT, где T — период функции, k — любое целое число.

11. Так как $ab=\frac{1}{c}$, $ac=\frac{1}{b}$, $bc=\frac{1}{a}$, то указанное неравенство можно записать в виде $a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}>6$, после чего осталось воспользоваться неравенством $x+\frac{1}{x}>2$, верным для любого положительного x. Равенство достигается только в случае $a=b=c=1$.

12. **Указание**. Рассмотрите прямые a и b — линии пересечения плоскостей, содержащих противоположные грани четырехгранного угла. Сечение угла плоскостью, параллельной a и b, будет искомым.

13. Умножив обе части равенства на $3V$, где V — объем тетраэдра, получим равносильное равенство $\frac{3V}{r}=\frac{3V}{h_1}+\frac{3V}{h_2}+\frac{3V}{h_3}+\frac{3V}{h_4}$, обе части которого равны полной поверхности тетраэдра (в силу формул $V=\frac{1}{3}Sr=\frac{1}{3}S_ih_i$, для объема тетраэдра, S — полная поверхность, S_i — площади граней, $i=1, 2, 3, 4$)

14. **Ответ**: а) $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; б) -2; 1, $-1\pm\sqrt{3}$. **Указание**. а) Проверьте, что $x=0$ не является корнем уравнения и поделите обе части уравнения на x^2. Тогда после замены $y=x+\frac{1}{x}$ уравнение запишется в виде $y^2-2y-15=0$ (так как $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$); б) замена $y=x-\frac{2}{x}$ приводит уравнение (после деления обеих частей на x^2) к виду $y^2+3y+2=0$; другой способ «угадать» корни $x=1$ и $x=-2$ и разложить левую часть уравнения на множители: $(x-1)(x+2)(x^2+2x-2)$, — например, делением $x^4+3x^3-2x^2-6x+4$ сначала на $(x-1)$, а затем на $(x+2)$.

15. Для решения задачи проще всего воспользоваться методом координат. При доказательстве мы будем использовать следующее утверждение: треугольник является остроугольным тогда и только тогда, когда квадрат любой его стороны меньше суммы квадратов двух других сторон. Справедливость этого утверждения легко следует, например, из теоремы косинусов: $\cos\widehat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, поэтому $\cos\widehat{A}$ положителен тогда и только тогда, когда $b^2+c^2>a^2$. Аналогично рассуждаем для углов B и C. Выберем систему координат с центром O и направим оси Ox, Oy и Oz вдоль лучей OA, OB и OC, соответственно (рис. 3). Пусть точки A, B и C имеют координаты $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ и $(0, 0, z)$, соответственно. По формуле расстояния между двумя точками пространства (см. § 59 учебника геометрии) имеем: $|AB|^2=x^2+y^2$; $|AC|^2=x^2+z^2$; $|BC|^2=y^2+z^2$. а) Очевидно, что квадрат любой стороны

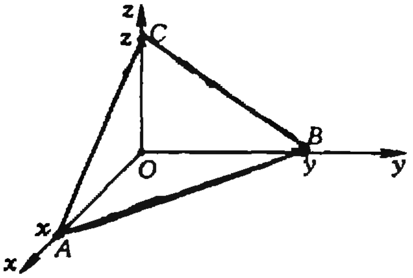


Рис. 3.

треугольника ABC меньше суммы квадратов двух других сторон, например, $|AB|^2=x^2+y^2<(x^2+z^2)+(y^2+z^2)=|AC|^2+|BC|^2$. Следовательно, этот треугольник остроугольный. б) Достаточно проверить, что имеет решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=c^2, \\ x^2+z^2=b^2, \\ y^2+z^2=a^2, \end{cases}$$

где a, b, c — длины сторон данного остроугольного треугольника. Сложив все три уравнения системы и разделив обе части полученного уравнения на 2 найдем, что $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$. После этого легко выражаются x^2, y^2 и z^2: $x^2=(x^2+y^2+z^2)-(y^2+z^2)=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$, аналогично $y^2=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}$ и $z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$. Так как данный треугольник остроугольный, то правые части полученных выражений положительны и исходная система имеет решение (x, y и z нужно взять положительными).

Замечание. Вместо метода координат можно воспользоваться теоремой Пифагора.

Движение по окружности

1. Песчинки будут находиться на высоте $h=R(1-g/(\omega^2R))$, если $\omega^2R>g$, и на высоте $h=0$, если $\omega^2R<g$. Первый случай соответствует положению неустойчивого равновесия, а второй — устойчивого равновесия.

2. $v_{\min}=\sqrt{gr}=2$ м/с.

3. $\frac{v_2}{v_1}=\frac{\sqrt{gR(\mu+\operatorname{tg}\alpha)/(1-\mu\operatorname{tg}\alpha)}}{\sqrt{\mu gR}}=$
$=\sqrt{\frac{\mu+\operatorname{tg}\alpha}{\mu(1-\mu\operatorname{tg}\alpha)}}$.

4. $a=\mu(g-v^2/R)\approx 2{,}8$ м/с^2.

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1983 году

Математика

Письменный экзамен

Алгебра

1. 4 и 5. 2. 1, 5, 25. 3. 14 км/ч. 4. $\frac{3\pi R}{64}$ см/с и $\frac{5\pi R}{64}$ см/с или $\frac{9\pi R}{320}$ см/с; $\frac{31\pi R}{320}$ см/с (два ответа в зависимости от направления движения точек).
5. За 6 часов. 6. Воспользуйтесь тем, что $\frac{1}{a_{k-1}a_k}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)$. 7. а) 0 при $0<|a|<1$; б) $x+1$ при $x>0$, $x\neq 1$; в) $a-b$ при $a>0$, $b>0$; г) $\frac{a}{x^2}$ при $x>0$, $a\neq x$. 9. $\frac{23}{32}$. 10. $-\frac{17}{26}\sqrt{2}$.
11. $p>2$. 12. $b<-\frac{3}{2}$.
13. а) $\{3\}$; б) $\{-1; 3\}$; в) $\{4\}$; г) $\left\{\frac{1}{100}; 10\right\}$;
д) $\{4\}$; е) $\{\log_{1,5}2; 2\log_{1,5}2\}$; ж) $\{4\}$; з) $\{4; 4\sqrt[3]{4}\}$;
и) $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6l\pm 1)$ $(k, l\in Z)$;
к) $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi k$ $(k\in Z)$;
л) $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$; $x_2=\pi(2l+1)$ $(k, l\in Z)$;
м) $x_1=\frac{k\pi}{2}$; $x_2=\frac{\pi}{8}(2l+1)$ $(k, l\in Z)$;
н) $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$ $(k\in Z)$;
о) $x_1=\frac{\pi}{4}(8k+3)$, $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi l$ $(k, l\in Z)$;
п) $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$ $(n\in Z)$;
р) $\left\{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}; -1; \frac{\sqrt{5}-3}{2}; 0\right\}$.
14. $\left\{-\pi; -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \pi\right\}$.
15. $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{12}\right\}$.
16. Нет корней, если $a<0$,
2 корня, если $a=0$ и $a\in]2; 6[$,
3 корня, если $a=2$ или $a=6$,
4 корня, если $a\in]0; 2[\cup]6; +\infty[$.
17. Уравнение имеет корни при $\frac{3}{4}<a<7$.

При этом $x=\pm\arccos\frac{1}{4}+2k\pi$ $(k\in Z)$, если $a=\frac{3}{4}$;

$$x_1=\pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt{4a-3}}{4}\right)+2k\pi,$$
$$x_2=\pm\arccos\left(\frac{1+\sqrt{4a-3}}{4}\right)+2l\pi$$
$$(k, l\in Z), \text{ если } a\in\left[\frac{3}{4}; 3\right];$$
$$x=\pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt{4a-3}}{4}\right)+2k\pi$$
$$(k\in Z), \text{ если } a\in]3; 7].$$

18. а) $\left[-1; \frac{5}{4}\right]$; б) $\left]-2\frac{9}{11}; -2\right]\cup[3; +\infty[$;
в) $]-\infty; -\sqrt{1983}]\cup[\sqrt{1983}; +\infty[$;
г) $[-\sqrt{1983}; 1[\cup]\sqrt{1982}; \sqrt{1983}]$;
д) $[2; +\infty[$; е) $]0; 1[\cup]1983^4; +\infty[$;
ж) $]-1; 1[\cup]1; 3[\cup]4; 5[$;
з) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{\pi}{6}; 1\right]$;
и) $]-2; -1[\cup]1; 2[$;
к) $]-\infty; -4]\cup[2; 5[\cup]5; 6[\cup]6; 7[\cup]7; +\infty[$;
л) $\{-1\}$.
19. а) $\{(2; 1), (-2; -1), (2; -1), (-2; 1)\}$;
б) $\{(41; 40)\}$; в) $\{(2^{\frac{3}{5}}; 2^{\frac{2}{5}})\}$; г) $\{(20; 16)\}$;

Анализ

1. $-\frac{11}{5}$. 2. $x_1=3$, $x_2=-1$. 3. $\left]0; \frac{3+\sqrt{89}}{20}\right[$.
4. а) $\max y=y(-1)=12$; $\min y=y(1+\sqrt{3})=2-6\sqrt{3}$; б) $\min y=y(2)=0$; $\max y=y(4)=4\sqrt{6}$.
5. $(-1; 0)$. 6. а) Точка минимума $x=\ln 2$;

б) $x_1=-\sqrt{2\log_3 2}$, $x_2=\sqrt{2\log_3 2}$ — точка максимума, $x_3=0$ — точка минимума.

7. Убывает на $\left]0; \frac{3}{4}\right[$, возрастает на $\left]\frac{3}{4}; +\infty\right[$.

8. $a\in]-\infty; -6]\cup[18; +\infty[$.

9. $a=\frac{1}{2}$. 10. $\left[-4; \frac{3-\sqrt{21}}{2}\right]\cup]1; +\infty[$.

11. $\frac{23}{41}$ часа. 12. $S_{\max}=\frac{8}{27}$, $x=\frac{1}{3}$.

13. $48=5+43$. 14. $0{,}55\sqrt{5}$

Геометрия

1. $\vec{0}$. 2. $\frac{\pi}{2}$. 3. 20 м. 4. $3a^2(7-4\sqrt{3})$. 5. $\frac{a^2}{8}\operatorname{tg}\alpha$; $a\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$ 6. 270 см². 7. 48. 8. $\frac{2}{\sqrt{5}}a^2$.

9. $\frac{\sqrt{ab((a+b)^2-c^2)}}{a+b}$. 10. $\frac{a^2-b^2}{4}(\sqrt{3}-1)$. 11. h^2.

12. $\frac{3}{4}b$, $\frac{3}{4}a$. 13. $\frac{1}{4}ab\sin\alpha$. 14. $\frac{25}{49}S$. 15. 9:1.

16. $\frac{13a+4b}{50}\sqrt{d^2-\frac{1}{4}(a-b)^2}$. 17. 2.

18. $\frac{a^2}{4}\sqrt{3(4\operatorname{tg}^2\beta+1)}$. 19. $2\arcsin\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$.

20. $\frac{6a^2h^2}{(a+h)^2}$. 21. 4,5 см. 22. $a^3\sin\alpha\sin\beta\times\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. 23. $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

24. $\frac{H}{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}+1}$. 25. $4\sqrt{3}\pi b^3(27\sin^3 2\alpha)^{-1}$.

26. 900π. 27. $\frac{12V}{\pi(1+\sqrt{2})^3}$.

28. $\frac{1}{6}S\sqrt{S}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\pi\sin\frac{\alpha}{2}}}$. 29. $\frac{a^6}{2(a^2-1)^2}$.

30. $-\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}^3\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha$. 31. $\frac{7}{54}l^3\sin2\alpha\cos\alpha$.

32. $\arcsin\frac{3}{5}$. 33. $\frac{\pi(\gamma-1)}{\gamma^6}$. Отношение наибольшее при $\gamma=\frac{5}{4}$.

Устный экзамен

Алгебра

1. Второе число больше. 2. а) $\frac{17}{4}$, б) $\frac{3}{2}$.

3. $\frac{5}{34}\sqrt{34}$. 4. Воспользуйтесь тем, что $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.

5. 55. 6. а) {1}; б) {3}; в) {3}; г) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$; д) $x=2$, $y=\frac{1}{2}$; е) {2}; ж) $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$ $(n\in Z)$; з) $x=\pm\arccos\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in Z)$.

7. а) три решения; б) два решения; в) бесконечно много решений.

8. $x=k\pi$, $y=\frac{\pi l}{2}$, $z=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi m}{3}$ $(k, l, m\in Z)$.

9. а) $\left]-\infty; \frac{-1-\sqrt{11}}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{11}}{2}; +\infty\right[$; б) $[-7; -\sqrt{35}[\cup]0; 5]$; в) $[-5; 0[$; г) $[1; 2[\cup[8; +\infty[$; д) $]0; 2]\cup[3; 7[$; е) $]-\infty; -1]\cup[1; +\infty[$.

10. $a\in]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$.
12. $\{(2; 3)\}$. 14. $b\in]-2; 2[$.

Анализ

1. а) $(3x^2-10x)e^{x^3-5x^2}$, б) 0.

2. $\min y=y(0)=1$, $\max y=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

3. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 4. Убывает при $x\in\left]0; \frac{1}{e}\right[$, возрастает при $x\in\left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$. 5. $a\in]-\infty; -3]$.

Геометрия

1. Могут — это треугольники со сторонами $3d$, $4d$ и $5d$, где $d>0$.

2. $0<S<\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

3. $S=\left(\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\times\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$

5. $r_1=r\frac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}$, $r_2=r\frac{1-\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}$.

6. $\frac{2}{3}l^3\sin\beta\sin\frac{\beta}{2}$. 7. $\arccos\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. 8. arctg 3

Физика

Механика

1. $v_{ср}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}\approx 53{,}3$ км/ч.
2. $\tau=\sqrt{t^2+2l/g}-t\approx 1$ с.
3. $t=(2v_0\sin\alpha)/g\approx 80$ с; $R=(v_0\cos\alpha)^2/g\approx\approx 4{,}8\cdot10^4$ м.
4. $t=\sqrt{\frac{(m_1+m_2)h}{(m_1-m_2)g}}=1{,}4$ с.
5. $r=\sqrt[3]{T^2R_З^2g/(4\pi^2)}\approx 4{,}2\cdot10^7$ м.
6. $l_2=2l_1-l$.
7. $F_1=\frac{mgl}{2(l-l_1)}=312{,}5$ Н; $F_2=mg-F_1=187{,}5$ Н.
8. $T=\frac{m}{2}\left(g+\frac{v^2}{l}\right)\approx 500$ Н.
9. $\frac{l_1}{l_2}=1+\frac{4\pi R^3(2\varrho_в-\varrho_п)}{3m}\approx 1{,}6$ (здесь $\varrho_в=10^3$ кг/м³ — плотность воды).
10. $\alpha\approx\frac{N}{mgv}-\mu\approx 0{,}004$ рад $\approx 0{,}23°$.
11. $N=\mu F\pi Dn\approx 480$ Вт.
12. $N=\eta\varrho gVh\approx 225$ МВт.
13. $Q=\frac{m_1m_2(v_1^2+v_2^2)}{2(m_1+m_2)}$.
14. $h=\frac{m^2v^2}{2g(m+M)^2}\approx 0{,}5\cdot10^{-3}$ м $\approx 0{,}5$ мм.
15. $A=12$.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. $m=m_0p/p_0=0{,}5\cdot10^{-3}$ кг.
2. $\Delta t=273$ °C.
3. $h=p_0/(\varrho g)\approx 10$ м (здесь $\varrho=10^3$ кг/м³ — плотность воды).
4. $\varrho=\frac{p_0\Delta m}{\Delta pV}\approx 1{,}8$ кг/м³.

5. $p=\left(\frac{p_1V_1}{T_1}+\frac{p_2V_2}{T_2}\right)\frac{T}{(V_1+V_2)}=1{,}5\cdot10^5$ Па.

6. $\Delta T=\frac{T_a}{(p_aM\pi d^3)/(6mRT_a)-1}\approx61{,}4$ К.

7. $\Delta T=AM/(mR)\approx125$ К.

8. $N\approx\eta\varrho Vqv/s\approx23$ кВт (здесь $\eta\approx0{,}3$).

9. $m_y=\frac{cM(T_2-T_1)+rm}{q\eta/100\,\%}\approx215$ кг.

10. $A_{\max}=(1-T_x/T_н)Q=707$ Дж.

11. $\eta=c\varrho V(t_к-t)/(P\tau)=0{,}7=70\,\%$ (здесь $\varrho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды, $t_к=100$ °C — температура кипения воды).

12. $S=\frac{2\varrho lP}{\alpha(1-\alpha)U^2}=0{,}8\cdot10^{-4}$ м^2 $\alpha=0{,}05$).

13. $m=kjStN\approx36{,}5\cdot10^3$ кг $=36{,}5$ т; $W=UjStN\approx1{,}1\cdot10^{13}$ Дж.

Колебания и волны

1. Ускорение кабины направлено вниз; его модуль $a=g(1-T_0^2/T^2)=0{,}31g\approx3{,}1$ м/с^2.

2. $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3. $x_m=\sqrt{(mg)^2+2mghk}/k$.

4. $l=2\pi^2g/\omega_0^2$.

5. $v=\frac{l}{2\pi}\sqrt{\frac{fg}{Fh}}$.

6. $\alpha=\frac{RT}{L}100\,\%=0{,}001\,\%$

Оптика

1. $a'=a-2h/\sqrt{n^2-1}\approx3{,}4$ м; $b'=b-2h/\sqrt{n^2-1}\approx1{,}4$ м.

2. $l=\frac{d}{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$.

3. $H=hF/l=4$ см; $d_1=F(1+1/\Gamma)=11$ см; $d_2=F(1-1/\Gamma)=9$ см (изображение мнимое).

4. $h_2=h^2/h_1=9$ см.

5. $f_1=3F/2$ (изображение действительное и находится за линзой); $f_2=3F$ (изображение действительное и находится перед линзой).

6. $A=\frac{hc}{n-1}\left(\frac{n}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1}\right)$.

7. $\lambda=\frac{\lambda_{\max}}{E\lambda_{\max}/(hc)+1}\approx367$ нм.

Основы электродинамики

1. $r\approx\sqrt[3]{\frac{2kq^2l}{mg}}\approx4\cdot10^{-2}$ м (здесь $k=9\cdot10^9$ Н·м^2/Кл^2).

2. На линии, соединяющей заряды, точка, в которой напряженность поля равна нулю, находится на расстоянии $x=8\cdot10^{-2}$ м от первого заряда (x определяется из уравнения $(q_2-q_1)x^2+2q_1lx-q_1l^2=0$).

3. $E=0$.

4. $F=q\varphi/r=5\cdot10^{-7}$ Н.

5. а) $U=(U_1+U_2)/2=200$ В; б) $U=(U_1-U_2)/2=50$ В.

6. $a=|e|U/(dm)\approx1{,}6\cdot10^{16}$ м/с^2; $v=\sqrt{2|e|U/m}\approx5{,}6\cdot10^6$ м/с.

7. $U=mgd/q\approx10^4$ В.

8. $R_x=R\frac{U_1(U-U_2)}{U_2(U-U_1)}=78{,}6$ кОм.

9. $R=\frac{(\mathscr{E}-Ir_1)r_2}{I(r_1+r_2)}=0{,}3$ Ом.

10. $P_2=P_1(U_2/U_1)^2\approx183$ Вт; спираль надо укоротить на 0,67 ее длины.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили
А. П. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили
М. Б. Дубах, А. И. Климанов, В. С. Коваль, А. Я. Корчинов, Н. С. Кузьмина, Ю. П. Мартыненко, Э. В. Назаров, А. Г. Остаев, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина
Фото представили
А. П. Виленкин, В. Е. Шутов

В номере использованы материалы фотохроники ТАСС

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественные редакторы Т. М. Макарова,
Е. В. Морозова

Корректор Н. Б. Румянцева

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54
Сдано в набор 19.04.84. Подписано к печати 25.05.84
Печать офсетная. Усл. кр.-от. 23,8
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,67. Т-09794
Тираж 179 459 экз. Цена 40 коп. Заказ 979

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЭВМ ПРОТИВ ЧЕМПИОНА МИРА

В «Кванте» № 4 мы рассказывали о четвертом чемпионате мира среди ЭВМ. Стоит упомянуть и об их младших собратьях — микрокомпьютерах, которые широко распространяются по всему свету и, возможно, скоро появятся в продаже и в наших магазинах. Хотя по своей силе маленькие автоматы уступают старшим коллегам, интерес к ним постоянно растет. Уже состоялись три первенства мира среди микрокомпьютеров (1980 г.— Англия; 1981 г.— ФРГ; 1983 г.— Венгрия). В этих соревнованиях, которые в основном проводятся в рекламных целях (чем сильнее автомат, тем охотнее его купят), побеждали машины американской фирмы «Фиделити» — «Сэнсори Вайс», «Челленджер» и «Эйлит». Кстати, в последнем чемпионате мира среди больших ЭВМ участвовали девять микрокомпьютеров, но с весьма скромным результатом. Так, «Фиделити Х» набрала 50 % очков и разделила 10—13 места.

В 1980 году организаторы международного турнира в Бад-Киссингене (ФРГ), опять же в целях рекламы, решили провести сеанс одновременной игры четырех гроссмейстеров против 100 микрокомпьютеров — А. Карпов, Б. Спасский, В. Унцикер и Р. Хюбнер боролись против 25 машин каждый. В ходе сеанса гроссмейстеры часто экспериментировали, интересуясь возможностями машины. Спасский так много жертвовал, что ему пришлось приложить немало усилий, чтобы не отстать от своих коллег и добиться стопроцентного результата. Карпов шутки ради выиграл четыре одинаковые — ход в ход партии, но в одном поединке он «зевнул» целую ладью, и для достижения победы ему пришлось пойти на хитрость. Программа была построена по принципу «дают — бери, бьют — беги». Если машине грозит мат и одновременно под боем фигура, то машина скорее получит мат, чем допустит материальные потери. Как раз этим несовершенством робота и воспользовался чемпион мира — имея лишнюю ладью и не желая расставаться с качеством, его скупой партнер пожертвовал королем. Посмотрите, как это произошло. Партия почти сенсационная, ведь впервые машина была близка к победе, встречаясь за доской с чемпионом мира по шахматам среди людей!

Карпов — «Суперсистем III»
Английское начало

1. c4 e5 2. Кc3 Кc6 3. g3 Сc5 4. Сg2 Кf6 5. Кf3 0—0 6. 0—0 d6 7. d3 Сe6 8. a3 a5 9. h3 Фe7 10. Лb1 Сf5 11. Сg5 Крh8 12. Кd5 Фd8 13. b4 ab 14. ab Сa7 15. Лa1 h6 16. С:f6 gf 17. Фd2 Крh7 18. Кh4 Сe6 19. Сe4+ Крg7 20. g4 Кd4. Позиционные достижения компьютера невелики, и, продолжая 21. Лa3, белые, конечно, довели бы свой перевес до логического конца. Однако чемпион мира допускает редкий в своей практике зевок. 21. Крh2?? Кb3 22. Фb2 К:a1 23. e3. Увы, брать коня нельзя ни ферзем, ни ладьей из-за 23... С:f2. 23... c6 24. Кc3 d5 25. cd cd 26. Сg2 d4 27. Кb5 Фb6 28. К:a7 Ф:a7 29. f4 de 30. fe fe 31. Ф:e5+ Крg8 32. Кg6.

Играя сейчас 32... Фb8!, машина брала верх. После 33. Кe7+ Крh7 34. Сe4+ f5 35. Ф:b8 Лf:b8 36. gf Сf7 37. f6+ Крh8 38. Лg1 Лa2+ 39. Крh1 e2 белым пришлось бы «пожать руку» компьютеру. Что же случилось в партии? Обнаружив, что ладья находится под боем, машина не пожелала отдавать качество и, убедившись, что 32... fg, ведет к вечному шаху, отступила ею в сторону — 32... Лfd8. В результате электронному шахматисту удалось сохранить огромный материальный перевес, но дорогой ценой — последовало 33. Фh8×.

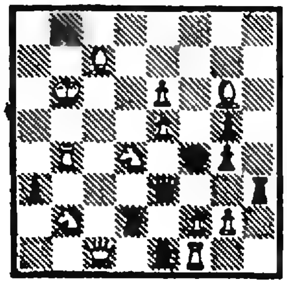
А. Карпову не раз приходилось обыгрывать микроЭВМ в сеансах одновременной игры. Но однажды компьютеру повезло. Это случилось в 1983 году в сеансе одновременной игры во время открытого чемпионата ФРГ.

Карпов — «Мефисто III»
Испанская партия

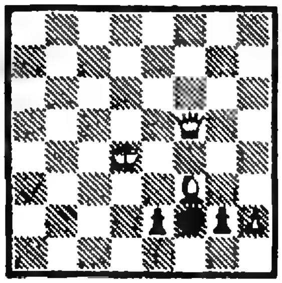
1. e4 e5 2. Кf3 Кc6 3. Сb5 Кf6 4. 0—0 К:e4 5. d4 ed. Неважный ход. Сильнее 5... Сe7. 6. Лe1 f5. Не будем обижать автомат и снабжать его ходы вопросительными знаками. Заметим лишь, что после «импульсивного» движения пешки «f» положение черных уже безнадежно. 7. К:d4 К:d4 8. Ф:d4 Крf7. Здесь решало 9. Фd5+ Крg6 (9... Крf6 10. Л:e4 fe 11. Сg5+) 10. Л:e4! fe 11. Ф:e4+ Крf7 (11... Крh5 12. Сe2×, 11... Крf6 12. Фh4+) 12. Сc4+ d5 (12... Крf6 13. Фf4+ Крe7 14. Фe5×, 13... Крg6 14. Сf7×) 13. С:d5+ Сe6 14. Ф:e6×. Хороший учебный пример для начинающих шахматистов. Однако чемпион мира тоже сделал «импульсивный» ход — дал шах не той фигурой, и дальнейшая жертва качества на e4 привела лишь к вечному шаху.

9. Сc4+ d5 10. С:d5+ Сe6 11. С:e6+ Кр:e6 12. Л:e4+ fe 13. Ф:e4+ Крf6 14. Кc3 c6 15. Сe3 Сe7 16. Лe1 Фd7 17. Фf4+ Крg6 18. h4 Фf5 19. h5+ Ф:h5 20. Сd4 Сf6 21. g4 Фg5 22. Фe4+ Крf7 23. Фe6+ Крg6 24. Фe4+ Крf7 25. Фe6+ Крg6 26. Фe4+. Ничья.

Конкурсные задания



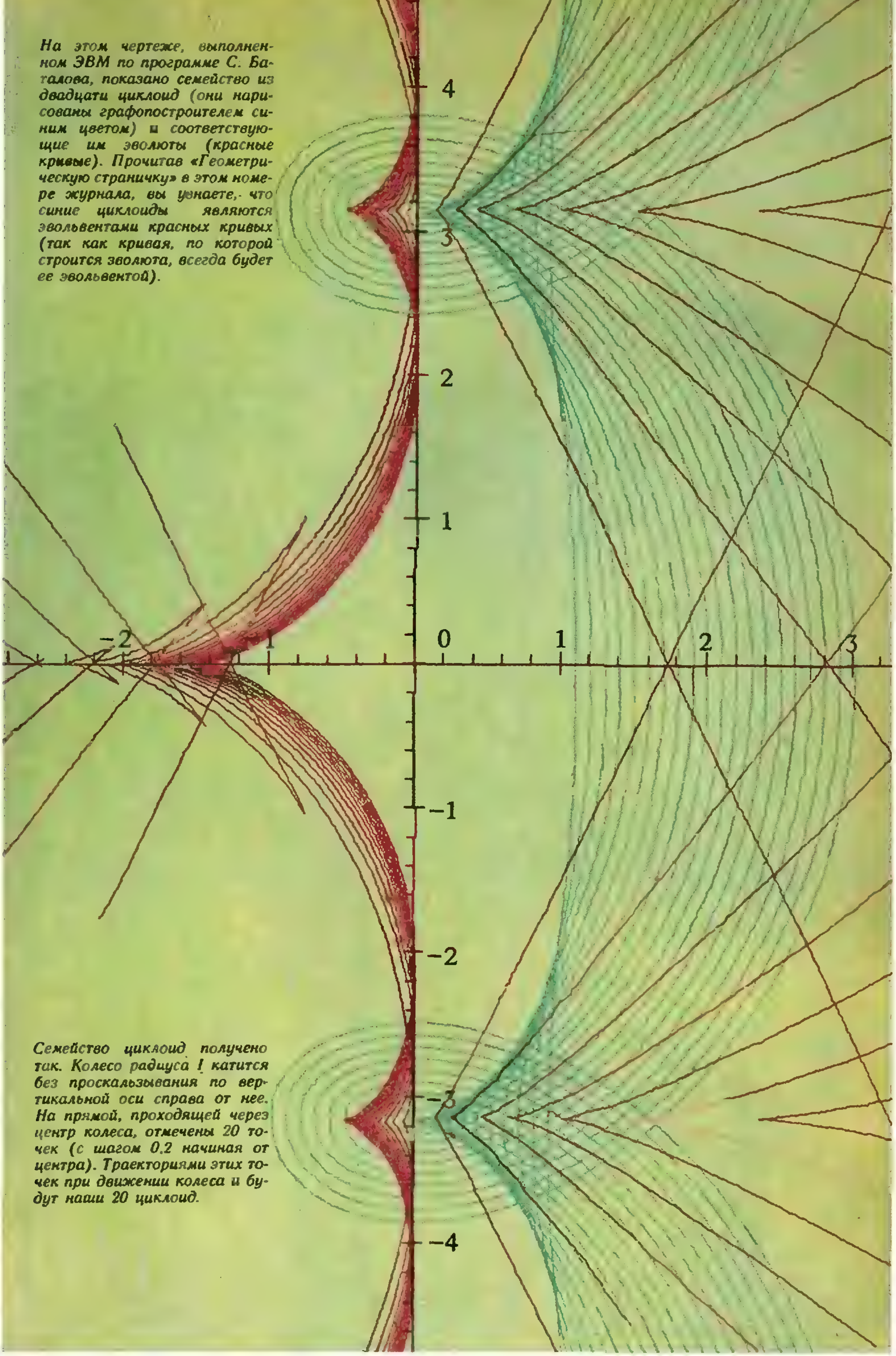
11. Мат в 2 хода.



12. Мат в 3 хода.

Срок отправки решений — 25 августа 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 11, 12»).

На этом чертеже, выполненном ЭВМ по программе С. Баталова, показано семейство из двадцати циклоид (они нарисованы графопостроителем синим цветом) и соответствующие им эволюты (красные кривые). Прочитав «Геометрическую страничку» в этом номере журнала, вы узнаете, что синие циклоиды являются эвольвентами красных кривых (так как кривая, по которой строится эволюта, всегда будет ее эвольвентой).

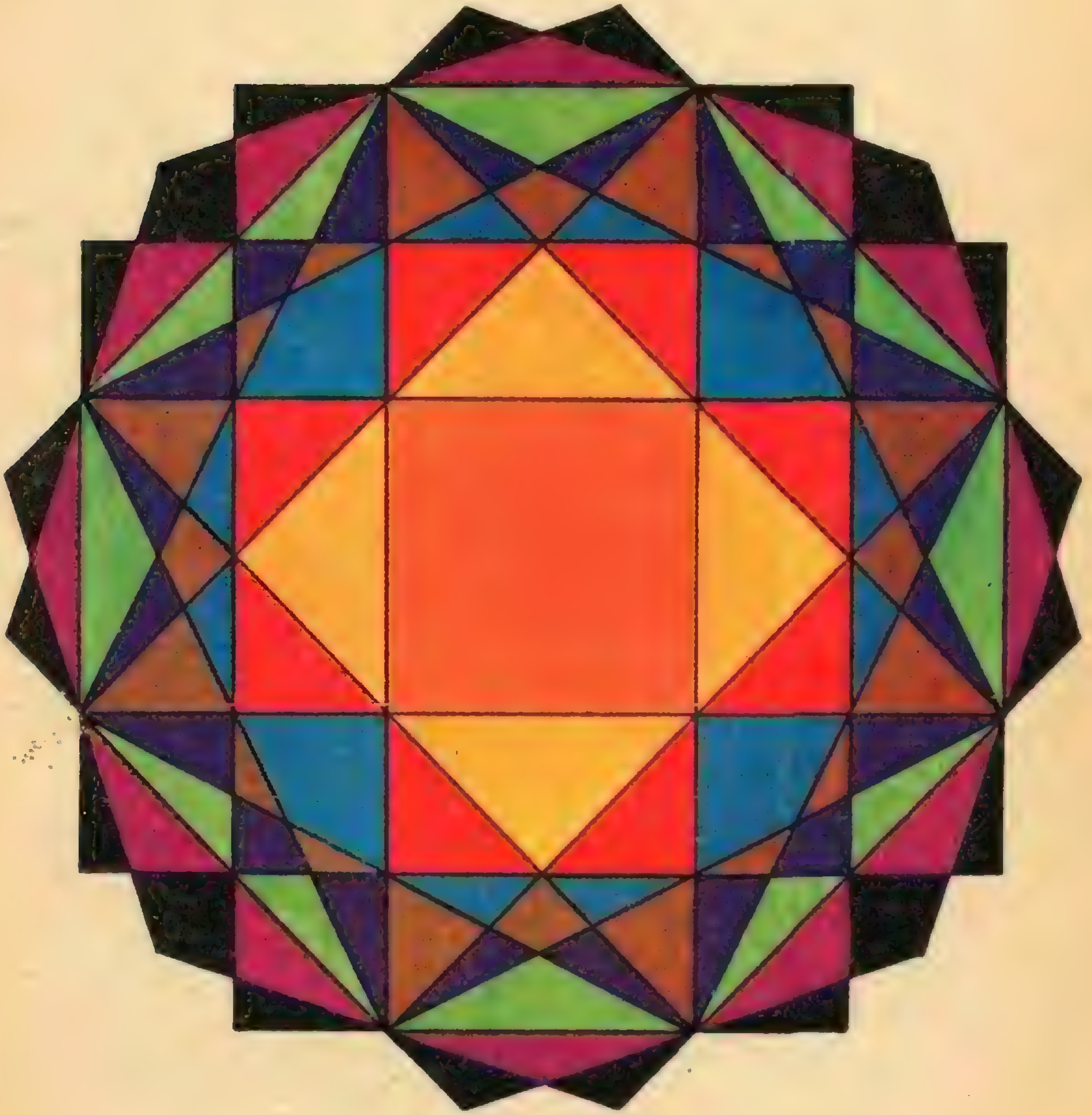


Семейство циклоид получено так. Колесо радиуса 1 катится без проскальзывания по вертикальной оси справа от нее. На прямой, проходящей через центр колеса, отмечены 20 точек (с шагом 0,2 начиная от центра). Траекториями этих точек при движении колеса и будут наши 20 циклоид.

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Этот цветной геометрический узор — не плод фантазии художника, а точный математический чертеж, изображающий так называемые зоны Бриллюэна. Каждая из представленных здесь зон дана своим цветом. Их формы различны, но площади одинаковы (они равны площади центрального квадрата). Откуда возникают зоны Бриллюэна и почему они обладают указанным свойством, можно узнать из статьи А. Б. Гончарова в этом номере журнала.



НОМЕР
7

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

КВАНТ

7 1984

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	*М. А. Кожушнер.* Периодическая система элементов	*M. A. Kozhushner.* The periodic table of elements
9	*Э. А. Комиссарчик, А. Л. Футер.* Человек, ЭВМ и шахматный эндшпиль	*E. A. Komissarchik, A. L. Futer.* Chess players, computers and endgames
15	*И. М. Яглом.* Итальянский купец Леонардо Фибоначчи и его кролики	*I. M. Yaglom.* The Italian merchant Leonardo Fibonacci and his rabbits
18	*А. Ю. Матулис, А. Ю. Савукинас.* «Ферзя — в угол», «цзяньшицзы» и числа Фибоначчи	*A. Yu. Matulis, A. Yu. Savukinas.* "Queen-in-the-corner", "tsianshitsi" and Fibonacci numbers
23	*Ю. М. Сандлер.* Если бы Следопыт знал физику...	*Yu. M. Sandler.* If the Deerslayer knew physics...
26	*Е. М. Воинов.* О гидравлическом ударе	*E. M. Voinov.* On the hydrolic strike
	Новости науки	**Science news**
22	*А. И. Буздин.* Еще один шаг на пути к абсолютному нулю	*A. I. Buzdin.* One more step to absolute zero
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
30	*Е. И. Пальчиков.* Почему «поет» водопровод?	*E. I. Palchikov.* Why do water-pipes "sing"?
	Математический кружок	**Mathematics circle**
33	*В. Н. Дубровский.* Момент инерции в геометрии	*V. N. Dubrovski.* Moment of inertia in geometry
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
39	Задачи	Problems
39	*Л. Кэрролл.* Вниз по кроличьей норе	*L. Carroll.* Down the rabbit hole
	Игры и головоломки	**Puzzles and games**
45	*А. И. Климанов.* Стереоскопические чертежи	*A. I. Klimanov.* Stereoscopic pictures
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
50	Задачи М871 — М875; Ф883 — Ф887	Problems M871 — M875; P883 — P887
53	Решения задач М846, М856 — М860; Ф867 — Ф872	Solutions M846, M856 — M860; P867 — P872
63	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Уголок коллекционера	**Collector's corner**
8	Марки, посвященные Д. И. Менделееву	Stamps dedicated to D. I. Mendeleev
	Смесь *(14, 32, 49)*	**Miscellaneous** *(14, 32, 49)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Ученые — гроссмейстеры по композиции *(3-я с. обложки)*	Scientists — grandmasters in composition *(3rd cover page)*

Та часть периодической системы элементов, которая выделена на первой странице обложки, содержит три элемента — скандий, галлий и германий, — которые к моменту открытия Д. И. Менделеевым периодического закона были неизвестны. Предсказание существования этих элементов и их физических и химических свойств, сделанное Менделеевым, Энгельс назвал настоящим научным подвигом.

О научной истории периодической таблицы элементов рассказывается в этом номере журнала.

Фрагмент графической композиции доктора физико-математических наук А. Т. Фоменко «Шахматный эндшпиль» (см. вторую страницу обложки) помещен в связи со статьей «Человек, ЭВМ и шахматный эндшпиль», опубликованной в этом номере журнала.

© Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1984

Периодическая система элементов

Доктор физико-математических наук
М. А. КОЖУШНЕР

Д. Менделеев

27 января исполнилось 150 лет со дня рождения великого русского ученого Дмитрия Ивановича Менделеева, а в феврале — 115 лет его величайшему творению — периодической таблице элементов. История того, как Менделеев шел к одному из крупнейших научных открытий XIX века, как постепенно происходило усовершенствование таблицы, как выяснение сложной структуры атомов и открытие квантовых законов, управляющих движением атомных частиц, привели, наконец, к пониманию физической основы периодической системы элементов — исключительно интересна и поучительна. Сейчас, когда науке уже достаточно хорошо известна структура атомов, ретроспективно эта история напоминает увлекательный детектив, когда большая армия ученых в разные годы и в разных странах постепенно накапливала факты, выдвигала различные гипотезы, чаще всего в общем не верные, но содержащие какое-то приближение к истине — правильной картине строения атомов.

Научную историю периодической таблицы элементов можно разбить на четыре этапа:

1 этап — накопление фактов о свойствах элементов, первые попытки их систематизации, создание Д. И. Менделеевым первого варианта таблицы;

2 этап — уточнение таблицы, заполнение пустующих клеток, окончательное подтверждение ее истинности;

3 этап — развитие знаний о структуре атомов, открытие квантовой механики, качественное объяснение периодического закона;

4 этап — создание и развитие количественных методов расчета структуры атомов, создание новых элементов, расширение таблицы Менделеева.

Еще будучи студентом Петербургского педагогического института, Д. И. Менделеев, избравший химию основной специальностью под влиянием своего учителя, крупного русского химика А. А. Воскресенского, задумался над закономерностями изменения химических свойств от элемента к элементу. В то время, к середине XIX века, было накоплено огромное количество фактических сведений о химических свойствах элементов, были найдены группы химически сходных элементов (щелочные металлы — Li, Na, K, Rb, Zs, щелочно-земельные металлы, галогены), причем внутри этих групп была подмечена определенная закономерность, связывающая химическую активность элементов с их атомными массами. Однако общей, объединяющей, картины не было. Делались попытки как-то классифицировать элементы по качественным характеристикам образуемых ими химических соединений. Но они оказались несостоятельными из-за слишком большого разнообразия таких соединений и их свойств.

Менделеев был физико-химиком и понимал, что если систематизация возможна, то она должна базироваться на четких *количественных* физических характеристиках. Он писал: «... Всякая система, основанная на точно наблюдаемых числах, конечно, будет уже в том отношении заслуживать предпочтения перед другими системами, не имеющими численных опор, что в ней остается мало места произволу». В 1859—61 годах Д. И. Менделеев был командирован за границу. В Гейдельберге, в Германии, он начал работать в лаборатории Бунзена. Бунзен темпераментно заявлял: «Химик, который не есть также физик, есть ничто!». Сначала здесь, а затем в собственной, созданной им самим, лаборатории Менделеев систематически изучает силы сцепления между молекулами в разных жидкостях, пытаясь найти закономерности в изменении этих сил, связанные с химическими особенностями элементов и соединений. Таких явных закономерностей он не нашел, однако эти исследования привели его к важному физическому открытию — он открыл существование критической точки (критических температуры и давления, при которых исчезает различие между жидкостью и ее паром).

Большое влияние на дальнейшую деятельность Дмитрия Ивановича оказал I съезд химиков в Карлсруэ, в котором он принимал живейшее участие, особенно — выступление итальянского химика С. Канниццаро. Сам Менделеев впоследствии вспоминал: «Его (Канниццаро. — *М. К.*) я считаю настоящим моим предшественником, так как установленные им атомные веса дали необходимую точку опоры. Я сразу же тогда заметил, что предложенные им изменения атомных весов вносят ... новую стройность, и идея возможной периодичности свойств элементов при возрастании атомного веса, в сущности, уже тогда мне представлялась внутренне».

В 1867 году, возглавив кафедру общей химии в Петербургском университете, Менделеев начал писать учебник для студентов «Основы химии». Необходимость в построении таблицы элементов снова встала перед ним. Началась мучительная многонедельная работа. Выписав на отдельных карточках атомные массы и основные химические и физические свойства элементов, Менделеев начал раскладывать своеобразный «пасьянс», исходя из уже известных групп химически сходных элементов. Однако очень скоро он приходит к выводу, что важнейший, принципиальный момент в систематизации — сопоставление именно несходных элементов, поиск общей закономерности. Трое суток, почти без отдыха, проработал он; интуитивно чувствовавшаяся закономерность в таблицу не складывалась. По словам Менделеева, «все в голове сложилось, а выразить таблицей не могу». Крайняя усталость свалила с ног, он лег и сразу заснул. «Вижу во сне таблицу, где все элементы расставлены, как нужно. Проснулся, тотчас записал на клочке бумаги, — только в одном месте оказалась нужной поправка».

Так 1 марта 1869 года родилась периодическая система элементов. Хотя вид таблицы отличался от принятого в настоящее время, но она отвечала главному правилу, сформулированному ее автором: «измеримые химические и физические свойства элемента и его соединений периодически зависят от атомного веса элементов». Уже в августе 1869 года Д. И. Менделеев придал таблице тот вид, к которому мы привыкли; известные в то время элементы были размещены так же, как и сейчас.

Уверенность в правильности и научной значимости закона позволила Менделееву утверждать, что атомные массы некоторых элементов были определены неправильно: Th — должно быть 232 вместо 116, U — 240 вместо 120, Ce — 138 вместо 92, In — 113 вместо 75,6. Ошибки в атомных массах были связаны с тем, что при их определении исходили из неправильных формул химических соединений. Например, для окиси церия использовалась формула CeO. Исходя из химических свойств Ce, Менделеев определил его предполагаемое место в таблице и возможную формулу окисла — Ce_2O_3. Тогда атомная масса церия должна была быть увеличена в 1,5 раза, и с атомной массой 138 Ce занял правильное место в таблице. Независимое определение атомной массы Ce по величине теплоемкости металлического Ce, предпринятое самим Менделеевым, блестяще подтвердило его догадку.

Исходя из открытого им периодического закона, Д. И. Менделеев с поразительной точностью предсказал открытие и физические и химические свойства новых элементов (см. таблицы в конце статьи): экабор — скандий, экаалюминий — галлий, экасилиций — германий (приставка «эка» означает «следующий за»). Это был, по выражению Энгельса, настоящий научный подвиг.

Наступил второй этап — подтверждение и укрепление периодической таблицы.

Сначала таблица не вызвала почти никакого отклика у европейских химиков и физиков, большинство в нее просто не верили. Когда Бунзену, одновременно с Менделеевым установившему правильную атомную массу Се, один из учеников указал на то, что это как раз подтверждает таблицу Менделеева, он раздраженно ответил: «Да уйдите вы от меня с этими догадками. Такие правильности вы найдете и между числами биржевого листка». Даже Л. Мейер, знакомый с первыми работами Менделеева и предложивший в 1870 году аналогичный вариант таблицы, заметивший периодическую зависимость атомных объемов элементов (объемов, приходящихся на один атом) от атомной массы, считал, что нельзя на таком шатком основании, как периодический закон, предлагать изменение атомных масс.

Гром грянул в 1875 году. Молодой французский химик П. Лекок де Буабодран открыл новый элемент, который он назвал галлием в честь древнего названия Франции. Прочитав сообщение об этом, Менделеев по описанным химическим свойствам и минералу, в котором был найден новый элемент, сразу понял, что галлий — это предсказанный им экаалюминий. Однако плотность галлия была указана равной 4,7 г/см^3, в то время как Менделеев, исходя из своей таблицы, предсказывал для нее значение 5,9 г/см^3. Об этом Менделеев написал автору открытия. Лекок де Буабодран, возмущенный тем, что кто-то пытается указывать на ошибку ему, единственному в мире державшему новый элемент в руках, все-таки предпринял проверку. Результат был ошеломляющий: русский ученый оказался прав. Это был блистательный триумф периодической таблицы, сразу же получившей всемирное признание.

В 1879 году Л. Нильсон в Швеции открыл новый элемент скандий — экабор. В 1886 году немецкий химик К. Винклер открыл германий, который по своим свойствам блестяще совпал с предсказанным Менделеевым экасилицием. В письме к Менделееву Винклер писал: «...уведомляю Вас о ...новом триумфе Вашего гениального исследования».

Впоследствие Д. И. Менделеев писал: «Л. де Буабодрана, Нильсона и Винклера... я со своей стороны считаю истинными укрепителями периодического закона».

Периодическая таблица продолжала заполняться, и последний из предсказанных Менделеевым элементов — астатин (экаиод) — был открыт только в 1940 году. Наиболее серьезные испытания на универсальность таблица выдержала в конце прошлого — начале нынешнего века. В 1894 году Дж. Рэлей и У. Рамзай в Англии открыли аргон, затем в 1895—98 годах Рамзаем совместно с другими учеными были открыты гелий, неон, криптон, ксенон. Казалось, этим элементам нет места в таблице Менделеева. По своим химическим свойствам (точнее, по почти полному отсутствию таковых, за что газы и были названы инертными) они не походили ни на какой другой элемент. Тогда Рамзай и предположил, что в таблицу должно включить новую группу — нулевую, которая отделяет активнейшие неметаллы — галогены от активнейших металлов — щелочных. В это же время стало ясно, что все редкоземельные элементы должны быть помещены в одну клетку таблицы, так как их химические и физические свойства чрезвычайно близки.

К этому же времени выяснилось, что атомы имеют сложное строение, что в их состав входят отрицательно заряженные легкие частицы — электроны. Значит, атом состоит из противоположно заряженных компонентов. В 1896 году французский физик А. Беккерель открыл радиоактивность урана. Супруги Пьер и Мария Кюри в 1898 году открыли новые радиоактивные элементы — радий и полоний, затем был открыт актиний... Радиоактивных элементов стало слишком много — они не помещались в периодическую таблицу. И только в 1909 году все стало на свои места. Дело в том, что один и тот же радиоактивный элемент может получаться путем различных распадов разных начальных элементов. Так как продуктов распада по массе получалось очень мало, трудно было провести химический анализ, и эти продукты считались разными элементами. В 1909 году Д. Стрёмгольм и Т. Сведберг в

Швеции установили химическое тождество различных «радио-элементов», и в буквальном смысле слова все стало на свои места. Таблица Менделеева выдержала еще одно испытание. Хотя при радиоактивном распаде происходило превращение одних элементов в другие, они перемещались по клеткам таблицы.

Теперь на первый план выдвигалась задача — на основе изучения структуры атома найти первопричину открытой Д. И. Менделеевым периодичности.

Уже в 1904 году Дж. Томсон, открывший электрон, создал первую модель атома — в положительно заряженном «тесте» двигались «изюминки» — электроны. Томсон впервые предположил, что химические свойства элементов определяются электронами, входящими в состав атома. Послойное расположение электронов может привести к периодической зависимости свойств от атомной массы, если с массой атома увеличивается и число электронов в нем. Хотя такая модель атома оказалась неправильной, идея электронных слоев вошла в последующую правильную теорию.

В 1911 году Э. Резерфорд открыл атомное ядро. Он показал, что внутри атома сосредоточено маленькое массивное положительно заряженное ядро, вокруг которого движутся легкие отрицательно заряженные электроны. Это открытие было сделано на основе изучения рассеяния α-частиц (частиц, появляющихся в результате радиоактивного распада). Исследование результатов рассеяния показало, что заряд ядра Z и, следовательно, число электронов в атоме примерно вдвое меньше атомной массы A элемента. К тому же выводу (о числе электронов в атоме) еще в 1906 году пришел английский физик Ч. Баркла, исходя из рассеяния рентгеновских лучей в веществе.

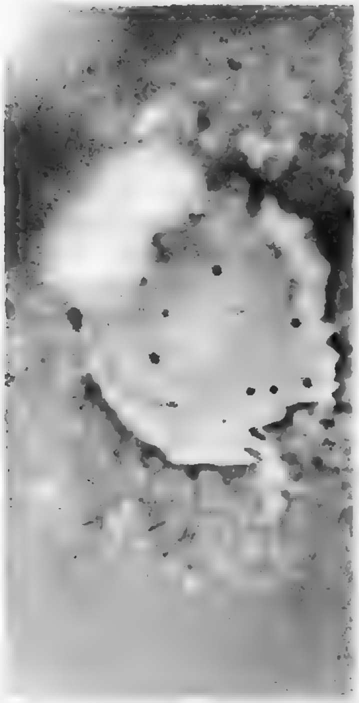
События развертываются стремительно. В 1913 году Н. Бор публикует свою знаменитую работу «О строении атомов и молекул», в которой он впервые ввел понятие о стационарных (устойчивых) состояниях электронов в атомах. При переходе с одной стационарной орбиты (с большей энергией) на другую (с меньшей энергией) испускается квант света, энергия E которого равна разности энергий состояний электрона, частота света равна $\nu = E/h$ (h — постоянная Планка). Теория Бора блестяще объяснила спектр излучения атома водорода и помогла подойти к объяснению спектров других элементов.

Из теории Бора, в частности, следовало, что энергия связи электрона, движущегося вблизи ядра с зарядом Z, пропорциональна Z^2. Следовательно, если электрон переходит с какой-нибудь далекой внешней орбиты на внутреннюю, близкую к ядру, то энергия кванта света должна быть примерно пропорциональна Z^2. В том же 1913 году Г. Мозли, ученик Резерфорда, показал, что частота рентгеновского излучения, возникающего при переходе атомных электронов на самые близкие к ядрам орбиты, пропорциональна числу $(N-1)^2$, где N — номер данного элемента в таблице Менделеева. Отсюда следовало, что заряд ядра (в единицах заряда электрона) совпадает с номером элемента.

К этому времени было окончательно установлено существование изотопов — атомов, отличающихся по массе, но имеющих один и тот же заряд ядра. Химически эти атомы абсолютно идентичны, так что изотопы — это разновидности одного и того же элемента, и они должны быть помещены в одну клетку таблицы Менделеева. Это было завершающим доказательством того, что свойства элементов периодически зависят от заряда ядра. Однако причины такой периодичности были неясны.

Первое качественное объяснение периодической зависимости химических свойств элементов от заряда атомного ядра дал в 1921 году Н. Бор. Заряд ядра (в единицах заряда электрона) равен числу электронов в атоме. Электроны, образующие электронную оболочку атома, размещаются вокруг ядра слоями. В каждом слое может находиться определенное число электронов. По мере увеличения заряда ядра электроны заполняют наиболее далекий от ядра слой. При этом внутренние слои остаются неизменными. С накоплением электронов в наружном слое связано плавное изменение химических свойств элементов в периодах. С появлением нового электронного слоя происходит резкое изменение химических свойств — начинается новый период элементов.

Закономерности заполнения электронных слоев в элементах, предложенные Бором, удалось вывести строго только на основе законов квантовой



На фото слева почти в натуральном масштабе показана значительная часть мировых запасов элемента прометий ($_{61}Pm$).

На верхнем фото — специальное устройство, позволившее отделить атомы менделевия ($_{101}Md$), которые возникали при бомбардировке эйнштейния. На фотографии показано, как вынимается фольга, на которой «осаждались» атомы менделевия.

Этот образец — существенная часть мировых ресурсов технеция ($_{43}Tc$); следует учесть, что изображение увеличено по сравнению с реальными размерами почти втрое.

механики, созданной в 1925—27 годах. Математический аппарат квантовой механики позволяет рассчитать структуру различных атомов.

Так в конце двадцатых годов XX века периодическая система элементов получила окончательное физическое объяснение. Исполнилась мечта Д. И. Менделеева о том, что «причина периодической законности будет открыта и понята».

К тридцатым годам периодическая таблица содержала 88 элементов и в ней было 4 незанятые клеточки — с номерами 43, 61, 85 и 87. Соответствующих элементов практически нет в природе — их атомные ядра нестабильны. Миллиарды лет назад, в период формирования Земли, они должны были существовать, но с течением времени их земные запасы исчезли в результате радиоактивного распада. Три из этих четырех элементов — технеций (№ 43), прометий (№ 61) и астат (№ 85) — были получены искусственным путем, а четвертый — франций (№ 87) — был открыт при естественном α-распаде ядер актиния. С открытием этих элементов периодическая таблица заполнилась вплоть до урана (№ 92).

Активные поиски элементов, стоящих за ураном,— трансуранов — начались после открытия в 1938 году деления ядер урана. В 1940—41 годах были открыты нептуний $_{93}$Np и плутоний $_{94}$Pu. Следующие же трансурановые элементы, хотя они несомненно получались в результате соответствующих ядерных реакций (например, $^{239}_{94}\mathrm{Pu}+^{4}_{2}\mathrm{He}\to ^{242}_{96}\mathrm{Cm}+^{1}_{0}n$), никак не удавалось выделить химически. Как стало ясно в дальнейшем, их химические свойства прогнозировались неверно. Лишь после того, как Г. Сиборг, известный радиохимик, получивший Нобелевскую премию за открытие трансурановых элементов, предположил, что трансураны химически подобны редкоземельным элементам, удалось выделить четыре новых трансурановых элемента — с № 95 по № 98.

Завершающие первую сотню элементов эйнштейний (№ 99) и фермий (№ 100) были обнаружены в продуктах первого термоядерного взрыва в 1952 году. Впоследствие эти элементы научились получать в мощных нейтронных потоках ядерного реактора.

Чем дальше ученые продвигались по таблице элементов, тем труднее приходилось и при синтезе, и при обнаружении новых трансуранов. В 1955 году Г. Сиборг и его коллеги, накопив несколько миллиардов атомов эйнштейния, подвергли их бомбардировке ускоренными в циклотроне ядрами гелия:

$$^{253}_{99}\mathrm{Es}+^{4}_{2}\mathrm{He}\to ^{256}_{101}\mathrm{Md}+^{1}_{0}n.$$

Вся операция по разделению и опознанию атомов нового элемента № 101 должна была занимать не более получаса — времени жизни этих атомов. Так в начале 1955 года были получены первые 17 (!) атомов нового элемента, который авторы открытия предложили назвать менделевием «в честь великого русского химика Дмитрия Менделеева, который первый использовал периодическую систему элементов для предсказания химических свойств еще не открытых элементов, то есть провозгласил принцип, послуживший ключом к открытию последних семи трансурановых элементов».

В 1964 году в Дубне под руководством академика Г. Н. Флерова был получен новый элемент № 104. Авторы открытия предложили назвать его курчатовием. Атомы курчатовия живут всего 0,3 с, но тем не менее они были опознаны и были выяснены их химические свойства.

Сейчас уже твердо установлены 105 элементов таблицы Менделеева. Времена жизни тяжелых элементов очень ма-

Скандий $_{21}\mathrm{Sc}$ (экабор Eb)

Предсказано Д. И. Менделеевым	В действительности
Относительная а. м. 44	Относительная а. м. 44,9559
Окись экабора $\mathrm{Eb_2O_3}$	Окись скандия $\mathrm{Sc_2O_3}$
Плотность окиси 3,5 г/см^3	Плотность окиси 3,864 г/см^3
Гидрат $\mathrm{Eb(OH)_3}$ не растворим в щелочах	$\mathrm{Sc(OH)_3}$ не растворим в щелочах
Сернокислая соль $\mathrm{Eb_2(SO_4)_3}$ трудно растворима	$\mathrm{Sc_2(SO_4)_3\cdot 6H_2O}$ трудно растворима

Галлий $_{31}\mathrm{Ga}$ (экаалюминий Ea)

Предсказано Д. И. Менделеевым	В действительности
Относительная а. м. 68	Относительная а. м. 69,72
Должен быть низкоплавкий	Температура плавления 29,8 °С
Плотность ~5,9 г/см^3	Плотность 5,904 г/см^3
Не должен окисляться в воздухе	Слегка окисляется только при красном калении
Должен разлагать воду при краснокалильном жаре	Разлагает воду при высокой температуре
Формулы соединений: $\mathrm{EaCl_3}$, $\mathrm{Ea_2O_3}$, $\mathrm{Ea_2(SO_4)_3}$	Формулы соединений: $\mathrm{CaCl_3}$, $\mathrm{Ga_2O_3}$, $\mathrm{Ga_2(SO_4)_3}$
Окись $\mathrm{Ea_2O_3}$ должна легко восстанавливаться и давать металл более летучий, чем Al; поэтому можно ожидать, что Ea будет открыт путем спектрального анализа.	Ga восстанавливается из окиси прокаливанием в токе водорода; открыт при помощи спектрального анализа.

Германий $_{32}\mathrm{Ge}$ (экасилиций Es)

Предсказано Д. И. Менделеевым	В действительности
Относительная а. м. 72	Относительная а. м. 72,59
Плотность 5,5 г/см^3	Плотность 5,327 г/см^3
Высшая окись $\mathrm{EsO_2}$	Высшая окись $\mathrm{GeO_2}$
Хлористое соединение $\mathrm{EsCl_4}$ жидк.	Хлористое соединение $\mathrm{GeCl_4}$ жидк.
Точка кипения $\mathrm{EsCl_4}$ ~90 °С	$\mathrm{GeCl_4}$ кипит при 85 °С
Металлоорганическое соединение $\mathrm{Es(C_2H_5)_4}$	Металлоорганическое соединение $\mathrm{Ge(C_2H_5)_4}$

лы из-за спонтанного деления тяжелых ядер. Однако есть теоретические предположения, что ядра элементов с зарядами 114 и 126 могут оказаться достаточно стабильными, так что, может быть, мы с вами еще станем свидетелями нового расширения периодической таблицы элементов, которая через 115 лет после открытия продолжает расти и вглубь, и вширь — как живая и неотъемлемая часть великого здания науки.

Уголок коллекционера

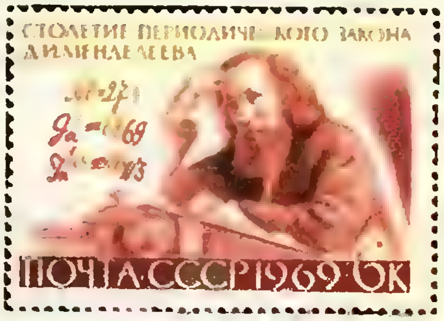
Марки, посвященные Д. И. Менделееву

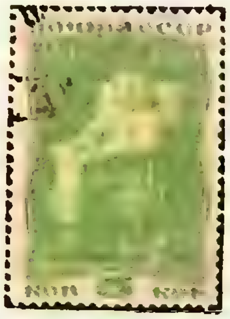
Советская филателия неоднократно посвящала различные знаки почтовой оплаты выдающемуся русскому ученому Дмитрию Ивановичу Менделееву. Первые четыре марки были выпущены в 1934 году, к столетию со дня рождения Д. И. Менделеева. На одной из них изображен памятник великому ученому, установленный в 1932 году в Ленинграде. Эта марка приведена в нашей подборке.

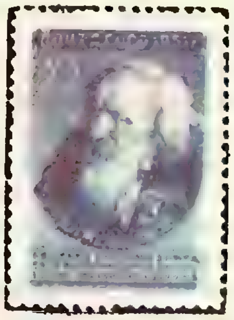
В августе 1951 года вышла серия из шестнадцати марок, посвященная выдающимся русским ученым. Среди них мы видим синюю марку с портретом Д. И. Менделеева. Следующая марка с его портретом на фоне здания Ленинградского университета была выпущена в 1957 году к пятидесятилетию со дня смерти ученого. В 1969 году, к столетию периодической системы, вышла новая марка с портретом Менделеева и почтовый блок с факсимиле одного из первых вариантов периодической системы.

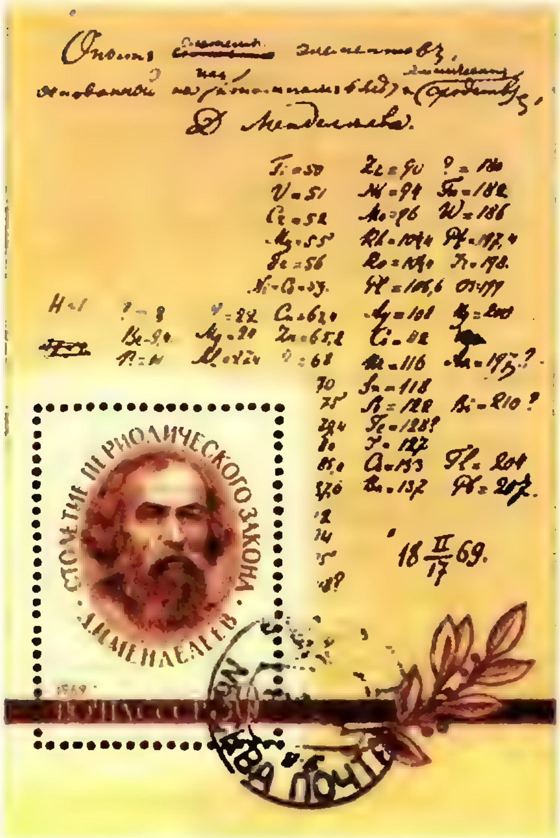
В нашу подборку включена также марка Польской народной республики, посвященная Д. И. Менделееву.

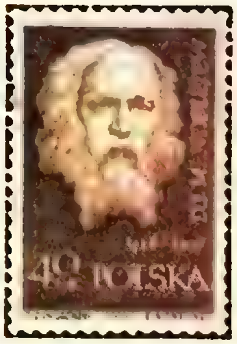
В. Рудов

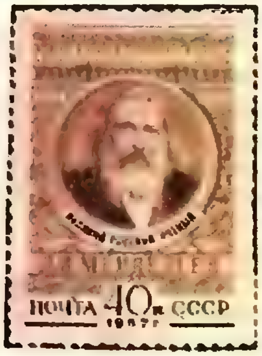

СТОЛЕТИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ЗАКОНА
Д.И.МЕНДЕЛЕЕВА
ПОЧТА СССР 1969 6К






Опыт системы элементов,
основанной на их атомном весе и химическом сходстве.
Д. Менделеева.
18 II/17 69.
СТОЛЕТИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ЗАКОНА
Д.И.МЕНДЕЛЕЕВ
ПОЧТА СССР




Д.И.МЕНДЕЛЕЕВ
ПОЧТА 40к СССР
1957

Человек, ЭВМ и шахматный эндшпиль

Кандидат физико-математических наук
Э. А. КОМИССАРЧИК,
кандидат физико-математических наук
А. Л. ФУТЕР

Машина играет в шахматы... Этот удивительный факт становится для современных людей привычным. А впервые весть об искусственном шахматисте пронеслась еще в конце XVIII столетия. Венгерский изобретатель и механик Вольфганг Кемпелен сконструировал аппарат, который в течение многих лет обыгрывал сильнейших шахматистов Европы. Однако секрет этого «игрока в шахматы» заключался в остроумной системе зеркал, позволявшей внутри аппарата скрывать опытного шахматиста *).

Век спустя, на исходе XIX столетия, испанский инженер Торрез-и-Кеввадо сконструировал первую машину, которая играла в шахматы «по-настоящему», без обмана. Правда, машина Торреза разыгрывала не любые позиции. Она умела лишь королем и ладьей ставить мат одинокому королю противника. Да и делала она это весьма неторопливо, используя до 62 ходов, в то время как при оптимальной игре достаточно 16-ти.

В середине нашего века появились первые ЭВМ, и, вслед за ними, первые электронные «шахматисты» — программы для игры в шахматы. Шахматные программы стали соревноваться с «живыми» шахматистами (поначалу без особого успеха), играть между собой в матчах и в турнирах, разыгрывать мировое первенство. Первым чемпионом мира среди шахматных программ стала советская программа «Каисса» в 1974 г. в Стокгольме**).

В последние годы развитие микропроцессоров привело к коммерческому освоению игральных шахматных автоматов. Это небольшие пластмассовые коробочки со встроенной доской и фигурами, как у дорожных шахмат, с простой системой сигнализации ходов, работающие на батарейках (см. фото на с. 10). Играют они пока слабенько, на уровне третьего или второго разряда; это, впрочем, позволяет им уверенно побеждать начинающих живых шахматистов. Бывают и более серьезные специализированные шахматные машины. Так, «Belle» из США, чемпионка мира среди шахматных программ в 1980 г., не просто программа, а ЭВМ, специально созданная для игры в шахматы, по мощности не уступающая многим ЭВМ четвертого поколения, снабженная соответствующей программой, которая продолжает совершенствоваться.

Локальный принцип

Современные шахматные программы нацелены, в основном, на игру в середине партии — миттельшпиле. Здесь лучшие из них весьма квалифицированны — играют на уровне мастера спорта по шахматам.

В дебюте электронные игроки научились использовать человеческий опыт — для шахматных программ подготовлены специальные дебютные справочники. А как обстоит дело с эндшпилем? Ответ неутешителен.

Некоторые эндшпили программа может разыграть в целом безошибочно. Например, поставить мат при преимуществе в ферзя или ладью. Что же касается эндшпилей с незначительным материальным перевесом одной из сторон, то здесь миттельшпильные программы ведут себя довольно беспомощно, порой делая ошибки, которые заставили бы покраснеть второразрядника.

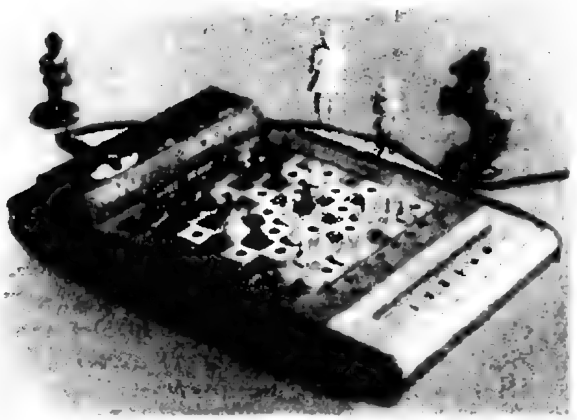
В чем же дело? Почему программа, хорошо играющая в миттельшпиле, играет слабее заурядного живого шахматиста в эндшпиле?

Дело в том, что миттельшпильные программы основаны на так называемом *локальном принципе*. Это значит, что для выбора хода в произвольной позиции рассматриваются позиции, получаемые из нее несколькими ходами своих и чужих фигур. Для оценки силы позиции вычисляется специальная функция, учитывающая как материальные, так и позиционные факторы: материальные силы обеих сторон, защи-

---

*) Одно из первых разоблачений обмана было опубликовано американским писателем Эдгаром По.

**) Об этом чемпионате подробно написано в «Кванте», 1974, №№ 11, 12; о последнем — см. «Квант», 1984, № 4, 3-я с. обложки.



Электронный шахматный автомат

щенность короля, открытые линии, пешечную структуру и т. д.

Силу программы определяет не только выбор этой функции, но и «глубина перебора», то есть количество ходов, на которые удается «заглянуть» вперед. Обычно шахматные программисты для точности употребляют здесь термин «полуход», который означает ход одной из сторон. Так вот, лучшие программы сейчас могут просмотреть и учесть позиции, отстоящие от исходной на 7—9 полуходов *).

При этом и машина, и мастер спорта, и гроссмейстер выбирают ход, рассмотрев варианты не до конца (мата), а лишь до некоторой глубины. Как показывает опыт, локальный принцип при игре ЭВМ в миттельшпиле вполне удовлетворителен.

Что же касается эндшпиля, то глубина просмотра среднего шахматиста значительно больше, чем у самой мощной ЭВМ. Шахматист на основании опыта и общих принципов сразу отбрасывает заведомо бессмысленные продолжения; это позволяет ему продвинуться в своем анализе значительно дальше, чем 7—9 полуходов. Машина же не умеет пока отбрасывать варианты и перебирает все подряд, пока не исчерпает своих ресурсов.

Итак, метод прямого перебора вариантов, применяемый шахматными программами, играющими по локальному принципу, мало эффективен в эндшпиле. Нельзя ли научить ЭВМ играть эндшпиль иначе? Для простых эндшпилей известны правила «поведения», которыми можно оснастить программу. Например, чтобы королем и ладьей «заматовать» одинокого короля, нужно теснить его к краю доски. А чтобы разыгрывать эндшпиль «король и пешка против короля», практически достаточно давно известных шахматистам правил квадрата и оппозиции.

Однако в более сложных эндшпилях аналогичных правил шахматисты пока не могут сформулировать.

Метод обратных волн

В 1912 г. на Пятом Всемирном конгрессе математиков известный специалист по теории множеств Эрнст Цермело прочитал доклад с необычным тогда названием «О применении теории множеств к теории шахматной игры». Он показал, что *все шахматные позиции можно объективно разделить на выигрышные за белых, выигрышные за черных и ничейные; кроме того, в каждой позиции указать лучший ход.*

Как же это можно сделать? Для этого отвлечемся от шахмат и поговорим о ... городах и дорогах.

Пусть в стране Z-ландии имеется сеть дорог, соединяющих между собой города. В каждом городе стоит застава, проезжая через которую путешественник платит дорожную пошлину величиной в один гульден. В нескольких городах $Z_1, Z_2, ..., Z_k$ проводятся ярмарки. Требуется указать для каждого города A путь, ведущий в какой-либо из ярмарочных городов, при котором придется заплатить как можно меньше.

Эту задачу можно решить следующим образом. Возьмем карту Z-ландии (рис. 1) и пометим город A числом 0. Теперь рассмотрим соседей города A, то есть города, в которые можно проехать из A, минуя все остальные города (здесь это города B и D). Соседей города A пометим числом 1. Теперь рассмотрим соседей этих соседей и пометим числом 2 те из них, которые еще не помечены. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не встретится один из городов $Z_1, ..., Z_k$. Тем самым будет найден искомый кратчайший путь, притом первый встреченный ярмарочный город будет помечен числом, равным наименьшей пошлине, которая требуется, чтобы в него попасть из A. Тот же процесс можно применить для города B и т. д.

---

*) Поэтому запутать такую машину, как «Belle», в тактических осложнениях в миттельшпиле удается не всякому мастеру. Например, один из сильнейших специалистов по игре с машинами, шотландский мастер Д. Леви, выигрывает за счет спокойной композиционной игры, упрощая позицию, но постепенно наращивая стратегическое преимущество.

Недостаток метода состоит в том, что нумерацию для каждого города нужно вести заново, в сущности, повторяя одни и те же пути.

Чтобы избежать многократного рассмотрения одних и тех же дорог, проведем аналогичный процесс нумерации, но только двигаться будем в противоположном направлении — от ярмарочных городов к остальным. То есть ярмарки пометим числом 0, их соседей — числом 1 и т. д. (В качестве упражнения сделайте это для карты с рисунка 1.) Таким образом, мы помечаем города, двигаясь расширяющимися волнами. А поскольку движение происходит от ярмарочных городов к исходным, такой метод естественно назвать *методом обратных волн*.

Здесь уместно привести анекдот о двух французах, которые решили выяснить, являются ли они прямыми потомками Карла Великого по мужской линии. Метрические книги у них были. Один из французов начал с Карла Великого, взял его многочисленных сыновей, затем их сыновей и т. д. Через час он понял, что даже если ему будет помогать все население Франции, то на решение этой задачи потребуются годы. Другой же француз начал со своего отца, затем нашел его отца и через час благополучно добрался до Карла Великого. Таким образом, некоторые задачи выгоднее решать с конца.

Вернемся вновь в Z-ландию. Для любого множества M городов, обозначим через $\bar{M}$ множество его соседей. Определим *множество i-го ранга R_i* как совокупность городов, помеченных числом i (при применении метода обратных волн). В частности, ярмарочные города составят множество R_0. Допустим, что уже построены множества $R_0, R_1, \ldots, R_i$. Множество городов, еще не имеющих ранга, обозначим V_i. Тогда, согласно методу обратных волн, множество очередного ранга R_{i+1} составят те и только те города из V_i, которые имеют соседей в R_i. Поэтому множества R_i городов i-го ранга можно вычислять по следующим рекуррентным формулам, для $i \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= V_i \cap \bar{R}_i, \\ V_{i+1} &= V_i \setminus R_{i+1}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $M \cap N$ означает пересечение множеств M и N, $M \setminus N$ — разность этих множеств.

Аналог метода обратных волн мы будем применять и в игровом случае для нахождения лучшего хода из позиции. Естественно, метод усложняется, поскольку противники стремятся к противоположным целям.

Граф игры

Многие игры, такие, например, как крестики-нолики, шахматы, шашки, го и другие также можно изобразить графом. Каждую позицию игры представим точкой (*вершиной графа*). Каждый ход из одной позиции в другую изобразим стрелкой (*дугой графа*) между соответствующими вершинами. Такая совокупность дуг и вершин называется *графом игры*. На рисунке 2 представлен граф предельно простой игры: крестики-нолики на доске 1×3 (выигрывает тот, кто поставит 2 крестика или 2 нолика подряд).

В дальнейшем будем рассматривать только граф шахматной игры. Вершины этого графа — шахматные позиции (понимаемые не только как полученные по правилам расположения фигур, но учитывающие очередность хода*)), а его дуги — шахматные ходы.

Теперь давайте подумаем, как для вершин графа игры определить понятие ранга. Хотелось бы, чтобы определение

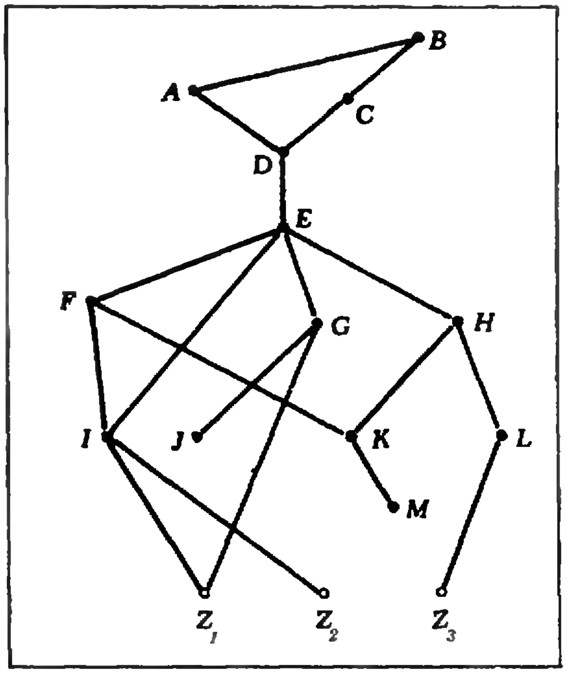


Рис. 1.

---

*) А также, когда это существенно (например, для взятия пешки «на проходе»), и предыдущий ход.

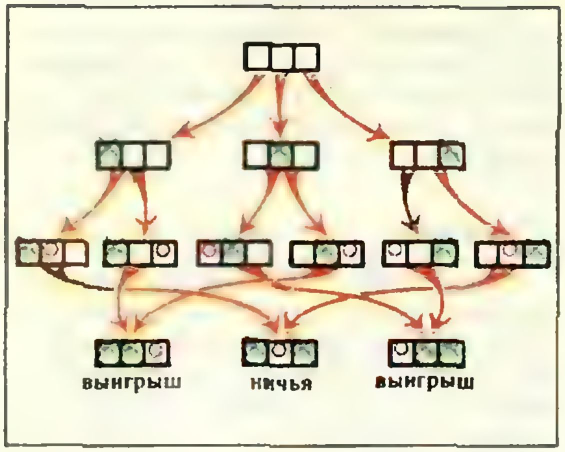


Рис. 2.

ранга соответствовало естественному представлению о минимальном числе ходов до целевых вершин. Здесь *целевыми* мы называем позиции, в которых выигрыш одной из сторон бесспорен. В *шахматах это позиции, в которых уже* стоит мат. Таким позициям в графе игры соответствуют тупиковые вершины, то есть вершины, из которых не выходит ни одна стрелка.

Как и в ненгровом случае, для определения ранга воспользуемся рекуррентным построением. Обозначим через $Б$ множество всех позиций с ходом белых, через $Ч$ — с ходом черных (кроме патовых, которые мы пока рассматривать не будем). В множестве $Ч$ выделим целевые (для белых), то есть те, где черным уже стоит мат; они образуют множество нулевого ранга, которое мы обозначим $Ч'_0$. Через $Б'_1$ обозначим множество всех позиций, где белые могут одним ходом перейти в $Ч'_0$ (поставить мат). Через $Ч'_1$ обозначим множество всех позиций из $Ч \setminus Ч'_0$, где любой ход черных ведет в $Б'_1$. Через $Б'_2$ обозначим множество позиций из $Б \setminus Б'_1$, для которых существует ход $Ч'_1$ (шахматисты их называют «двуходовками»). Через $Ч'_2$ обозначим те позиции из $Ч \setminus (Ч'_0 \cup Ч'_1)$, при которых любой ход черных ведет в $Б'_1 \cup Б'_2$ и т. д. (см. рис. 3).

Если уже определены $Ч'_0, Ч'_1, \ldots, Ч'_n$ и $Б'_1, Б'_2, \ldots, Б'_n$, то $Б'_{n+1}$ определяется как множество всех позиций из $Б \setminus (Б'_1 \cup Б'_2 \cup \ldots \cup Б'_n)$, для которых существует ход в $Ч'_n$, а $Ч'_{n+1}$ определяется как множество всех позиций из $Ч \setminus (Ч'_1 \cup Ч'_2 \cup \ldots \cup Ч'_n)$, для которых любой ход ведет в $Б'_1 \cup Б'_2 \cup \ldots \cup Б'_n$. Таким образом, $Б'_n$ — это множество всех позиций, где белые могут поставить мат в n ходов или меньше.

Поскольку множества различных рангов не пересекаются, а число шахматных позиций конечно, описанный процесс на каком-то шаге N оборвется.

Таким образом, мы распределили позиции, выигрышные для белых, по уровням (рангам):

$$Ч'_0 \leftarrow Б'_1 \leftarrow Ч'_1 \leftarrow Б'_2 \leftarrow Ч'_2 \leftarrow \ldots \qquad (2)$$

Назовем *оптимальным* ход из $Б'_{k+1}$ в $Ч'_k$ и из $Ч'_k$ в $Б'_{k+1}$. Оптимальный ход в выигранных для белых позициях ведет к мату кратчайшим образом, а в проигрышных для черных позволяет продержаться до мата как можно дольше.

Задача 1. *Найдите рекуррентные формулы, описывающие процесс ранжирования графа игры.*

Процесс ранжирования мы рассмотрели с точки зрения белых. Аналогичные построения с точки зрения черных позволяют распределить по рангам позиции, выигранные для черных:

$$Б''_0 \leftarrow Ч''_1 \leftarrow Б''_1 \leftarrow Ч''_2 \leftarrow Б''_2 \leftarrow \ldots \qquad (3)$$

и определить оптимальные ходы в этих позициях.

Остальные позиции (не *вошедшие* в (2) или (3), а также матовые) являются **ничейными**. Для них оптимальным называется любой ход, не упускающий ничью.

Таким образом, мы доказали сформу*лированную выше теорему Цермело.* И что же получилось? Теперь над ходом думать не надо?! Достаточно выписать из любой позиции все ходы и выбрать тот, который ведет на самый «выгодный» уровень, то есть оптимальный ход. *Так можно поступить и в начальной*

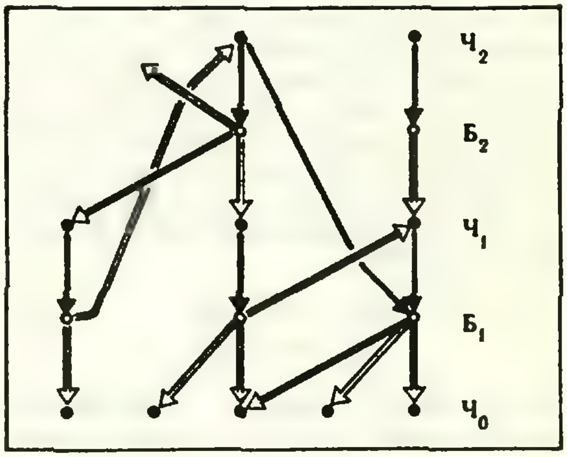


Рис. 3.

шахматной позиции и тогда, в частности, ответить на вопрос, выигрывают ли в ней белые.

Вы, наверное, уже догадались, почему это до сих пор не сделано. Описанное построение возможно лишь с точки зрения математической абстракции. Реально выполнить его нельзя из-за огромного числа всех шахматных позиций. Доказано, что в каждой позиции существует оптимальный ход. Однако не известен короткий способ (например, формула) для его нахождения.

Но нельзя ли практически проделать это, разумеется, не для всех позиций, а лишь для части — например, для некоторых эндшпилей?

Малофигурные эндшпили

Пользуясь методом обратных волн, авторам удалось научить ЭВМ играть в эндшпиле «король, ферзь и пешка против короля и ферзя», (КФП—КФ), при условии, что белая пешка стоит на поле g7 и «король, ладья и пешка против короля и ладьи» (КЛП—КЛ) *) с любым положением пешки. Эти эндшпили машина играет не просто лучше человека, а делает в каждой позиции оптимальный ход. Таким образом, малофигурные эндшпили поддаются точному анализу на ЭВМ.

Однако такой анализ реализовать совсем не просто, потому что его трудоемкость находится где-то на пределе возможностей современных ЭВМ. Так, в эндшпиле КЛП—КЛ необходимо рассмотреть около миллиарда позиций. А если на запись каждой позиции потратить всего лишь несколько «бит» (символов 0 или 1 в машинной памяти), то множество позиций займет всю память машины (и «оперативную», и «внешнюю»). Поэтому для машинного анализа малофигурных эндшпилей пришлось применить ряд специальных приемов, направленных на экономное использование ресурсов ЭВМ. Мы лишь бегло остановимся на одном из этих приемов (*декомпозиции*), на примере эндшпиля КЛП—КЛ.

Вспомним, что задача машины — ранжирование графа Δ всех позиций, возникающих при разыгрывании эндшпиля КЛП—КЛ. Разумеется, число позиций в Δ больше, чем число позиций КЛП—КЛ (например, обмен ладей переводит нас в эндшпиль КП—К, проход пешки в ферзи дает КФЛ—КЛ и т. п.), но это число значительно меньше, чем позиций в графе Г всей шахматной игры. Более того, сам граф Δ может быть разбит на части (это разбиение показано на рисунке 4). Суть метода декомпозиции состоит в том, чтобы эти части ранжировать по отдельности. Этот прием приводит к цели потому, что связи между частями не слишком сложны: в частности, они не образуют ориентированных циклов*) (см. рис. 4). Такой граф называется *ациклическим*.

Задача 2. Докажите, что вершины ациклического графа можно занумеровать так, что любая дуга будет вести из вершины с бо́льшим номером в вершину с меньшим номером.

Итак, исследование графа Δ свелось к изучению серии эндшпилей; однако некоторые из них все еще велики.

---

*) Последняя работа была проделана большим коллективом под руководством В Л Арлазарова

*) Это значит, что нельзя выйти из какой-либо вершины и, двигаясь по направлению стрелок, вернуться в нее же

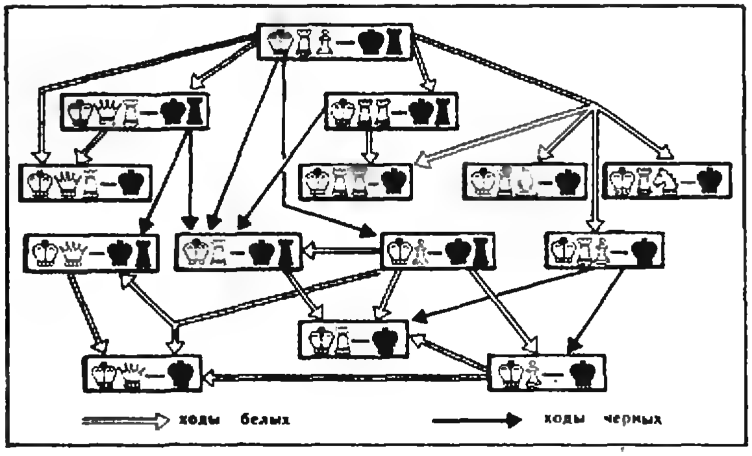


Схема эндшпилей, возникающих из позиций типа КПЛ — КЛ при изменений состава фигур (взятием или превращением пешки). Для наглядности опущена часть эндшпилей, не влияющих на исследование основного эндшпиля КПЛ — КЛ.

Рис. 4.

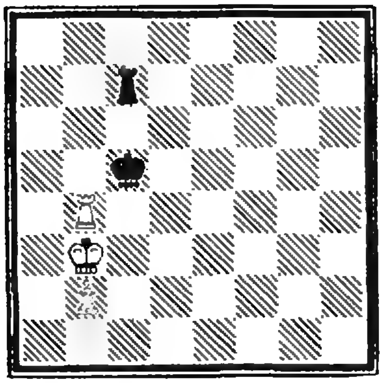


Рис. 5.

В случае пешечного эндшпиля, задачу его анализа удается уменьшить, проведя декомпозицию уже не по составу фигур, а по различным положениям пешек. Это можно сделать потому, что пешки не ходят назад и не переходят с одной вертикали на другую без взятий. Декомпозиция оказалась решающим приемом для размещения эндшпиля КЛП—КЛ во внешней памяти ЭВМ.

Недостаток места не позволяет нам рассказать подробнее о других приемах — использование симметрии, метод «групповой обработки» и др. Эти приемы дали возможность удовлетворить ограничения как по объему имеющейся оперативной памяти ЭВМ так и во времени счета, что позволило довести анализ малофигурных эндшпилей до конца.

Машина разыгрывает эндшпиль

Как же все это выглядит на практике? Имеются два партнера, делающие ходы поочередно, скажем, в эндшпиле КЛП—КЛ. Но в нашем случае один из партнеров — человек, а другой — ЭВМ. В результате процесса ранжирования позиций, проведенного раз и навсегда, в памяти ЭВМ хранится «шпаргалка» — список всех позиций с указанием ранга. Сидя за пультом дисплея, человек набирает позицию и сообщает свой ход. В ответ машина, пользуясь «шпаргалкой», находит ранг получившейся позиции и просматривает все ходы из нее, пока не натыкается на оптимальный ход, который и высвечивает на экране дисплея.

Задача 3 (для тех, у кого есть много много времени). В позиции с рисунка 5 белые начинают и выигрывают.

Эта позиция замечательна тем, что длина оптимального пути от нее до превращения пешки рекордна — 60 ходов! Цепочку ходов из нее мы получили, заставив машину играть за обе стороны.

И что же дальше?

Итак, машину научили разыгрывать эндшпиль КЛП—КЛ, причем не только идеально правильно, но и весьма быстро, затрачивая на каждый ход 10—15 секунд (сравните с турнирными правилами — 2 часа на 40 ходов).

Аналогично можно научить ЭВМ играть оптимально и в других пятифигурных эндшпилях. С использованием новых идей, улучшающих алгоритм анализа эндшпиля, а также более мощных машин, видимо, удастся сделать доступными для исследования 6—7 фигурные эндшпили. В то же время миттельшпильные шахматные программы, о которых мы уже рассказывали, даже в многофигурных эндшпилях (10—12 фигур) играют неважно.

Как заполнить эту лакуну, пока не известно. Быть может, удастся создать достаточно просто формулируемые правила поведения в эндшпиле, рекомендующие пусть и не оптимальные, а близкие к оптимальным ходы. Такие правила можно разрабатывать, исследуя эндшпили, полный анализ которых уже выполнен на ЭВМ. Эти правила оказались бы весьма ценными и для шахматистов, поскольку пользоваться ими удобнее, чем огромными справочными массивами, хранящимися в памяти машины.

Две задачи о числах Фибоначчи

Докажите следующее свойство чисел Фибоначчи (см. с. 17)

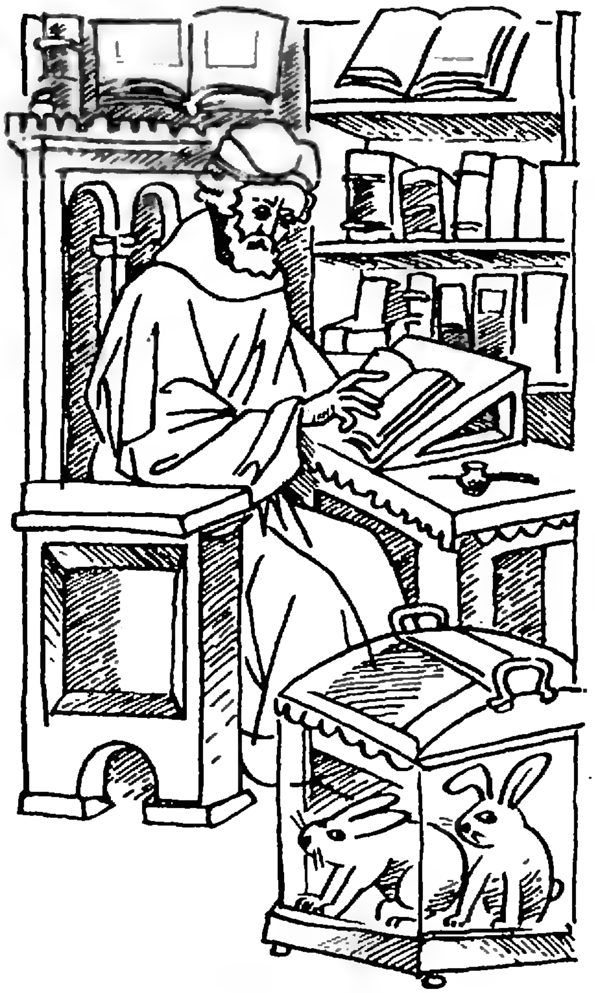
1. *Произведение и частное двух любых различных, отличных от единицы, чисел Фибоначчи никогда не являются числами Фибоначчи.*

Известно, что с возрастанием номеров сами числа Фибоначчи быстро увеличиваются. Так, $f_1=1$, но $f_{50}=12586269025$ и $f_{100}=354224848179261915075$. Однако последнюю цифру любого числа найти легко. Действительно

2. *Ровно через 60 чисел последняя цифра любого числа Фибоначчи периодически повторяется.*

Докажите это.

М. И. Заикин



Итальянский купец Леонардо Фибоначчи и его кролики

Доктор физико-математических наук
И. М. ЯГЛОМ

Habent sua fata libelli, — говорили древние, — имеют свою судьбу книги. А с ними и люди, создатели этих книг. Итальянский купец Леонардо из Пизы (1180—1240), более известный под прозвищем Фибоначчи*) был, безусловно, самым значительным математиком европейского средневековья. Роль его книг в развитии математики и распространении в Европе математических знаний трудно переоценить. Однако сегодня его имя незаслуженно почти полностью забыто, и лишь одна забавная задачка, придуманная Фибоначчи, — о ней ниже — навеки внесла его имя в списки творцов математической науки.

Жизнь и научная карьера Леонарда теснейшим образом связана с развитием европейской культуры и науки. Хорошо известно, какую роль здесь сыграли итальянские города и итальянское купечество. Традиционные торговые связи с исламскими странами, находившимися тогда в периоде расцвета наук и искусств, обогощали европейскую культуру и исподволь подготавливали удивительный всплеск эпохи Возрождения. Прямых связей с Индией и Китаем еще не было, но знаменитое путешествие итальянского купца Марко Поло на восток было уже не за горами (1271—1295). Именно итальянское купечество явилось впоследствии родоначальником гуманизма, идеология и практика которого подготовили торжество научного метода и ознаменовали конец средних веков, когда мистическое озарение считалось чуть ли не основным инструментом познания мира, в тертуллианово*) «верю, ибо абсурдно» — чуть ли не научным принципом.

В век Фибоначчи Возрождение было еще далеко, — однако история даровала Италии краткий промежуток времени, который вполне можно было назвать репетицией надвигающейся эпохи Ренессанса. Этой «репетицией» руководил Фридрих II Гогенштауфен (1194—1251), император (с 1220 г.) огромной «Священной Римской Империи Германской Нации» и король (с 1197 г., то есть с трехлетнего возраста!) легкомысленного Неаполитанского (или Сицилийского) королевства, столь далекого и географически и идеологически от суровой Германии, которую терпеть не мог ее император Фридрих.

Воспитанный в традициях южной Италии, причудливо соединяющей элементы христианской культуры с сильным влиянием арабов и Востока, Фридрих II был внутренне глубоко далек от европейского христианского рыцарства, воплощением которого были его дед Фридрих Барбароса (1125—1190) или английский король Ричард

---

*) Fibonacci, или filius Bonacci — сын Боначчи; слово «bonacci» означает «добродушный».

*) Тертуллиан, Квинт Септимий Флоренс, христианский теолог и писатель (II—III век).

Львиное Сердце (1157—1199). В ряде итальянских городов он завел гаремы, что мало подходило «христианейшему» императору. К преподаванию в основанном им Неаполитанском университете, наряду с христианскими учеными, он привлек арабов и евреев. Более того, молва приписывала ему авторство атеистического памфлета «О трех обманщиках», под которыми подразумевались Моисей, Христос и Магомет.

Столь любимые его дедом рыцарские турниры, на которых сражающиеся калечили друг друга на потеху публике, Фридрих II совсем не признавал. Вместо этого он культивировал гораздо менее кровавые математические соревнования (нечно среднее между математическими олимпиадами и КВН), на которых противники обменивались не ударами мечом, а задачами.

На таких турнирах и заблистал талант Леонардо Фибоначчи. Этому способствовало хорошее образование, которое дал сыну купец Боначчи, взявший его с собой на Восток и приставивший к нему арабских учителей. Впоследствии Фибоначчи пользовался неизменным покровительством Фридриха II. Это покровительство облегчило дальнейшие торговые поездки Леонардо в северную Африку, Египет, Сирию, Византию, во время которых он глубоко ознакомился с арабской и греческой наукой. (Произведения классиков античной науки были известны тогда, главным образом, в арабских переводах.) Покровительство Фридриха II стимулировало также выпуск научных трактатов Фибоначчи: обширнейшей «Книги абака» (1202 г., переработанный и дополненный вариант, 1228 г.), «Практики геометрии» (1220 г.), «Книги квадратов» (1225 г.). По этим книгам, превосходящим по своему уровню арабские и средневековые европейские сочинения, учили математику чуть ли не до времен Декарта (XVII в.) и Эйлера (XVIII в.).

В строении всех книг Леонардо явственно сказывается их происхождение от математических турниров. Основную роль в них играют многочисленные решенные и комментированные задачи, — иногда те, которые предлагались на турнирах самим Леонардо или его основным соперником, выходцем из сицилийского купечества Иоганном Палермским, придворным философом Фридриха II. Заметим еще, что абак — это старинная счетная доска, нечто вроде русских счетов. Однако «Книга абака» посвящена не практике счета, а теоретической арифметике в широком понимании этого термина. В частности, по этой книге Европа впервые познакомилась с арабскими (точнее — индийскими) цифрами и с современной системой записи чисел. Аналогично, «Практика геометрии» посвящена не прикладной (землемерной) геометрии, а теоретической геометрии.

Для характеристики достижений Леонардо достаточно упомянуть две из решенных им задач: *найти три числа x, y и z такие, что их сумма, увеличенная как на x^2, так и на x^2+y^2 и $x^2+y^2+z^2$ была бы полным квадратом* (решение Леонардо: $x=16/5$, $y=48/5$ и $z=144/5$) и, особенно, задачу о *решении кубического уравнения* $x^3+2x^2+10x=20$. Леонардо доказывает, что корень этого уравнения не может быть выражен в квадратных радикалах (первое «доказательство невозможности» в европейской математике после античных теорем об иррациональности $\sqrt{2}$ и других чисел), а затем вычисляет корень уравнения с ошибкой, не превышающей 0,00000000003 (фантастическая точность).

Но из всех достижений Леонардо неблагодарное человечество помнит сегодня лишь следующую задачу из «Книга абака»:

> «Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течении года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения»

Ясно, что если считать первую пару кроликов новорожденными (Леонардо не делает этого предположения, что, впрочем, мало отражается на результатах, то на 2-й месяц мы будем по прежнему иметь 1 пару; на 3-й месяц — $1+1=2$; на 4-й — $2+1=3$ пары (ибо из двух имеющихся пар потомство даст лишь одна пара); на 5-й — $3+2=5$ пар (лишь две родившиеся на 3-й месяц пары дадут потомство на 5-м месяце); на 6-й месяц — $5+3=8$ пар (ибо потомство дадут только те пары, которые родились на 4-м месяце) и т. д. Таким образом, если обозначить число пар кроликов, имеющихся на n-м месяце через f_k, то $f_1=1$, $f_2=1$, $f_3=2$, $f_4=3$, $f_5=5$, $f_6=8$ и т. д., причем образование этих чисел регулируется общим законом:

$$\boxed{f_n=f_{n-1}+f_{n-2} \text{ при всех } n>2 \qquad (1)}$$

— ведь число f_n пар кроликов на n-м месяце равно числу f_{n-1} пар кроликов на предшествующем месяце плюс число вновь родившихся пар, которое совпадает с числом f_{n-2} пар кроликов, родившихся на $(n-2)$-м месяце (ибо лишь эти пары кроликов дают потомство).

Числа f_n, образующие последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ..., называются ныне *числами Фибоначчи*. Эти числа обладают многими удивительными свойствами. Перечислим некоторые из них. Их доказательства читатель может рассматривать как задачи:

1. $f_1+f_2+\ldots+f_n=f_{n+2}-1$.
2. а) $f_1+f_3+f_5+\ldots+f_{2n-1}=f_{2n}$,
   б) $f_2+f_4+f_6+\ldots+f_{2n}=f_{2n+1}-1$.
3. $f_1^2+f_2^2+\ldots+f_n^2=f_nf_{n+1}$
4. а) $f_{2n}=f_{n+1}^2-f_{n-1}^2$,
   б) $f_{3n}=f_{n+1}^3+f_n^3-f_{n-1}^3$.
5. $f_n^2=f_{n-1}f_{n+1}-(-1)^n$.
6. $f_{n+m}=f_{n-1}f_m+f_nf_{m+1}$.
7. f_n четно ⇔ делится на 3.
8. f_n делится на 7 ⇔ делится на 8.
9. f_n делится на $f_m \Leftrightarrow n$ делится на m.

Этот список можно было бы продолжить. Заинтересованный читатель найдет много других красивых тождеств (свойств чисел f_n) в популярных книгах, названных в конце статьи, в частности в замечательных брошюрах и книгах Н. Н. Воробьева. Еще два свойства, присланные в «Квант» М. И. Заикиным, можно посмотреть на с. 14 этого номера.

Реккурентное соотношение (1) позволяет без труда последовательно вычислять числа f_1, f_2, f_3, ... Но есть ли явное выражение для общего члена f_n последовательности Фибоначчи, не требующее знания предыдущих членов? Есть, притом совершенно неожиданное. Посудите сами:

$$\boxed{f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \qquad (2)}$$

Подробный разбор доказательства имеется у Воробьева, а также в брошюре А. И. Маркушевича, цитированной в списке литературы; см. также «Квант» 1982, № 1, с. 19.

Особенно возросла популярность чисел Фибоначчи в послевоенные годы, что связано с определенными изменениями в самой математике, в частности — с ростом значения комбинаторики и проблем, связанных с целыми числами. Известную роль здесь сыграло неожиданное появление чисел Фибоначчи в некоторых из недавних важных исследований, формально никак с этими числами не связанных. В первую очередь мы имеем в виду сенсационное решение молодым ленинградцем Юрием Матиясевичем так называемой *десятой проблемы Гильберта**), а также возникновение чисел Фибоначчи в некоторых из идущих от американца Ричарда Беллмана направлениях современной прикладной (оптимизационной) математики.

Где только не возникают числа Фибоначчи! У них есть красивые геометрические применения, важные приложения в биологии растений: например, в размещении на ветке листьев тех или иных пород деревьев, в строении чешуек ананаса или расположении зерен подсолнуха (явление *филотаксиса;* см. «Квант», 1979, № 5, с. 53). Задача об *оптимальной стратегии автомобилиста,* желающего найти самую выгодную для него скорость машины, то есть такую, при которой она потребляет наименьшее количество бензина на километр пройденного пути, тоже приводит к числам Фибоначчи — вот уж невозможно сразу увидеть, какое отношение эти числа имеют к такой задаче!

Всего не перечислишь. Мы назовем еще лишь разработку оптимальной стратегии в старинной китайской народной игре *цзяньшицзы,* о которой можно прочитать на с. 18 этого номера.

Список литературы

1. Воробьев Н. Н. *Числа Фибоначчи,* 1-е издание, М.—Л.: Гостехиздат, 1951; 4-е издание, М.: Наука, 1978.

2. Маркушевич А. И. *Возвратные последовательности,* М.: Наука, 1979.

3. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики* (арифметика и алгебра), М.: Наука, 1976.

4. Дынкин Е. Б., Успенский В. А. *Математические беседы,* М.—Л.: Гостехиздат, 1952.

5. Стахов А. П. *Алгоритмическая теория измерения,* М.: Знание, 1979.

---

* См. «Квант», 1971, № 11, с. 31

«Ферзя — в угол», «цзяньшицзы» и числа Фибоначчи

А. Ю. МАТУЛИС, А. Ю. САВУКИНАС

Мы хотим познакомить вас с еще одним, довольно неожиданным, применением чисел Фибоначчи, о которых рассказано в статье И. М. Яглома на с. 15—18 этого номера журнала. Мы увидим, что числа Фибоначчи помогают построить теорию древней китайской игры «цзяньшицзы» и связанной с ней игры «ферзя — в угол». Этим играм уже были посвящены статьи И. М. Яглома («Квант», 1971, № 2, с. 4) и А. Орлова («Квант», 1977, № 3, с. 41).

Здесь мы наметим несколько иной подход к решению той же задачи.

«Цзяньшицзы» и «ферзя — в угол»

Условия старинной игры «цзяньшицзы» (выбирание камней) таковы. Имеются две кучки камней (или каких-нибудь других предметов, например спичек). Двое играющих поочередно выбирают камни из этих кучек, причем за один ход можно либо взять любое число камней из одной (какой угодно) кучки, либо поровну из обеих кучек сразу. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень.

Нам требуется найти правила беспроигрышной игры.

Пусть в одной кучке a камней, во второй b камней. Поставим в соответствие паре чисел (a, b) клетку (бесконечной!) шахматной доски, изображенной на рисунке 1 и поместим в клетку (a, b) ферзя.

Легко видеть, что каждому ходу в игре «цзяньшицзы» соответствует некоторый ход ферзя: если игрок берет k камней из первой кучки, то ферзь смещается на k клеток влево; если игрок берет l камней из второй кучки — ферзь смещается на l клеток вниз; если же он берет по m камней из каждой кучки, ферзь смещается на m клеток по диагонали влево и вниз.

Итак, вместо игры «цзяньшицзы», можно рассматривать игру «ферзя — в угол» с такими правилами: на бесконечной шахматной доске стоит ферзь. Два игрока по очереди перемещают ферзя так, чтобы он приближался к угловому полю (0, 0), то есть за один ход разрешается смещать ферзя на любое число клеток либо влево, либо вниз, либо по диагонали влево и вниз. Выигрывает тот, кто приведет ферзя на поле (0, 0).

На рисунке 1 изображен ход игры, начинающейся в клетке (12, 14), где красные стрелки указывают ходы первого игрока, а синие — второго; выиграл здесь первый игрок.

Понятно, что любой партии игры в «цзяньшицзы» соответствует некоторая партия игры «ферзя — в угол», а партии игры «ферзя — в угол» — партия «цзяньшицзы». Поэтому в дальнейшем мы будем говорить только об игре «ферзя — в угол».

Проигрышные поля

На рисунке 2 изображена бесконечная шахматная доска, на которой некоторые поля помечены знаком «—». Эти поля мы будем называть также проигрышными. Нетрудно видеть, что *если один из играющих будет каждым своим ходом ставить ферзя на отмеченное поле, то он выиграет.*

В самом деле, ни из какого отмеченного поля нельзя перейти ходом ферзя на отмеченное поле. Напротив, из любого неотмеченного поля можно одним ходом перейти на отмеченное. Поэтому, поставив ферзя на отмеченное поле, вы вынуждаете вашего противника сойти с отмеченного поля. Следующим ходом вы можете снова шагнуть на отмеченное поле (более близкое к полю (0, 0) и так далее. В конце концов вы шагнете на отмеченное поле (0, 0) и выиграете.

Можно указать правило, по которому последовательно получаются отмеченные поля. Сначала отмечается поле (0, 0). На это поле можно пойти с любого поля вертикали $a=0$, горизонтали $b=0$ и диагонали $a=b$. Ближайшие нерассмотренные поля — это поля (1, 2) и (2, 1). На одно из этих полей можно пойти из любых полей вертикалей $a=1$, $a=2$, горизонталей

$b=1$ и $b=2$ и диагоналей $b-a=1$, $a-b=1$. С самих же полей (1; 2) и (2; 1) можно пойти только на неотмеченные поля. Значит, эти два поля мы должны отметить знаком «—». За этими полями следуют поля (3; 5) и (5; 3), которые мы тоже должны отметить, и так далее.

Поскольку симметричные относительно главной диагонали поля $(a;\ b)$ и $(b;\ a)$ в этой игре совершенно равноправны (это особенно понятно при формулировке игры на языке кучек камней: ведь $(a;\ b)$ и $(b;\ a)$ — это, разумеется, одно и то же положение, когда в одной кучке имеется a, а в другой b камней), мы в дальнейшем будем изучать отмеченные поля, лежащие в верхней половине доски, то есть поля, для которых $b \geqslant a$.

Положение первых из таких полей приведено в таблице; здесь n — номер проигрышного поля.

Проигрышные поля (a_n, b_n)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19
b_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31

Из описанного выше способа построения проигрышных полей следует, что на каждой вертикали, на каждой горизонтали и на каждой диагонали $b-a=n$ $(n \in Z)$ имеется единственное отмеченное поле. При этом отмеченные поля нижней половины доски симметричны отмеченным полям $(a_n;\ b_n)$. Это поля $(b_n,\ a_n)$.

Свойства чисел $(a_n;\ b_n)$

Из таблицы видно, что наши числа $(a_n,\ b_n)$ обладают следующими свойствами.

1. *Каждое натуральное число входит в проигрышные пары один и только один раз: либо в качестве a_n, либо в качестве b_n.*

Это означает, что при любом натуральном N либо на N-й горизонтали, либо на N-й вертикали есть такое поле, причем эти два случая взаимно исключают друг друга.

Учитывая теперь отмеченные поля нижней половины доски, получаемые заменой $a \to b$, а $b \to a$, мы можем утверждать, что каждая вертикаль и каждая горизонталь содержит одно и только одно отмеченное поле.

2. *Для любого натурального n имеется единственная проигрышная пара $(a_n,\ b_n)$ такая, что выполняется равенство $b_n-a_n=n$.*

Заметим, что на доске разность $b-a$ указывает расстояние от поля $(a,\ b)$ до диагонали доски, измеренное по вертикали или по горизонтали. Число n мы будем считать совпадающим с номером соответствующей диагонали доски.

Свойства 1 и 2 обеспечивают то, что с каждого неотмеченного поля можно одним ходом перейти на отмеченное, а всякий ход с отмеченного поля приводит на неотмеченное, — то есть обстоятельства, которые обеспечивают выигрыш игроку каждым своим ходом ставящему ферзя на отмеченное поле. (Если начальное положение ферзя — отмеченное, то начинающий при правильной игре второго игрока проигрывает, поэтому ему остается либо

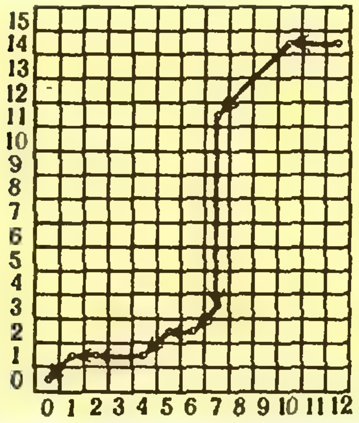


Рис. 1.

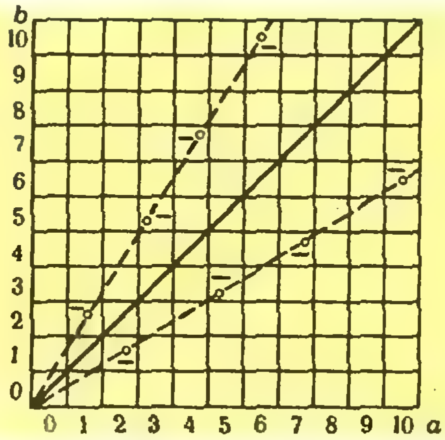


Рис. 2.

рассчитывать на ошибку противника — весьма правдоподобную, если тот не владеет правилами беспроигрышной игры, либо сразу капитулировать).

В самом деле, с отмеченного поля все ходы ведут на неотмеченные поля. Если же поле $(a,\ b)$ неотмеченное и $b-a=n>0$, то при $a>a_n$ (и, значит, $b>b_n$) можно сразу перейти на поле $(a_n,\ b_n)$ ходом по диагонали. Если же $a<a_n$ (и $b<b_n$), то либо $a=a_k$, либо $b=b_l$. В первом случае $k<n$ (ибо $a_k=a<a_n$) и $b_k-a=b_k-a_k=k<n=$ $=b-a$, и поэтому $b>b_k$; из этого следует, что ферзя можно ходом по вертикали перевести в точку $(a_k,\ b_k)$. Если же $a=b_l$ и тем более $l<n$, то $b>a=b_l>a_l$, и ферзя можно одним ходом перевести в отмеченное поле $(b_l,\ a_l)$ нижней половины доски.

Точно так же проверяется, что из каждого неотмеченного поля нижней половины доски ферзя можно одним ходом поставить на отмеченное поле.

Опишем еще одно рекуррентное правило построения последовательности $(a_n,\ b_n)$.

Пусть $a_0=0$, $b_0=0$. Пара $(a_n,\ b_n)$ определяется так: a_n — наименьшее из натуральных чисел, отсутствующих среди чисел $a_0,\ b_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots,$ $a_{n-1},\ b_{n-1}$, а $b_n=a_n+n$.

Упражнение 1. Докажите, что последовательность $(a_n,\ b_n)$ совпадает с построенной ранее последовательностью проигрышных пар.

Описанные нами способы нахождения отмеченных пар довольно трудно применять в конкретных ситуациях. Как, например, узнать, будет ли отмеченной пара чисел $(a,\ b)$, если a и b очень велики (скажем, если a и b порядка миллиона)?

Частоты чисел a_n и b_n в ряду натуральных чисел

Заранее предупреждаем читателей, что в этом разделе мы ничего не будем доказывать, а лишь ограничимся некоторыми интуитивными соображениями, которые позволят нам угадать формулы для a_n и b_n.

Пусть N — натуральное число, A_N — количество чисел a_n, не превосходящих N, а B_N — количество не превосходящих N чисел b_n.

Тогда отношения $p_N=\dfrac{A_N}{N}$, $q_N=\dfrac{B_N}{N}$ указывают долю («частоту») чисел a_n, соответственно b_n, среди всех натуральных чисел от 1 до N. Ясно, что $p_N+q_N=1$.

Выпишем ряд первых чисел p_N и q_N:

$p_1=1/1=1,\qquad q_1=0/1=0;$
$p_2=1/2=0{,}5,\qquad q_2=1/2=0{,}5;$
$p_3=2/3\approx0{,}6667,\qquad q_3=1/3\approx0{,}3333;$
$p_4=3/4=0{,}75,\qquad q_4=1/4=0{,}25;$
$p_5=3/5=0{,}6,\qquad q_5=2/5=0{,}4;$
$p_6=4/6\approx0{,}6667,\qquad q_6=2/6\approx0{,}3333;$
$p_7=4/7\approx0{,}5714,\qquad q_7=3/7\approx0{,}4286;$
$p_8=5/8\approx0{,}625,\qquad q_8=3/8=0{,}375;$
$p_9=6/9\approx0{,}6667,\qquad q_9=3/9\approx0{,}3333;$
$p_{10}=6/10=0{,}6,\qquad q_{10}=4/10=0{,}4;$
$p_{11}=7/11\approx0{,}6364,\qquad q_{11}=4/11\approx0{,}3636.$

Мы видим, что числа p_N не слишком сильно отличаются друг от друга и «группируются» около величины, близкой к 0,3—0,4. Можно рассчитывать, что с ростом N величины p_N и q_N стремятся к некоторым пределам, то есть что существуют $\lim\limits_{N\to\infty} p_N=p$ и $\lim\limits_{n\to\infty} q_N=q$, причем числа p и q выражают частоту («плотность»), с какой встречаются в натуральном ряду числа a_n и b_n соответственно.

Если частота чисел a_n в натуральном ряду равна p, то эти числа составляют «p-ю долю» всех натуральных чисел, то есть одно число a в среднем приходится на $\dfrac{1}{p}=u$ натуральных чисел. При равномерном распределении чисел a_n разность между соседними числами a_{i+1} и a_i этой последовательности должна была бы составить u, то есть числа a_n должны образовывать арифметическую прогрессию $a_1=u$, $a_2=2u$, ..., $a_n=$ $=nu$, ... с разностью $u=\dfrac{1}{p}$.

Разумеется, в точности эти равенства выполняться не могут, так как числа нашей прогрессии — не целые; однако если допустить, что распределение чисел a_n «довольно равномерно», то можно надеяться, что $a_i\approx iu$, $i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$ Здесь знак $\approx$ означает лишь, что правая часть не слишком сильно отличается от левой. Точно так же рассуждая, получим для чисел b_n приближенное равенство $b_i\approx iv$, $q_i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots,$ где $v=\dfrac{1}{q}$.

Поскольку $p+q=1$, числа $u=\dfrac{1}{p}$ и $v=\dfrac{1}{q}$ удовлетворяют условию

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=1.$$

По свойству 2, $b_n-a_n=n$. Поэтому в силу нашего допущения $b_n\approx nv$, $a_n\approx nu$. Получим $nv-nu\approx n$, то есть $v-u\approx1$.

Поэтому естественно искать числа u и v, исходя из системы $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=1$, $v-u=1$, $u>0$, $v>0$. Решая эту систему, получим

$$u=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ v=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Из равенств $a_i\approx iu$ и $b_i\approx iv$ следует, что $b_i\approx\dfrac{v}{u}\,a_i=ua_i$ (легко проверить, что $v=u^2$). Линия $b=ua$ и симметричная ей линия $b=\dfrac{1}{u}\,a$ в нижней половине доски изображены пунктиром на рисунке 2, а принадлежащие этим линиям точки $a_i=ui$ и $b_i=vi$ отмечены кружочками. Эти точки, естественно, не совпадают с левыми нижними углами проигрышных клеток доски. Однако все кружки на рисунке принадлежат отмеченным клеткам. Естественно предположить, что $a_i=[ui]$, а $b_i=[vi]$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Основная теорема

Теперь мы можем забыть все соображения, которые привели нас к выписанным выражениям для проигрышных полей (a_n, b_n), и сразу сформулировать следующую основную теорему.

Теорема 1. Пусть $u=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $v=u^2=u+1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Поле (a, b), где $b>a$, в том и только в том случае является проигрышным, если существует натуральное число n такое, что $a=[nu]$, $b=[nv]$. Если такого натурального n не существует, то позиция является выигрышной.

Доказательство. Рассмотрим последовательность точек

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ \ldots,\ (a_n, b_n),\ \ldots,$$

где $a_n=[nu]$, $b_n=[nv]$, и докажем, что для этой последовательности выполнены свойства 1 и 2 (см. с. 19). Начнем со свойства 1.

Сначала убедимся в том, что все числа $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ различны. Числа $a_i=[iu]$ различны, так как $u>1$. По той же причине $(v>1)$ различны числа $b_j=[jv]$. Предположим, что какие-то два из чисел a_i и b_j совпадают. Это значит, что $[iu]=[jv]=k$. Поэтому $iu=k+\delta$, где $0<\delta_1<1$, $jv=k+\delta_2$, где $0<\delta_2<1$. Разделив первое равенство на u, второе на v, а затем сложив полученные равенства, приходим к равенству

$$i+j=\frac{k}{u}+\frac{k}{v}+\frac{\delta_1}{u}+\frac{\delta_2}{v}=k+\frac{\delta_1}{u}+\frac{\delta_2}{v},$$

из которого следует, что

$$0<i+j-k=\frac{\delta_1}{u}+\frac{\delta_2}{v}<\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=1,$$

что невозможно, так как число $i+j-k$ — целое.

Теперь докажем, что каждое натуральное число встречается в последовательности $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$

Пусть N произвольное натуральное число. Существует ровно $\left[\frac{N}{u}\right]$ чисел $a_i=[iu]$, меньших N. (Это числа с номерами $i=1, 2, \ldots \left[\frac{N}{u}\right]$.) И ровно $\left[\frac{N}{v}\right]$ чисел $b_j=[jv]$, меньших N (числа с номерами $j=1, 2, \ldots \left[\frac{N}{v}\right]$). Всего чисел a_i и b_j, меньших N, существует $\left[\frac{N}{u}\right]+\left[\frac{N}{v}\right]$, а так как $\frac{N}{u}$ и $\frac{N}{v}$ — не целые числа, $\frac{N}{u}-1+\frac{N}{v}<\left[\frac{N}{u}\right]+\left[\frac{N}{v}\right]<\frac{N}{u}+\frac{N}{v}$, то есть

$$N-2<\left[\frac{N}{u}\right]+\left[\frac{N}{v}\right]<N.$$

Таким образом, $\left[\frac{N}{u}\right]+\left[\frac{N}{v}\right]=N-1$. Но это означает, что чисел вида a_i и b_j, меньших N, имеется в точности столько, сколько всего натуральных чисел, меньших N. Поскольку все числа a_i и b_j различны, свойство 1 последовательности $(a_1 b_1), (a_2 b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots$ доказано.

Свойство 2 доказывается без труда:

$$b_n-a_n=[vn]-[un]=$$
$$=[(u+1)n]-[vn]-[un]=[nu]+n-[un]=n.$$

Тем самым основная теорема полностью доказана.

Появляются числа Фибоначчи

Согласно основной теореме, для определения проигрышной пары с номером n надо умножить n на иррациональное число, заданное в виде бесконечной десятичной дроби. Возможно, что такое умножение вам не понравится, особенно если вы не имеете счетной машины. Как для определения проигрышных пар (a_n, b_n) обойтись только действиями над натуральными числами?

Для этой цели может послужить такое свойство проигрышных пар:

3. *Если* (a_n, b_n) *— проигрышная пара, то пары* $(b_n-1,\ a_n+b_n-1)$ *и* $(b_n+1,\ a_n+b_n+2)$ *— тоже проигрышные.*

При этом, исходя из начального поля (0, 0) или первого поля (1, 2), мы можем построить, пользуясь свойством 3, все проигрышные пары.

Наметим доказательство свойства 3.

Упражнение 2. Докажите, что для проигрышных пар (a_n, b_n) и (a_{n+1}, b_{n+1}): $2<b_{n+1}-b_n<3$, и $1<a_{n+1}-a_n<2$.

Из результатов упражнения 2 следует, что числа b_n-1 и b_n+1 не являются *бóльшими* числами проигрышных пар. По свойству 1 существуют такие k и l, что $a_k=b_n-1$, $a_l=b_n+1$. Посмотрим, чему равны k и l.

По свойству 2, номер любой пары равен разности между большим и меньшим из чисел этой пары.

С другой стороны, из свойства 1 следует, что номер любой отмеченной пары (a_k, b_k) равен разности ее меньшего числа a_k и количества всех ненулевых $b_l<a_k$. При $a_l=b_n-1$ количество чисел b_l, меньших a_l, равно $n-1$. Это значит, что $k=b_n-1-(n-1)=a_n$. Поэтому пара $(b_n-1,\ b+a_n-1)$ — отмеченная.

Упражнение 3. Докажите, что пара $(b_n+1,\ a_n+b_n+2)$ является отмеченной для всякой отмеченной пары (a_n, b_n).

Упражнение 4. Докажите, что любая отмеченная пара (a_n, b_n) может быть получена из пары (0, 0) или пары (1, 2) с помощью последовательного применения нескольких операций, описываемых свойством 3.

(Окончание см. на с. 29)

Еще один шаг на пути к абсолютному нулю

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН

Недавно японские ученые из Токийского университета установили новый рекорд в получении сверхнизких температур. Им удалось достичь температуры, превышающей абсолютный нуль лишь на 27 миллионных долей кельвина (27 мкК).

Получение столь низких температур, конечно, не является самоцелью. Продвижение к абсолютному нулю позволяет обнаружить новые физические явления, исследовать поведение необычных фаз вещества и, в конечном итоге, лучше понять природу различных физических взаимодействий.

Когда в начале века был получен жидкий гелий и появилась возможность работать с температурами порядка нескольких кельвинов, были обнаружены такие новые фундаментальные явления, как сверхпроводимость и, открытая несколько позже, сверхтекучесть.*)

Долгое время считалось, что сверхтекучестью обладает только изотоп гелия с массовым числом четыре (гелий-4). В последнее десятилетие созданы установки, на которых можно получать температуры около одной тысячной кельвина (1 мК), что позволило наблюдать сверхтекучесть другого изотопа гелия — с массовым числом три (гелий-3). Оказалось, что переход гелия-3 в сверхтекучее состояние (при температуре, близкой к 1 мК) имеет принципиально иной характер, чем возникновение (при $T \approx 2{,}2$ К) сверхтекучести в гелии-4. Это открытие ознаменовало собой появление нового направления, которое позволило существенно расширить наши представления о физике низких температур.

Теперь очередь за микрокельвиновым диапазоном температур. Что же можно ожидать от проникновения в эту новую область? В принципе возможны самые неожиданные сюрпризы. Например, ученые предполагают обнаружить сверхпроводимость ряда нормальных металлов (золота, платины); причем возможно, что эта сверхпроводимость будет носить иной характер, чем наблюдавшаяся до сих пор.

Нужно отметить, что каждый новый шаг на пути к абсолютному нулю сопряжен с огромными техническими и технологическими трудностями, поскольку требует создания новых методик охлаждения. Расскажем немного об одной из них.

Рекорд температуры, о котором мы говорили, был поставлен с последовательным применением нескольких различных методов охлаждения. На последнем этапе использовался метод ядерного размагничивания. Суть его заключается в следующем. Ядра атомов отчасти подобны маленьким магнитикам, которые из-за теплового движения ориентированы хаотически. Если включить магнитное поле, ядра-магнитики выстроятся преимущественно вдоль направления поля, то есть их тепловое движение как бы «заморозится». После выключения поля снова должна возникнуть хаотическая ориентация, что потребует поглощения тепла. Значит, при этом возможно понижение температуры.

К этому нужно добавить, что ядра с трудом забирают тепло от окружающих частиц: электронов и ионов. Поэтому ядра можно «охладить» и до значительно более низких температур — здесь рекорд достигает 50 нанокельвинов ($5 \cdot 10^{-8}$ К). Однако передать такой холод электронам пока еще не умеют, и физики вынуждены довольствоваться температурой 27 микрокельвинов.

Подробнее о физике низких температур, о самой температуре и способах ее измерения вы можете узнать, например, из книг Я. А. Смородинского «Температура» и В. С. Эдельмана «Вблизи абсолютного нуля», вышедших в Библиотечке «Квант».

---

*) О том, как был получен жидкий гелий и открыта сверхпроводимость, можно прочитать, например, в статье А. Буздина и В. Тугушева «Как создавалась физика низких температур» (Квант, 1982, № 9) (*Прим. ред.*)

Если бы Следопыт знал физику...

Кандидат физико-математических наук
Ю. М. САНДЛЕР

«Берите полегче пулю, и ваш выстрел будет точен...» «Ункас, мальчик, ты даром тратишь порох и засыпаешь его слишком много. Ружье отдает, и пуля летит плохо... Твоя пуля попала на два дюйма выше...» Эти слова принадлежат герою романа Купера охотнику Натаниэлю Бампо. Охотником он, судя по романам, был действительно замечательным. Но вот насколько точны были его советы с точки зрения физики? Действительно ли пуля полегче и не слишком много пороху повышают точность выстрела? Давайте попытаемся разобраться в этом вопросе.

Сначала полезно напомнить, что выстрел всегда сопровождается отдачей. Если приклад ружья упирается в плечо стрелка, то при выстреле ружье «толкает» его. Внимательный наблюдатель заметит, что одновременно с толчком в плечо при выстреле ствол ружья дергается вверх — ружье поворачивается около точки, в которой оно упирается в плечо. Это тоже объясняется отдачей.

Чтобы понять, как это все происходит, обратимся к рисунку 1. Отрезок OB — это ствол ружья, отрезок OA — приклад, в точке A ружье упирается в плечо стрелка. На пулю, движущуюся в стволе, действует сила давления пороховых газов. На ружье в горизонтальном направлении действует такая же по абсолютной величине сила, направленная в противоположную сторону. Проекция $f\cos\alpha$ этой силы определяет толчок в плечо, а проекция $f\sin\alpha$ создает момент, который заставляет ружье поворачиваться вокруг точки A. Плечо стрелка мы будем считать неподвижным (в первом приближении это справедливо, так как время выстре-

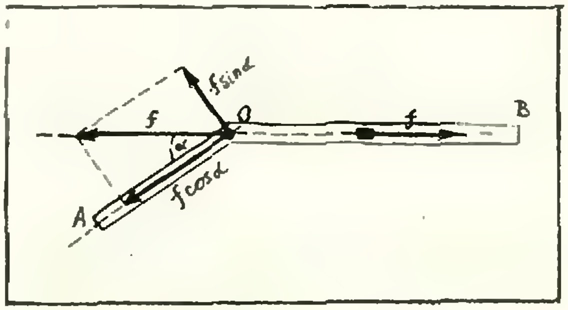


Рис. 1.

ла мало, а массу стрелка можно считать достаточно большой).

Понятно, что от количества пороха, сгорающего при выстреле, зависит сила давления пороховых газов. Чем больше пороховой заряд, тем больше это давление, тем больше сила f (см. рисунок 1) и тем большую скорость набирает пуля, двигаясь в стволе. С другой стороны, чем больше сила f, тем больше вращательный момент, обусловленный ее проекцией $f \sin \alpha$, и тем больше должно быть отклонение ствола от горизонтали при выстреле. Мы попробуем оценить это отклонение и обсудим вопрос о том, как оно зависит от массы и скорости пули.

Мы будем рассматривать упрощенную «модельную» задачу, и наши вычисления нельзя рассматривать как точное решение задачи о механике ружья при выстреле. О степени правильности наших качественных рассуждений мы сможем судить по разумности количественных оценок, к которым они приведут.

Для обозначения приближенных равенств мы пользуемся значком $\sim$; такой значок часто употребляют, когда речь идет о сравнении по порядку величины*).

На рисунках 2 и 3 показаны положения ружья в начальный момент (горизонтальный ствол) и в момент вылета пули. Точку A, как уже сказано выше, можно считать неподвижной. Центр тяжести ружья находится в точке O. Длину ствола обозначим буквой L, а расстояние AO — l. Угол между L и l равен α, угол отклонения ствола в момент, когда пуля покидает ствол ружья, — φ. Средняя сила давления *пороховых газов, действующая на пулю*, равна f, пуля движется в стволе ружья ускоренно, но нам удобно для оценок пользоваться средней скоростью пули; обозначим ее $\bar{v}_п$. Временем выстрела τ назовем время движения пули по стволу; тогда

$$\bar{v}_п \tau \sim L. \qquad (1)$$

Вращение ствола ружья, вообще говоря, тоже неравномерно, но можно ввести среднюю угловую скорость $\bar{\omega}$;

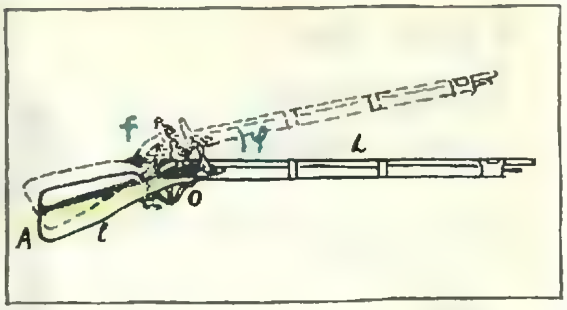


Рис. 2

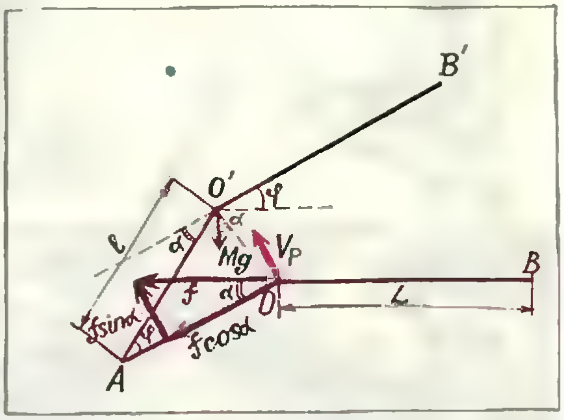


Рис. 3.

тогда за время τ ружье отклонится на угол

$$\varphi = \bar{\omega}\tau \sim \left(\frac{\bar{v}_р}{l}\right)\tau. \qquad (2)$$

В формуле (2) $\bar{v}_р$ — средняя за время выстрела скорость точки O в направлении, перпендикулярном AO.

Силу f, действующую на пулю массы m, можно выразить через среднее ускорение пули $\bar{a}_п \sim \bar{v}_п/\tau$:

$$f \sim m\bar{a}_п \sim m\frac{\bar{v}_п}{\tau} \sim \frac{m\bar{v}_п^2}{L}. \qquad (3)$$

Такая же по величине, но противоположно *направленная сила действует* на само ружье. Выразим теперь среднее ускорение $\bar{a}_р$ и среднюю скорость $\bar{v}_р$ ружья в направлении, перпендикулярном AO (см. рисунок 3):

$$\bar{a}_р \sim \frac{f \sin \alpha - Mg \cos \alpha}{M}, \qquad (4)$$

$$\bar{v}_р \sim \bar{a}_р \tau \qquad (5)$$

(здесь M — масса ружья). Можно сразу воспользоваться тем, что типичные значения α невелики ($\alpha \leqslant 2 \cdot 10^{-1}$ рад), и считать $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$. После этого из написанных выше формул (2)—(5) легко получить

$$\varphi \sim \frac{L}{l}\left(\alpha\frac{m}{M} - \frac{gL}{\bar{v}_п^2}\right). \qquad (6)$$

---

*) Напомним, что две величины a и b условно называются величинами одного порядка, если их отношение не более чем в десять раз отличается от единицы. Равенство по порядку величины часто записывается в виде $a \sim b$. Размерности a и b должны быть, конечно, одинаковыми.

Посмотрим теперь повнимательнее на формулу (6). При ее выводе мы не учли, что перед выстрелом где-то вблизи точки O ружье поддерживается еще рукой охотника. Но нас интересует отклонение ствола вверх, и если у охотника не дрожат руки, то в рассматриваемой нами модельной ситуации можно считать, что ружье «оторвалось» от поддерживающей руки в тот самый момент, когда был нажат спуск. Поэтому в формулах (4) и (6) учтены только силы $\vec{f}$ и $M\vec{g}$. Действие силы $\vec{f}$ вдоль направления OA (проекция $f\cos\alpha$) «гасится» плечом стрелка (последний действует на ружье с такой же по величине, но противоположно направленной силой).

Следующий наш вывод основан на том факте, что ружье «прыгает» вверх; значит, первое слагаемое в скобках в формуле (6) больше, чем второе, то есть

$$\alpha\frac{m}{M} > \frac{gL}{\bar{v}_{п}^{2}}$$

и, следовательно,

$$\bar{v}_{п} > \left(\frac{MgL}{\alpha m}\right)^{1/2}. \qquad (7)$$

Попробуем теперь сделать численную оценку. Пусть масса ружья $M\sim5$ кг, длина ствола $L\sim1$ м, масса пули $m\sim10$ г, $\alpha\sim2\cdot10^{-1}$ рад. Нетрудно убедиться, что неравенство (7) приводит к значению $\bar{v}_{п}>100$ м/с. Реальные скорости для боевого оружия ~600—800 м/с. Таким образом, мы убедились в том, что второе слагаемое в формуле (6) меньше первого, и по порядку величины

$$\varphi\sim\alpha\frac{m}{M}\frac{L}{l}\sim0{,}2\frac{m}{M}\frac{L}{l}. \qquad (8)$$

Из (8) следует, что чем меньше α, тем точнее стрельба. Значит, лучше, если ружье имеет вид неизогнутой палки? Разумеется, нет. Не нужно забывать, что формула (8) справедлива только тогда, когда первое слагаемое в (6) превышает второе. Существует и чисто практическая причина — из ружья с очень малым углом α очень трудно стрелять, из него просто неудобно целиться.

Если взять $(m/M)\sim10^{-3}$ и учесть, что $L/l\sim1$, то для угла φ мы получаем оценку $\varphi\sim10^{-3}$ рад. Что это означает? При таком значении φ на расстоянии порядка 100 м пуля отклонится вверх от точки прицеливания примерно на 10 см (естественно, если отсутствуют другие причины промахов и если отвлечься пока от влияния на летящую пулю силы тяжести).

Итак, как показали наши оценки, легкая пуля действительно улучшает точность стрельбы. От массы порохового заряда рассмотренное выше отклонение пули от цели не зависит.

Мы обсудили пока только вопрос о том, как вычислить отклонение ружья от линии прицеливания (в нашем случае — от горизонтального направления), пока пуля движется в канале ствола. Именно это отклонение и существенно для точности стрельбы. Но и после того, как пуля вылетела из ствола, само ружье продолжает двигаться вверх, ведь скорость центра тяжести ружья не равна нулю. Попробуйте сами оценить, на какой дополнительный угол отклонится ружье после того, как пуля покинула ствол. (В следующем номере журнала мы приведем решение этой задачи.)

Обратимся теперь снова к вопросу о скорости пули и величине порохового заряда. Мы уже говорили о том, что чем больше насыпает охотник пороху, тем больше скорость пули. А какая здесь связь с точностью стрельбы? Мы должны учесть еще, что пуля отклоняется при своем полете и вниз, это связано с действием силы тяжести. Такое отклонение зависит, конечно, от скорости пули и дальности цели. Если пуля вылетает из ружья горизонтально, то ее отклонение вниз определяется формулой $gt^2/2$, где t — время полета. Считая $t\sim(X/\bar{v}_{п})$, где X — дальность цели, оцените сами отклонение $gt^2/2\sim gX^2/2\bar{v}_{п}^2$ при $\bar{v}_{п}\sim8\cdot10^2$ м/с и $X\sim100$ м. Вы увидите, что вниз пуля отклоняется тоже на несколько сантиметров (~10 см). В принципе, отклонение, определяемое углом φ, и отклонение под действием силы тяжести могут даже до той или иной степени компенсировать друг друга. Понятно теперь, что изгиб ружья (угол α) конструктивно оправдан.

А теперь читатель может снова задуматься над вопросом о том, знал ли Следопыт физику.

О гидравлическом ударе

Кандидат технических наук
Е. М. ВОИНОВ

В конце XIX века в Москве участились случаи разрыва труб городского водопровода, неоднократно происходили серьезные аварии на гидравлических станциях. Видимых причин этих событий не было, и в 1897 году великий русский ученый Николай Егорович Жуковский занялся изучением этого вопроса. В результате появилась, ставшая теперь классической, работа «О гидравлическом ударе в водопроводных трубах», в которой Жуковский дал предельно четкое решение задачи, доведенное до непосредственного практического применения. Он показал теоретически, а затем и экспериментально проверил, что при быстром закрывании запорных устройств и, следовательно, быстром прекращении движения воды по трубе давление в трубопроводе резко возрастает. Это явление, называемое гидравлическим ударом, и служит причиной разрыва труб. Познакомимся с ним подробнее.

Н. Е. Жуковский предположил, что резкое повышение давления в трубе обусловлено неустановившимся движением жидкости. Он пришел к выводу, что в процессе повышения давления в трубе после быстрого прекращения течения участвует вся жидкость, находящаяся в трубе, и ее кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию упругой деформации самой жидкости (то есть приводит к резкому повышению давления в ней), а также расходуется на работу по упругой деформации стенок трубы. Поясним, как протекает этот процесс.

Пусть из большого резервуара (рисунок 1) по достаточно длинной трубе течет жидкость со скоростью v_0. На конце трубы установлена задвижка, которая может быстро перекрывать трубу (что значит «быстро», мы поясним позже). При быстром закрывании задвижки в первый момент времени останавливается некоторый слой жидкости, находящийся непосредственно у задвижки, и давление в нем из-за потери импульса резко возрастает. Остановка этого слоя вызывает остановку следующего за ним слоя, причем из-за сжимаемости жидкости (хотя и очень малой) второй слой остановится чуть позже, чем первый, и в нем также повысится давление. Так, слой за слоем, будет останавливаться жидкость во всей трубе, начиная от задвижки и вплоть до резервуара. Очевидно, что граница области повышенного давления будет перемещаться в том же направлении. Важно понимать, что при этом все слои жидкости остаются на своих местах, смещаясь лишь на незначительную величину, определяемую значением упругой деформации каждого слоя. Происходит передача состояния деформации от слоя к слою и связанное с ним распространение области повышенного давления вдоль трубы. Как принято говорить, распространяется волна давления.

Определим теперь максимальное значение возникающего в трубе давления. Для этого выделим небольшой объем жидкости, примыкающий к задвижке (это и есть слой, о котором шла речь выше). Пусть площадь сечения трубы равна S, а толщина слоя Δx; тогда выделенный объем жидкости равен $S\cdot\Delta x$, а его масса $m=\varrho S\cdot\Delta x$. За малое время Δt, в течение которого этот слой останавливается, он теряет импульс $\Delta(mv_0)=\varrho S\cdot\Delta x\cdot\Delta v_0$, что приводит к повышению давления в нем на Δp. Согласно второму закону Ньютона, изменение импульса этого слоя определяется импульсом возникающей силы давления $F=S\cdot\Delta p$, то есть

$$F\cdot\Delta t=\Delta p\cdot S\cdot\Delta t=\varrho S\cdot\Delta x\cdot v_0.$$

Отсюда

$$\Delta p=\varrho v_0\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right).$$

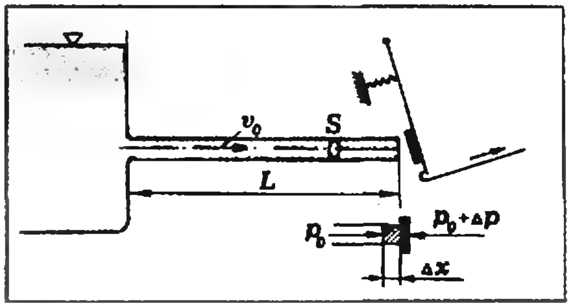


Рис. 1.

Входящая в это выражение величина $c=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ — это скорость распространения границы области повышенного давления (деформации) в жидкости вдоль трубы. Как показал Н. Е. Жуковский, эта величина зависит от упругих свойств самой жидкости и материала стенки трубы, а также от отношения толщины стенки трубы к ее диаметру. Оказалось, что для обычно используемых в трубопроводах стальных и чугунных труб при протекании в них воды эта скорость близка к скорости звука в воде $c_{\text{зв}}=1450$ м/с и равна $c=0{,}9c_{\text{зв}}\approx$ ≈ 1300 м/с. Таким образом,

$$\Delta p=\varrho v_0 c.$$

Мы получили известную формулу Н. Е. Жуковского для избыточного давления, возникающего при быстрой остановке жидкости, текущей по трубе. Явление резкого изменения давления жидкости, вызванное внезапным изменением скорости ее течения, называют гидравлическим ударом.

Теперь поясним, что следует понимать под быстрым закрытием задвижки. Для этого рассмотрим более подробно процесс распространения волны давления по трубе. Если труба имеет длину L, то время распространения области повышенного давления от задвижки до резервуара составляет $t_1=L/c$. Когда эта волна (ее часто называют ударной) достигает резервуара, на границе трубы и резервуара соприкасаются два слоя жидкости с различными давлениями: один, находящийся со стороны резервуара, с давлением p_0, и другой, находящийся в трубе, с давлением $p_{\text{уд}}=$ $=p_0+\Delta p$. Поскольку в таких условиях состояние равновесия на границе этих слоев невозможно, то небольшое количество жидкости из трубы вытечет в резервуар, и давление в этом сечении трубы понизится до давления p_0.

Это состояние пониженного (по отношению к давлению $p_{\text{уд}}$ в трубе) давления начнет, в свою очередь, распространяться в обратном направлении — от резервуара к задвижке, которой он достигнет через время $t_2=2L/c$ от момента закрытия задвижки. В момент времени t_2 во всей трубе устанавливается начальное давление p_0. Однако, в тот момент, когда волна пониженного давления p_0 достигает самой задвижки, слой жидкости, примыкающий к ней, стремится оторваться от нее, что приводит к понижению давления в нем до некоторой величины $p_1<p_0$. Понятно, что после этого волна пониженного давления p_1 начинает распространяться от задвижки к резервуару. После того как она достигает границы трубы и резервуара, там снова возникает ударная волна (но уже повышенного давления в трубе), которая доходит до задвижки через время $t_3=4L/c$ от начала всего процесса. Теперь процесс, полный цикл которого мы рассмотрели, начнет повторяться, но вследствие потерь энергии на работу против сил трения (обусловленных вязкостью жидкости) амплитуда колебаний давления в ударной волне постепенно будет уменьшаться. На рисунке 2 показано, как будет изменяться давление у задвижки в течение всего рассмотренного цикла. Как следует из приведенных рассуждений, наиболее высокое давление в трубе будет иметь место в течение времени $t=2L/c$. Поэтому под временем быстрого закрытия задвижки понимается время $t_{\text{закр}}<$ $<2L/c$. По определению Н. Е. Жуковского, максимальное повышение давления в трубе принято называть прямым ударом.

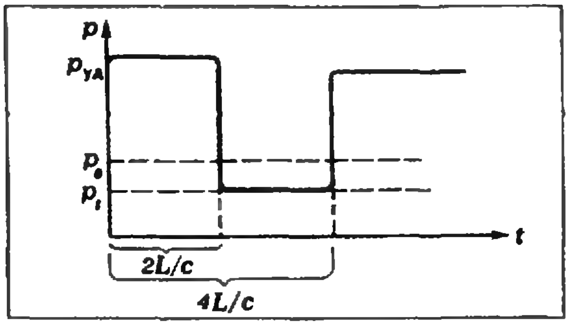


Рис. 2.

Если же время закрытия задвижки больше $2L/c$, то величина избыточного давления оказывается меньшей, чем при прямом ударе, и, как показал Н. Е. Жуковский, определяется выражением

$$\Delta p_{\text{непр}}=\varrho v_0 c\left(\frac{L}{ct_{\text{закр}}-L}\right).$$

Для примера рассмотрим остановку движения воды в стальной трубе длиной $L=500$ м при скорости течения воды $v_0=3$ м/с. Приняв $c\approx 1300$ м/с, получим: время быстрого закрывания трубы $t_{\text{закр}}=2L/c\approx 0{,}8$ с; соответствующее максимальное повышение давления при прямом ударе составит $\Delta p_{\max}=\varrho v_0 c=$ $=39\cdot 10^5$ Па $=39$ атм. При таком повышении давления труба, рассчитанная даже на 10 атм, может разорваться. Если же время закрытия принять равным 10 с, то повышение давления составит всего ~2 атм, что уже не угрожает разрывом трубы. Такой удар называется непрямым.

Таким образом, наиболее простым средством борьбы с гидравлическим ударом является выбор безопасного времени закрытия задвижки. Получив эти результаты, Н. Е. Жуковский предложил заменить применявшиеся в магистральных трубопроводах пробковые краны (подобные самоварным) на медленно закрывающиеся вентильные, которые применяются и в настоящее время. После того как это было сделано, массовые разрывы труб прекратились. Как уже упоминалось, все описанные теоретические результаты о распространении ударных волн были проверены экспериментально самим Жуковским, и даже при имевшихся в то время весьма примитивных приборах получили блестящее подтверждение.

С явлением гидравлического удара вы, наверное, не раз встречались в быту. Иногда бывает так: открываешь водопроводный кран, ... и раздается сильное дребезжание, сопровождающееся вибрацией подводящей трубы. Это явление непосредственно связано с гидравлическим ударом, который вызывается неисправностью в кране. Попробуйте объяснить, как в данном случае «работает» гидравлический удар. *)

Однако не следует думать, что гидравлический удар приносит только вред. По предложению Н. Е. Жуковского он используется, например, для очень полезного дела — нахождения мест разрыва труб, заложенных в землю. Для этого в том участке трассы, который, предположительно, имеет повреждение, перед задвижкой устанавливается прибор, записывающий давление. Затем достаточно быстрым закрытием задвижки (но не опасным для прочности трубы) создается слабый непрямой удар. Возникшее избыточное давление, дойдя до места утечки, резко спадет, и обратно к задвижке пойдет уже волна пониженного давления. По величине промежутка времени Δt между появлением избыточного давления и его спадом легко определить место утечки: оно находится на расстоянии $\Delta x = c \cdot \Delta t/2$ от задвижки.

Гидравлическим ударом часто пользуются и в быту. Если вдруг засорилась труба, отводящая воду из раковины, то пришедший водопроводчик прикроет отверстие в раковине специальным устройством — вантузом — и резко ударит по рукоятке. За счет гидравлического удара обычно удается протолкнуть предметы, засорившие раковину.

Еще одним примером полезного использования гидравлического удара служит так называемый гидравлический таран — устройство для подъема воды. Его схема приведена на рисунке 3. Вода из большого водоема A, находящегося выше клапана E на H_1 метров, поступает к отбойному клапану E и запирает его. Если на него нажать, то вода под напором начнет вытекать наружу. Если же затем клапан резко отпустить, то поток воды прекратится, и возникнет гидравлический удар. Давление в трубе a повысится, клапан K откроется, и часть воды перетечет в емкость B. Затем давление в трубе a упадет, клапан K закроется, а клапан E вновь откроется, и вода начнет вытекать наружу. После этого клапан E закроется силой атмосферного давления, снова возникнет гидравлический удар и т. д. После заполнения емкости B жидкость по трубе b будет подниматься в емкость C.

Такое устройство работает автоматически: для его запуска требуется только один раз резко открыть клапан E. Полезность такого устройства состоит в его простоте, а также в том,

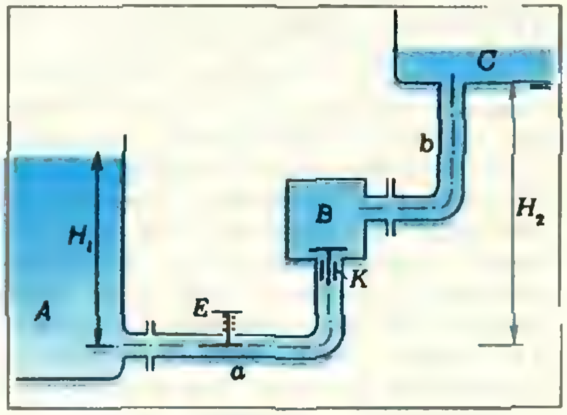


Рис. 3.

---

*) В этом номере журнала в разделе «Лаборатория «Кванта» помещена статья «Почему «поет» водопровод?». Вы можете воспользоваться приведенной в ней схемой устройства водопроводного крана (рис. 1 на с. 31). (*Прим. ред.*)

что оно позволяет производить подъем воды на $H_2=20\div30$ м при напоре H_1 всего 1—2 м. При этом никакого нарушения закона сохранения энергии не происходит — значительная часть воды вытекает из-под клапана E, теряя свою кинетическую энергию. Разработанная Н. Е. Жуковским теория позволяет рассчитать гидравлический таран с КПД 50—60 %. Любопытно заметить, что гидравлический таран был предложен французскими изобретателями братьями Монгольфье еще в 1796 году, то есть за сто лет до теоретической работы Н. Е. Жуковского. Таким образом, к нему были «причастны» основатели воздухоплавания братья Монгольфье и «отец русской авиации» Н. Е. Жуковский.

И, наконец, приведем еще один пример очень полезного использования гидравлического удара. В настоящее время в промышленности широко используется так называемая гидравлическая штамповка. Это делается следующим образом. В достаточно прочную емкость устанавливается матрица, изготовленная из прочного материала, имеющая «негативную» форму штампуемого изделия (там, где в изделии должна быть выпуклость, в матрице — вогнутость, и наоборот). На нее кладется заготовка, и емкость заливается жидкостью. В определенных местах в емкость вводят два (или несколько) электрода. Осуществляя мощный импульсный разряд (или серию рязрядов), создают гидравлический удар, деформирующий заготовку по форме матрицы. Таким образом штампуются стальные изделия значительных размеров с толщиной до 10 мм, изготовляются кузовные детали автомобилей и др.

Имеются и водометные устройства, работающие по этому принципу. За счет энергии разряда удается получить скорость истечения струи до 1000 м/с. Один импульсный удар такой струи пробивает бетон на глубину до 60 мм. Электрогидравлическая технология применялась, например, для разрушения бетонных фундаментов Уралмашзавода при его реконструкции. Она осуществлялась следующим образом. В разрушаемом фундаменте пробивались вертикальные шпуры диаметром 40 мм и глубиной 300—500 мм. В них вставлялись электроды-взрыватели и все заливалось водой. Затем на электроды подавался мощный импульс тока — происходил гидравлический удар, разрушающий бетон.

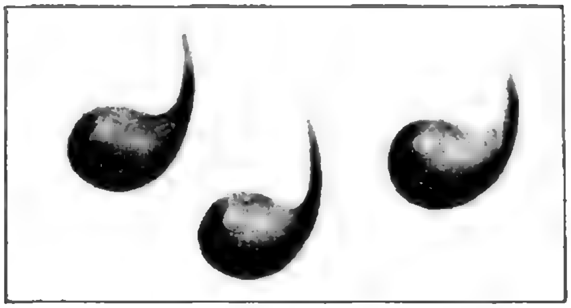


Рис. 4.

В заключение опишем красивый опыт с так называемыми «батавскими слезками», демонстрирующий малую сжимаемость жидкости и возникновение гидравлического удара. Батавские слезки получаются, когда капли расплавленного стекла падают в холодную воду. При быстром охлаждении стекла в такой слезке (рисунок 4) возникают значительные внутренние напряжения, особенно в местах перехода в тонкой части. Если такую слезку завернуть в марлю и раздавить на ладони, то при этом будет слышен лишь слабый хруст. Но если слезку положить в стакан с водой и с помощью двух пинцетов отломать у нее хвостик, то из-за внутренних напряжений она разлетится на мелкие части, вызвав гидравлический удар, иногда даже приводящий к разрушению стакана.

«Ферзя в угол», «цзяншиньзы» и числа Фибоначчи

(Начало см. на с. 18)

После сделанных нами замечаний мы можем сформулироать следующую теорему, дающую еще одно описание всех отмеченных пар.

Теорема 2. Пусть (a_n, b_n) — отмеченная пара. Если представить натуральное число $n—1$ в виде суммы неповторяющихся чисел Фибоначчи: $n-1 = f_{k_1} + f_{k_2} + \dots + f_{k_t}$, то $a_n-1 = f_{k_1+1}+f_{k_2+1}+\dots+f_{k_t+1}$ или, иначе говоря, если $n-1$ есть сумма некоторых попарно различных чисел Фибоначчи, то a_n-1 есть такая же сумма чисел Фибоначчи с номерами на единицу большими.

Почему «поет» водопровод?

Е. И. ПАЛЬЧИКОВ

Согласитесь, что «пение» водопроводных труб, особенно в поздний час, не доставляет особого удовольствия. Пытаясь избавиться от неприятных звуков или хотя бы понять причину их возникновения, вы открываете водопроводный кран. Часто это ни к чему не приводит. Но иногда бывает и так: достаточно открыть кран, который до этого был закрыт, и гудение либо переходит на другую ноту, либо пропадает вовсе. Значит, причиной всему водопроводный кран? Оказывается, да. Точнее — неисправный кран.

Физику-экспериментатору «поющий» водопровод может послужить хорошим объектом для исследований, а избавление от «пения» — неплохой лабораторной работой с полезным выходом для окружающих.

Как известно, источником звука может быть любое тело, колеблющееся со звуковой частотой.*) Рассмотрим, где и каким образом возникают колебания в системе водопровод — кран.

На рисунке 1 изображена одна из возможных конструкций водопроводного крана. В нем заслонка, состоящая из металлической шайбы и резиновой прокладки, прижимается винтом к бортику, ограничивающему круглое отверстие, через которое вода поступает к крану. Что произойдет, если кран слегка приоткрыть? Из рисунка видно, что самое узкое место, через которое проходит вода, это щель между краями отверстия и нижней стороной заслонки. Так как объем воды, проходящий в единицу времени через любое поперечное сечение водопровода, остается постоянным, в самом узком месте скорость движения воды будет самой большой. С верхней стороны заслонки скорость воды существенно меньше, чем с нижней. При изменении скорости жидкости, движущейся по водопроводу, меняется и давление. В соответствии с законом Бернулли, там, где больше скорость, меньше давление и наоборот.*)

При некоторых скоростях расхода воды и «благоприятных» размерах заслонки, отверстия и щели может оказаться, что сумма сил давления, действующих на заслонку снизу, будет намного меньше сил давления сверху, и заслонка прижмется к отверстию. Очевидно, что долго такая ситуация продолжаться не может. Как только заслонка перекроет воду, скорость в зазоре упадет, давление снизу повысится, и заслонку отбросит от отверстия вверх. После чего процесс повторится сначала.

---

*) См., например, § 32 учебника «Физика 10».

*) Подробнее об этом см. § 65 учебника «Физика 8».

Колебания заслонки, которые мы рассмотрели, могут происходить в довольно широком интервале частот. Однако из практики известно, что каждый водопровод «поет», как правило, на одной, своей ноте. В крайнем случае на двух-трех. Почему?

Оказывается, здесь главную роль играют трубы водопровода, заполненные водой. Под влиянием заслонки в них тоже возникают колебания, причем сильнее всего столб воды откликается на те частоты, на которых может колебаться он сам. Это — конкретное проявление известного явления резонанса, поэтому неслучайно, что соответствующий участок водопровода называют резонатором. Таким образом, из всех возможных частот колебаний заслонки в кране «выбираются» только те, на которых может колебаться столб воды в прилегающих к крану участках трубопровода.

При этом колебания столба воды помогают колебаниям заслонки, управляют ими. Заслонка же отбирает часть энергии у вытекающей из крана воды и отдает эту энергию колеблющемуся в трубах столбу воды. Другими словами, колебания заслонки вызывают колебания воды, а последние, в свою очередь, заставляют колебаться заслонку. Для того чтобы колебания не ослабевали, заслонка должна колебаться в такт с колебаниями прилегающего к ней столба воды.

Заметим, что рассмотренная ситуация наблюдается реально только тогда, когда заслонка расхлябана и имеет возможность свободно двигаться в некоторых пределах вдоль оси винта, а резиновая прокладка сильно деформирована и повторяет очертания бортика вокруг отверстия.

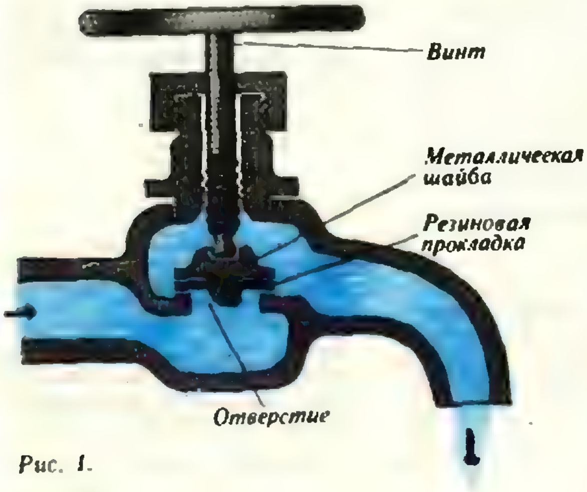


Рис. 1.

И еще. Все происходящее в реальном трубопроводе, конечно, намного сложнее того, что было описано выше. Тем не менее понимание физической сущности процессов, происходящих в «поющем» водопроводе, может оказать реальную практическую помощь — найти неисправные краны.

Например, если при открывании вашего, ранее закрытого крана, «пение» изменилось или прекратилось, то это означает, что участок трубы с вашим краном входит в резонатор. Изменение «пения» обычно происходит за счет изменения размеров, формы резонатора (или потерь в нем). Прекращение (срыв) колебаний может быть следствием изменения давления в трубопроводе, увеличения потерь в резонаторе или уменьшения энергии, поступающей от крана. А если после открывания вашего крана «пение» не изменилось, говорит ли это о том, что ваш участок трубы не резонирует? Подумайте над этим вопросом самостоятельно.

Во всяком случае радикальное средство избавления от «пения» состоит в том, чтобы отыскать и починить кран (или краны), в котором сдеформировалась или выскочила прокладка. Достаточно сменить резиновую прокладку, а при необходимости и уменьшить возможность передвижения заслонки — и колебания пропадут. Как же это сделать практически?

Для этого нужно сначала перекрыть водопровод аварийным краном (который обычно расположен в ванной комнате или в кухне под раковиной), затем ключом или плоскогубцами открыть корпус ремонтируемого крана (ни в коем случае не аварийного!). Чтобы не нарушить никелировку, откручивать крышку корпуса нужно осторожно, подложив под плоскогубцы несколько слоев бумаги или ткани. После этого из резины подходящей толщины (обычно от 2 до 4 мм) вырезается новая прокладка и ставится на место неисправной (или отсутствующей вовсе). В большинстве бытовых кранов прокладка должна лежать в углублении металлической шайбы и держаться за счет того, что ее диаметр чуть больше диаметра углуб-

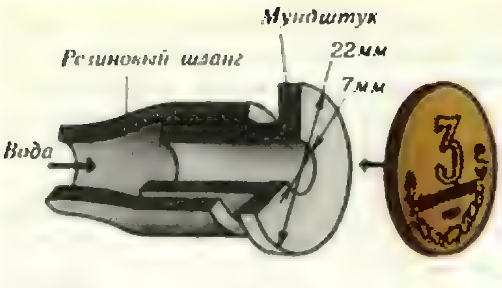


Рис. 2.

ления. В некоторых кранах в центре прокладки делается отверстие, и она крепится к шайбе гайкой. Отремонтированный кран собирают в обратном порядке и потихоньку открывают аварийный кран.

В заключение предлагаем вам провести опыт, моделирующий поведение заслонки в водопроводном кране.

Через полутораметровый резиновый шланг подсоедините к крану мундштук с размерами, изображенными на рисунке 2. Откройте воду, возьмите в руку трехкопеечную монету и постарайтесь ее «посадить» на конец мундштука (гербом к мундштуку). После некоторой тренировки можно добиться того, чтобы монета устойчиво держалась при довольно большом интервале скоростей расхода воды и при любом положении мундштука. Никаких колебаний при этом не наблюдается, а вся конструкция напоминает разбрызгиватель для поливки огородов.

Интересно, что диск того же размера, что монета, но с гладкой поверхностью, на мундштуке не удерживается. Зато если прижать его к мундштуку пальцем, появляются колебания, причем при увеличении силы нажима частота колебаний возрастает. Таким образом можно руками потрогать модель заслонки водопроводного крана и убедиться, что колебания действительно возможны.

Для последнего опыта не обязательно выдерживать указанные размеры мундштука и «заслонки». Важно только, чтобы их поверхности были плоскими и гладкими. Попытайтесь самостоятельно придумать и другие опыты, моделирующие процессы, происходящие в гудящем («поющем») водопроводе.

Гармонический ряд

Единица плюс половина плюс четверть плюс одна восьмая... Если продолжить это суммирование все дальше и дальше — будут ли образующиеся суммы стремиться к какому-либо пределу? Конечно, ведь перед нами бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем меньше 1. Для ее суммы известна простая формула — первый член, деленный на единицу минус знаменатель прогрессии:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=\frac{1}{1-(1/2)}=2. \qquad (1)$$

Ну, а если попытаться суммировать величины, бесконечно убывающие, но не по закону геометрической прогрессии? Например, единица плюс половина плюс треть плюс четверть плюс одна пятая...

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots \qquad (2)$$

Выражение (2) называется *гармоническим рядом*. Попробуем найти его сумму. Для этого последовательно будем вычислять его *частичные суммы*, то есть числа $S_1=1$, $S_2=1+1/2=3/2$, $S_3=1+1/2+1/3=11/6$, ... С помощью микрокалькулятора мы получили, например, $S_{99}=5{,}177$, $S_{100}=5{,}187$. Так чему же равна сумма гармонического ряда? **Подумайте и попробуйте найти его сумму самостоятельно.**

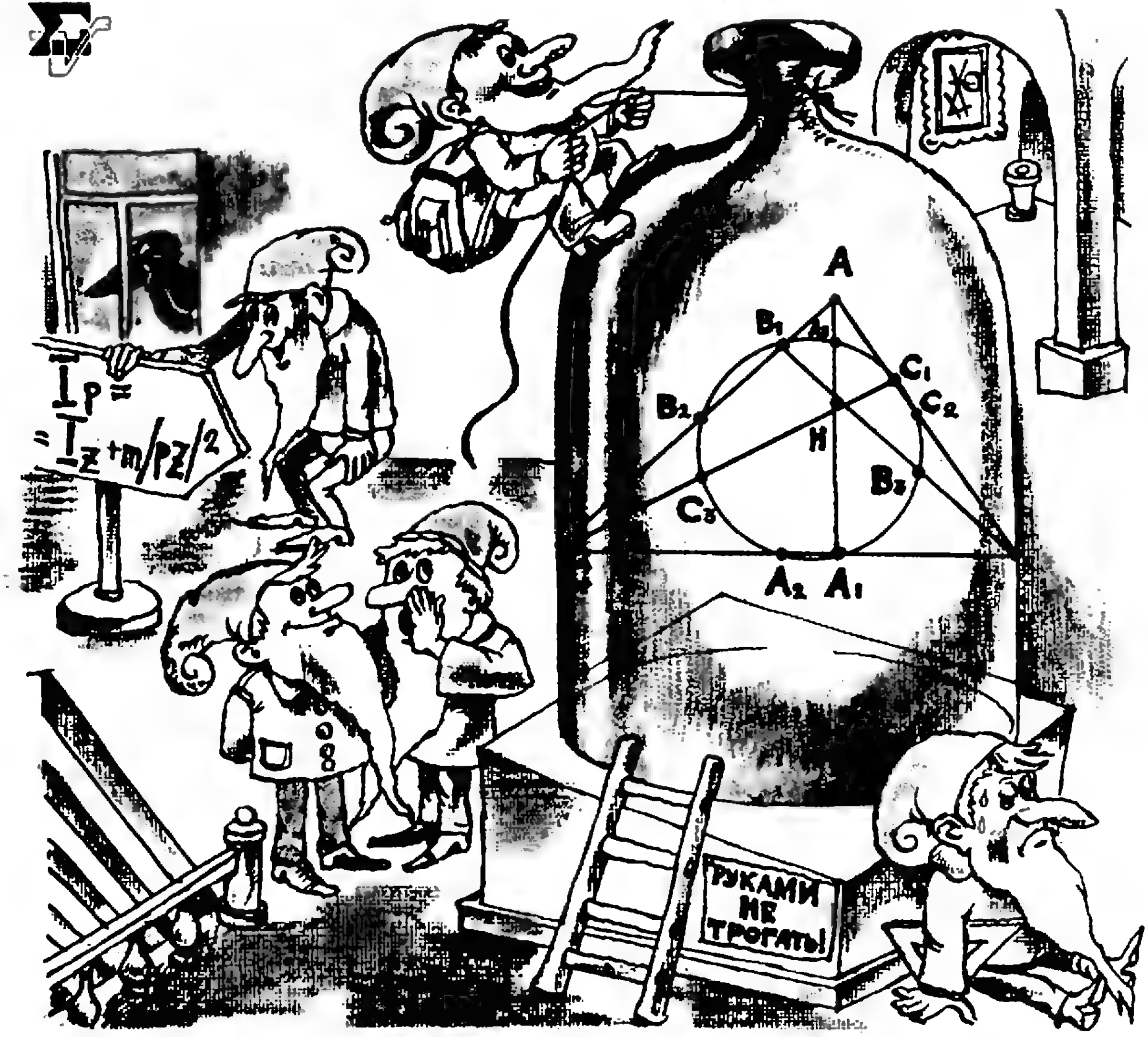
Ну как? Оценили сумму гармонического ряда? Если вы пришли к выводу, что сумма $1+1/2+1/3+\ldots$ стремится к определенному пределу, то вы определенно ошиблись. По мере прибавления новых слагаемых сумма увеличивается, увеличивается, но не стремится к пределу (как это делает сумма геометрической прогрессии $1+1/2+1/4+1/8+\ldots$), а *становится больше любого наперед заданного числа*. Как говорят математики, гармонический ряд расходится, стремится к бесконечности. (Если бы последовательность частичных сумм имела предел, то этот предел назывался бы *суммой* ряда, а ряд — *сходящимся*.)

Почему гармонический ряд расходится? В исследовании неизвестного человеку свойственно опираться на известное. Вот и мы выделим в гармоническом ряде члены известной нам геометрической прогрессии:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}+\ldots$$

Теперь видно, что..., впрочем, кончается место на этой странице: додумайте расходимость гармонического ряда сами!

(Окончание см. на с. 44)



Момент инерции в геометрии

Кандидат физико-математических наук
В. Н. ДУБРОВСКИЙ

Все хорошо знают, что математика постоянно используется в физике. Реже встречается и потому менее известно обратное — использование физических понятий в математике. Один яркий пример такого рода — *центр масс* в геометрии — обсуждался в недавней статье М. Б. Балка и В. Г. Болтянского («Квант» № 4, с. 18). В нашей статье главную роль также играет понятие, заимствованное из механики, — *момент инерции*.

Но когда с понятием, взятым из физики, начинает работать математик, он быстро забывает его физический смысл и видит в нем лишь полезную математическую формулу. Так, понятие *материальной точки* A массы m, которую физик воспринимает как «тело массы m пренебрежимо малых размеров для данной задачи», математик определяет формально, как «пару (A, m), состоящую из точки A (геометрической) и действительного числа $m \in \mathbf{R}$». Физик дважды подумает, прежде чем воспользуется «отрицательной массой», а математик будет рассматривать как ни в чем не бывало «материальную точку» (A, m), для которой $m<0$! И притом с пользой для дела (см. цитированную выше статью, например задачу 5 на с. 19). Подобным же образом мы здесь определим момент инерции чисто математическим выражением. А выведенная затем формула Лагранжа для вычисления момента инерции станет ключом в своеобразную кунсткамеру геометрии, с множеством диковинных теорем и формул. Об этом наш рассказ.

Предваряя возможный вопрос любознательного читателя, поясним все же физический смысл момента инерции. Это легко сделать, отправляясь от второго закона Ньютона. При вращательном движении второй закон Ньютона записывается в виде $M=I\alpha$, где M — момент прилагаемой силы, α — угловое ускорение, а I и есть как раз момент инерции (см. «Квант», 1971, № 1, с. 6). Сравнивая эту формулу с $F=ma$, мы видим, что момент инерции представляет собой меру инерции вращающегося тела, подобно тому, как масса представляет собой меру инерции при поступательном движении.

Что нужно знать о центре масс

Коротко напомним все необходимые нам сведения о центре масс (подробности можно найти в упомянутой статье М. Б. Балка и В. Г. Болтянского).

Рассмотрим систему из n *материальных точек* (или точечных масс), то есть n пар (A_1, m_1), ..., (A_n, m_n), где A_i — произвольные точки пространства, m_i — действительные числа («массы», сосредоточенные в этих точках); более короткое и удобное обозначение для этой системы — $m_1A_1, \ldots, m_nA_n$. Если общая масса $m=m_1+\ldots+m_n\neq 0$, то

1) существует и единственная такая точка Z, что

$$m_1\overrightarrow{ZA_1}+\ldots+m_n\overrightarrow{ZA_n}=\vec{0};$$

эта точка называется *центром масс* системы $m_1A_1, \ldots, m_nA_n$;

2) для любой точки P имеет место равенство

$$\overrightarrow{PZ}=\frac{1}{m}(m_1\overrightarrow{PA_1}+\ldots+m_n\overrightarrow{PA_n}); \quad (1)$$

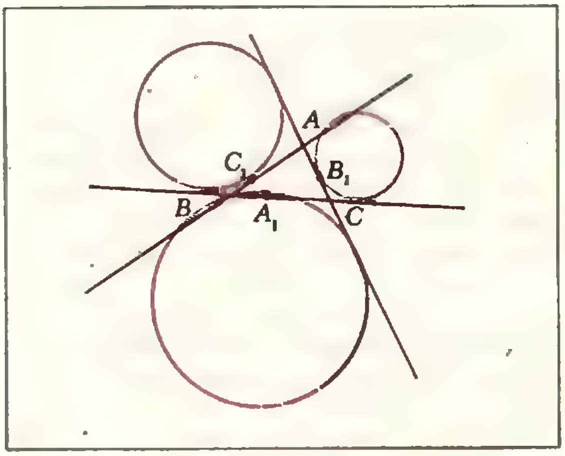


Рис. 1.

3) (теорема о группировке) при замене части материальных точек системы $m_1A_1, \ldots, m_nA_n$, например точек $m_1A_1, \ldots, m_kA_k$, на их центр масс C, в который помещена их общая масса $m'=m_1+\ldots+m_k$, положение центра масс всей системы не меняется, то есть центры масс систем $m'C, m_{k+1}A_{k+1}, \ldots, m_nA_n$ и $m_1A_1, \ldots, m_nA_n$ совпадают.

Непосредственно из определения следует, что центр Z двух точечных масс m_1A_1 и m_2A_2 находится по известному *правилу рычага:* точка Z лежит на прямой A_1A_2 и $\overrightarrow{A_1Z}:\overrightarrow{ZA_2}=m_2:m_1$ (в левой части — коэффициент пропорциональности двух коллинеарных векторов).

Задачи

1. Пусть a, b, c — длины сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Докажите, что центр его вписанной окружности является центром масс системы aA, bB, cC. (Указание: пользуясь тем, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам *), докажите, что, например, барицентр материальных точек в bB и cC — основание биссектрисы угла A; примените теорему о группировке.)

2. Рассмотрим три *вневписанные окружности* треугольника ABC — окружности, касающиеся (извне) одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон (рис. 1). Пусть A_1, B_1, C_1 — точки их касания со сторонами BC, CA, AB. Докажите, что а) отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке N (*точке Нагеля*), б) точка пересечения медиан M треугольника лежит на отрезке ZN, где Z — центр вписанной окружности, и $|ZM|:|MN|=1:2$.

Момент инерции и формула Лагранжа

Моментом инерции системы материальных точек

$$m_1A_1,\ m_2A_2,\ \ldots,\ m_nA_n$$

относительно фиксированной точки P называется число

$$\boxed{I_P=m_1|PA_1|^2+m_2|PA_2|^2+\ldots+m_n|PA_n|^2.} \qquad (2)$$

Впервые это понятие было введено великим Л. Эйлером (1707—1783).

Для любителей физики отметим, что в механике обычно рассматривается, собственно говоря, момент инерции системы точек относительно оси, равный сумме $m_1d_1^2+\ldots+m_nd_n^2$, где d_i — расстояние от точки A_i до этой оси (его произведение на угловую скорость вращения системы вокруг оси равно моменту импульса системы). Он совпадает с I_P, когда точка P и все точки A_i лежат в одной плоскости, а ось перпендикулярна ей и проходит через P.

---

*) См., например, статью Сефибекова С. Р. «Четыре доказательства теоремы о биссектрисе» (Квант, 1983, № 8, с. 37).

**) См. также книгу Н. Н. Воробьева «*Числа Фибоначчи*» (М.: Наука, 1978, с. 15).

Формулу (2) можно записать короче, обозначив расстояние от A_i до P через r_i и воспользовавшись знаком суммы Σ *):

$$\boxed{I_P=\sum_i m_ir_i^2.} \qquad (3)$$

Формулам (3) и (2) можно придать другую форму. Пусть P и Q — две произвольные точки, тогда

$$I_P=\sum_i m_i|PA_i|^2=\sum_i m_i(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QA_i})^2=$$

$$=\sum_i m_i|PQ|^2+2\sum_i m_i\cdot\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QA_i}+$$

$$+\sum m_i|QA_i|^2,$$

то есть

$$I_P=I_Q+m|PQ|^2+2\overrightarrow{PQ}\cdot(\sum_i m_i\overrightarrow{QA_i}). \quad (4)$$

Если теперь в качестве Q взять центр масс Z нашей системы, то, поскольку $\sum_i m_i\overrightarrow{ZA_i}=\vec{0}$ (по определению центра масс), мы получим

$$\boxed{I_P=I_Z+m|PZ|^2.} \qquad (5)$$

В конце статьи мы покажем, что момент инерции относительно центра масс выражается, если $m\neq 0$, следующей красивой формулой:

$$\boxed{I_Z=\frac{1}{m}\sum_{i<j}m_im_j|A_iA_j|^2} \qquad (6)$$

и, следовательно, для любой точки P

$$\boxed{I_P=\left(\frac{1}{m}\sum_{i<j}m_im_j|A_iA_j|^2\right)+m|PZ|^2.} \quad (7)$$

Формулы (5)—(7) называются *формулами Лагранжа*, на них основывается все дальнейшее.

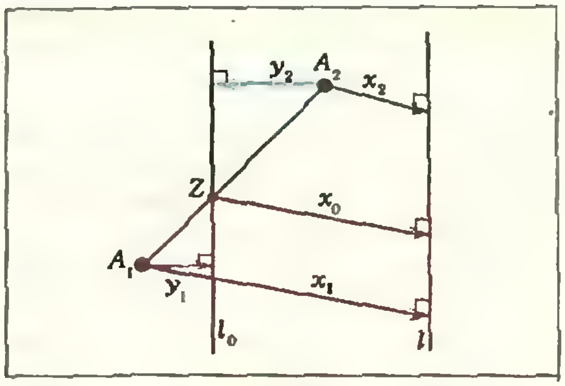


Рис. 2.

Математика — это искусство называть разные вещи одинаково, а одинаковые — по-разному

Шутливый афоризм, вынесенный в заголовок, имеет глубокий смысл. Математические теоремы отражают самые общие закономерности, поэтому одна и та же теорема в разных обличьях может встретиться нам в ситуациях, не имеющих на первый взгляд ничего общего. Хорошим, хотя и очень элементарным, примером служит формула (5).

Перепишем ее в «нейтральных» обозначениях, отвлекаясь от смысла входящих в нее величин. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — какой-то набор векторов, $c_1, \ldots, c_n$ — набор чисел, $c=c_1+\ldots+c_n\neq 0$, $x_0=(c_1x_1+\ldots+c_nx_n)/c$, $y_i=x_i-x_0$ при $i=1, \ldots, n$. Тогда

$$c_1x_1^2+\ldots+c_nx_n^2=$$
$$=(c_1y_1^2+\ldots+c_ny_n^2)+cx_0^2 \qquad (8)$$

(x_i^2, y_i^2 нужно понимать, как скалярные квадраты векторов x_i, y_i). Доказывать эту формулу нам уже не нужно, потому что всегда можно считать, что $x_i=\overrightarrow{PA_i}$, тогда $x_0=\overrightarrow{PZ}$, где Z — барицентр системы материальных точек $c_1A_1, \ldots, c_nA_n$, $y_i=\overrightarrow{ZA_i}$ и формула (8) превращается в формулу Лагранжа (5).

Теперь приведем еще три интерпретации этой формулы.

1) Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — векторы перпендикуляров, опущенных из точек $A_1, \ldots, A_n$ на ось l (рис. 2), $c_1, \ldots, c_n$ — массы, помещенные в эти точки. Тогда x_0 — это вектор перпендикуляра из их барицентра Z на ось l (почему?), а y_i — векторы перпендикуляров из точек A_i на ось l_0, проведенную через

---

*) Этот знак позволяет кратко записывать суммы из многих слагаемых: вместо $A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n$ мы пишем $\sum_{i=1}^{n}A_i$ или просто $\sum_i A_i$ (когда число слагаемых п ясно из контекста). Аналогично, $\sum_i m_ir_i^2$ — сокращение для $m_1r_1^2+m_2r_2^2+\ldots+m_nr_n^2$ и т. п.

точку Z параллельно l. В этом случае (8) принимает вид *теоремы Штейнера*:

$$I_l = I_{l_0} + md^2$$

(здесь I_l и I_{l_0} — моменты инерции системы $c_1A_1, \ldots, c_nA_n$ относительно осей l и l_0, $m=c$ — общая масса, d — расстояние между осями).

2) Пусть n частиц $A_1, \ldots, A_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$ движутся равномерно и прямолинейно со скоростями $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ относительно некоторой системы отсчета S. Тогда их центр масс движется в системе S со скоростью $\vec{v}_0 = (m_1\vec{v}_1 + \ldots + m_n\vec{v}_n)/m$ $(m = m_1 + \ldots + m_n)$. Скорость частицы A_i в системе покоя центра масс по правилу сложения скоростей равна $\vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_0$. Пусть E и E_0 — полные кинетические энергии всех частиц в системе S и в системе центра масс, то есть $E = \frac{m_1v_1^2}{2} + \ldots + \frac{m_nv_n^2}{2}$, $E_0 = \frac{m_1u_1^2}{2} + \ldots + \frac{m_nu_n^2}{2}$. Полагая в (8) $x_i = \vec{v}_i$, $c_i = m_i/2$, получим *теорему Кёнига* о кинетической энергии:

$$E = E_0 + \frac{mv_0^2}{2}$$

(полная кинетическая энергия системы частиц равна энергии их движения относительно центра масс плюс энергия движения центра масс).

Последний пример — из совершенно другой области — теории вероятностей.

3) Пусть в некотором эксперименте со случайным исходом измеряется некая величина X, например, бросают игральную кость и определяют выпавшее число очков. Предположим, что, в зависимости от результата эксперимента, величина X может принимать n значений $x_1, \ldots, x_n$ (в примере с костью — 6 значений 1, 2, ..., 6), причем значение x_i принимается с вероятностью p_i (числа p_i неотрицательны и дают в сумме 1; в нашем примере, очевидно, все значения равновероятны, то есть $p_1 = p_2 = \ldots = p_6 = 1/6$). Число $p_1x_1 + \ldots + p_nx_n$ называется *средним значением* (или математическим ожиданием) случайной величины X и обозначается $\mathbf{M}X$ (в нашем примере $\mathbf{M}X = (1 + \ldots + 6)/6 = 3{,}5$). Таким образом, с точки зрения теории вероятностей выражения, входящие в (8) (при $c_i = p_i$, $c = \Sigma p_i = 1$), можно интерпретировать так *):

$$p_1x_1^2 + \ldots + p_nx_n^2 = \mathbf{M}X^2$$

— среднее значение случайной величины X^2 или, как говорят, ***второй момент*** (снова «момент»!) случайной величины X; $y_i = x_i - x_0 = x_i - \mathbf{M}X$ — отклонения значений величины X от среднего значения;

$$p_1y_1^2 + \ldots + p_ny_n^2 = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2$$

— среднее значение квадрата отклонения X от $\mathbf{M}X$; это очень важная характеристика случайной величины, показывающая степень ее «разброса» вокруг среднего значения, она называется *дисперсией* и обозначается $\mathbf{D}X$; $x_0^2 = (\mathbf{M}X)^2$.

В результате (8) превращается в формулу для вычисления дисперсии, имеющуюся во всех учебниках теории вероятностей (правда, не носящую ничьих звучных имен):

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2.$$

Легко ли здесь узнать формулу Лагранжа?

Задача 3. Найдите дисперсию числа очков при бросании кости.

Геометрические следствия

Формула Стюарта. Найдем расстояние d от вершины A треугольника ABC до точки D на стороне BC, зная длины a, b, c сторон треугольника и длины отрезков BD и DC (рис. 3). Пусть $p = |BD| : |BC|$, $q = |DC| : |BC|$, тогда D — это центр масс системы материальных точек qB, pC. Вычисляя момент инерции этой системы относительно точки A, получим (см. (7))

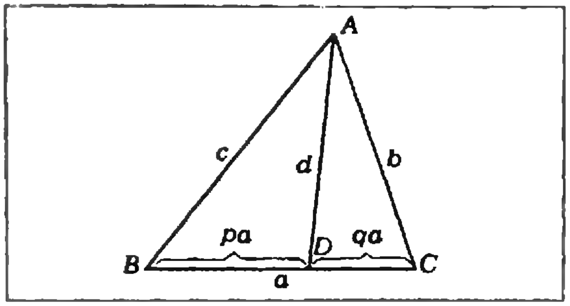


Рис. 3.

---

* Формула (8) верна и в случае, когда x_i — числа: можно просто считать их векторами с координатами (x_i; 0; 0). С другой стороны, ее можно применять к случайным величинам, принимающим векторные значения.

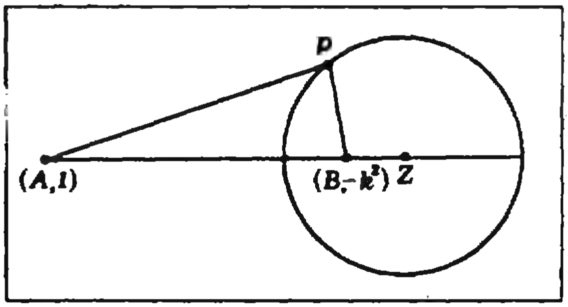


Рис. 4.

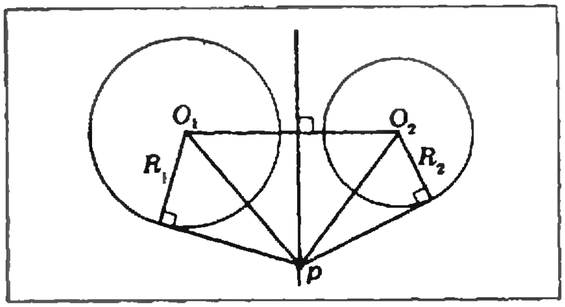


Рис. 5.

$$I_A = pb^2 + qc^2 = \frac{pqa^2}{p+q} + (p+q)d^2$$

и, поскольку $p+q=1$,

$$\boxed{d^2 = pb^2 + qc^2 - pqa^2.}$$

Окружность Аполлония. Так называют окружность, определяемую тем, что отношение расстояний от любой ее точки до двух данных точек A и B постоянно. Докажем, пользуясь моментом инерции, что множество точек P плоскости, удовлетворяющих условию $|PA|:|PB| = k \neq 1$, — действительно окружность. Перепишем это условие в виде $I_P = |PA|^2 - k^2|PB|^2 = 0$. Поскольку I_P — это момент инерции системы $1A$, $(-k^2)B$ относительно точки P, по формуле (5)

$$I_P = I_Z + (1-k^2)\,|PZ|^2,$$

где Z — центр масс этой системы. Следовательно, рассматриваемое множество есть окружность (рис. 4) с центром Z радиуса $\sqrt{I_Z/(k^2-1)}$. (Проверьте, что подкоренное выражение больше нуля и выразите радиус окружности через k и $|AB|$. Где находится ее центр?).

Радикальная ось. Покажем, что множество точек P, касательные из которых к двух данным непересекающимся окружностям равны, есть прямая. (Эта прямая называется *радикальной осью* пары окружностей.) Пусть O_1 и O_2 — центры, R_1 и R_2 — радиусы окружностей. Условие равенства длин касательных (точнее, их квадратов) с помощью теоремы Пифагора можно записать так (рис. 5): $|PO_1|^2 - R_1^2 = |PO_2|^2 - R_2^2$ или $I_P = |PO_1|^2 - |PO_2|^2 = R_1^2 - R_2^2$, где I_P — момент инерции системы $1O_1$, $(-1)\,O_2$ относительно точки P. Сейчас общая масса равна $1+(-1)=0$, поэтому надо пользоваться формулой (4), взяв в ней в качестве Q любую фиксированную точку плоскости, например, O_1:

$$I_P = I_{O_1} + 2\overrightarrow{PO_1}\cdot(-\overrightarrow{O_1O_2}) =$$

$$= -|O_1O_2|^2 + 2\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_1O_2},$$

то есть

$$\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{2}\,(R_1^2 - R_2^2 + |O_1O_2|^2).$$

Легко понять, что это условие задает прямую, перпендикулярную O_1O_2[*]). (Убедитесь самостоятельно, что из любой точки этой прямой можно провести касательные к окружностям.)

Задачи

4. Пусть m_a и l_a — длины медианы и биссектрисы треугольника ABC, проведенных из вершины A. Докажите, что $m_a^2 = (b^2+c^2)/2 - a^2/4$, $l_a^2 = bc - b_1c_1$, где a, b, c — длины сторон, b_1, c_1 — длины отрезков, на которые биссектриса делит сторону BC.

5. Формула Лейбница. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что для любой точки P, $|PM|^2 = (a_1^2+b_1^2+c_1^2)/3 - (a^2+b^2+c^2)/9$, где a_1, b_1, c_1 — расстояния от точки P до вершин треугольника, a, b, c — длины его сторон.

6. Докажите, что множество точек пространства P, для которых величина $m_1|PA_1|^2 + \ldots + m_n|PA_n|^2$ принимает заданное значение при заданных точках $A_1, \ldots, A_n$ и заданных коэффициентах $m_1, \ldots, m_n$, есть сфера, точка или пустое множество, если $m = m_1 + \ldots + m_n \neq 0$ и плоскость, все пространство или пустое множество, если $m = 0$. При каких условиях реализуются перечисленные случаи?

Две замечательные теоремы из геометрии треугольника

Пусть a, b, c — длины сторон треугольника ABC, p — полупериметр, S — площадь, R и r радиусы описанной и вписанной окружностей, O и Z — их центры.

Формула Эйлера $|OZ|^2 = R^2 - 2Rr$.

---

[*] Если окружности пересекаются, рассматриваемое множество состоит из двух лучей, продолжающих их общую хорду. Обычно радикальную ось определяют другим условием, которое всегда задает «полную» прямую (при $O_1 \neq O_2$) и сводится к тем же уравнениям.

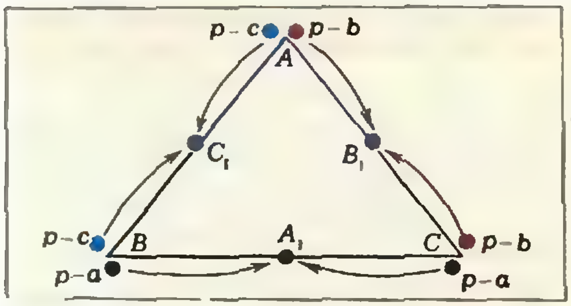


Рис. 6.

Для доказательства заметим, что Z — это центр масс системы материальных точек aA, bB, cC (см. задачу 1). Найдем моменты инерции этой системы относительно Z (см. (6)):

$$I_Z=\frac{abc^2+bca^2+cab^2}{a+b+c}=abc=$$
$$=2R\sin\hat{A}\cdot bc=4RS=4Rrp,$$

и относительно 0:

По формуле (5) $|OZ|^2=(I_O-I_Z)/2p=$ $=R^2-2Rr$.

Одна из красивейших теорем геометрии треугольника утверждает, что середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами, лежат на одной окружности — так называемой «окружности девяти точек» (см. «Квант» 1981, № 8, с. 34). Но еще большее впечатление производит

Теорема Фейербаха. Окружность девяти точек касается четырех «замечательных» окружностей — вписанной и трех вневписанных.

Мы докажем эту теорему только для вписанной окружности (остальные рассматриваются аналогично — см. задачу 8), причем нам будет достаточно знать, что окружность девяти точек проходит через середины A_1, B_1 и C_1 сторон треугольника ABC.

Треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом $1/2$, поэтому радиус его описанной окружности равен $R/2$; ее центр обозначим через F. Условие касания этой окружности с вписанной удобно записать и доказывать в виде

$$|FZ|^2=\left(\frac{R}{2}-r\right)^2.$$

Поместим в вершины ABC треугольника массы a, b, c (их центром масс будет точка Z), разобьем каждую массу на две части: $a=(p-b)+(p-c)$, $b=$ $=(p-c)+(p-a)$, $c=(p-a)+(p-b)$ и попарно сгруппируем эти части, как показано на рисунке 6; центр масс при этом останется на месте. Центр масс системы $(p-a)B$, $(p-a)C$ находится в точке A_1, системы $(p-b)A$, $(p-b)C$ — в точке B_1, а системы $(p-c)A$, $(p-c)B$ — в точке C_1, следовательно, точка Z — это центр масс системы $(p-a)A$, $(p-b)B_1$, $(p-c)C_1$ (массы, полученные после группировки, мы одновременно уменьшили вдвое). Найдем моменты инерции этой системы относительно точек F и Z:

$$I_F=((p-a)+(p-b)+$$
$$+(p-c))\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{R^2}{a}\cdot p,$$
$$I_Z=\frac{1}{p}\ \Bigl((p-a)(p-b)\left(\frac{c}{2}\right)^2+$$
$$+(p-b)(p-c)\left(\frac{a}{2}\right)^2+$$
$$+(p-a)(p-b)\left(\frac{b}{2}\right)^2\Bigr).$$

Задача 7. Докажите, что для любого треугольника справедливо тождество

$$(p-a)(p-b)c^2+(p-b)(p-c)a^2+$$
$$+(p-c)(p-a)b^2=abcp-4S^2.$$

Пользуясь тождеством этой задачи (её решение приводится в конце журнала), завершить доказательство совсем легко: по формуле (5)

$$|FZ|^2=\frac{I_F-I_Z}{p}=\frac{R^2}{4}-\frac{abc}{4p}+\frac{S^2}{p^2}=$$
$$=\frac{R^2}{4}-\frac{abc}{4Rp}R+\left(\frac{S}{p}\right)^2=\frac{R^2}{4}-rR+r^2=$$
$$=\left(\frac{R}{2}-r\right)^2,$$

что и требовалось.

Задача 8. Докажите утверждение теоремы Фейербаха для вневписанных окружностей. (*Указание*: центр вневписанной окружности, касающейси (извне) стороны a, служит центром масс системы $(-a)A$, bB, cC. Соберите эти массы в серединах сторон, пользуясь равенствами $a=(p-b)+(p-c)$, $b=p-(p-b)$, $c=p-$ $-(p-c)$.)

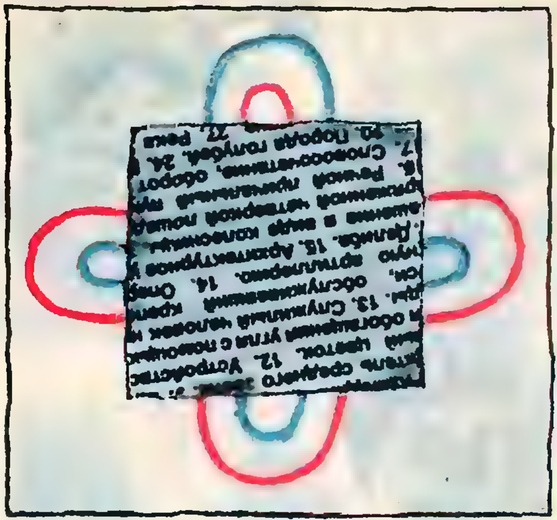
Расстояние до центра масс и вывод формулы Лагранжа

Чтобы доказать формулы (7) и (6), мы выведем формулу, выражающую расстояние от произвольной точки P до центра масс Z системы материальных точек m_1A_1, ..., m_nA_n через расстояния от этой точки до точек системы: $r_i=|PA_i|$, и попарные расстояния между

(Окончание см. на с. 48)

Квант для младших школьников

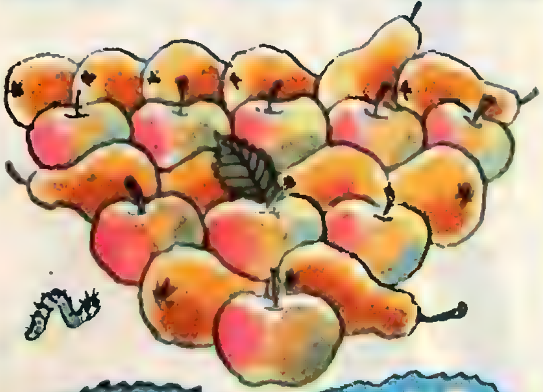
Задачи



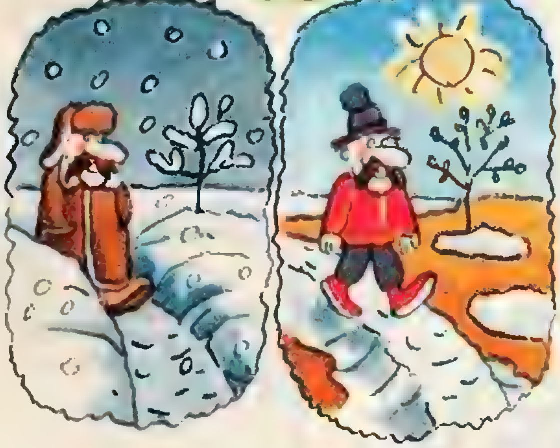
1. Из пункта A вниз по течению реки одновременно отплыли плот и катер, а навстречу им в тот же момент из пункта B отправился второй такой же катер. Когда первый катер достигнет пункта B, к чему будет ближе плот — к пункту A или ко второму катеру?

2. На бумаге нарисованы непересекающиеся контуры: 3 красных и 3 синих. Рисунок накрыли другим листком бумаги, так, что ровно один из контуров оказался накрытым целиком, а все другие частично видны. Определите цвет накрытого контура.

3. Сколько существует натуральных чисел, делящихся на 11, меньших 100 000, сумма цифр которых равна 11?



4. На витрине магазина разложены яблоки и груши в виде треугольника. В первом ряду — одно яблоко, во втором — две груши, в третьем — три яблока и т. д. Сколько лежало яблок и сколько груш, если было n рядов?



5. Замечали ли вы, что, оступившись с утоптанной тропинки, можно довольно глубоко провалиться в рыхлый снег? А в начале весны, когда снег оседает при таянии, тропинки иногда оказываются даже выше окружающей снежной целины. Чем это можно объяснить?

Эти задачи нам предложили: *Г. А. Гальперин, В. В. Произволов, В. Д. Вьюн, Эльхан Агаев* (ученик 7 класса), *А. А. Бялко*

Вниз по кроличьей норе

Л. КЭРРОЛЛ

Многие читатели «Алисы в стране чудес» и «Алисы в зазеркалье» знают, что Льюис Кэрролл — это псевдоним известного английского математика Чарлза Доджсона (1832—1898), автора научных статей и монографий по алгебре. Несомненно, логическая и геометрическая фантазия математика Доджсона сильно повлияла на творчество писателя Льюиса Кэрролла. Наверное, поэтому математик или физик, читающий «Алису», обычно начинает фантазировать; у него непременно возникают интересные вопросы.

И вот «Квант» для младших школьников» решился на следующий эксперимент: в этом и в следующем номере мы помещаем первые две главы книги Л. Кэрролла «Алиса в стране чудес» в замечательном переводе Н. М. Демуровой (М., «Наука», 1979), а также те вопросы и задачи, которые пришли нам в голову при перечитывании этой замечательной книги. Как обычно в КМШ, ответы приводятся в следующих номерах.

Ждем ваших отзывов (их можно присылать по адресу: 103006, Москва, ул. Горького, 32/1, редакция журнала «Квант», АЛИСА). Те читатели, у которых есть указанная книга Л. Кэрролла, могут к отзывам присоединить свои задачи и вопросы к следующим главам книги. Если этот материал вам понравится и мы получим достаточный читательский отклик, публикация «Алисы в стране чудес» будет продолжена.

ВНИЗ ПО КРОЛИЧЬЕЙ НОРЕ

Задача 1. Со скуки Алиса подсчитала количество цифр, нужных для нумерации страниц в книге своей сестры, и получила, что их 373. Сильна ли Алиса в арифметике?

Вопрос 1. Как вы думаете, со старшей или с младшей сестрой сидела Алиса?

Вопрос 2. Каким голосом говорил кролик: „толстым" или „тонким"?

Задача 2. Кролик на бегу уронил часы и они разбились. Мог ли циферблат расколоться на а) 2 части; б) 3 части; в) 4 части с равными суммами чисел, стоящих в этих частях?

Алисе наскучило праздно сидеть рядом с сестрой на берегу реки; разок-другой она заглянула в книжку, которую читала сестра, но там не было ни картинок, ни разговоров.

Что толку в книжке,— подумала Алиса,— если в ней нет ни картинок, ни разговоров?

Она сидела и размышляла, не встать ли ей и не нарвать ли цветов для венка; мысли ее текли медленно и несвязно — от жары ее клонило в сон.

Вдруг мимо пробежал Белый Кролик с красными глазами.

Конечно, ничего удивительного в этом не было. Правда, Кролик на бегу говорил:

— Ах, боже мой, боже мой! Я опаздываю.

Но и это не показалось Алисе особенно странным. Вспоминая об этом впоследствии, она подумала, что ей следовало бы удивиться, однако в тот миг все казалось ей вполне естественным. Но когда Кролик вдруг вынул часы из жилетного кармана и, взглянув на них, помчался дальше, Алиса вскочила на ноги. Ее тут осенило: ведь никогда раньше она не видела кролика с часами, да еще с жилетным карманом в придачу! Сгорая от любопытства, она пролетела? — сказала Алиса вслух.— Я, верно, приближаюсь к центру земли. Дайте-ка вспомнить... Это, кажется, около четырех тысяч миль вниз...

Видишь ли, Алиса выучила кое-что в этом роде на уроках в классе, и, хоть сейчас момент был не самый подходящий демонстрировать свои познания — никто ведь ее не слышал, она не могла удержаться.

— Да так, верно, оно и есть,— продолжала Алиса.— Но интересно, на какой же я тогда широте и долготе?

Сказать по правде, она понятия не имела о том, что такое широта и долгота, но ей очень нравились эти слова. Они звучали так важно и внушительно!

Помолчав, она начала снова:

— А не пролечу ли я всю землю насквозь? Вот будет смешно! Вылезаю, а люди вниз головой! Как их там зовут?.. Антипатии, кажется...

В глубине души она порадовалась, что в этот миг ее никто не слышит, потому что слово это звучало как-то не так.

— Придется мне у них спросить, как называется их страна. Простите, сударыня, где я? В Австралии или в новой Зеландии?

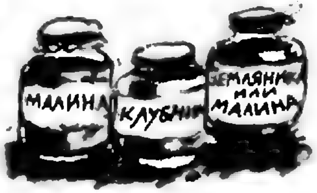
И она попробовала сделать реверанс.

Вопрос 6. А вы помните, что такое широта и долгота? Если помните, скажите, в какой точке земного шара вы оказались бы, пролетев Землю насквозь из того места, где вы сейчас находитесь?

Задача 5. Алиса, пролетев насквозь Землю, оказалась в одной из двух стран *А* или *З*. Она знает, что все жители страны *А* всегда говорят правду, а страны *З* — всегда лгут, притом часто ездят в гости друг к другу. Может ли она, задав один-единственный вопрос первому встречному, узнать, в какой из стран она находится?

Вопрос 3. Могла ли Алиса падать очень медленно?

Задача 3. На трех банках с вареньем рассеянная хозяйка сделала надписи так, как показано на рисунке. Определите сорта варенья в каждой банке, если известно, что все надписи не верны.



Вопрос 4. Что будет, если Алиса отпустит банку?

Вопрос 5. Может ли банка при этом не разбиться?

Задача 4. Падая по лестнице с пятого этажа, Алиса насчитала 100 ступенек. Сколько ступенек она насчитала бы, падая со 2 этажа?

бежала за ним по полю и только успела заметить, что он юркнул в нору под изгородью.

В тот же миг Алиса юркнула за ним следом, не думая о том, как она будет выбираться обратно. Нора сначала шла прямо, ровная, как туннель, а потом вдруг круто обрывалась вниз. Не успела Алиса и глазом моргнуть, как она начала падать, словно в глубокий колодец.

То ли колодец был очень глубок, то ли падала она очень медленно, только времени у нее было достаточно, чтобы прийти в себя и подумать, что же будет дальше. Сначала она попыталась разглядеть, что ждет ее внизу, но там было темно, и она ничего не увидела. Тогда она принялась смотреть по сторонам. Стены колодца были уставлены шкафами и книжными полками; кое-где висели на гвоздиках картины и карты. Пролетая мимо одной из полок, она прихватила с нее банку с вареньем. На банке было написано «АПЕЛЬСИНОВОЕ», но увы! она оказалась пуста. Алиса побоялась *бросить* банку вниз — как бы не убить кого-нибудь! На лету она умудрилась *засунуть* ее в какой-то шкаф.

«Вот это упала, так упала! — подумала Алиса.— *Упасть с лестницы* теперь для меня пара пустяков. А наши решат, что я ужасно смелая. Да свались я хоть с крыши, я бы и то не пикнула».

Вполне возможно, что так оно и было бы.

А она все падала и падала. Неужели этому не будет конца?

— Интересно, сколько миль я уже

Можешь себе представить *реверанс* в *воздухе* во время падения?

Как, по-твоему, тебе бы удалось его сделать?

— А они, конечно, подумают, что страшная невежда. Нет, не буду никого спрашивать! Может, увижу где-нибудь надпись! А она все падала и падала. Делать нечего, помолчав, Алиса снова заговорила.

— Дина будет меня сегодня весь вечер искать! Ей без меня скучно!

Диной звали их кошку.

— Надеюсь, они не забудут в полдник налить ей молочка... Ах, Дина, милая, как жаль, что тебя со мной нет.

Тут раздался страшный треск. Алиса упала на кучу валежника и сухих листьев.

Она ничуть не ушиблась и быстро вскочила на ноги. Взглянула наверх — там было темно. Перед ней шел другой коридор, а в конце его мелькнул Белый Кролик. Нельзя было терять ни минуты, и Алиса помчалась за ним следом. Она слышала, как, исчезая за поворотом, Кролик произнес:

— Ах, мои усики! Ах, мои ушки! Как я опаздываю!

Повернув за угол, Алиса надеялась тут же увидеть Кролика, но его нигде не было. А она оказалась в длинном низком зале, *освещенном рядом ламп*, свисавших с потолка.

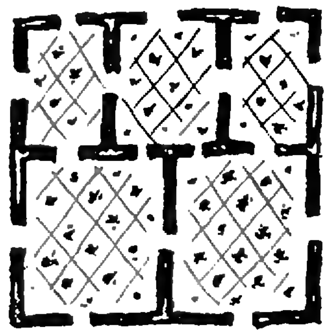
Дверей в зале было множество, но все оказались заперты. Алиса попробовала открыть их сначала с одной стороны, потом с другой, но убедившись, что ни одна не поддается, она с грустью прошла по залу, соображая, как ей от-

Задача 6. Полдник бывает в полдень, а в полдень стрелки часов совпадают. а) Когда они совпадут в следующий раз? б) Сколько в сутках таких моментов? в) Сколько раз в сутки стрелки часов перпендикулярны?

ПЕРЕВЕРНИ СТРАНИЦУ

Задача 7 Сколькими способами можно осветить зал, если в ряду десять ламп и каждая из ламп может гореть или быть выключенной?

Задача 8. Часть подземного замка имеет план, показанный на рисунке. Можно ли прогуляться по замку так, чтобы пройти через каждую дверь ровно один раз?



Задача-шутка. Можете ли вы, обнаружив в комнате мышиную норку, вползти в нее?

сюда выбраться.

Вдруг она увидела стеклянный столик на трех ножках. На нем не было ничего, кроме крошечного золотого ключика. Алиса решила, что этот ключ от одной из дверей, но увы! — то ли замочные скважины были слишком велики, то ли ключик слишком мал, только он не подошел ни к одной, как она ни старалась. Пройдясь по залу во второй раз, Алиса увидела занавеску, которую не заметила раньше, а за ней оказалась маленькая дверца дюймов в пятнадцать вышиной. Алиса вставила ключик в замочную скважину — и, к величайшей ее радости, он подошел!

Она открыла дверцу и увидела за ней нору, совсем узкую, не шире крысиной. Алиса встала на колени и заглянула в нее — в глубине виднелся сад удивительной красоты. Ах, как ей захотелось выбраться из темного зала и побродить между яркими цветочными клумбами и прохладными фонтанами. Но она не могла просунуть в нору даже голову.

Если б моя голова и прошла,— подумала бедная Алиса,— что толку! Кому нужна голова без плечей? Ах, почему я не складываюсь, как подзорная труба! Если б я только знала, с чего начать, я бы, наверно, сумела.

Видишь ли, в тот день столько было всяких удивительных происшествий, что ничто не казалось ей теперь совсем невозможным.

Сидеть у маленькой дверцы не было никакого смысла, и Алиса вернулась к стеклянному столику, смутно надеясь найти на нем другой ключ, или, на

* * *

— Какое странное ощущение! — воскликнула Алиса.— Я, верно, складываюсь, как подзорная труба.

И не ошиблась, в ней сейчас было всего десять дюймов росту. Она подумала, что легко пройдет теперь сквозь дверцу в чудесный сад, и очень обрадовалась. Но сначала на всякий случай она немножко подождала, ей хотелось убедиться, что больше она не уменьшается. Это ее слегка тревожило.

— Если я и дальше буду так уменьшаться,— сказала она про себя,— я могу и вовсе исчезнуть. Сгорю, как свечка! Интересно, какая я тогда буду?

И она постаралась представить себе, как выглядит *пламя свечи после того, как свеча потухнет*. Насколько ей помнилось, такого она никогда не видала.

Подождав немного и убедившись, что больше ничего не происходит, она решила тотчас же выйти в сад. Бедняжка! Подойдя к дверце, она обнаружила, что забыла золотой ключик на столе, а вернувшись к столу, поняла, что ей теперь до него не дотянуться. Сквозь стекло она ясно видела снизу лежащий на столе ключик. Она попыталась взобраться на стол по стеклянной ножке, но ножка была очень скользкая. Устав от напрасных усилий, бедная Алиса села на пол и заплакала.

— Ну, хватит! — строго приказала она себе немного спустя.— Слезами горю не поможешь. Советую тебе сию же минуту перестать!

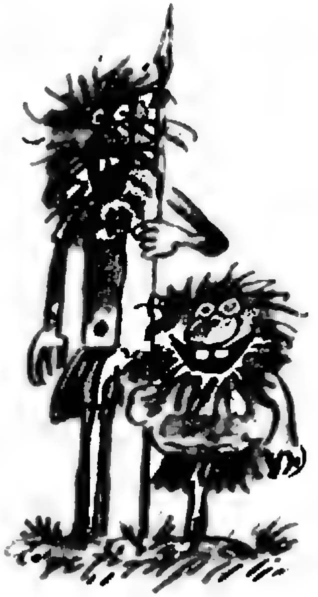
Она всегда давала себе хорошие со-

Задача 9. Представим себе что в этом момент перед Алисой предстали два антипода X и Y и сказали ей следующее:

X: Один из нас живет в стране A;

Y: Не верьте ему! Он лжет! В пузырьке яд!

Что в пузырьке и в какой стране живут X и Y?



Вопрос 8. А вы видели? Нет? Тогда попробуйте представить, как это выглядит.

Вопрос 7. Как долго можно держать в руках раскалённую кочергу?

худой конец, руководство к складыванию наподобие подзорной трубы... Однако на этот раз на столе оказался пузырек.

— Я совершенно уверена, что раньше его здесь не было! — сказала про себя Алиса.

К горлышку пузырька была привязана бумажка, а на бумажке крупными красивыми буквами было написано: «ВЫПЕЙ МЕНЯ!»

Это, конечно, было очень мило, но умненькая Алиса совсем не торопилась следовать этому совету.

— Прежде всего надо убедиться, что на этом пузырьке нигде нет пометки «Яд!»,— сказала она.

Видишь ли, она начиталась всяких прелестных историй о том, как дети сгорали живьем или попадали на съедение диким зверям, и все эти неприятности происходили с ними потому, что они не желали соблюдать простейших правил, которым обучали их друзья: если слишком долго держать в руках раскаленную докрасна кочергу, в конце концов обожжешься; если поглубже полоснуть по пальцу ножом, из пальца обычно идет кровь; если разом осушить пузырек с пометкой «Яд!», рано или поздно почти наверняка почувствуешь недомогание. Последнее правило Алиса помнила твердо.

Однако на этом пузырьке никаких пометок не было, и Алиса рискнула отпить из него немного. Напиток был очень приятен на вкус, и Алиса выпила его до конца.

Порой ей казалось, что она давала себе очень хорошие советы, хоть следовала им нечасто. Порой же ругала себя так беспощадно, что глаза ее наполнялись слезами. А однажды она даже попыталась отшлёпать себя по щекам за то, что схитрила, играя в одиночку партию в крокет. Эта глупышка очень любила притворяться двумя разными девочками сразу.

— Но сейчас это при всем желании невозможно! — подумала бедная Алиса.— Меня и на одну-то едва-едва хватает!

Тут она увидела под столом маленькую стеклянную коробочку. Алиса открыла ее, внутри был пирожок, на котором коринками было красиво написано: «Съешь меня!»

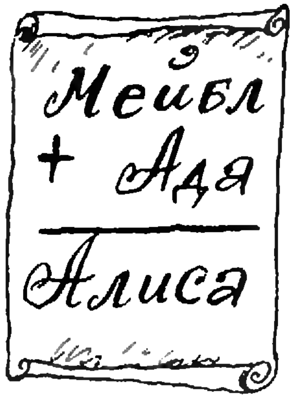
— Что ж,— сказала Алиса,— я так и сделаю. Если при этом я вырасту, я достану ключик, а если уменьшусь — пролезу под дверь. Мне бы только попасть в сад, а как — все равно!

Она откусила от пирожка и с тревогой подумала: «Расту или уменьшаюсь? Расту или уменьшаюсь?»

Руку Алиса при этом положила на макушку, чтобы чувствовать, что с ней происходит. Но, к величайшему ее удивлению, она не стала ни выше, ни ниже. Конечно, так всегда и бывает, когда ешь пирожки, но Алиса успела привыкнуть к тому, что вокруг происходит одно только удивительное!; ей показалось скучно и глупо, что жизнь опять пошла по-обычному. Она откусила еще кусочек и вскоре съела весь пирожок.

Вопрос 9. Как взобраться по скользкой стеклянной ножке?

Задача 10. Разгадайте числовой ребус
если *м*=4, *й*=6



ПРОДОЛЖЕНИЕ СЛЕДУЕТ...

Гармонический ряд

(Начало см. на с. 32)

Ну конечно. Каждая из групп, ограниченная выделенными числами, например 1/5+1/6+1/7+1/8 или 1/9+ +1/10+...+1/16, имеет сумму бо́льшую, чем 1/2. А этих групп — бесконечно много! Частичные суммы гармонического ряда становятся больше, чем 1/2+1/2+...+1/2. Взяв сумму из $2n$ групп, мы получим число, большее n. Ряд расходится.

* * *

Этот удивительный факт проявляется самым неожиданным образом. Например, при решении следующей задачи: *как, имея n кирпичей, положить их друг на друга так, чтобы самый верхний был выдвинут в сторону на максимально возможное расстояние?*

Если кирпичей всего два, то их, очевидно, надо составить так, чтобы центр масс верхнего оказался над краем нижнего: тогда верхний кирпич будет выступать в сторону на 1/2 (длину кирпичей мы примем равной 1). Центр масс такой пары отстоит от края нижнего кирпича на 1/2. Положим эту пару на третий кирпич так, чтобы ее центр масс оказался над его краем (рис. 1). При этом верхний кирпич будет выдвинут в сторону на расстояние 1+1/2.

Уже не частичные ли суммы гармонического ряда возникают по ходу нашего построения? Да, и это легко доказать по индукции. Утверждение, подлежащее доказательству, сформулируем так: *центр масс устойчивой стопки из n кирпичей, где верхний максимально выдвинут в сторону, расположен на расстоянии 1/n от края нижнего кирпича* (рис. 2). Это утверждение мы уже проверили для начальных n, равных 2 и 3. Предположим, что оно верно для стопки из $(n-1)$ кирпича, составленной описанным выше образом. Подложим под эту стопку n-й кирпич, чтобы его край оказался под центром тяжести стопки. Вспомним известную формулу для координат центра масс системы из двух тел m_1 и m_2:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.$$

Воспользуемся системой координат, связанной с рисунком, начало которой размещено точно под краем нижнего кирпича, и будем понимать под первым телом нижний кирпич, а под вторым — положенную на него стопку из $(n-1)$ кирпича. Тогда $x_1=1$, $x_2=0$, $m_2=(n-1)m_1$, $x=\frac{1}{n}$. Утверждение доказано. А вместе с ним доказано и такое: *n кирпичей можно составить так, что верхний будет выступать в сторону за край нижнего на расстояние S_{n-1}, где S_n — n-я частичная сумма гармонического ряда.*

Величина S_n, как мы знаем, неограниченно растет с ростом n. Итак, достаточно высокую стопку кирпичей можно загнуть в сторону сколь угодно далеко! Невероятно, но факт! Правда, величины S_n растут очень медленно. И если мы хотим, например, чтобы боковое уклонение превышало длину кирпича хотя бы вдвое, нам придется положить друг на друга ни много ни мало тридцать два кирпича.

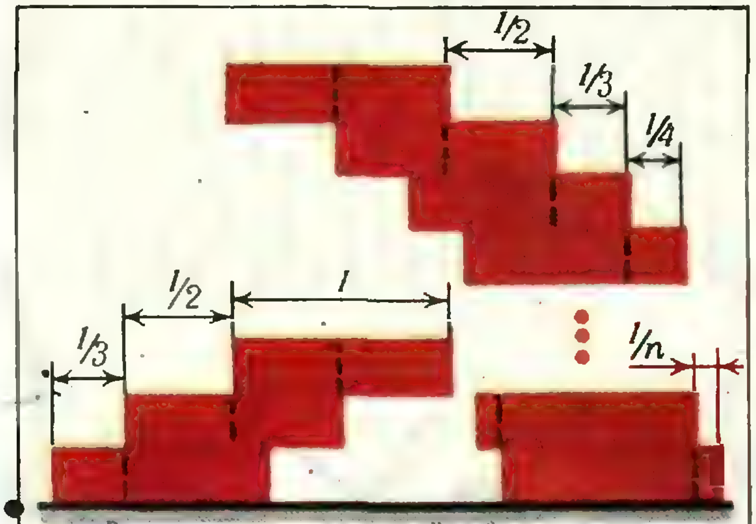


Рис. 1. *Рис. 2.*

* * *

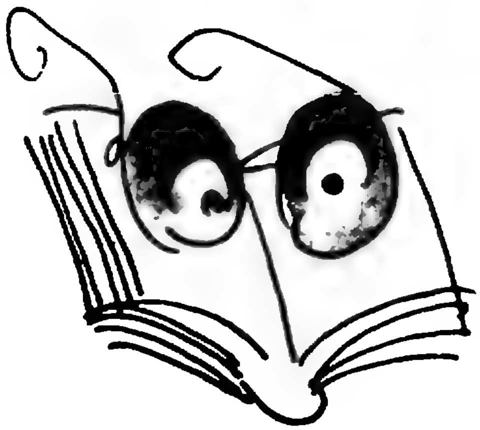
Если подсчитывать частичные суммы гармонического ряда, приводя их к общему знаменателю, тотчас обнаружится любопытная деталь: во-первых, знаменатель суммарной дроби всегда будет четным, во-вторых, все слагаемые в числителе, за исключением одного-единственного, тоже четные. Первое неудивительно: оно обусловлено наличием в гармоническом ряде слагаемого 1/2. Второе же, если бы удалось его доказать для произвольной частичной суммы ряда, сразу же позволило бы утверждать, *что среди чисел S_n нет ни одного целого.* Попробуем это доказать.

Вновь нам могут сослужить добрую службу степени половины, то и дело встречающиеся в гармоническом ряде. Взяв произвольную частичную сумму ряда, отыщем в ней наибольшую степень половины: $1/2p$. Знаменатели всех других слагаемых этой суммы содержат двойку в степени меньшей, чем p. Поэтому при приведении всей суммы к общему знаменателю числитель дроби $1/2p$ будет умножен на нечетное число, а числители всех остальных дробей — на четные. Это и обосновывает высказанное ранее утверждение: в числителе суммарной дроби все слагаемые, за исключением одного, — четные; после суммирования в числителе получается нечетное число, а поскольку знаменатель любой такой дроби — четный, дробь не может равняться целому числу.

* * *

Гармонический ряд обладает и многими другими замечательными свойствами и приложениями. В частности, в теории музыки — недаром он называется гармоническим! Но это уже, как говорится, другая история...

Ю. В. Побожий



Стереоскопические чертежи

А. И. КЛИМАНОВ

Многим школьникам плохо дается стереометрия. Это не мудрено — не так легко по *плоскому* чертежу увидеть форму *пространственного* тела. Для этого нужно иметь пространственное воображение — умение мысленно «вытолкнуть» плоский чертеж в пространство, наделить нарисованные на плоской бумаге линии объемным содержанием. Такое объемное видение плоского чертежа требует особой сноровки.

Другое дело — *стереоскопический чертеж.* На нем любой человек с нормальным зрением видит без напряжения изображаемый предмет в трех измерениях. При этом возникает *стереоэффект*: линии как бы поднимаются над листом бумаги, кажется, что смотришь не на рисунок, а на объемную модель.

Существуют разные виды стереоскопических изображений: зеркальный, линзовый, растровый и др. Мы остановимся лишь на *анаглифическом стереоизображении* — это чертеж, состоящий из двух «полукартин», исполненных взаимно-дополнительными красками, который потом рассматривается через очки-светофильтры.

Почему возникает стереоэффект?

Когда мы смотрим на какой-нибудь объемный предмет — скажем, спичечный коробок, лежащий перед нами на столе, — на сетчатке каждого глаза регистрируется плоское изображение этого предмета. В первом приближении можно считать, что происходит *центральное проецирование* коробка на плоскость сетчатки *). Но левый и правый глаз находятся на некотором расстоянии друг от друга. Стало быть, проецирование производится из двух разных центров — поэтому плоские изображения коробка *различны*, каждый глаз видит коробок в своем ракурсе. Информация с сетчатки каждого глаза передается в кору головного мозга, где она удивительно обрабатывается: мозг как бы совмещает правый и левый ракурс коробка, но что-то от каждого ракурса остается — возникает «ощущение объемности» *).

Стереоскопическое изображение искусственно создает такое же ощущение объемности, за счет тщательно продуманного «обмана мозга». С этой целью в левый глаз засылается изображение «левого ракурса» объемного предмета, в правый глаз — «правого ракурса», мозг «по привычке» совмещает эти изображения, возникает *иллюзия объемности* — стереоэффект.

Различные виды стереоизображений различаются способом засылки разных изображений в правый и левый глаз. При методе цветных стереопар, о котором здесь речь, засылка производится очень просто: на одном листе бумаги выполняются два чертежа (*полукартины*) красным и синим цветом, а цветные светофильтры очков пропускают в каждый глаз именно нужную ему полукартину.

Прежде чем заняться рисованием стереоскопических чертежей, давайте посмотрим на ту стереокартинку, которая имеется в этом номере журнала. Для этого сначала

Сделаем очки

Здесь самое сложное — раздобыть подходящие цветные пленки (нужна красная и синяя). В идеале красная пленка должна полностью поглощать красный цвет на рисунке и контрастно выделить на нем синий цвет, а синяя пленка — наоборот.

При отсутствии цветной пленки можно использовать фильтры, предназначенные для фотографических объективов, или изготовить их на ацетатной основе из обычной фотопленки. Для этого эмульсионный слой пленки смывают горячей водой, ацетатную основу просушивают, затем погружают ее в раствор красителей, растворимых в уксусе или спирте. Наиболее высококачественные цветные фильтры изготовляются на желатиновой основе (подробнее описание этого способа имеется в книге С. С. Гуревича *Объемные печатные иллюстрации*, М.: Искусство, 1959)

При наличии пленки очки делаются очень просто. Из плотной бумаги или тонкого картона по размерам, указанным на рисунке 1, вырезаем две сторонки, заднюю и переднюю, промазываем их клеем, после чего на прорези передней сторонки накладываем цветные пленки (красная слева), затем обе половины совмещаем и склеиваем. Очки готовы, давайте

Посмотрим на стереокартину

В этом номере «Кванта» на 4-й странице обложки — стереочертеж. Начнем разглядывать его через сделанные нами очки. Стереоскопический эффект появляется не сразу, он возникает спустя некоторое время после начала рассматривания. При этом нужно найти оптимальное расстояние и угол зрения, при котором получается наибольший стереоэффект. Чер-

---

*) О центральном проецировании можно прочитать на «геометрической страничке» в «Кванте», 1984, № 3

*) Чтобы прочувствовать этот механизм, проделайте такой эксперимент: поднесите спичечный коробок поближе к лицу и посмотрите на него несколько раз каждым глазом поочередно, а затем обоими глазами сразу

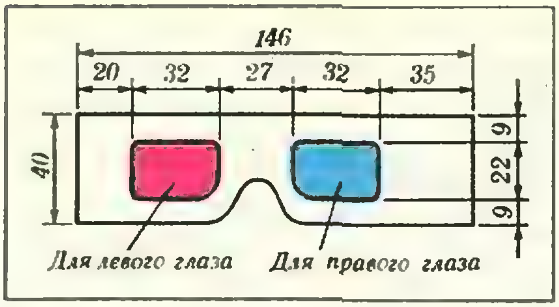


Рис. 1.

теж должен быть освещен ровным, мягким, рассеянным светом.

При рассматривании стереопары через двуцветные очки вместе с основным изображением иногда появляются добавочные бледные линии или контуры полукартин. В этом случае надо ослабить освещенность стереочертежа или сгустить плотность окраски светофильтров. Часто бывает достаточно увеличить плотность одного синего светофильтра. Если же изображение при рассматривании получается недостаточно ясным, четким, следует усилить освещение.

Приведенный здесь чертеж получен путем проецирования на горизонтальную плоскость. Поэтому его надо рассматривать, расположив горизонтально.

* * *

Для изготовления стереочертежей мы будем пользоваться специальным приспособлением, называемым *шаблоном-трафаретом.* Это приспособление многократного использования нужно изготовить заранее. Для этого, в свою очередь, нужно построить так называемый *перспективный масштаб.* С него мы и начнем.

Построение перспективного масштаба

Перспективный масштаб устанавливает соотношения между натуральными и перспективными линейными размерами изображаемого предмета в центральном проецировании на плоскость.

Построение перспективного масштаба высот показано на рисунке 2, где обозначены:

точка S — *центр проецирования*, отстоящий от своей горизонтальной проекции S_1 на высоту h=300 мм;

a — расстояние (160 мм) между горизонтальной проекцией S_1 до основания натурального масштаба O_1:

O_1N — *натуральный масштаб* высот (150 мм), разделенный на равные масштабные отрезки;

O_1N_S — *перспективный масштаб*, в котором масштабные отрезки имеют разные длины (по мере удаления от точки O_1 они увеличиваются).

D_k — *длина* произвольного перспективного масштабного отрезка. Все линейные элементы изображаемого предмета измеряются в единицах натурального масштаба.

Перспективный масштаб определяется построением или вычисляется по формуле $x_k = aK/(h-K)$. В последнем случае длины отдельных отрезков перспективного масштаба считаются от нулевой отметки O_1.

С целью упрощения построения перспективного масштаба дана таблица с вычислёнными величинами отрезков перспективного масштаба для значений K от 5 до 150 мм. В случае необходимости промежуточные величины находятся вышеуказанными способами (по формуле или построением).

Таблица данных для построения перспективного масштаба.

K	x_K	K	x_K	K	x_K	K	x_K	K	x_K
5	2,71	35	21,13	65	4,25	95	74,15	125	114,28
10	5,52	40	24,61	70	48,70	100	80,00	130	122,35
15	8,42	45	28,23	75	53,33	105	86,15	135	130,91
20	11,43	50	32,00	80	58,18	110	92,64	140	140,00
25	14,54	55	35,92	85	63,25	115	99,46	145	149,68
30	17,78	60	40,00	90	68,57	120	106,67	150	160,00

Изготовим шаблон-трафарет

Шаблон-трафарет (рис. 3) служит основой способа построения двойной центральной проекции (двух полукартин) на горизонтальной плоскости. (Способ разработан Б. А. Аничкиным.)

На шаблон-трафарет размером 430×350 мм наносятся:

две *горизонтальные проекции* L_1 и R_1 *центров проецирования* L и R; (расстояние между центрами проецирования L и R называется *стереобазисом*; *нормальным* стереобазисом считается среднее расстояние между центрами зрачков человека, равное 65 мм;

два *перспективных масштаба* (левый и правый); в том, как их получить, сказано выше;

габаритный прямоугольник E (148×210 мм), на котором закрепляются сменные листы для построения эскизов стереоскопических чертежей;

кресты-метки на габаритном прямоугольнике, служащие для совмещения обеих полукартин с такими же метками на стереоскопическом чертеже;

ось симметрии построения, проходящая через центр горизонтальной проекции S_1 стереобазиса S (выполнена штрихпунктирной линией).

Как пользоваться шаблоном-трафаретом

Изображаемый объект мы считаем расположенным на габаритном прямоугольнике в его центре, так чтобы боковые проекции объекта *находились на равных расстояниях* от оси построения, и его ближайшая к нам граница от-

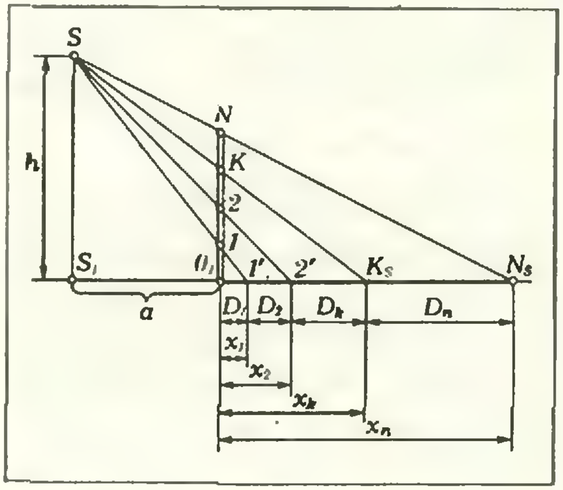


Рис. 2.

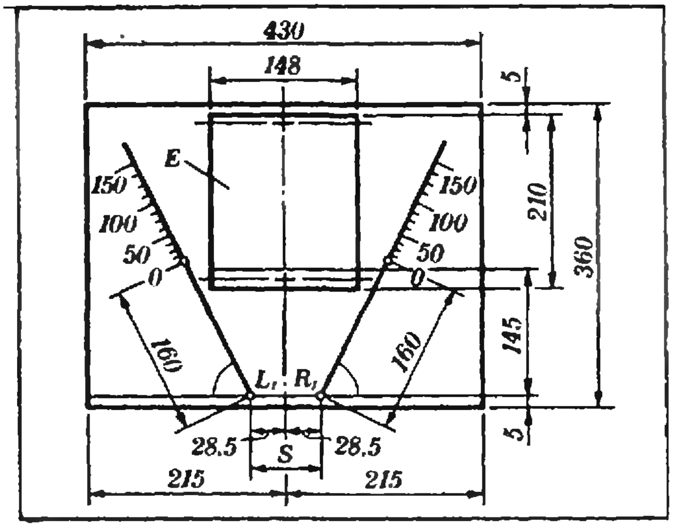


Рис 3.

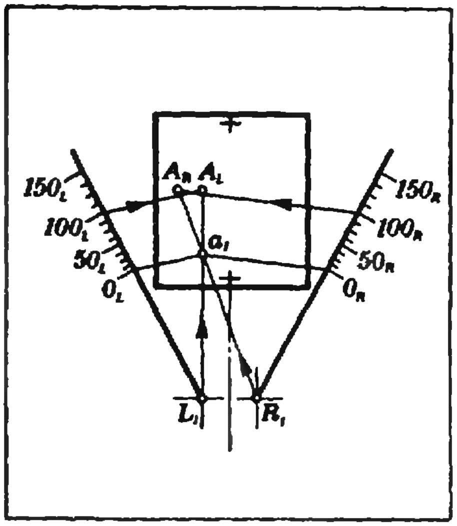


Рис. 4.

стояла не менее чем на 145 мм от горизонтальной проекции L_1 и R_1.

Рассмотрим пример построения центральной проекции точки A. Точка A, заданная своей горизонтальной проекцией a_1, отстоит от предметной плоскости на высоте $h=100$ мм (рис. 4).

Для определения центральной проекции точки A выполняют следующие построения: через точку L_1 проводят проекцию проецирующего луча LA через точку a_1, продолжая его вверх за точку a_1; нулевую отметку левого перспективного масштаба O_L соединяют с точкой a_1 отрезком прямой O_La_1; из отметки 100_L (левого перспективного масштаба) соответствующей заданной высоте изображаемой точки A над предметной плоскостью проводят прямую параллельно отрезку O_La_1 до пересечения с проекцией проецирующего луча LA.

Полученная при пересечении точка A_L является центральной проекцией точки A для левого центра проецирования. Аналогичные построения для этой же точки A выполняются для правого центра проецирования, в результате чего определяется положение точки A_R — центральной проекции точки A для правого центра проецирования.

Дальнейшее построение стереопар сводится к нахождению всех характерных точек изображаемого объекта и соединению их между собой линиями.

Для каждого центра проецирования строится отдельная полукартина. В простейших случаях изображение обеих полукартин может вычерчиваться на одном сменном листе.

На практике обычно используется стереобазис b меньше нормального ($b<65$ мм). При этом нет необходимости делать новый шаблон-трафарет. Просто на изготовленном шаблоне отмечают две точки L'_1 и R'_1 на отрезке L_1R_1 симметрично относительно его центра, так чтобы $|L'_1R'_1|=b$. Далее все построения выполняют точно так же, только с заменой L_1 на L'_1 и R_1 на R'_1.

Изготовление стереоскопических чертежей

Оно состоит из двух этапов: построения эскизов в карандаше и изготовления стереопары в цвете.

До составления эскиза определяются: положение изображаемого предмета относительно центров проецирования и горизонтальной плоскости проекции (плоскости шаблона); высота всех характерных точек предмета, находящихся над горизонтальной плоскостью; рабочая величина стереобазиса ($b\leqslant 65$ мм).

Определение стереобазиса — дело тонкое, выбор его оптимального размера достигается методом проб и ошибок: помогает, конечно, опыт.

От стереобазиса зависит смещение одноименных точек стереопары; мы советуем выбирать его величину так, чтобы максимальное смещение (достигаемое на наиболее высоких точках) было не более 12 мм.

Для чертежа на 4-й странице обложки мы использовали стереобазис 40 мм.

Составление эскиза начинают с нахождения горизонтальной проекции изображаемого предмета. В данном случае, когда предмет располагается на той же горизонтальной плоскости, на которой строится его проекция, все горизонтальные элементы изображаемого предмета проецируются в натуральном виде без искажения, независимо от места расположения центров проецирования. Далее, пользуясь шаблоном-трафаретом, строят обе центральные проекции A_L и A_R, каждой характерной точки A предмета, как указано в предыдущем разделе, и они соединяются линиями.

Если необходимо дополнить стереочертеж буквенными или цифровыми обозначениями, нужно нанести их на обе полукартины. Каждая пара букв, обозначающих одноименные точки изображаемого предмета, располагается на одной горизонтальной прямой, расстояние между ними равняется расстоянию между одноименными точками изображения этого уровня, все вертикальные элементы букв (если начертание шрифта прямое) должны быть направлены по линиям проецирующих лучей к соответствующим центрам проецирования.

Изготовление стереопар в цвете заключается в следующем: белую бумагу окрашивают в желто-охристый цвет (для уменьшения контраста между цветами изображения и белым фоном), покрывая ее крепким настоем чая или водным раствором марганцовки. На эту бумагу переводится на просвет изображение обеих полукартин. На один и тот же лист цветными карандашами или краской, заправленной в рейсфедер, красным цветом копируется изображение, полученное из правого центра проецирования, синим цветом — изображение левой полукартины. В итоге получают цветной стереочертеж.

С готового цветного оригинала, не прибегая к помощи эскизов, можно сделать дубликат. Для этого кроющими красками, гуашью или темперой, в той же последовательности переносят на кальку изображения стереопар. Готовая копия просто накладывается на цветную бумагу подходящего тона и с помощью светофильтров проверяется качество стереоскопического изображения.

Для достижения наибольшего стереоскопического эффекта нужно правильно подобрать цвета красок и светофильтров. Практически это делается так: на белую бумагу наносят ряд цветных линий, затем их рассматривают через светофильтры,— правильно найденный цвет должен, как мы уже говорили, полностью поглощаться фильтром аналогичной окраски и контрастно выделяться фильтром противоположного цвета.

На черном же фоне — наоборот, красный светофильтр выявляет красное изображение, синий — синее, поэтому на обложке цвета полукартин — противоположные (правая — синяя, левая — красная).

Следует учесть, что фон и краски взаимовлияют друг на друга. Поэтому найденные цвета рекомендуется проверять еще раз на фоне будущего чертежа.

Момент инерции в геометрии

(Начало см. на с. 33)

точками системы: $a_{ij}=|A_iA_j|$. В силу (1),

$$m\overrightarrow{PZ}=m_1\overrightarrow{PA}_1+\ldots+m_n\overrightarrow{PA}_n=\sum_i m_i\overrightarrow{PA}_i.$$

Возводя это векторное равенство в скалярный квадрат, получим

$$m^2|PZ|^2=$$
$$=\sum_i m_i\overrightarrow{PA}_i\cdot\sum_j m_j\overrightarrow{PA}_j=\sum_{i,j} m_im_j\overrightarrow{PA}_i\cdot\overrightarrow{PA}_j,$$

где в правой части стоит сумма всех произведений $m_im_j\overrightarrow{PA}_i\cdot\overrightarrow{PA}_j$ при $1\leqslant i,\ j\leqslant n$. Каждое слагаемое этой суммы можно преобразовать, пользуясь равенством

$$|A_iA_j|^2=(\overrightarrow{PA}_j-\overrightarrow{PA}_i)^2=$$
$$=|PA_j|^2+|PA_i|^2-2\overrightarrow{PA}_i\cdot\overrightarrow{PA}_j,$$

$$m_im_j\overrightarrow{PA}_i\cdot PA_j=\frac{1}{2}m_im_j(r_j^2+r_i^2-a_{ij}^2).$$

Складывая эти выражения, получим:

$$m^2|PZ|^2=(\Sigma m_i\overrightarrow{PA}_i)^2=$$
$$=m\sum_i m_ir_i^2-\sum_{1<i<j<n} m_im_ja_{ij}^2 \qquad (1)$$

(мы учли, что сумма слагаемых $m_im_jr_i^2$ по всем $i,\ j,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n$ равна сумме величин $m_jm_ir_i^2$ и что $m_im_ja_{ij}^2=m_jm_ia_{ji}^2$).

Задачи

9. Расстояние между двумя центрами масс. а) Пусть в точках $A_1, \ldots, A_n$ помещены два набора масс — $p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, \ldots, q_n$, причем $p_1+\ldots+p_n=1$ и $q_1+\ldots+q_n=1$, и пусть P и Q — центры масс этих двух систем материальных точек. Докажите, что

$$|PQ|^2=$$
$$=-\sum_{1<i<j<n}(p_i-q_i)(p_j-q_j)|A_iA_j|^2.$$

б) Пусть A и B — центры систем материальных точек $a_1A_1, \ldots, a_nA_n$ и $b_1B_1, \ldots, b_mB_m$. Докажите, что

$$|AB|^2=\frac{1}{ab}\sum_{i,j}a_ib_j|A_iB_j|^2-$$
$$-\frac{1}{a^2}\sum_{i<k}a_ia_k|A_iA_k|^2-$$
$$-\frac{1}{b^2}\sum_{j<l}b_jb_l|B_jB_l|^2,$$

где $a=a_1+\ldots+a_n$, $b=b_1+\ldots+b_m$, индексы i и k в суммах пробегают значения от 1 до n, а j и l — от 1 до m. (Указание: а) покажите, что $\overrightarrow{PQ}=\sum_i(q_i-p_i)\overrightarrow{PA}_i$, воспользуйтесь вторым равенством в (9), справедливым и при $m=0$, полагая в нем $m_i=q_i-p_i$; б) сводится к а), если представить точку A как центр масс системы $(a_1/a)A_1, \ldots, \ldots, (a_n/a)A_n, 0B_1, \ldots, 0B_m$ и, аналогично, точку B.)

10. Формула Эйлера. Пусть M и N — середины отрезков AC и BD, где A, B, C, D — любые 4 точки в пространстве. Докажите, что

$$4|MN|^2-|AB|^2+|BC|^2+|BC|^2+|CD|^2+$$
$$+|DA|^2-|AC|^2-|BD|^2.$$

Какое свойство параллелограмма вытекает из этой формулы?

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Комментарии излишни

«Еще в прошлом веке профессор Эдинбургского университета Грегори сообщал об опытах французского исследователя Бенуа. Последний, исходя из предположения, что между животными существует какая-то «связь на расстоянии», экспериментировал с улитками. Он взял 50 улиток, разделил их на пары и каждую пару поместил отдельно. Через некоторое время, пометив раковины каждой пары одинаковой буквой, исследователь отправил в Америку по одной улитке от каждой пары. Затем в определенное время улитку, помеченную, скажем, буквой А, подвергали в Париже воздействию электрического тока. В тот же момент совершенно одинаково реагировала на ток ее «половина» — улитка, находившаяся в Америке».

Мезенцев Вл. *В лабиринтах живой природы.* М.: Московский рабочий, 1983, с. 195.

Сверхестественная чувствительность несчастных улиток не нуждается в комментариях. Остается только растерянно улыбаться: как это до сих пор инженеры и ученые не заинтересовались таким уникальным способом передачи сигналов на большие расстояния? Ведь открытие, судя по заметке, было сделано более 100 лет тому назад. Вместо того чтобы, как говорится, осваивать такие чрезвычайные результаты из «лабиринтов живой природы», люди прокладывали дорогой кабель через океан, изобретали радио, запускали спутники связи, применили лазеры для передачи информации на большие расстояния. Люди работали.

Подобные мистические сообщения можно просто коллекционировать. Там же (с. 203) читаем:

«В. Л. Дуров (знаменитый дрессировщик — *прим. ред.*) мысленно приказывал собаке: «Подойди к пианино и ударь лапой по белой клавише». Собака выполняла все точно. Присутствовавший при этом В. М. Бехтерев попробовал сделать животному внушение: пес должен подойти к одному из научных сотрудников и вырвать у него из рук платок. О своем замысле Бехтерев не сказал никому ни слова. Внушение удалось: собака выполнила это задание».

Комментарии, действительно, излишни.

задачник Кванта

Задачи

М871—М875; Ф883—Ф887

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 сентября 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М871, М872» или «Ф883». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М871—М875 предлагались на проходившей в апреле 1984 г. в Ашхабаде Всесоюзной математической олимпиаде.

М871. В клетки таблицы размера 3×3 записывают числа 1 или —1. Затем число в каждой клетке заменяется на произведение чисел, стоящих во всех соседних клетках (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону). Докажите, что после нескольких повторений этой операции во всех клетках будут стоять единицы.

И. К. Жук, И. В. Воронович

М872. На плоскости расположены три окружности C_1, C_2, C_3 радиусов r_1, r_2, r_3 — каждая вне двух других, причем $r_1>r_2$ и $r_1>r_3$. Из точки пересечения внешних касательных к окружностям C_1 и C_2 проведены касательные к окружности C_3, а из точки пересечения внешних касательных к C_1 и C_3 — касательные к C_2. Докажите, что последние две пары касательных образуют четырехугольник, в который можно вписать окружность, и найдите ее радиус.

Л. П. Купцов

М873. Учитель написал на доске квадратный трехчлен $x^2+10x+20$. Затем каждый ученик по очереди увеличивал или уменьшал на единицу по своему выбору один из младших коэффициентов (коэффициент при x или свободный член), но не оба сразу. В результате получился трехчлен $x^2+20x+10$. Верно ли, что в некоторый момент на доске был написан квадратный трехчлен с целыми корнями?

А. А. Берзиньш

М874*. При каких целых m и n выполняется равенство а) $(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n$? б) $(a+b\sqrt{d})^m=(b+a\sqrt{d})^n$, где a и b $(a\neq b)$ — взаимно простые натуральные числа, а $d>1$ — натуральное число, среди делителей которого нет квадратов простых чисел?

Ю. В. Михеев

М875. По кругу выписано $n\geqslant 3$ натуральных чисел, причем отношение суммы двух соседей любого из этих чисел к нему самому является натуральным числом. Докажите, что сумма всех таких отношений а) не меньше $2n$, б)* меньше $3n$.

О. Р. Мусин

Ф883. При разрыве неподвижного зенитного снаряда он разлетается на очень большое число осколков, летящих равномерно во все стороны со скоростью v_0. Такой снаряд, летящий вниз со скоростью u, разрывается на высоте H над землей. Когда осколки будут падать на землю наиболее часто?

И. С. Солодовников

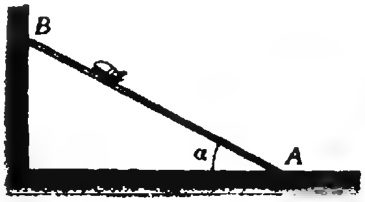


Рис. 1.

Ф884. Задача Н. Е. Жуковского. Жук ползет по жесткой (непрогибающейся) соломинке, опирающейся на гладкий пол и гладкую вертикальную стенку (рис. 1). Соломинка однородная, длина ее l, масса m; масса жука M ($M \gg m$). Соломинка образует угол α с горизонтом. Начальная скорость жука в точке B была равна v_0. Как должен двигаться жук, чтобы соломинка оставалась неподвижной? Как зависит ускорение жука от пройденного им вдоль соломинки расстояния? За какое время жук доползет до нижней точки? Сможет ли жук подняться по соломинке из точки A в точку B?

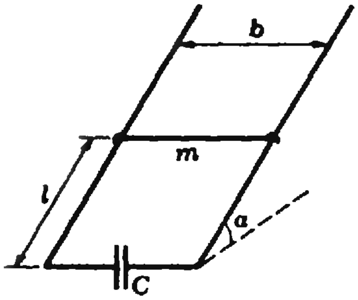


Рис. 2.

Ф885. Концы однородного стержня постоянного сечения поддерживаются при температурах T_1 и T_2 ($T_2 > T_1$). Температурный коэффициент линейного расширения материала стержня равен α. Чему равна длина стержня, если при $t = 0$ °C она была l_0?

Л. Г. Маркович

Ф886. По двум параллельным металлическим направляющим, наклоненным под углом α к горизонту и расположенным на расстоянии b друг от друга, может скользить без трения металлическая перемычка массы m. Направляющие замкнуты снизу на незаряженный конденсатор емкости C, и вся конструкция находится в магнитном поле, индукция которого $\vec{B}$ направлена вертикально (рис. 2). В начальный момент перемычку удерживают на расстоянии l от основания «горки». За какое время перемычка достигнет основания «горки» после того как ее отпустят? Какую скорость она будет иметь у основания? Сопротивлением проводников пренебречь.

А. И. Буздин

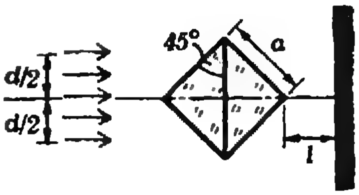


Рис. 3

Ф887. На прозрачное стеклянное тело, представляющее собой два соединенных основаниями конуса, падает пучок параллельных световых лучей, имеющий круглое сечение диаметра d (рис. 3). Размеры тела указаны на рисунке 3; показатель преломления стекла n. Какая картина будет наблюдаться на экране, установленном на расстоянии l от тела?

А. В Хельвас

Problems

M871 — M875; P883 — P887

M871. The numbers +1 and −1 are written in the nine little squares of a 3 by 3 square. Then each number in the little squares is replaced by the product of its neighbours (two little squares are neighbours if they have a common side). Prove that after a finite number of such operations the nine little squares will be filled with + 1's.

I. K. Zhuk, I. V Voronovich

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult

problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than September 30 th. 1984, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант».

Please send the solutions of problems in physics and mathematics, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Problems M871—M875 in this issue were proposed in April 1984 at the All — Union mathematics olympiad in Ashkhabad.

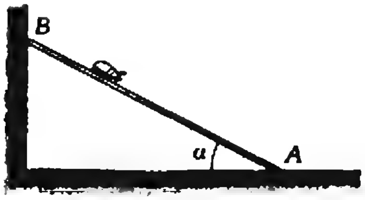


Рис 1

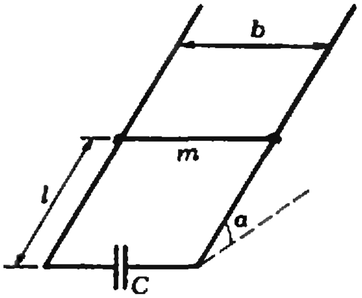


Рис 2

M872. Three circles C_1, C_2, C_3 of radii r_1, r_2, r_3 in the plane are exterior to each other and $r_1>r_2$, $r_1>r_3$. The two tangents to C_3 are drawn from the intersection point of the exterior tangents to C_1 and C_2, and the two tangents to C_2 — from the intersection point of the exterior tangents to C_1 and C_3. Prove that these two pairs of tangents (to C_3 and C_2) form a quadrilateral into which a circle can be inscribed. Find its radius.

L. P. Kuptsov

M873. A math teacher wrote the quadratic trinomial $x^2+10x+20$ on the blackboard. Then each pupil in turn either increased by one or decreased by one either the constant term or the coefficient of x. Finally the trinomial $x^2+20x+10$ appeared. Will a quadratic trinomial with integer roots necessarily appear on the blackboard in the process?

A. A. Berzins

M874.* For what integers m and n do we have a) $(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n$; b) $(a+b\sqrt{d})^m=(b+a\sqrt{d})^n$, where a and b $(a\neq b)$ are relatively prime natural numbers, while $d>1$ is a natural number not divisible by the square of a prime?

Yu. V. Mikheev

M875. $n>3$ natural numbers are written around a circle so that the ratio of the sum of the two neighbours of any number to the number itself is a natural number. Prove that the sum of all such ratios is a) not less than $2n$; b)* not more than $3n$.

O. R. Musin

P883. When it explodes, an antiaircraft shell breaks up into a large number of shell splinters which fly outward uniformely in all directions with velocity v_0. Such a shell, falling downward with velocity u, explodes at the altitude H above ground. When will the shell splinters fall on the ground with maximal frequency?

I. S. Solodovnikov

P884. *The N. E. Zhukovski problem.* A bug crawls along a rigid (unbending) straw, one end of which is on the (smooth) floor, the other — on a smooth wall (see figure Рис. 1). The straw is uniform, its length is l, its mass m, the bug's mass M $(M\gg m)$, the angle between the straw and the horizon is α, the initial velocity of the bug at the point B is v_0. How must the bug move in order to keep the straw motionless? How will the bug's acceleration then depend on the distance travelled along the straw? When will the bug reach the floor? Will the bug be able to crawl up the straw from the point A back to the point B?

P885. The extremities of a uniform rod of constant section are maintained at temperatures T_1 and T_2 $(T_2>T_1)$. The temperature coefficient of linear expansion of the rod is α. What is the length of the rod, if at $t=0°C$ it was l_0?

L. G. Markovich

P886. A metal rod of mass m, joining perpendicularly two parallel metallic rails which form an angle of α with the horizon, slides down the rails without friction; the distance between the rails is b. The rails are joined at the bottom to an uncharged capacitor of capacity C and the entire construction is placed in a magnetic field whose induction $\vec{B}$ is directed vertically upward (see figure Рис. 2). At the initial moment the rod is maintained on the rails at a distance l from the bottom of the rails. How long will it take the rod to reach the bottom after it is freed? What velocity will it have aquired at the bottom? The resistance of the conductors is negligible.

A. I. Buzdin

P887. A beam of parallel light rays with circular section of diameter d falls on a transparent glass body consisting of two cones joined at their common base (see figure Рис. 3). The measurements of the body are shown on the figure. The refraction index of glass is n. What picture will be observed on a screen placed at a distance of l from the body?

A. V. Helvas

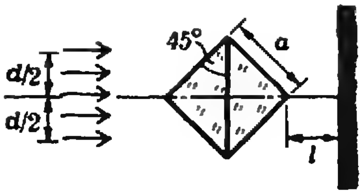


Рис. 3.

Решения задач

M846, M856 — M860; Ф867 — Ф872

M846. *Докажите, что среднее арифметическое длин сторон произвольного выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин его диагоналей.*

Пусть n — число сторон многоугольника (естественно, мы считаем $n \geqslant 4$); тогда число его диагоналей равно $n(n-3)/2$ (поскольку из каждой вершины выходят $n-3$ диагонали и при этом каждая диагональ учитывается дважды). Таким образом, надо доказать, что

$$\frac{s}{n} < \frac{d}{n(n-3)/2}, \qquad (*)$$

где s — сумма длин всех сторон многоугольника, а d — всех его диагоналей.

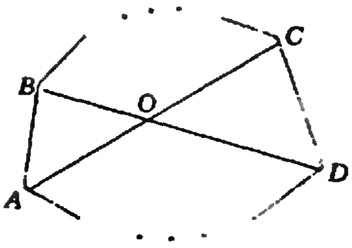
Рассмотрим две несмежные стороны AB и CD и две пересекающиеся диагонали AC и BD, соединяющие их концы (см. рисунок). Так как $|AB| < |AO| + |OB|$, $|CD| < |CO| + |OD|$, где O — точка пересечения диагоналей, имеем

$$|AB| + |CD| < |AC| + |BD|.$$

Сложим такие неравенства для всех пар несмежных сторон. Каждая сторона входит в $n-3$ пары, а каждая диагональ — в две; поэтому в левой части получим $(n-3)s$, а в правой — $2d$. Итак,

$$(n-3)s < 2d,$$

что эквивалентно $(*)$.



В. Ф. Лев

◆

M856. *а) Постройте четырехугольник, зная длины его сторон и длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.*

а) Пусть M и N — середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$, K и L — середины сторон BC и CD (рис. 1). Заметим, что отрезки MK, KN, ML

б) При каких условиях задача имеет решение?

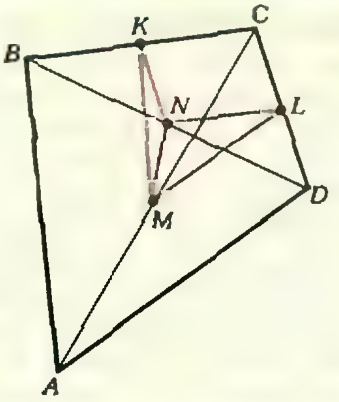


Рис. 1.

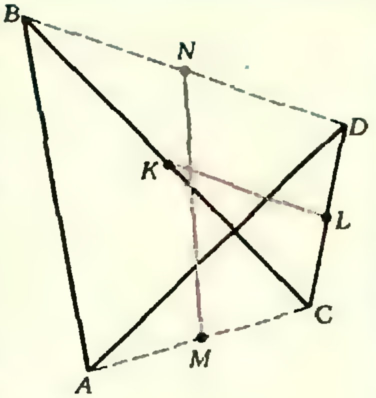


Рис. 2.

и LN параллельны сторонам AB, CD, AD и CB и равны по длине их половинам (как средние линии соответствующих треугольников), то есть их длины нам известны.

Отсюда вытекает следующее построение: строим треугольники NMK и NML (по трем сторонам), затем вершины B и C ($\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{NL}$) и A и D ($\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{KN}$).

б) Очевидно, задача разрешима тогда и только тогда, когда можно построить треугольники NMK и NML (возможно, вырожденные), то есть когда выполнены неравенства

$$||AB|-|BC||\leqslant 2|NM|\leqslant |AB|+|BC|,$$
$$||AD|-|DC||\leqslant 2|NM|\leqslant |AD|+|DC|.$$

Вообще говоря, задача имеет два решения, причем четырехугольник $ABCD$ может оказаться самопересекающимся (рис. 2).

И. З. Титович

◆

М857. *Среди 1984 первых натуральных чисел (от 1 до 1984) отметим те, которые можно представить в виде суммы пяти целых неотрицательных степеней двойки (то есть пяти не обязательно различных чисел 1, 2, 4, 8, ...). Каких чисел окажется больше: отмеченных или не отмеченных?*

Ответ: отмеченных чисел больше.

Поскольку $2^n+2^n=2^{n+1}$, сумму нескольких степеней двойки всегда можно переписать так, что все они будут различны, при этом число слагаемых может уменьшиться, например $4+2+2+2=4+4+2=8+2$. Следовательно, любое отмеченное число есть сумма не более чем пяти различных слагаемых вида 2^n, где $n=0, 1, ..., 10$ ($2^{11}=2048>1984$). Найдем число N таких сумм, то есть наборов различных степеней $n_1, ..., n_k$ ($0\leqslant n_i\leqslant 10$, $1\leqslant k\leqslant 5$). Каждому набору $n_1, ..., n_k$ взаимно-однозначно соответствует набор, составленный из всех чисел от 0 до 10, кроме $n_1, ..., n_k$, поэтому количество N_k наборов из k чисел равно количеству наборов из $11-k$ чисел, и $N=N_1+...+N_5=N_{10}+...+N_6=(N_1+N_2+...+N_{10})/2$. Сумма $N_0+N_1+...+N_{11}$ — это число всех подмножеств множества $\{0, 1, ..., 11\}$, оно равно 2^{11} (каждому подмножеству A взаимно-однозначно отвечает последовательность $d_0, ..., d_{10}$ из нулей и единиц, в которой $d_i=0$, если $i\notin A$ и $d_i=1$, если $i\in A$; число таких последовательностей, очевидно, равно 2^{11}). А так как $N_0=N_{11}=1$ (одно пустое подмножество и одно подмножество, совпадающее со всем множеством $\{0, 1, \ldots, 11\}$), $N=(2^{11}-2)/2=1023$. Для читателей, знакомых с началами комбинаторики, мы повторяем этот расчет на полях, пользуясь простейшими свойствами *числа сочетаний* C_n^k.

$$N=C_{11}^{1}+\ldots+C_{11}^{10}=$$
$$=\frac{1}{2}\left((C_{11}^{1}+C_{11}^{10})+\ldots+(C_{11}^{5}+C_{11}^{6})\right)=$$
$$=\frac{(C_{11}^{0}+C_{11}^{1}+\ldots+C_{11}^{11})-2}{2}=$$
$$=\frac{(1+1)^{11}-2}{2}=1023.$$

Теперь заметим, что любое отмеченное число единственным образом разлагается в сумму различных степеней двойки. (Это доказывается от противного: если a — наименьшее число, имеющее хотя бы два разложения, $a=2^{n_1}+\ldots+2^{n_k}=2^{m_1}+\ldots+2^{m_l}$, где $n_1<\ldots<n_k$, $m_1<\ldots<m_l$, то, очевидно, $n_1\neq m_1$, например, $n_1>m_1$; но тогда число $a/2^{m_1}=2^{n_1-m_1}+\ldots+2^{n_k-m_1}$ четно, и в то же время $a/2^{m_1}=1+2^{m_2-m_1}+\ldots+2^{m_l-m_1}$ — нечетно. Противоречие.) Отсюда, учитывая, что любое отмеченное число является суммой пяти (не обязательно различных) степеней двойки, то есть больше 4, и что $2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}=1984$, получаем, что количество отмеченных чисел равно $N-4=1019>1984-1019$.

В. Н. Дубровский

◆

М858. *Для величин α, β и γ углов некоторого треугольника выполнено соотношение*

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin\gamma.$$

а) Найдите α, β, γ, если известно, что треугольник равнобедренный (рассмотрите все случаи).

б) Может ли треугольник быть остроугольным?

в) Какие значения может принимать наибольший угол треугольника?

а) Ответ: либо $\alpha=\beta=\pi/4$, $\gamma=\pi/2$, либо γ и один из углов α или β равны $\arcsin(\sqrt{2}-1)/2$, а третий угол — $\pi-2\arcsin(\sqrt{2}-1)/2$.

Достаточно рассмотреть два случая: $\alpha=\beta$ и $\alpha=\gamma$. В первом случае условие перепишется в виде

$$2\sin^2\alpha=\sin(\pi-2\alpha)=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

и, поскольку $\sin\alpha\neq0$, $\sin\alpha=\cos\alpha$, то есть $\alpha=\pi/4$ ($\beta=\pi/4$, $\gamma=\pi/2$).

Во втором случае имеем $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha=\sin\alpha$ или $4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)=\sin\alpha(1-\sin\alpha)$. Сокращая на $\sin\alpha(1-\sin\alpha)$ $(0<\sin\alpha<1)$, приходим к уравнению $4\sin\alpha+4\sin^2\alpha=1$, то есть $\sin\alpha=(\sqrt{2}-1)/2$.

б) Ответ: не может. Доказательство проведем от противного. Предположим, что α и β — острые углы. Из условия $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\pi-(\alpha+\beta))=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ вытекает, что

$$\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)=\sin\beta(\cos\alpha-\sin\beta). \qquad (*)$$

Допустим, что $\sin\alpha>\cos\beta$, тогда в силу $(*)$ $\cos\alpha>\sin\beta$ ($\sin\alpha$ и $\sin\beta$ положительны). Поскольку β — острый угол, оба неравенства можно возвести в квадрат: $\sin^2\alpha>\cos^2\beta$, $\cos^2\alpha>\sin^2\beta$. Складывая эти неравенства, получим противоречие: $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha>\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$. Аналогично доказывается, что и случай $\sin\alpha<\cos\beta$ невозможен. Остается предположить, что $\sin\alpha=\cos\beta$. Но тогда $\alpha=\pi/2-\beta$, а угол $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ — прямой.

Тем самым мы доказали, что все три угла не могут быть острыми одновременно. Отметим, что углы α и β не могут быть и прямыми (при $\alpha=\pi/2$ $\sin\gamma=1+\sin^2\beta>1$), если же прямым является угол γ, то равенству $(*)$, а значит, и условию задачи удовлетворяет любой острый угол α и $\beta=$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\beta}{2}$ или

$$\alpha=\operatorname{arctg} p^2+\operatorname{arctg} p,$$
$$\beta=\operatorname{arctg} p^2-\operatorname{arctg} p,$$
$$\gamma=\pi-2\operatorname{arctg} p^2,$$

где p — любое число, большее 1.

$=\pi/2-\alpha$ (в этом случае $\cos\alpha-\sin\beta=\sin\alpha-\cos\beta=0$).

в) Ответ: наибольший из углов α, β, γ может принимать любое значение в промежутке $[\pi/2;\ \pi[$.

Мы уже показали в решении пункта б), что наибольший угол не может быть острым, но может быть прямым ($\gamma=\pi/2$). Покажем теперь, что он может принимать любое значение от $\pi/2$ до π, точнее, что для любого α, $\pi/2<\alpha<\pi$, уравнение относительно β

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$$

имеет решение в промежутке $0<\beta<\pi-\alpha$ (так что $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)>0$). Обе части этого уравнения — непрерывные функции от β, причем при $\beta=0$ левая часть меньше правой ($\sin^2\alpha<\sin\alpha$), а при $\beta=\pi-\alpha$ — больше ($2\sin^2\alpha>0$). Поэтому в некоторой точке β, $0<\beta<\pi-\alpha$, значения обеих частей совпадают. Эта точка и будет корнем уравнения.

Читателю предлагается самостоятельно продолжить исследование нашего уравнения: докажите, что угол γ не может быть тупым (для этого надо умножить данное соотношение на квадрат диаметра описанной окружности, получить из него по теореме синусов неравенство для сторон треугольника и показать, что $\cos\gamma\leqslant 0$); проверьте, что углы α, β и γ при $\gamma\neq\pi/2$ могут быть заданы красивыми формулами, приведенными на полях (конечно, из этих формул сразу же следуют утверждения б) и в)).

П. Б. Гусятников

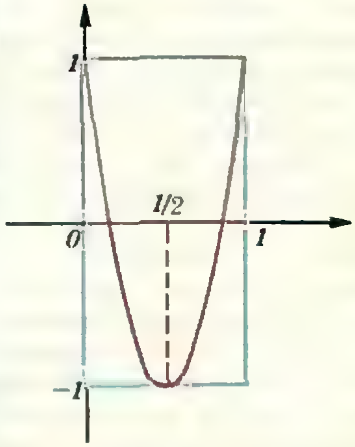
◆

М859. *Найдите наименьшее положительное число a такое, что для любого квадратного трехчлена $f(x)$, удовлетворяющего при $0<x<1$ неравенству $|f(x)|<1$, выполняется неравенство $|f'(1)|<a$.*

Ответ: $a=8$. Пусть функция $f(x)=Ax^2+Bx+C$ удовлетворяет условиям задачи. Заметим, что $f'(1)=2A+B$, $f(0)=C$, $f(1)=A+B+C$ и $f(1/2)=A/4+B/2+C$, и потому $f'(1)=3f(1)-4f(1/2)+f(0)$. Следовательно,

$$|f'(1)|\leqslant 3|f(1)|+4|f(1/2)|+|f(0)|\leqslant 8,$$

причем эти неравенства превращаются в равенства при $f(0)=f(1)=1$, $f(1/2)=-1$, то есть для функции $f_0(x)=8x^2-8x+1$ см. рисунок. А так как эта функция удовлетворяет неравенству $|f_0(x)|\leqslant 1$ при $0\leqslant x\leqslant 1$ (её график — парабола с вершиной в точке $x=1/2$ — точке минимума), число 8 в нашей оценке $|f'(1)|$ уменьшить нельзя.



По сути дела, в решении мы воспользовались тем, что многочлен n-й степени, а значит, и его производная, однозначно задается своими значениями в $n+1$ точках (при $n=2$). Попробуйте самостоятельно решить эту задачу для кубических многочленов. Отметим, что при произвольной степени n наилучшую оценку в задаче будут давать так называемые *многочлены Чебышева*, о которых можно прочитать в статье Н. Васильева и А. Зелевинского «Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения» («Квант», 1982, № 1, с. 12).

В. Н. Пикулин

М860*. *а) Пусть O и R — центр и радиус описанной окружности треугольника ABC, Z и r — центр и радиус его вписанной окружности, K — точка пересечения медиан треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC. Докажите, что точка Z лежит на отрезке OK, причем $|OZ|:|ZK|=3R/r$.*

б) Пусть a, b, c — длины сторон треугольника ABC, $\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{n}_c$ — единичные векторы, перпендикулярные к соответствующим сторонам треугольника и направленные во внешнюю сторону. Докажите, что

$$a^3\vec{n}_a+b^3\vec{n}_b+c^3\vec{n}_c=12S\cdot\overrightarrow{MO},$$

где S — площадь треугольника ABC, M — точка пересечения его медиан, O — центр описанной окружности.

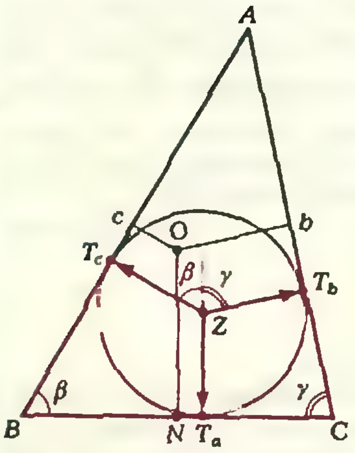


Рис. 1.

Решение задачи а), так же как и б), сводится к доказательству векторного равенства — в задаче а) это равенство

$$\overrightarrow{OZ}=\frac{3R}{r}\,\overrightarrow{ZK}. \qquad (1)$$

В решениях обеих задач мы будем использовать такое основное соображение: *чтобы доказать равенство двух векторов, достаточно доказать равенство их проекций по крайней мере на две (не параллельные) оси.* Этими осями у нас будут стороны треугольника.

Мы будем использовать также известные факты о «центрах тяжести» двух и трех точек: сумма двух векторов, проведенных из точки P к концам отрезка, равна $2\overrightarrow{PN}$, где N — середина этого отрезка; сумма трех векторов, проведенных из точки P к вершинам треугольника, равна $3\overrightarrow{PK}$, где K — точка пересечения медиан треугольника.

Обозначим через a, b, c длины сторон треугольника ABC, через T_a, T_b, T_c — точки касания вписанной окружности с этими сторонами, через α, β, γ — величины углов A, B, C; пусть N — середина стороны BC (рис. 1).

а) Равенство (1) эквивалентно следующему:

$$\overrightarrow{OZ}=\frac{R}{r}\,(\overrightarrow{ZT_a}+\overrightarrow{ZT_b}+\overrightarrow{ZT_c}). \qquad (2)$$

Проверим, что левая и правая части дают одинаковые проекции на сторону BC (проекции мы берем с учетом знака, считая положительным направление вектора $\overrightarrow{BC}$, то есть проекция вектора $\vec{v}$ на ось BC равна $|\vec{v}|\cos\alpha$, где α — угол между осью и вектором, или $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{BC})/|BC|$; очевидно, проекция суммы векторов равна сумме их проекций). Для двух других сторон (собственно, нам достаточно и одной из них) проверка аналогична — ведь в условии задачи стороны равноправны.

Поскольку проекции точек O и Z на сторону BC — это точки N и T_a, проекция вектора $\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{BZ}-\overrightarrow{BO}$ на ось BC равна

$$|BT_a|-|BN|=\frac{a+c-b}{2}-\frac{a}{2}=\frac{c-b}{2}$$

($|BT_a|=(a+c-b)/2$ потому, что отрезки касательных, проведенных из каждой вершины треугольника к вписанной окружности, равны).

Проекция вектора ZT_a на BC равна нулю, а проекция $\overrightarrow{ZT_b}+\overrightarrow{ZT_c}$ — суммы векторов длины r, образующих углы $90°-\gamma$ и $90°+\beta$ с осью BC — равна

$$r\cos(90°-\gamma)+r\cos(90°+\beta)=$$

$$=r\sin\gamma-r\sin\beta=\frac{r}{2R}(c-b)$$

(в последнем равенстве использована теорема

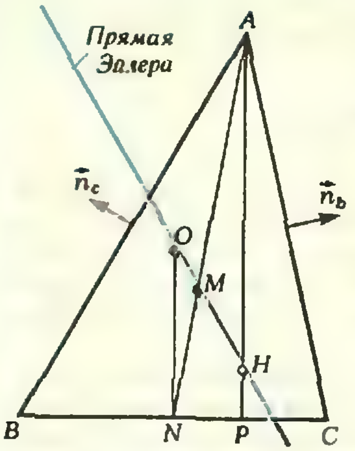


Рис. 2.

синусов: $c=2R\sin\gamma$, $b=2R\sin\beta$). Отсюда вытекает равенство (2).

б) Заметим, что векторы $\vec{n}_a$, $\vec{n}_b$, $\vec{n}_c$, о которых идет речь в задаче, — это векторы длины 1, направленные так же, как $\overrightarrow{ZT_a}$, $\overrightarrow{ZT_b}$, $\overrightarrow{ZT_c}$ из задачи а). Обозначим через P основание высоты AP треугольника ABC (рис. 2).

Найдем проекцию вектора $\overrightarrow{MO}$ на ось BC. Поскольку $\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})/3$, а проекции векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ противоположны и равны по величине, проекция $\overrightarrow{MO}$ равна одной трети проекции вектора $\overrightarrow{AO}$; далее, поскольку $\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})/2$, проекция $\overrightarrow{AO}$ равна $(|PC|-|PB|)/2=(b^2-c^2)/2a$. (В последнем равенстве мы использовали теорему Пифагора:
$$b^2-c^2=(|PC|^2+|AP|^2)-(|PB|^2+|AP|^2)=$$
$$=(|PC|-|PB|)(|PC|+|PB|)=(|PC|-|PB|)a.)$$

Проекция вектора $a^3\vec{n}_a+b^3\vec{n}_b+c^3\vec{n}_c$ на ту же ось равна
$$b^3\sin\gamma-c^3\sin\beta=$$
$$=\frac{b^3c-c^3b}{2R}=\frac{abc}{R}\cdot\frac{b^2-c^2}{2a}=4S\cdot\frac{b^2-c^2}{2a}.$$
(в последнем равенстве использована формула $S=abc/4R$ для площади треугольника). Отсюда вытекает равенство задачи б).

Прямая OM называется прямой Эйлера (неравностороннего) треугольника ABC. На ней всегда лежит точка H пересечения высот треугольника ABC (как видно из рассмотрения проекций, $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$). В задаче а) доказано, что прямая Эйлера треугольника $T_aT_bT_c$ проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

Н. Б. Васильев

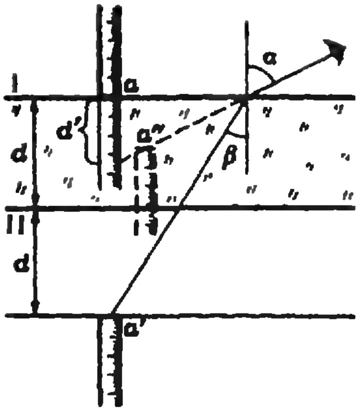
Ф867. *Представьте себе, что вы стоите перед большим листом толстого прозрачного стекла (например, перед стеклянной витриной). Каким образом можно определить толщину стекла, если доступа к его краям нет (скажем, края стекла замурованы в стены), в помещение за стеклом проникнуть нельзя, разбить стекло тоже нельзя? В вашем распоряжении имеются линейка, угольник, бумага, карандаш и карманный калькулятор для проведения расчетов.*

◆

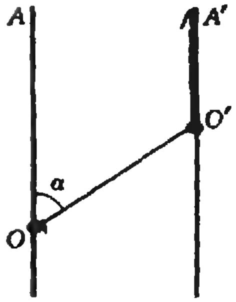
Если приставить линейку под прямым углом к стеклу, то мы увидим два ее отражения: в ближней (I) и дальней (II) поверхностях стекла (см. рис.). Первое изображение дает нам как бы «линейку за зеркалом», по которой можно измерять положение конца второго изображения при разных углах наблюдения. Это позволяет определить толщину стекла.

Глядя в стекло, мы видим конец второго отражения линейки не в точке a', где он находится на самом деле, а в точке a''. Положение этой точки мы и можем фиксировать по «линейке за зеркалом».

Пусть толщина стекла d, показатель преломления n. Как видно из рисунка,
$$d'\operatorname{tg}\alpha=2d\operatorname{tg}\beta\Rightarrow d=\frac{d'}{2}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$



Ф868. *Колечки O и O' надеты на вертикально закрепленные стержни AB и $A'B'$. Нерастяжимая нить привязана к кольцу O, пропущена через кольцо O' и закреплена в точке A (см. рисунок). В тот момент, когда $\widehat{AOO'}=\alpha$, кольцо O' движется вниз со скоростью v. Найти скорость кольца O в этот момент.*



Ф869. *Вертикальная длинная кирпичная труба заполнена чугуном. Нижний конец трубы поддерживается при температуре $T_1>T_{пл}$ ($T_{пл}$ — температура плавления чугуна), верхний — при температуре $T_2<T_{пл}$. Теплопроводность у расплавленного чугуна в k раз больше, чем у твердого. Какая часть металла находится в расплавленном состоянии?*

Подставив $n=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, $\cos\beta=\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}$, получим

$$d=\frac{d'}{2}\frac{(n^2-\sin^2\alpha)^{1/2}}{\cos\alpha}.$$

В этом выражении d', $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ — те величины, которые мы можем измерить и вычислить, пользуясь нашими инструментами. Чтобы избавиться от неизвестного показателя преломления n, поступим так. Произведем измерения d' при двух значениях угла падения α (значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ легко найти, измеряя расстояния от глаза до стекла и до точки пересечения луча зрения со стеклом). Тогда

$$\frac{d_1'}{2}\frac{(n^2-\sin^2\alpha_1)^{1/2}}{\cos\alpha_1}=\frac{d_2'}{2}\frac{(n^2-\sin^2\alpha_2)}{\cos\alpha_2}.$$

Отсюда после несложных преобразований получим

$$d=\frac{d_1'd_2'}{2}\left(\frac{\sin^2\alpha_2-\sin^2\alpha_1}{(d_2')^2\cos^2\alpha_1-(d_1')^2\cos^2\alpha_2}\right)^{1/2}.$$

М. В. Семенов

◆

Рассмотрим движение колечек и веревки в системе отсчета, движущейся вместе с колечком O'. В этой системе колечко O' неподвижно. В тот момент, когда $\widehat{AOO'}=\alpha$, нить «выбирается» вверх со скоростью v. Поскольку нить нерастяжима, колечко O в этот момент должно иметь такую скорость u (в системе, связанной с колечком O'), чтобы ее проекция на направление OO' была равна v, то есть

$$u=\frac{v}{\cos\alpha}.$$

В неподвижной системе отсчета скорость колечка в этот момент равна

$$v_0=u-v=v\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right).$$

С. С. Кротов

◆

Поскольку нижний конец трубы поддерживается при температуре T_1, большей температуры плавления, чугун внизу будет расплавлен. Температура границы между расплавленным и твердым чугуном, естественно, равна температуре плавления $T_{пл}$.

Поскольку температуры верхнего и нижнего концов трубы поддерживаются постоянными, количество тепла, проходящего за единицу времени через поперечное сечение трубы, в любом месте трубы должно быть одним и тем же. Другими словами, поток тепла через расплавленный и твердый чугун должен быть одним и тем же. (Кирпичная труба плохо проводит тепло, и теплообменом через ее стенки можно пренебречь.)

Поток тепла пропорционален теплопроводности, площади поперечного сечения и разности температур, приходящейся на единицу длины. Пусть l_1 — длина нижней части трубы, где чугун расплавлен, а l_2 — длина верхней части, где чугун находится в твердой фазе. Условие постоянства потока тепла запишется тогда в виде (сечение трубы постоянно).

$$\varkappa_{ж}\frac{T_1-T_{пл}}{l_1}=\varkappa_{тв}\frac{T_{пл}-T_2}{l_2},$$

где $\varkappa_{ж}$ и $\varkappa_{тв}$ — теплопроводность жидкого и твердого чугуна соответственно. Учитывая, что $\varkappa_{ж}=k\varkappa_{тв}$, находим

$$l_1=l_2k\frac{T_1-T_{пл}}{T_{пл}-T_2}.$$

Полная длина трубы равна l_1+l_2; значит, в расплавленном состоянии находится

$$\frac{l_1}{l_1+l_2}=\frac{k\,(T_1-T_{пл})}{k\,(T_1-T_{пл})+(T_{пл}-T_2)}\text{ часть металла.}$$

А. И. Буздин

◆

Ф870*. *Одноатомный идеальный газ расширяется так, что его молярная теплоемкость c_x остается постоянной; при этом газ совершает работу $A=165$ Дж. Затем газ изохорически нагревают до первоначальной температуры, для чего к нему подводят количество теплоты $Q=125$ Дж. Определить c_x.*

Пусть в процессе с постоянной теплоемкостью, равной c_x, температура газа изменяется от T_1 до T_2. Тогда, по определению теплоемкости, количество теплоты Q_x, полученное газом в этом процессе, равно

$$Q_x=c_x\,(T_2-T_1). \qquad (1)$$

По закону сохранения энергии это количество теплоты идет на совершение газом работы A над внешними телами и на изменение его внутренней энергии ΔU:

$$Q_x=A+\Delta U. \qquad (2)$$

При нагревании газа в изохорическом процессе без совершения работы все подведенное тепло Q идет на увеличение его внутренней энергии. Газ при этом возвращается к исходной температуре T_1. Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, а ее изменение определяется разностью температур конечного и начального состояний. Поэтому ясно, что в процессе с постоянной теплоемкостью изменения температуры газа и изменения его внутренней энергии противоположны по знаку соответствующим изменениям в изохорическом процессе.

Пусть в изохорическом процессе теплоемкость газа равна c_V, а модуль изменения внутренней энергии равен $|\Delta U|$. Тогда изменение температуры газа определяется из равенства

$$Q=|\Delta U|=c_V(T_1-T_2).$$

С учетом вышесказанного, имеем из равенств (1) и (2):

$$-c_x\frac{|\Delta U|}{c_V}=A-|\Delta U|,$$

откуда

$$c_x=c_V\frac{|\Delta U|-A}{|\Delta U|}.$$

По условию $|\Delta U|=125$ Дж, $A=165$ Дж и

$$c_V=\frac{3}{2}R\approx 12{,}5\text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}.$$

Поэтому для теплоемкости c_x получаем окончательно

$$c_x \approx -4\ \text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К}).$$

Таким образом, найденная нами теплоемкость отрицательна, что соответствует охлаждению газа при подводе к нему тепла. С точки зрения закона сохранения энергии это означает, что газ совершает часть работы за счет уменьшения своей внутренней энергии, а часть — за счет подвода тепла.

А. А. Шеронов

Ф871. *Первоначально незаряженный конденсатор емкости C подключают к последовательно соединенным батарее с напряжением U и катушке с индуктивностью L. Ток через катушку вначале увеличивается, а затем уменьшается. В тот момент, когда ток становится равным нулю, конденсатор отключают от схемы и подключают вновь, поменяв местами его выводы. Какой максимальный ток будет после этого течь через катушку? Как изменится этот ток, если процесс переключения повторить 1984 раза? Сопротивлением цепи пренебречь.*

◆

В тот момент, когда ток через катушку станет равным нулю, энергия конденсатора будет равна работе, которую произвела батарея. Следовательно, заряд конденсатора в этот момент определяется условием

$$\frac{q_0^2}{2C}=U_0q_0,$$

откуда

$$q_0=2CU_0.$$

Найдем максимальный ток через катушку после подключения конденсатора. Условие максимума тока — $I'=0$, то есть $\mathcal{E}_{\text{инд}}=-LI'=0$; значит, в тот момент, когда ток максимален, напряжение на конденсаторе равно U_0 и «компенсирует» напряжение батареи (рис. 1). Из закона сохранения энергии —

$$U_0CU_0=\frac{CU_0^2}{2}+\frac{LI_0^2}{2}$$

— находим максимальное значение тока:

$$I_0=U_0\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

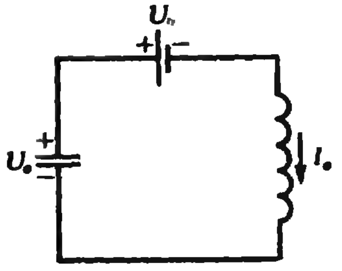


Рис. 1.

Рассмотрим схему после переключения (рис. 2). Ток через катушку равен нулю (только в тот момент, когда энергия катушки равна нулю, ее можно «безнаказанно» отключать от цепи). В тот момент, когда ток достигнет искомого максимального значения I_1, напряжение на конденсаторе будет равно U_0; значит, к этому моменту по цепи протечет заряд $3CU_0$ и, согласно закону сохранения энергии,

$$U_03CU_0+C\frac{(2U_0)^2}{2}=\frac{CU_0^2}{2}+\frac{LI_1^2}{2}.$$

Отсюда

$$I_1=3U_0\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

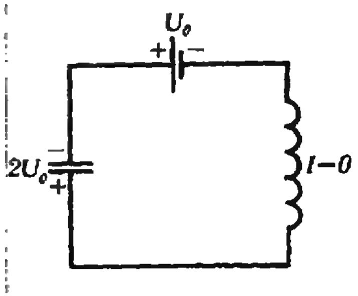


Рис. 2.

Перед следующим, вторым, переключением, когда ток через катушку будет равен нулю, на конденсаторе будет заряд q_1, который, как и в первом случае, найдем из условия

$$U_0\,(2CU_0+q_1)+C\frac{(2U_0)^2}{2}=\frac{q_1^2}{2C}.$$

Отсюда

$$q_1^2-2CU_0q_1-8C^2U_0^2=0 \Rightarrow q_1=CU_0\pm3CU_0.$$

Корень $-2CU_0$ не подходит (подумайте, какому случаю он соответствует). Значит, $q_1=4CU_0$.

Максимальное значение тока после второго переключения будет $I_2=5U_0\sqrt{\frac{C}{L}}$, после третьего переключения — $I_3 = 7U_0\sqrt{\frac{C}{L}}$ и т. д. После n переключений

$$I_n = (2n+1)U_0\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

При $n = 1984$ получим

$$I_{1984} = 3969U_0\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

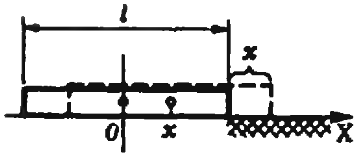
А. Р. Зильберман

◆

Ф872. *Длинные сани, скользящие по очень гладкому льду, въезжают на асфальт и останавливаются, не пройдя половины своей длины. После этого саням резким толчком сообщают первоначальную скорость и они вновь останавливаются. Как относятся времена торможения в первом и во втором случаях? Как относятся пути торможения?*

Пусть длина саней l, их масса m, скорость, с которой они скользят по льду, v_0 и коэффициент трения саней об асфальт μ.

С того момента, как сани начнут въезжать на асфальт, уравнение движения саней будет таким (см. рисунок):



$$mx'' = -\mu g\frac{m}{l}x. \qquad (*)$$

Это — уравнение колебательного движения. Зависимость координаты от времени имеет вид

$$x(t) = X_1 \sin \omega_0 t,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\mu g/l}$, X_1 — координата саней в момент их остановки (амплитуда колебаний). К этому моменту вся начальная кинетическая энергия саней будет израсходована на работу против силы трения. Из этого условия (закон сохранения энергии) найдем X_1:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{2}\mu g\frac{mX_1}{l}X_1 = \frac{\mu mgX_1^2}{2l}$$

($\frac{1}{2}\mu g\frac{mX_1}{l}$ — среднее значение силы трения), откуда

$$X_1 = v_0\sqrt{\frac{l}{\mu g}} = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

Время t_1, прошедшее от момента въезда саней на асфальт до их первой остановки, — это четверть периода колебаний с частотой ω_0, то есть

$$t_1 = \frac{2\pi}{4\omega_0} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

После того как саням резким толчком сообщают скорость v_0, уравнение движения саней будет таким же, как в первом случае (см. (*)). Зависимость координаты x $(x > X_1)$ от времени имеет вид

$$x(t) = \tilde{X}_1 \sin \omega_0 t,$$

где $\tilde{X}_1$ — координата саней в момент их второй остановки (новая амплитуда колебаний).

Чтобы найти путь и время второго торможения, будем считать, что сани начали въезжать на асфальт со скоростью u_0 и, пройдя путь X_1, имели скорость v_0. Тогда, согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mu_0^2}{2} = \frac{1}{2}\mu g\frac{m\tilde{X}_1}{l}\tilde{X}_1 = \frac{\mu mg\tilde{X}_1^2}{2l},$$

откуда

$$\tilde{X}_1 = u_0\sqrt{\frac{l}{\mu g}} = \frac{u_0}{\omega_0}.$$

Скорость u_0 найдем из условия

$$\frac{mu_0^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\frac{1}{2}\mu g\frac{mX_1^2}{l} \Rightarrow u_0=v_0\sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$\tilde{X}_1=\frac{v_0}{\omega_0}\sqrt{2}.$$

Путь, который пройдут сани после толчка до остановки, равен

$$X_2=\tilde{X}_1-X_1=\frac{v_0}{\omega_0}(\sqrt{2}-1),$$

и отношение путей торможения в первом и во втором случаях —

$$X_1:X_2=1:(\sqrt{2}-1).$$

При начальной скорости $u_0=v_0\sqrt{2}$ сани прошли бы путь X_1 за время $\tilde{t}_1$, определяемое из условия $v_0=v_0\sqrt{2}\cos\omega_0\tilde{t}_1$, то есть за время

$$\tilde{t}_1=\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

До полной остановки они двигались бы в течение времени $t_1=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$ (период колебаний не зависит от начальной скорости). Следовательно, время, в течение которого сани будут двигаться после толчка до второй остановки, равно

$$t_2=t_1-\tilde{t}_1=\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{l}{\mu g}},$$

и отношение времен торможения в первом и во втором случаях —

$$t_1:t_2=2:1.$$

С. С. Кротов

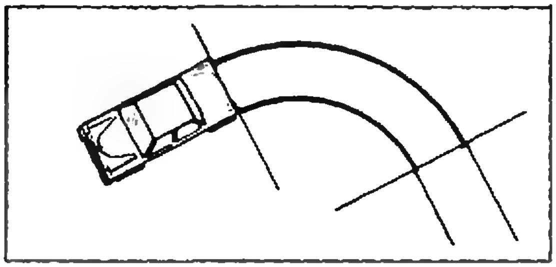
Ответы, указания, решения

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 5)

1. VIII−III=V, VII+III=X, VII−III=IV.

2. Чтобы отсчитать 60 конвертов, достаточно отсчитать 40 конвертов, на что потребуется 40 секунд, а остальные конверты из пачки отдать покупателю. При таком методе 90 конвертов продавец отсчитает за 10 секунд.



3.
1
2 5
7 8 4
3 6
9

4. Прямую следует провести через центры прямоугольников.

5. При повороте, скажем, налево правое ведущее колесо проходит бо́льший путь, чем левое (см. рисунок). Если бы колеса при этом вращались с одинаковой скоростью, то трение на этом участке приводило бы к быстрому износу покрышек и затрудняло управление машиной.

Задача в картинках.

(см. «Квант» № 5)

Первым был Сережа, второй — Надя, третьим — Коля, четвертым — Ваня и пятым — Толя.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6)

1. 56:8=9−2=3+4=1×7.

2. Пусть a — сторона квадрата, а r — радиус данного круга, тогда равенство их площадей запишется следующим образом: $a^2=\pi r^2$. Радиус круга, вписанного в квадрат, равен $\frac{a}{2}$, а сторона

квадрата, вписанного в круг, равна $r\sqrt{2}$. Отсюда площади вписанных фигур равны, соответственно, $\pi\frac{a^2}{4}$ и $2r^2$. Заменяя a^2 на πr^2, получаем для площадей значения $\frac{\pi^2}{4}r^2$ и $2r^2$, но π^2 больше 9, поскольку π больше 3, поэтому $\frac{\pi^2}{4}r^2$ больше $2r^2$, то есть площадь вписанного круга больше площади вписанного квадрата.

3. Каждое следующее число равно удвоенному предыдущему, сложенному с числом 3, поэтому вместо знака ? следует поставить число 157.

4. В этом шифре гласные буквы остаются на месте, а каждая согласная меняется на букву, расположенную непосредственно над или под ней в таблице:

б	в	г	д	ж	з	к	л	м	н
щ	ш	ч	ц	х	ф	т	с	р	п

Об этом шифре пишет П. И. Мельников (Андрей Печерский) в своей эпопее «В лесах».

5. Все дело в том, в каком направлении двигать зеркало. Если двигать его к предмету или от него, то изображение переместится на расстояние вдвое больше, чем зеркало; если двигать его параллельно себе, то отражение не сместится вовсе, а чтобы отражение сместилось на такое же расстояние, что и зеркало, нужно двигать его вбок — под углом 60°. А Гриша просто переставил вазу.

Задача в картинках
(см. «Квант» № 6)

Вопреки известной былине, выходит, что Соловья-разбойника поймал Добрыня Никитич!

Шахматная страничка
(см. «Квант» №№ 3, 4)

Задание 5 (Шашин — Гик, Харьков, 1967 г.). Черные были уверены, что у них все в порядке — королю осталось сделать всего три хода, чтобы забрать опасную пешку «с». Однако последовало **1. Ch3!!**, и положение резко изменилось. Проигрывает 1...С:h3 2. f5!, и *обратная* дорога слону к полю c8 перекрыта. Пришлось играть **1...f5 2. С:e5 С:e5 3. fe h5 4. Kpf2 Kpe6 5. ef+ gf 6. Kpe3 Kp:e5 7. Cf1 Kpd6 8. Kpf4 Kp:c7.** Королю удалось добраться до пешки, но эндшпиль проигран: **9. Kpe5 Cd7 10. Cd3 Ce8 11. C:f5 Cf7 12. h3 Kpd8 13. Kpf6 Ce8 14. g4 hg 15. hg Kpc7 16. Kpe7.** Черные сдались.

Задание 6 (Куйперс — Петерсен, Галле, 1967 г.). Кажется, что спасение невозможно. На помощь приходит идея перекрытия. **1. Ле6+ Kp:f5 2. Лg6!!** Теперь после 2... Kp:g6 (2...Л:g6 3. c8Ф+) линия «g» перекрыта и белые успеют поставить ладью на b8. Но черные тоже проявляют изобретательность. **2...Ле8!** (грозит 3...e2+). Однако белые заготовили еще одно перекрытие. **3. Ле6!** Опять ладья под двумя ударами, но как 3...Kp:e6 4. *Л*b8, так и 3...*Л*:e6 4. c8Ф e2+ 5. Kpg2 e1Ф 6. *Л*b5+ не опасно для белых. После 3...*Л*g8! 4. *Л*g6! партнеры согласились на ничью.

Задание 7. 1.Cd6! Красивая геометрическая идея. Ферзь белых остался под боем, но его нельзя бить из-за 2. Лf8×. Но и слон неприкосновенен: 1...Л:d6 2. Фb8+ (сразу этот шах ничего не давал ввиду 1...Лc8). Таким образом, черные или получают мат или теряют ферзя.

Задание 8. 1. Фe6!! Л:b3 2. Лh8+! Kp:h8 3. Фh6+ Kpg8 4. Ф:g7×.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров,
Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Г. Н. Бин, М. Б. Дубах, А. И. Климанов, В. С. Коваль,
Ю. В. Котов, М. М. Крековский, А. К. Малкин,
Э. В. Назаров, И. А. Смирнов, И. Е. Смирнова,
Е. К. Темчурина
Фото представил Б. Л. Раскин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор Н. Д. Дорохова

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1.
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.5.84.
Подписано к печати 20.6.84.
Печать офсетная.
Бумага 70×108 1/16. Усл. кр. от. 23,8.
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,07 Т-14325
Цена 40 коп. Заказ 1290 Тираж 172 309 экз.

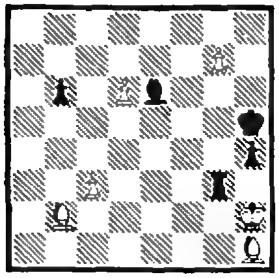
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

УЧЕНЫЕ — ГРОССМЕЙСТЕРЫ ПО КОМПОЗИЦИИ

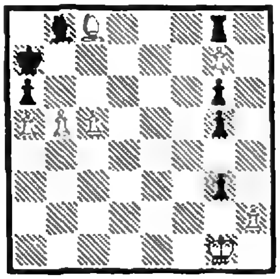
На «шахматной страничке» в № 12 за 1983 год вы познакомились с этюдами международного гроссмейстера по шахматной композиции В. Королькова. Теперь мы расскажем еще о двух гроссмейстерах - этюдистах. Интересно, что оба они известны не только в мире шахмат, но и в мире науки.

Владимир Брон — крупный советский ученый, доктор технических наук, и в то же время победитель ряда конкурсов по композиции. Следующие два этюда, отобранные для нас самим автором, отличаются новизной замысла, насыщены острой борьбой.



**В. Брон, 1946 г.
Выигрыш.**

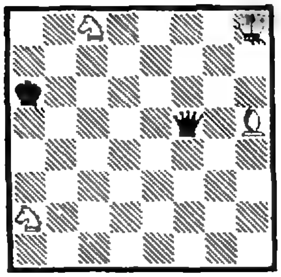
1. c4 С:c4 2. d7 Лd3 3. Cf3+! Крh6 4. Cd5! Старинная тема Новотного — белая фигура внезапно возникла на пересечении дорог, по которым ходят черная ладья и слон, и любое взятие ведет к катастрофе (4...С:d5 5. d8Ф, 4...Л:d5 5. g8Ф Лd2+ 6. Фg2). Но впереди нас ждет еще один остроумный этюдный маневр. **4...Лd2+! 5. Крg1 Л:d5 6. g8К+! Крg5 7. Cc1+ Крf5.** Король вскоре съест белую пешку, но превращенный конь одну за другой заберет три черные фигуры — «шашечная тема». **8. Кe7+ Крe6 9. К:d5 Кр:d7 10. К:b6+ Крc6 11. К:c4,** и белые выигрывают. Классический этюд, иллюстрирующий собой последовательный синтез идей (тема Новотного + шашечная тема).



**В. Брон, 1962 г.
Выигрыш.**

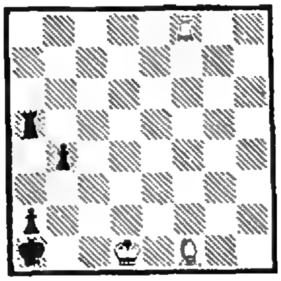
1. b6+ Крa8 2. Ce6 Л:g7! Интересно и продолжение 2...gh+ 3. Крh1! Лd8 4. Cb3! Крb7 5. g8Ф Л:g8 6. Cd5+! Крc8 7. С:g8 Крd7 8. Cd5! g4! 9. c6+ Крe7 10. c7 С:c7 11. bc Крd7 12. Кр:h2 Кр:c7 13. Cc4 Этюд в этюде! **3. Cd5+ Лb7 4. c6 Лc7! 5. Крh1!** (5. hg Ca7!!) **5... gh 6. Cg2 g4 7. Cd5 g3 8. Cg2 g5 9. Cd5.** Теперь все зависит от того, какая из пешек «g» двинется вперед: 9...g2+ 10. С:g2 g4 11. Cd5 g3 12. Cg2 Лa7! 13. c7+ Лb7 14. Ce4! С:c7 15. bc Крa7! 16. c8Л! с выигрышем; 9...g4 10. Cg2 Лf7 11. c7+ Лf3! 12. c8Л! с тем же итогом.

Гроссмейстер по композиции Гиа Надареишвили известен в Грузии не только как замечательный этюдист, но и как крупный врач, главный невропатолог Тбилиси, автор многих научных трудов. Следующие этюды также отобраны самим композитором.



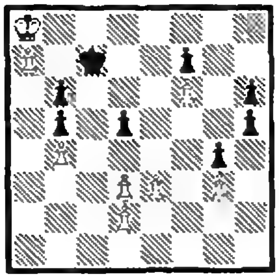
**Г. Надареишвили, 1958 г.
Ничья.**

Фигуры белых разбросаны по всей доске, но в конце концов им удается собраться в клубок. **1. Кb4+ Крa5 2. Кc6+ Крa4.** От одного коня черный король убежал, в погоню пускается другой. **3. Кb6+ Крa3 4. Кc4+ Крa2.** Настает очередь действовать слону. **5. Cf3!! Ф:f3** (5. .Фf8+ 6. Крh7 Фf7+ 7. Крh8 Ф:c4 8. Cd5! Ф:d5 9. Кb4+) **6. Кb4+ Крa1 7. Кc2+ Крa2 8. Кb4+.** Вечный шах одними конями. Этот этюд открыл тему, которую автор назвал «мхедрули» — грузинский танец всадников.



**Г. Надареишвили, 1970 г.
Ничья.**

1. Cc4 Лc5 2. Cg8!! Крb1 3. Лb8! Лc1+ 4. Крd2 Лc2+ 5. Крd1 a1Ф 6. Л:b4+ Лb2 7. Лc4! Лc2 8. Лb4+ Лb2 9. Лc4. Позиционная ничья



**Г. Надареишвили, 1970 г.
Ничья.**

При создании этого этюда автора в первую очередь интересовали возможности самого беззащитного шахматного персонажа — пешки (превращение, взятие на проходе и т. д.).

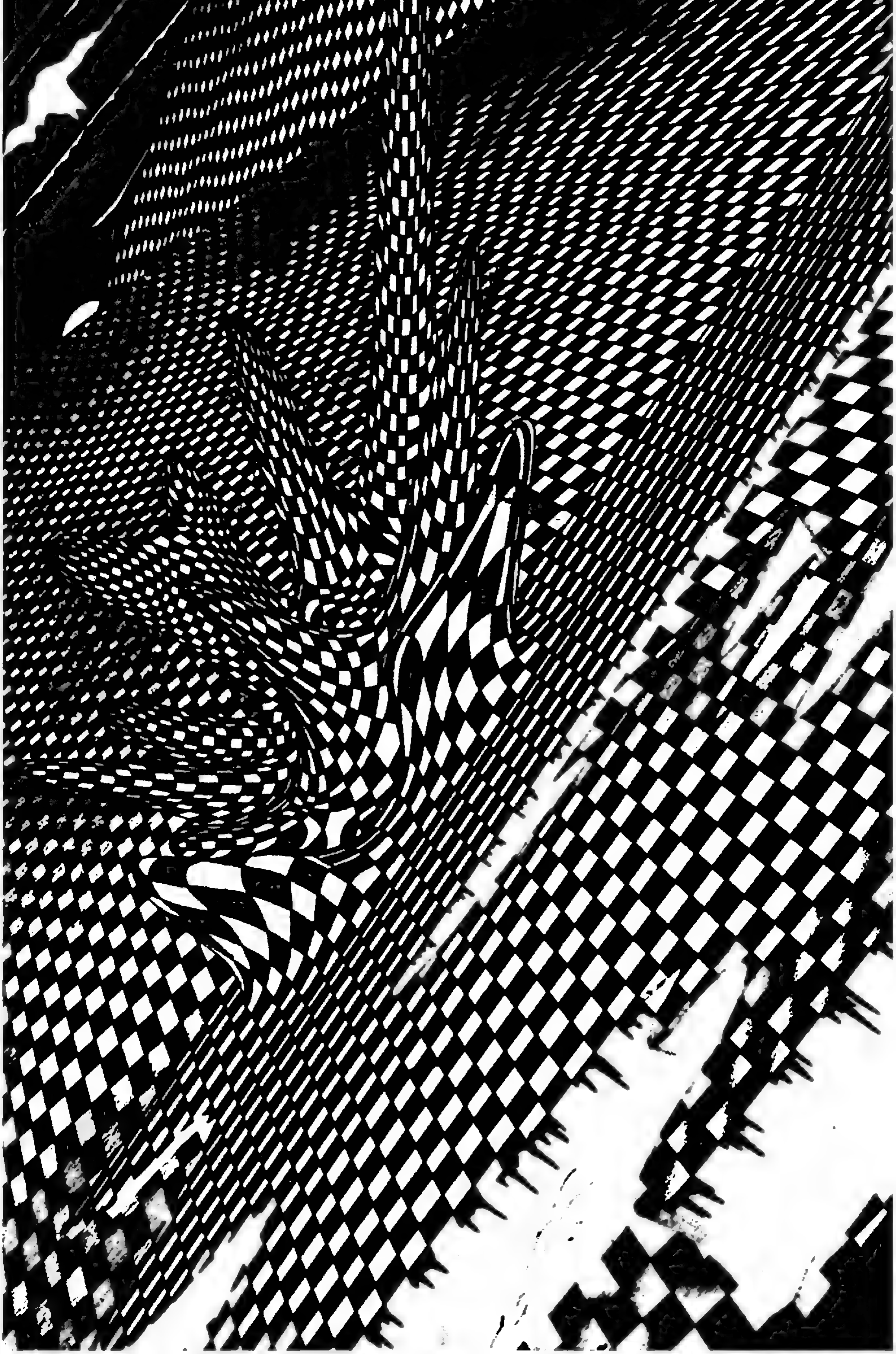
1. e4 d4 (1...h4 ведет к ничьей — 2. ed hg 3. d6+ Кр:d6 4. Крb7 g2 5. a8Ф g1Ф 6. Фf8+ Крe6 7 Фe7+ Крf5 8. Ф:f7) **2. e5 h4 3. e6 h3 4. e7 h2 5. e8Л!!** с победой. Но не годятся 5. e8Ф h1Ф+ 6. Фe4 Фf3!, 5. e8К+ Крd7 6. Крb8 h1Ф 7. a8Ф Ф .a8+ 8. Кр:a8 Кр:e8, и пешка «h» идет вперед

Конкурсные задания

13. Белые: Крa2, Лb4, Кf4, Ca3; черные: Крc5, Фf5, пп. e6, g7. Выигрыш.

14. Белые: Крb8, пп. b7, e5; черные: Крa5, Кf8, п.d2. Ничья.

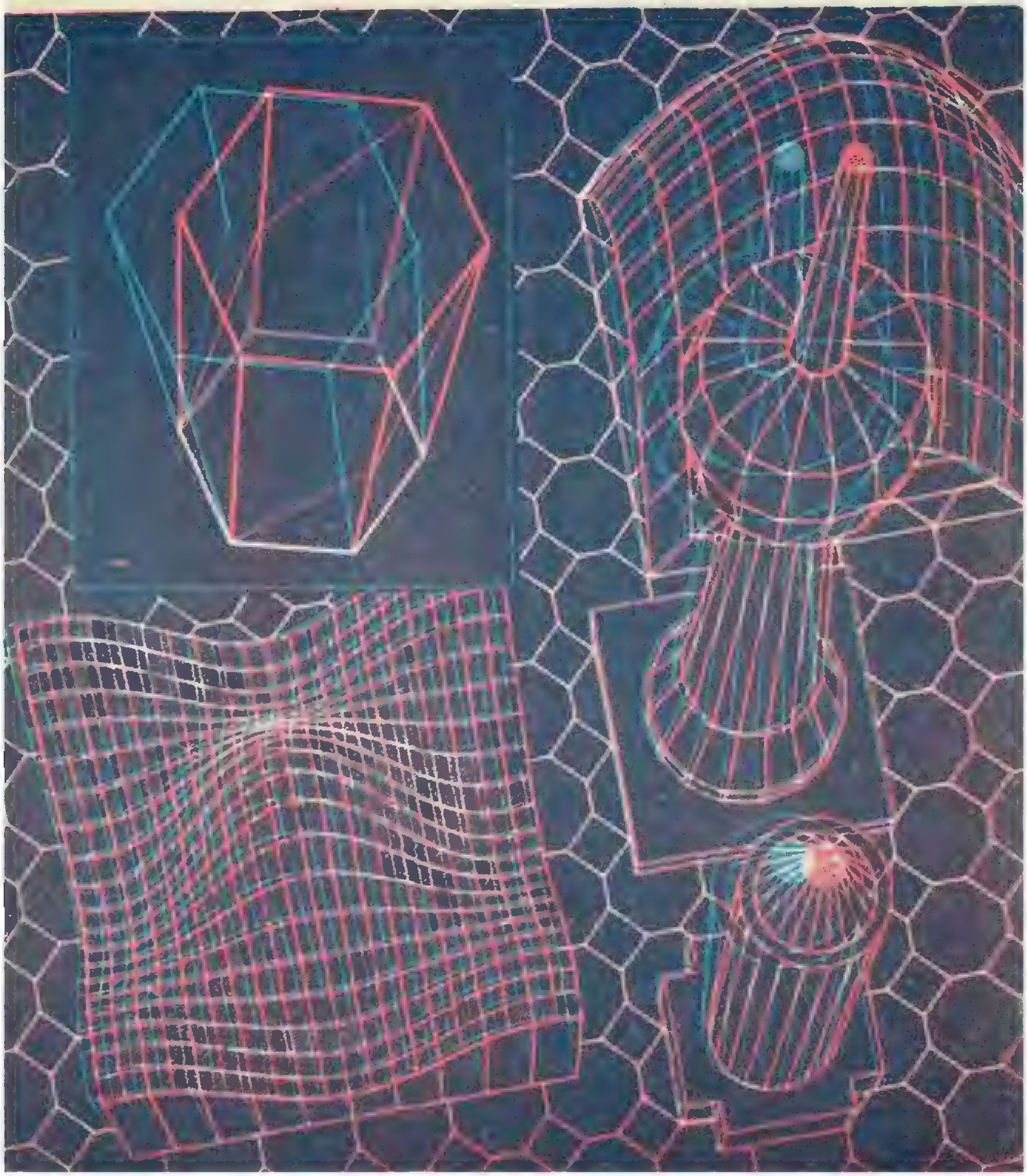
Срок отправки решений — 25 сентября 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 13. 14»).



Цена 40 коп.

Индекс 70465

Здесь представлен двухцветный стереочертеж (так называемый анаглиф), который следует рассматривать через двухцветные очки или светофильтры. Чертеж состоит из двух частей: многогранник (слева вверху) вычерчен вручную, а сложная «архитектурно-геометрическая композиция» построена на автоматизированной графической системе АЛГРАФ, созданной Ю. В. Котовым. Рассматривать анаглифы следует через очки-светофильтры; для правого глаза нужен синий светофильтр, для левого — красный. Журнал должен лежать на горизонтальной поверхности перед вами. Передвигая его, надо найти такое положение, при котором объекты будут восприниматься как стоящие «вертикально». Если подобрать светофильтры не удается, и картинка «двоится», желающие могут попробовать скопировать чертежи красками, подобранными соответственно имеющимся фильтрам. Подробнее об анаглифах рассказано в статье А. И. Климанова в этом номере журнала.



НОМЕР
8

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

КВАНТ
8 1984
Основан в 1970 году

Издательство „Наука“. Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

	В НОМЕРЕ:	**IN THIS ISSUE:**
2	*А. Б. Мигдал.* Как создавалась квантовая теория	*A. B. Migdal.* How quantum theory was created
9	*Л. А. Ашкинази.* Что такое электрический пробой	*L. A. Ashkinazi.* What is electric breakthrough
14	*Л. Е. Садовский, А. Л. Садовский, О. Л. Садовская.* Пять сетов	*L. E. Sadovski, A. L. Sadovski, O. L. Sadovskaya.* Five sets
20	*Г. И. Гринёва, Г. В. Розенберг.* Дела и проделки феи Морганы	*G. I. Grineva, G. V. Rozenberg.* Deeds and misdeeds of the fairy queen Morgana
27	*З. Д. Усманов, И. Ходжиев.* Ал-Хорезми	*Z. D. Usmanov, I. Khodjiev.* Al-Horezmi
29	*А. П. Ершов.* На родине великого ученого	*A. P. Ershov.* In the great scientist's homeland
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
32	*А. А. Варламов.* Из старых опытов	*A. A. Varlamov.* From old experiments
	Математический кружок	**Mathematics circle**
35	*Чан Куанг.* Если массы заменить на площади...	*Trần Quang.* If masses are replaced by areas...
	Новости науки	**Science news**
38	Новый вид радиоактивного распада	A new kind of radioactive decay
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
39	Задачи	Problems
40	*Л. Кэрролл.* Море слез.	*L. Carroll.* The pool of tears
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
44	Задачи М876 — М880; Ф888 — Ф892	Problems M876 — M880; P888 — P892
47	Решения задач М861 — М865; Ф873 — Ф877	Solutions M861 — M865; P873 — P877
	Олимпиады	**Olympiads**
56	*А. С. Меркурьев, Д. К. Фаддеев.* Ленинградским олимпиадам — 50 лет	*A. S. Merkuriev, D. K. Faddeev.* 50 years of Leningrad Olympiads
	Информация	**Information**
59	Заочная школа при НГУ	Novosibirsk university correspondence school
60	Вечерняя физическая школа при МГУ	Moscow university evening physics school
	Игры и головоломки	**Games and puzzles**
61	*А. И. Климанов.* Оригами	*A. I. Klimanov.* Origami
63	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
55	**Наша обложка**	**Our cover page**
	Смесь *(34, 58)*	**Miscellaneous** *(34, 58)*
	Шахматная страничка Каспаров — победитель матчей претендентов *(3-я с. обложки)*	**The chess page** Kasparov — winner of the challenger's matches *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1984

Недавно в серии «Эврика» издательства «Молодая гвардия» вышла книга крупного физика-теоретика А. Б. Мигдала «Поиски истины», в которой рассказывается об особенностях труда ученого, о психологии научного творчества, о зарождении и развитии важнейших идей физики XX века. Эти проблемы интересуют и многих наших читателей. Поэтому редакция обратилась с просьбой к Аркадию Бенедиктовичу выступить на страницах нашего журнала. Возможно, некоторые места в этой статье покажутся вам трудными, что связано со сложностью обсуждаемых в ней фундаментальных законов физики. Однако редакция надеется, что затронутые в статье вопросы заинтересуют вас и побудят к глубокому изучению.

Как создавалась квантовая теория

Академик А. Б. МИГДАЛ

Как возникает теория? Сначала в результате анализа накопленных экспериментальных и теоретических знаний появляется глубокая и ясная физическая идея, скажем, «движение небесных тел и падение камня на Земле вызваны одной причиной», или «время течет по-разному в неподвижной системе отсчета и в равномерно движущейся». Из первой идеи Ньютон вывел свою теорию тяготения, из второй — Эйнштейн — теорию относительности. С важнейшей физической теорией современности — квантовой теорией — все было совершенно наоборот: ее главные результаты возникали раньше, чем становился понятным их смысл!

На примере создания квантовой теории можно увидеть в действии множество методических особенностей современной теоретической физики. Это было движение в полутьме, наощупь, через смутные догадки, которые часто не подтверждались и уводили в сторону, но зато удачи были поразительны; ученые оказывались провидцами — их утверждения, построенные на шатких основаниях, точнейшим образом подтверждались позже.

Постараемся проследить и почувствовать этот сложный и необычный ход идей.

Все началось с катастрофы

Парадокс под мрачным названием «катастрофа Рэлея—Джинса» достался физикам в наследство от прошлого века. Он возник, когда законы статистической физики применили к равновесному тепловому излучению, которое устанавливается внутри ящика с нагретыми стенками. Это излучение представляет собой стоячие электромагнитные волны.

Статистическая физика установила замечательный закон «равнораспределения энергии»: в тепловом равновесии на каждую «степень свободы»*)

---

*) Числом степеней свободы называют число независимых координат, определяющих состояние системы. (*Прим. ред.*)

приходится одинаковая энергия. Так, на каждое возможное колебание приходится энергия, равная kT (k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура). Если возможных колебаний в системе много, то такая система заберет на себя большую энергию. Полная энергия колебательной системы равна NkT, где N — число возможных колебаний.

Посмотрим, сколько стоячих электромагнитных волн может образоваться в ящике. Для того чтобы возникла стоячая волна, от стенки до стенки должно уложиться целое число полуволн (рисунок 1). Чем короче длина волны, тем больше возможностей выполнить это условие. Поэтому число возможных стоячих волн растет с уменьшением длины волны — и, значит, с увеличением частоты. Если на каждое колебание приходится одна и та же энергия, а число колебаний растет с увеличением частоты, то и интенсивность излучения должна расти с частотой. Между тем точными опытами было установлено, что интенсивность излучения при больших частотах резко падает (закон Вина; см. рисунок 2). Но главное — общее число возможных стоячих волн в ящике оказывается бесконечным, и они должны были бы забрать на себя всю энергию стенок, сколько бы тепла мы к ним ни подводили. Это было бы действительно катастрофой — все предметы вокруг должны были бы охлаждаться, их тепло переходило бы в «бездонную бочку излучения».

В 1900 году Макс Планк нашел единственную возможность объяснить описанный парадокс. Он предположил, что частицы, излучающие волны с частотой ν, могут изменять свою энергию не непрерывным образом, а только скачками — дискретными порциями $h\nu$. Коэффициент пропорциональности h вошел в науку под названием «постоянная Планка».

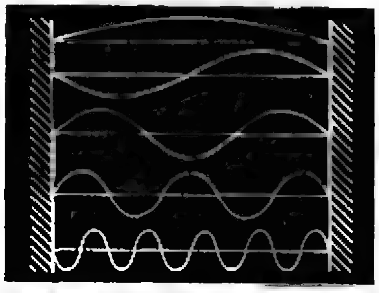


Рис. 1.

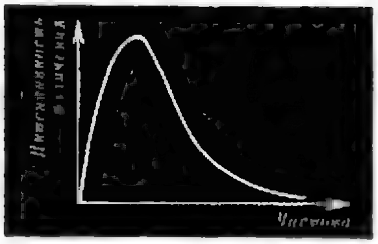


Рис. 2.

Нагретые стенки ящика можно представить себе как набор частиц, излучающих электромагнитные волны различных частот. Согласно гипотезе Планка, эти излучатели не могут испускать электромагнитные волны с энергиями, заметно бо́льшими, чем средняя тепловая энергия kT, приходящаяся на одну частицу. Излучатели высокой частоты как бы «заморожены» в состоянии с минимальной энергией. Для возбуждения таких излучателей им следует передать энергию $h\nu$, много бо́льшую, чем тепловая энергия. Но согласно законам статистической физики это событие маловероятно, так что возбужденной оказывается лишь малая доля таких излучателей, и интенсивность испущенного ими света мала. Так нашел свое объяснение эмпирический закон Вина.

Планк получил формулу, которая описала результаты экспериментов по распределению интенсивности излучения всех частот при различных температурах стенок; нужно было только правильно подобрать константу h. Численное значение этой величины оказалось равным $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ Дж · с. Понятно, почему скачкообразность в изменении энергии излучателей не замечали в повседневной жизни — порции энергии настолько малы, что ее изменение кажется непрерывным.

Что же такое свет?

Известные всем опыты по интерференции и дифракции доказывают, что свет — это волна. Ньютон, объясняя конечную скорость распространения света, предположил, что светящееся тело испускает частицы — корпускулы,— передающие свет. Но он не смог таким способом объяснить явления интерференции и дифракции, и корпускулярная теория света была надолго забыта.

В 1905 году Альберт Эйнштейн, объясняя явление фотоэффекта — вырывания электронов из молекул газа при облучении его ультрафиолетовым светом*), — заключил, что волна не может создать такой концентрации энергии на одном электроне, чтобы вырвать его с орбиты. Однако свойства фотоэффекта полностью объясняются, если предположить, что свет — это набор частиц — фотонов,— которые, взаимодействуя с электронами, выбрасывают их наружу**).

Эйнштейн показал, что при появлении или исчезновении кванта света возникает или исчезает количество движения; таким образом, фотон имеет импульс p, который связан с длиной волны света соотношением $p=h/\lambda$. Энергия волны заданной частоты может изменяться только порциями $h\nu$, так же как и энергия излучателей в рассуждениях Планка. Таким образом, дискретность распространилась и на электромагнитные волны.

Теория фотоэффекта отчасти подтвердила корпускулярную теорию Ньютона. Так что же такое свет — частица или волна? Объяснить это тогда никто не смог, и противоречие так и осталось чем-то вроде занозы.

Правила квантования

В 1913 году Нильс Бор установил правила, настолько загадочные даже для самого их создателя, что он назвал их «постулатами» — недоказуемыми предположениями.

Бор сделал еще один шаг по той неведомой дороге, которой шли Планк и Эйнштейн,— он распространил дискретность на атом, утверждая, что допустимы не все орбиты электронов, а только некоторые. Согласно существовавшей в классической физике планетарной модели атома, электрон, обращаясь вокруг ядра, движется с центростремительным ускорением и, следовательно, должен излучать электромагнитные волны — ведь по законам классической электродинамики не излучает только заряд, движущийся по прямой с постоянной скоростью. Излучающий же электрон, непрерывно теряя энергию, упал бы на ядро.

Согласно правилам, введенным Бором, электрон может излучать кванты света — фотоны — только при переходе с одной орбиты на другую. Существует орбита с наименьшей возможной энергией, и в таком состоянии электрон живет неограниченно долго — ему некуда переходить. Так была объяснена стабильность атома.

Смысл правил квантования был неясен, но теория Бора описала все главнейшие свойства атомов, например, то, что атомы испускают свет дискретных частот. Бор выразил частоты излучаемого атомом света через заряд ядра, заряд и массу электрона и постоянную Планка.

Еще одна догадка

Событие, которому суждено было объяснить смысл постулатов Бора, произошло в 1923 году. Но сначала оно лишь чувствительно задело больное место — проблему волн-частиц.

Французский физик Луи де Бройль предположил, что электроны на самом деле не частицы, а волны, вернее — и частицы, и волны... Частицы должны описываться некоторым волновым процессом, характеризующимся длиной волны λ, связанной с количеством движения частицы p так же, как длина волны фотона связана с его импульсом.

Через четыре года американские физики Дэвиссон и Джермер и независимо от них англичанин Томсон*) открыли дифракцию электронов на кристаллах (см. рисунок 3). Значит, электрон на самом деле волна!

Так подтвердилось не только удивительное предположение де Бройля, но и в точности его формула для длины волны электрона. История повторилась в обратном порядке: свет сначала изучили как волну, потом как набор частиц, а электрон — наоборот.

Новая механика

В 1926 году Эрвин Шредингер, обобщив гениальную догадку де Бройля на случай, когда электрон движется не в свободном пространстве, а во внешнем поле, например, в кулоновском поле ядра, получил уравнение для функции, описывающей волновые

---

*) В школьном учебнике 10 класса рассмотрен случай фотоэффекта в металлах. (*Прим. ред.*)

**) При фотоэффекте электрон поглощает фотон, который передает ему свою энергию и импульс. (*Прим. ред.*)

*) Сын знаменитого английского физика Дж. Дж. Томсона, впервые исследовавшего электрон. (*Прим. ред.*)

свойства частиц, которую он назвал волновой функцией.

Если написать это уравнение в свободном от полей пространстве, функция будет описывать волновой процесс с длиной волны де Бройля, то есть волну с постоянной длиной. Во внешнем же поле длина волны не постоянна, она изменяется от точки к точке.

Оказалось, что решение уравнения Шредингера для атома водорода получается в точном согласии с правилами квантования Бора не для всех энергий, а только для определенных дискретных значений, совпадающих с теми, которые следовали из боровских правил. Стационарное — устойчивое — состояние электрона в атоме водорода — допустимая боровская орбита — на языке уравнения Шредингера означает, что получилась стоячая волна, а стоячая волна получается при условии, что в области движения электрона укладывается целое число волн де Бройля.

В этом и состоит смысл правила квантования: стоячие волны могут образовываться только при дискретных значениях энергии электрона в атоме, когда в области движения укладывается одна, две или любое целое число волн (рисунок 4).

Простой пример

Предположим, что частица движется между непроницаемыми стенками, расположенными на расстоянии l друг от друга. У каждой из стенок волновая функция должна обращаться в нуль, то есть переходить в волновую функцию снаружи, которая равна нулю, поскольку за стенки частица не выходит. Поэтому, чтобы получилось стационарное состояние с номером n, на длине l должно уложиться целое число полуволн: $2l/\lambda=n$. Так, в первом состоянии, когда между стенками укладывается половина длины волны, волновая функция равна нулю на стенках и имеет максимум посередине. Стоячую волну можно представить в виде двух волн, бегущих навстречу друг другу. Поэтому средний импульс стоячей волны равен нулю. Абсолютное же значение импульса такое же, как у соответствующей бегущей волны, и связано с ее длиной соотношением де Бройля: $p=h/\lambda=nh/2l$. Найдем энергию $E=p^2/2m$.*) Отсюда легко получить формулу $E=\pi^2\hbar^2n^2/2ml^2$. Так в этом простом случае мы нашли уровни энергии.

Итак, на первом этапе развития квантовой механики была установлена дискретность возможных значений ряда физических величин; найден один из основных масштабов природы — постоянная Планка, разграничивающая область явлений, описывающихся классической физикой, и явления квантовой природы**); выяснено, что частицы выступают как носители и волновых, и корпускулярных свойств; найдено уравнение для волновой функции, описывающей состояние квантовой системы.

Но главный вопрос оставался нерешенным — что такое волновая функция, главный инструмент теории?

В 1905 году Эйнштейн перевернул привычные представления о пространстве и времени, после чего сами собой возникли и были поняты формулы, полученные ранее Лоренцем. Предстояло сделать такой же важный шаг и в квантовой механике. Физика — это не только формулы, а глубокое понимание физических явлений, обогащенное математическим языком.

---

*) Связь энергии E с импульсом частицы p получается из системы уравнений: $E=mv^2/2$ и $p=mv$. (*Прим. ред.*)

**) Законы квантовой механики переходят в классические в пределе $h\to0$. (*Прим. ред.*)

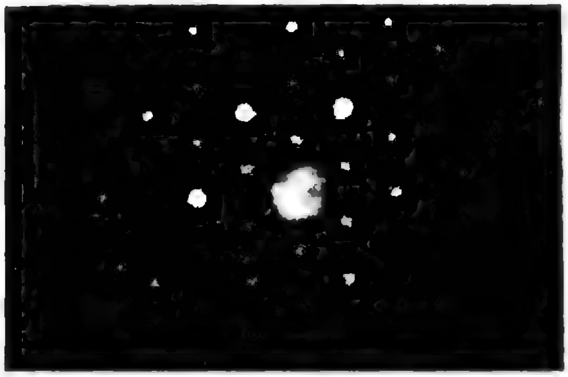


Рис. 3.

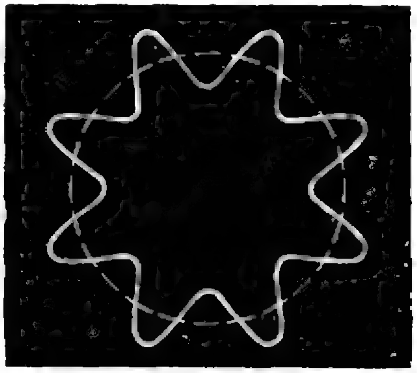


Рис. 4.

Координата или скорость?

В 1927 году один из создателей квантовой механики Вернер Гейзенберг размышлял о понятиях координаты и скорости частицы. Он проделывал мысленные эксперименты и понял, что невозможно одновременно точно измерить координату и скорость — чем точнее измерять координату электрона, тем менее определенной становится его скорость...

Чтобы измерить координату, нужно посмотреть в микроскоп на электрон, освещенный светом короткой волны. При этом координата электрона будет измерена с неопределенностью порядка длины волны использованного света*). Но, взаимодействуя с волной, электрон получит отдачу. Его импульс изменится на величину порядка импульса одного фотона. А этот импульс, как мы уже знаем, равен h/λ. Чем меньше λ, тем лучше будет измерена координата, но зато тем более неопределенным станет импульс.

Итак, неопределенность координаты составляет $\Delta q \sim \lambda$, а неопределенность импульса $\Delta p > h/\lambda$. Умножая выражение для Δp на Δq, получим

$$\Delta q \cdot \Delta p > h.$$

Это и есть соотношение неопределенностей Гейзенберга.

Проделав множество подобных мысленных экспериментов, Гейзенберг пришел к заключению, что для микрочастиц существует принципиальное ограничение, которое природа накладывает на понятия координаты и импульса. Этого ограничения не знала классическая физика, оно не вносит изменений в описание больших тел из-за малости h.

Особенность квантовой механики заключается в том, что свойства микроскопических объектов нельзя изучать, отвлекаясь от способа наблюдения. В зависимости от него электрон проявляет себя то как волна, то как частица. Конечно, есть такие свойства, которые не зависят от способа наблюдения: масса, заряд, спин частицы**)...

Принципиальная неопределенность некоторых величин есть следствие применения классических понятий к описанию неклассических объектов. Но это неизбежно — ведь измерительные приборы должны давать определенные показания, и в этом смысле они обязательно классичны. Не значит ли это, что наше описание объективных свойств микрообъектов неопределенно и двусмысленно? Нет, язык классической физики, на котором говорят средства наблюдения, на котором мы формулируем мысли, позволяет до конца исследовать квантовые свойства микрообъектов.

Квантовая механика помогла, наконец, вытащить занозу, примирить представление об электроне как о частице и о волне. Сказочные мифические существа — кентавры, кони-люди,— в одной ситуации воплощают человеческую мудрость и благожелательность, в другой проявляют животный буйный нрав и невоздержанность; одни из них воспитывают героев, другие вредят им. Частица-волна электрон — то человек, то конь, то кентавр, в зависимости от ситуации, от вопросов, которые задает эксперимент.

Физический смысл волновой функции

Вернемся к опыту. Пусть электроны падают на экран с отверстием. Поставим далеко за экраном фотопластинку. Электрон, попав на нее, «засветит» зерно эмульсии, и его координата определится с точностью до размеров зерна. Пучок электронов в результате дифракции засветит круг с радиусом R, значительно бóльшим, чем радиус отверстия. Если уменьшать интенсивность пучка электронов так, чтобы на экран падал, скажем, один электрон в минуту, дифракционная картина не изменится, надо только подольше подождать, пока она проявится. Значит, и одному электрону нужно приписать вероятность попадания в то или иное место фотопластинки...

Анализ подобных опытов позволил Максу Борну в 1926 году предположить, что квадрат волновой функции определяет вероятность того или иного значения координаты или импульса электрона в зависимости от типа поставленного опыта.

---

*) Частица с размерами, сравнимыми с длиной волны света, из-за дифракции видна в микроскопе размытой. (*Прим. ред.*)

**) Микрочастицы обладают собственным моментом количества движения. Момент количества движения, измеренный в единицах $h/2\pi$, называют спином. (*Прим. ред.*)

Что помогло прийти к такому заключению? Вспомним, что теория волновых явлений света — интерференции и дифракции — была разработана задолго до уравнений Максвелла*), до понимания электромагнитной природы света. Предполагалось только, что источник света испускает волны неизвестной природы, а интенсивность света пропорциональна квадрату той величины, которая колеблется. В современном представлении в световой волне колеблются во времени и пространстве электрические и магнитные поля, и интенсивность света пропорциональна их квадрату. Но почти все волновые проявления света объясняются независимо от его природы. Было естественно и для волн, связанных с микрочастицами, считать, что имеется некий волновой процесс, а интенсивность — в нашем случае вероятность — пропорциональна квадрату волновой функции.

Сначала предполагали, что волновым свойствам частицы соответствует реальное физическое поле, подобное электромагнитному в световой волне. Но тогда уже один электрон давал бы в одном акте всю дифракционную картину, а он чернит только одно зерно... Значит, волновая функция частицы не физическое поле и не физическая волна. Это «волна информации». Она представляет собой запись потенциальных возможностей исхода того или иного последующего наблюдения.

Волновая функция — максимально полное допустимое описание состояния частицы. Она заменяет классическое состояние, которое задается координатами и скоростями.

Удивительные свойства волновой функции казались Эйнштейну физически недопустимыми. Спор Эйнштейна с Бором продолжался много лет и способствовал выяснению понятий квантовой механики. Если принять, что волновая функция — волна информации, а не физическое поле, все становится на свое место. Ведь если волновая функция — описание вероятностей, значит, опыт, проделанный в одном месте, может скачком изменить результаты измерений в другом месте. Это скачкообразное изменение вероятности вызвано уточнением, новой информацией. Мы задаем вопрос: «Какова вероятность получить двойку по физике?». Прибавив к этому уточнение, определенное условие, например: «не заглядывая дома в учебник», мы получим скачкообразное изменение вероятности, она подскочит до единицы. Обратное условие: «полностью поняв и выучив урок», снова скачком сведет вероятность к нулю.

Представим себе, что две частицы с суммарным импульсом, равным нулю, разлетелись, и нам нужно найти импульс одной из них в Москве, другой — на Северном полюсе. Вероятность скачком изменится, если мы измерим импульс московской частицы и будем искать импульс другой при условии, что московский нам известен. Вероятность зависит от того, какой вопрос мы поставим, отберем ли мы любые исходы северных опытов или только те, при которых московский импульс имеет заданную величину. Ничего странного и необычного в этом нет.

Квантовая механика не дает однозначного ответа на некоторые вопросы, а только вероятность того или иного результата.

Нарушается ли причинность?

Удивительные успехи небесной механики в XVII—XVIII веках внушили глубокую веру в однозначность предсказаний. Гордясь могуществом своей науки, французский астроном, математик, физик Пьер Лаплас сказал: «Дайте мне координаты и скорости всех частиц, и я предскажу будущее Вселенной!»

Но вот мы узнали, что одновременно точно задать координаты и скорости частиц невозможно! Согласно квантовой механике можно указать только вероятность того или иного значения координат и скоростей.

Наука уже сталкивалась с вероятностными предсказаниями; классическая статистическая физика может ответить на вопрос: какова вероятность найти частицу нагретого газа с такой-то энергией? Но эта вероятность рождена сложностью системы, неточностью определения начального состояния, и за нею стоит строгая однозначность механических законов.

В квантовой механике вероятность подлинная, обусловленная неопределенностью классических понятий. Она су-

---

*) Уравнения Максвелла описывают свойства электромагнитного поля (*Прим ред*)

ществует даже для самой простой системы — для одной частицы. Вероятностный характер законов Вселенной — главное открытие квантовой механики.

Согласно квантовой механике, на некоторые вопросы нельзя однозначно ответить — на взгляд классической физики причинность нарушена! Да, мы не можем задать координаты и скорости частиц, можем только задать в начальный момент волновую функцию и однозначно найти ее в любой более поздний момент.

Мы можем с такой же гордостью, как и Лаплас, воскликнуть: «Дайте мне волновую функцию всех частиц, и я предскажу будущее!»

Итак, в более точном смысле причинность сохраняется; из максимально полно определенного в квантовомеханическом смысле начального состояния однозначно следует единственно возможное конечное состояние.

Квантовая механика — необычайно красивая и внутренне непротиворечивая теория, хорошо согласующаяся с опытом для своего круга явлений.

Применение квантовой механики к электромагнитному полю и к другим физическим полям

Применение квантовой механики к системам, колеблющимся около положения равновесия,— осцилляторам — имело удивительные следствия. Если классический осциллятор — маятник или грузик на пружинке — находится в покое в положении равновесия, квантовый — совершает «нулевые» колебания. Кинетическая и потенциальная энергия этих колебаний порядка $h\nu$. Среднее значение координаты осциллятора равно нулю, но среднее значение квадрата координаты отлично от нуля*)! Энергия квантового осциллятора изменяется порциями $h\nu$ и для состояния с номером n равна $E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)h\nu$.

Если рассматривать звуковые колебания твердого тела как набор квантовых осцилляторов, получится, что при абсолютном нуле температуры атомы твердого тела не неподвижны — они совершают нулевые колебания. Это в точности подтверждается опытами по рассеянию света твердыми телами. Но и электромагнитные волны в пустоте можно считать набором осцилляторов, и, значит, в вакууме, где нет ни частиц, ни квантов, должны происходить нулевые колебания электромагнитного поля.

Попробуем разобраться, что такое квант света — фотон.

Для этого проделаем опыт. Представим себе, что между параллельными металлическими экранами образовалась стоячая электромагнитная волна перпендикулярно им. Если расстояние между экранами l, между ними может уместиться стоячая волна с максимальной длиной λ такой, что $l=\lambda/2$. Частота волны $\nu=c/\lambda$ связана с возможными значениями энергии волны соотношением $E_n=(n+1/2)h\nu$. В наинизшем состоянии с $n=0$ между экранами нет квантов. В состоянии с $n=1$ появился один квант с длиной волны $\lambda=2l$. При $n=2, 3, \ldots$ есть два, три и так далее квантов с этой длиной волны.

Для следующих стоячих волн (обертонов) с длинами $\lambda=l, l/2, \ldots$ можно повторить то же самое. Для m-й волны $\lambda_m=2l/m$. В этом состоянии также может быть сколько угодно квантов, они определяются степенью возбуждения данного осциллятора, а значок m определяет длину волны, то есть тип осциллятора. Число n_m — номер возбуждения осциллятора — показывает число квантов данного типа.

Кванты принято характеризовать не длиной волны, а величиной, которая называется «волновым вектором». Модуль волнового вектора k просто связан с длиной волны: $k=2\pi/\lambda$. Для каждого k свой осциллятор и свои кванты, число которых равняется номеру возбуждения осциллятора.

И в бегущей волне происходят периодические колебания. Энергию волны для каждого волнового вектора тоже можно записать как энергию осциллятора, изменяющуюся порциями $h\nu$. Но бегущая волна обладает количеством движения, значит, квант будет иметь импульс. У частицы с массой, равной нулю, импульс равняется энергии, деленной на скорость света: $p=h\nu/c$.

(Окончание см. на с. 26)

---

*) См. статью А. Б. Мигдала «Вычисления без вычислений» в «Кванте» № 8 за 1979 год. (*Прим. ред.*)

Что такое электрический пробой

Л. А. АШКИНАЗИ

Почему в линиях электропередачи (ЛЭП) используются высокие напряжения, известно, наверное, всем. Действительно, чем выше напряжение в линии, тем меньше в ней ток (при постоянной передаваемой мощности) и тем меньше тепловые потери. Казалось бы, чем выше напряжение, тем лучше. Однако ЛЭП с рабочим напряжением, скажем, в несколько миллионов вольт не существует, а разработка каждой последующей ЛЭП на большее, чем у предшествующих, напряжение требует больших усилий. По-видимому, есть какой-то эффект, ограничивающий рабочее напряжение ЛЭП.

Оказывается, это тот же самый эффект, который ограничивает «рабочее напряжение» между тучей и землей (или между двумя тучами).

И свет, и звук

> *Короткий гром — глухой обвал.*
> *Рожденье света и озона,*
> *Далеких молний карнавал.*
>
> Н. Майоров

В этих трех строчках уместилась практически вся информация о молнии, хотя автор их был поэтом, а не физиком.

Итак, молния — это кратковременный («короткий») процесс в атмосфере с генерацией звука («гром») и света («рожденье света») и с протеканием химических реакций («и озона»). Во время этого процесса выделяется энергия, во всяком случае в виде света и звука — мы видим свет и слышим звук.

Первый вопрос, который сразу возникает,— откуда берется эта энергия? Ответ очевиден: энергия накапливается в конденсаторе, обкладки которого — это туча и земля, а диэлектрик — воздух между ними. Попытаемся оценить запасенную в этой системе энергию.

Пусть туча имеет размеры 3×3 км, а расстояние между тучей и землей — 1 км. Тогда емкость конденсатора будет около 0,1 мкФ (как получено это значение?). Несмотря на внушительные размеры конденсатора, емкость его весьма скромная — в радиоприемниках есть конденсаторы с емкостью в 1000 раз больше. Правда, энергия заряженного конденсатора зависит еще и от напряжения, а оно между тучей и землей достигает 10^9 В. Таким образом, энергия составляет около $5 \cdot 10^{10}$ Дж (как получена эта величина?), что, например, в 10^9 раз больше энергии заряженного конденсатора фотовспышки (емкость 800 мкФ, напряжение 300 В).

Но для того чтобы эта, даже не очень значительная, энергия электрического поля превратилась в свет, звук или в какую-то другую форму энергии, должно начаться движение зарядов, то есть должен возникнуть электрический ток. Однако в обычных условиях воздух — диэлектрик. Те относительно немногочисленные свободные заряды, которые есть в воздухе в силу каких-то случайных обстоятельств (например, электроны, возникшие из-за ионизации космическими лучами), не могут образовать большого (до 10^5 А, как показывает опыт) тока, протекающего в канале молнии.

Итак, что-то в нашем рассуждении не так.

Куда же бьет молния?

> *Между катодом и анодом происходит больше явлений, чем это доступно нашему воображению.*
>
> Г. Ретер. Электронные лавины в газах

Не следует думать, что Ретер был пессимистом, отнюдь. Просто он понимал ограниченные возможности человеческого разума и необычайную сложность природы.

До сих пор ясны не все детали электрического пробоя в газе (именно так называют процесс прохождения электрического тока через газ). Однако чтобы понять, как протекает процесс в целом, достаточно учитывать сравнительно небольшое число деталей процесса. До полного познания явления электрического пробоя в газе еще очень далеко. Но даже только то, что изучено, позволило создать самые мощные лазеры, самые мощные источники света, самые мощные электронные приборы.

Не все еще ясно и в теории молнии, представителя одного из конкретных видов пробоя в газе — искрового разряда. Но многое уже установлено. Известно, например, что процесс протекает в две стадии — образование канала разряда между тучей и землей и прохождение импульса основного тока.

Обычно туча заряжена отрицательно, а земля положительно. Одиночные электроны, имеющиеся в воздухе, ускоряются электрическим полем и ионизируют нейтральные атомы. При этом возникают новые свободные электроны, которые тоже ионизируют атомы, и так далее. В итоге образуются электронные лавины, движущиеся по направлению от тучи к земле. Два явления наиболее существенны для развития лавин: усиление поля перед головкой лавины и фотоионизация — газ ионизируется испускаемым головкой ультрафиолетовым излучением (рис. 1). Этот процесс в целом называется очень красиво: «ступенчатый лидер». Лидер светится относительно слабо и глазом практически не виден.

Оказывается, ступенчатый лидер распространяется со скоростью порядка 10^7 м/с, но расстояние в 1 км он покрывает не за 0,1 мс, а за... 20 мс! Почему? Почему, пройдя каждые 5 м, он останавливается, «размышляет» 0,1 мс, а затем движется дальше, обычно, изменив направление? Здесь познанное кончается. В физике газового разряда вообще нет заасфальтированных трасс, а тут кончается всякое подобие дорог.

Наконец, лидер добирается до земли, замкнув тучу с землей «накоротко» каналом ионизированного газа. На этом первая стадия процесса заканчивается, и начинается вторая. Теперь по образовавшемуся каналу снизу вверх, то есть от земли к туче, проходит короткий (0,1 мс) и мощный импульс основного тока молнии — его-то мы и видим. Температура газа в канале порядка 10^4 К — вот и происходит «рожденье

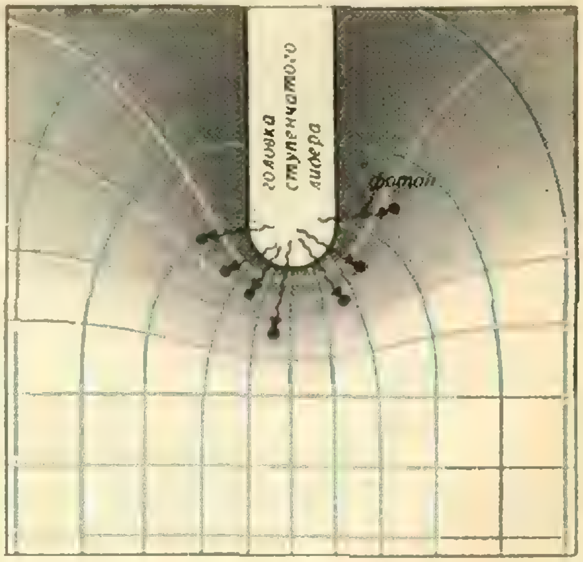


Рис. 1. Для возникновения электронных лавин наиболее существенны два фактора: усиление электрического поля перед головкой лидера (синим цветом показаны линии напряженности поля, красным — эквипотенциальные линии) и фотоионизация (нейтральные атомы ионизируются излучением, испускаемым головкой лидера).

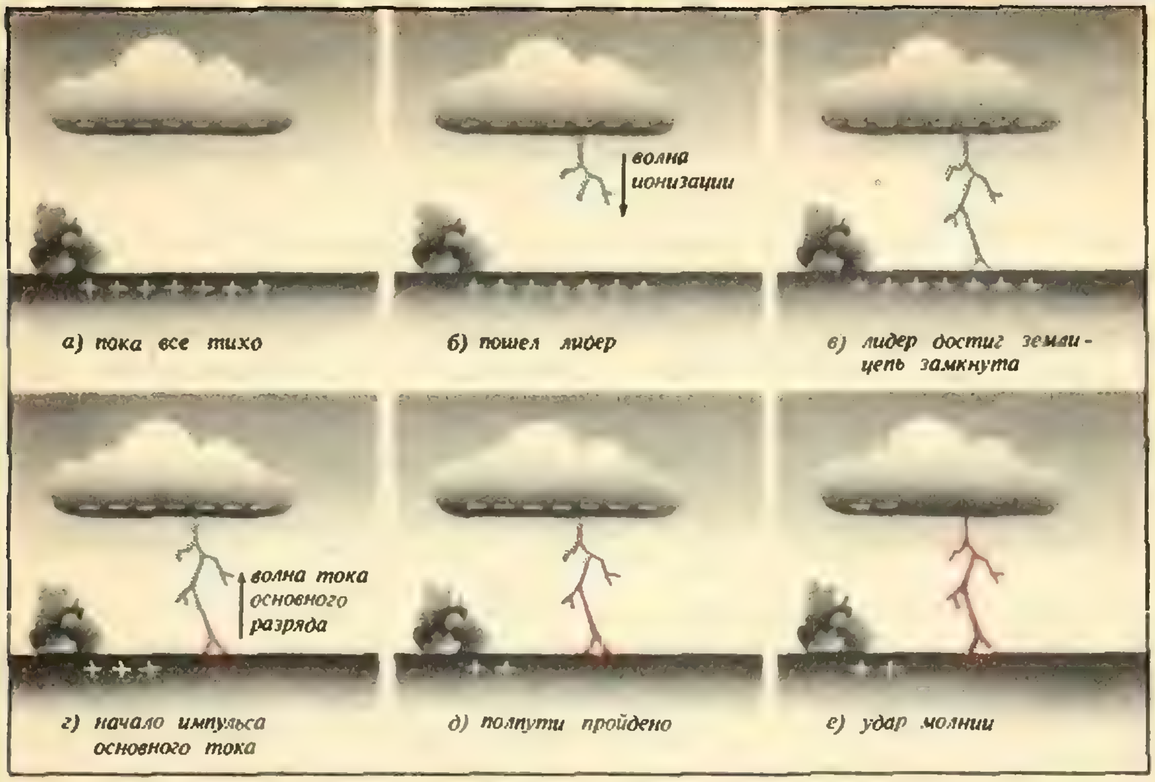

волна ионизации
а) пока все тихо
б) пошел лидер
в) лидер достиг земли - цепь замкнута
волна тока основного разряда
г) начало импульса основного тока
д) полпути пройдено
е) удар молнии

Рис. 2. Две стадии молнии: образование ионизированного канала разряда (а) — в)) и прохождение импульса основного тока (г) — е)).

света и озона». Газ расширяется — мы слышим гром.

Почему-то обычно молнию рисуют бьющей сверху вниз (туча и Зевс-громовержец наверху). Между тем импульс основного тока и свечение начинаются внизу и волной разливаются по каналу, оставленному лидером. Молния, точнее — видимая ее фаза, оказывается, бьет снизу вверх!

Таков вкратце механизм молнии, или пробоя в газе, причем пробоя больших промежутков (рис. 2). При пробое малых промежутков существенными оказываются процессы на электродах.

Неустойчивость и пробой в твердых и жидких диэлектриках

> *Развитие неустойчивости, то есть катастрофическое нарастание первоначального малого возмущения, является, естественно, процессом нестационарным. От нестационарного процесса мы вправе ожидать, что в конце концов он к чему-то приведет.*
>
> Ю. П. Райзер. Основы современной физики газоразрядных процессов

Пробой в твердом теле приводит обычно к пробитому в образце отверстию с оплавленными краями. Именно из-за этого и возникло название «электрический пробой». Пробой чистых жидкостей имеет много общего с пробоем твердых тел (отверстия же при этом, естественно, не остаются).

Основных механизмов пробоя твердых тел и жидкостей три.

Если вещество состоит из ионов (атомы связаны ионной связью), то электрическое поле может эти связи разорвать. При таком механизме электропрочность должна быть тем выше, чем больше энергия связи ионов. И действительно, такая закономерность наблюдается, например для ионных кристаллов (рис. 3). Далее происходит следующее. Во-первых, ион движется по веществу, разрушая химические связи и порождая новые свободные ионы, которые сразу же начинают выполнять свое «черное дело». Во-вторых, все эти ионы отбирают энергию у поля и отдают ее веществу (тормозясь при соударениях). Вещество нагревается, плавится и испаряется, в результате чего происходит еще и пробой в парах. Что там раньше, что позже, разобраться трудно — все эти процессы идут одновременно. А кончаются они, — в зависимости от мощности источника электроэнергии и напряжения пробоя — тихим щелчком или грохотом (если пробой в парах — последняя стадия, то откуда грохот понятно, а если до пробоя в парах дело не дошло?).

Следующий механизм очень похож на предыдущий, но здесь ускоряются, ионизируют атомы, отбирают и выделяют энергию не ионы, а электроны. Ясно, что такой механизм будет иметь место, например, в веществах, состоящих из одинаковых атомов, то есть в чистых элементах. Кончается пробой в этом случае так же, а начинается, естественно, иначе — для начала процесса нужен свободный электрон. Причин, по которым он может оказаться в веществе, много: наличие примесей, приэлектродные явления и т. п.

Наконец, третий механизм пробоя — так называемая электротепловая неустойчивость. Что такое неустойчивость и как она, согласно эпиграфу, развивается? Неустойчивость в физике вообще это то же самое, что и неустойчивость в механике,— малое отклонение от состояния равновесия нарастает (шарик, лежащий на вершине сферы, чуть-чуть отклонившись, не возвращается, а скатывается дальше). В данном случае неустойчивость возникает следующим образом. Сопротивление изолятора хотя и велико, но все же не бесконечно. Какой-то ток через него проходит, и поэтому изолятор нагревается. При нагревании сопротивление изолятора уменьшается (растет число свободных носителей зарядов), ток возрастает, возрастает и выделяющееся количество теплоты. Итак, при увеличении температуры возрастает выделяющееся тепло. Правда при этом возрастает и тепло, уходящее из изолятора в окружающую среду. Начнется ли «лавинный процесс» разогрева или нет, определяется тем, что́ при увеличении температуры растет быстрее — выделяющееся или уходящее тепло. Если быстрее растет тепло выделяющееся, то лавинный процесс начнется. Если же быстрее растет тепло уходящее, то температура будет уменьшаться и равновесие восстановится. Как показывает опыт, при малых напряжениях преобладает вторая ситуация, при больших — первая. Характерное отличие пробоя по этому механизму — значительно большее, чем при первых двух, время развития процесса. Приходит же этот пробой, как и другие, к плавлению, испарению и, если предохранители не отключат раньше источник энергии, к разряду в паре.

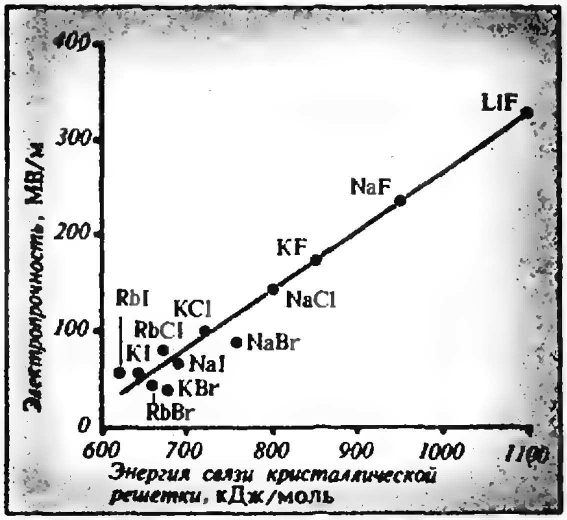


Рис. 3. График зависимости электропрочности щелочногалоидных ионных кристаллов от энергии связи кристаллической решетки.

И в твердых, и в жидких диэлектриках есть еще несколько механизмов пробоя, связанных с примесями и неоднородностями. Но «нельзя объять необъятное», по крайней мере, в одной статье.

Самый лучший и самый малоизученный изолятор — вакуум

> *Теория высоковольтного пробоя вакуума характерна наличием многих гипотез. Это можно объяснить тем, что при проведении исследований отдельные авторы наталкивались на все новые и новые факторы.*
> Н. В. Черепнин. Сорбционные*) явления в вакуумной технике

Кроме рассмотренных нами твердых, жидких и газообразных диэлектриков в природе есть еще один, причем наилучший. Это — вакуум. Его очевидное отличие от остальных диэлектриков состоит в том, что вакуум не содержит никаких носителей зарядов, даже связанных. Следовательно, источником электронов или ионов, которые потом составят ток пробоя, должны быть электроды. Возможен, например,

---

*) Сорбция (от латинского sorbeo — поглощаю) — поглощение твердым телом или жидкостью какого-либо вещества из окружающей среды.

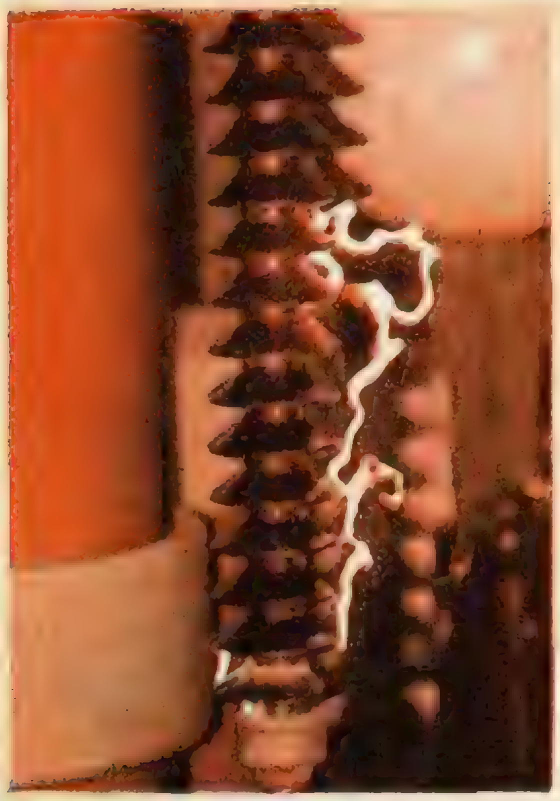


Рис. 4. Поверхностный пробой.

такой процесс: электростатические силы, притягивающие один электрод к другому, отрывают слабо держащуюся на электроде частичку (пыль, заусенец после механической обработки, кристаллик, отделенный микротрещиной). Оторванная частичка пересекает зазор и при ударе о противоположный электрод испаряется. В парах материала частички и происходит пробой.

И снова — ЛЭП

> *Видимо, пришло время стимуляции условий для развития более тщательных и фундаментальных исследований поведения изоляторов.*
>
> Дж. Фаррелл. Электрический пробой в вакууме

Наш рассказ начался с высоковольтных ЛЭП. Вернемся к ним и обратим наше внимание на изоляторы, с помощью которых подвешены провода к опорам. Эти изоляторы — вы, конечно, помните, как они выглядят,— состоят из отдельных «тарелок» (рис. 4).

Очевидно, что прямую палку сделать проще, чем довольно хитрой формы диск. Зачем же изоляторам придают такую причудливую форму? Что меняется, если прямую палку заменить ребристой? Расстояние между электродами по объему диэлектрика, конечно, не изменится, но зато увеличится расстояние по поверхности диэлектрика, то есть по границе между изолятором и воздухом. По-видимому, существует какой-то особый вид пробоя, связанный с поверхностью твердого тела. Практически именно этот вид пробоя наблюдается в опыте с керамическим кубиком, к противоположным граням которого приложена разность потенциалов. В этом случае пути между электродами внутри диэлектрика, по воздуху и по поверхности совпадают, а соответствующие напряжения пробоя относятся примерно как 10:3:1. В этом есть нечто загадочное. Казалось бы, поверхность — понятие чисто геометрическое. Почему же напряжение пробоя по поверхности меньше остальных? Разгадка в том, что на самом деле поверхность — понятие не только геометрическое.

После поверхностного пробоя на диэлектрике, как правило, повреждения отсутствуют. Значит, пробой происходит все-таки в газе, окружающем образец. Но почему тогда канал пробоя «стелется» по образцу? Может быть, газ в непосредственной близости к образцу как-то отличается от газа вдали? Но к этому может привести только выделение газа из образца. Действительно, на поверхности твердого тела всегда имеется слой сорбированного газа и влаги. Чтобы проверить, не происходит ли «поверхностный пробой» в слое более плотного газа у поверхности образца, можно провести такой опыт. Поместим образец в вакуум и нагреем. При нагревании сорбированные на поверхности газ и влага удаляются, а новые не сорбируются, так как образец находится в вакууме. В таких условиях напряжение поверхностного пробоя становится значительно выше. Следовательно, поверхностный пробой — это, по существу, пробой в газе (маленькая молния). Однако этот процесс изучен еще плохо, о чем свидетельствует эпиграф к разделу.

Пять сетов

Доктор физико-математических наук
Л. Е. САДОВСКИЙ,
Кандидат физико-математических наук
А. Л. САДОВСКИЙ,
О. Л. САДОВСКАЯ

Одна из самых популярных спортивных игр, в частности, среди ученых — большой теннис. В этой статье строится математическая модель игры в теннис, позволяющая оценивать шансы выигрыша каждой из сторон. Однако для понимания статьи не требуется ни разряда по теннису, ни специальных знаний по математике.

Немного о теннисе

Сто десять лет тому назад английский майор в отставке У. Уингфилд запатентовал изобретенную им игру, названную *теннисом*. Однако корни тенниса уходят в далекое прошлое — во французское средневековье и даже во времена древнего Египта. Ныне в теннис играет 120 миллионов человек в 193 странах мира (заметим, что в футбол играет лишь 40 миллионов) — это один из самых полезных, увлекательных, рентабельных видов спорта. По темпам развития, росту популярности он уже ряд лет опережает все иные виды спорта. Теннис, являясь незаменимым видом спорта для людей, усиленно занимающихся умственной работой (особенно математиков, физиков, шахматистов), способен доставлять не только физическое, но и огромное интеллектуальное удовлетворение. Недаром говорят, что в теннис играют руками, а выигрывают головой. По словам одного известного теннисиста, для игры высокого класса необходимы три составляющие: выносливость стайера, быстрота спринтера и стремительное мышление шахматиста, свободно играющего в глубоком цейтноте.

Правила игры

Местом для игры в теннис служит ровная площадка (корт) определенных размеров (рис. 1) с нанесенными на ней линиями и разделенная пополам сеткой.*)

Мяч вводит в игру *один из двух***) *соперников* — этот удар называется *подачей*. Подают по диагонали: стоя на первой позиции подачи — в первое поле подачи противника, стоя на второй — во второе. Подача производится поочередно с каждой из позиций. Мяч, введенный в игру ударом ракетки, должен перелететь через сетку и удариться в площадку в пределах соответствующего поля подачи противника (см. рис. 1). Если первая подача в данное поле была неправильной, игрок должен повторно подать в то же поле. После второй неправильной подачи очко считается для подающего проигранным.

Поданный мяч должен быть отражен ударом ракетки принимающего после первого, но до второго приземления мяча. После приема подачи *(во время розыгрыша очка) мяч разрешается* отражать не только между первым и вторым приземлением, но и «с лета» (до приземления). Розыгрыш очка состоит в том, что каждый из противников поочередно отражает направленный к нему мяч, не позволяя ему приземляться на своей стороне более одного раза. Мяч находится в игре пока какой-либо из противников окажется не в состоянии ударить мяч до второго приземления или пошлет его в сетку или за пределы площадки; он тогда проиграл этот мяч.

Теннисная *встреча* подразбивается на *сеты* (партии), сеты на *геймы* (игры), геймы формируются при розыгрыше отдельных *мячей* (очков). В пределах одного гейма игра ведется до выигрыша одной из сторон не менее четырех мячей *(очков) при условии, что эта сторона получила* перевес не менее чем на два мяча.

Счет очков в гейме имеет особенности, сохранившиеся с тех времен, когда игра велась на «интерес». Во Франции ценой игры являлась монета в 60 су: она разменивалась на четыре по 15 су. Эти последние, по-видимому, составляли цену четырех ударов: 15, 30, 45, 60. Правда, в XX веке судьи стали лаконичнее, выкрикивая «сорок» вместо «сорок пять».

Итак, при выигрыше какой-либо стороной первого в гейме очка, ей *засчитывается 15:0*, при выигрыше той же стороной второго очка добавляется еще 15 и счет становится 30:0 в ее пользу. При выигрыше третьего очка счет становится 40:0, выигрыш четвертого очка («игра», *как говорят судьи) приносит* завершение гейма в пользу этой стороны.

Если одна из сторон после выигрыша первого очка второе очко проиграла, то 15 засчитывается противнику (счет становится 15:15) и т. п. Следовательно, счет (а он ведется всегда, начиная с очков подающего) в гейме может быть только следующий: 15:0, 30:0, 40:0, 0:15, 0:30, 0:40, 15:15, 30:15, 40:15, 15:30, 30:30, 40:30, 30:40, «ровно», «больше», «меньше»; выиграв очко сразу после счета 40:0, 40:15, 40:30, подающий выигрывает игру, а *принимающий — после счета* 0:40, 15:40, 30:40.

Счет «ровно» имеет место при равенстве очков у противников, начиная с шестого разыгранного очка; «больше» («меньше») — начиная с седьмого очка, если подающий выиграл (проиграл) очко после счета «ровно»; «игра» подающего, если подающий выиграл непосредственно следующий за счетом «больше»; «игра» принимающего, если при счете «меньше» подающий проиграл очередное очко. Возможную эволюцию счета в гейме можно проследить по рисунку 2.

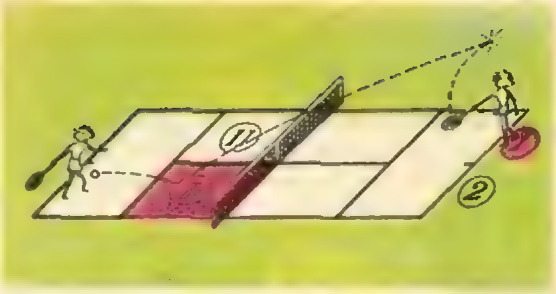


Рис. 1.

По завершении первого гейма начинается розыгрыш второго гейма, при котором подача переходит к противоположной стороне и т. д. до завершения сета (партии).

Счет геймов в сете напоминает счет очков в волейболе или пинг-понге, но не до 15 и 21, а до 6 (с преимуществом в 2 очка). Сет заканчивается, таким образом, когда счет геймов становится равным одному из следующих: 6:0, 6:1, 6:2, 6:3, 6:4, 7:5, 8:6, 9:7 и т. д.

После первого сета разыгрывается второй сет и т. д. пока одна из сторон не выиграет *встречи* — двух (из трех) или трех (из пяти) сетов, в зависимости от условий соревнований. При выигрыше одной из сторон подряд двух (трех) сетов ей присуждается победа и остальные сеты не играются. Следовательно, счет *выигранной* встречи может быть 2:0, 2:1 (соответственно 3:0, 3:1, 3:2).

Кто побеждает?

Итак, читатель, мы ознакомились с основными правилами игры в теннис*) в объеме, достаточном для дальнейшего. Теперь мы смогли бы начать играть: Вы (читатель) и я (автор). Если я играю значительно сильнее Вас, то мое преимущество выявится быстро — в *первом* же сете, затем во втором. Если же разница в силе не столь велика, то счет в каждом гейме и сете будет неустойчивым. Именно так обстоит дело при встречах игроков, входящих в мировую элиту, например, на турнирах серии «Гранд при» или неофициальном первенстве мира (профессионалов и любителей) в Уимблдоне (Англия). Все сильнейшие игроки мира классифицированы по силе игры. Каждый из ведущих игроков имеет свои достоинства (при почти полном отсутствии слабых мест) и встречи между ними проходят, так сказать, «на равных», а исход зависит обычно от дополнительных обстоятельств: психологической подготовки, самочувствия, эмоционального настроя, покрытия корта (грунт, трава, пластик), погоды и т. п.

---

*) Игра в теннис впервые в русской литературе описана Л. Н. Толстым в романе «Анна Каренина».

**) Мы не останавливаемся на так называемой «парной игре», в которую играют двое на двое.

*) Для более детального знакомства с особенностями игры отсылаем читателя к брошюре *Теннис. Правила соревнований* (М.: «Физкультура и спорт», 1979) и к специальной литературе.

Так кто все-таки выигрывает? Настоящий спортсмен, проиграв, скажет: победил сильнейший. Можно услышать, однако, фразы вроде «он выиграл у меня случайно» или «ему все время везло». Какова же в действительности доля мастерства и доля случая при выявлении победителя при игре в теннис?

Попытаемся построить *математическую модель* игры в теннис и с ее помощью разобраться в поставленном вопросе.

Основные предпосылки модели

Элемент случайности в теннисе, бесспорно, присутствует, и наша модель должна это учитывать. Выигрыш мяча нельзя предсказать заранее однозначно, однако можно объективно оценить «шансы на выигрыш» каждого из противников. Эта оценка шансов — число — называется *вероятностью*, и поэтому модели, подобные нашей математики называют *вероятностными* (или *статистическими*) моделями.

Но не пугайся, читатель! Для понимания нашей простой модели не потребуется глубоких знаний по теории вероятностей. Тот небольшой объем понятий из этой науки, который будет нужен, мы разъясним по ходу дела. А читателям, захотевшим вникнуть глубже в эту теорию, мы рекомендуем обратиться к выпуску 23 библиотечки «Квант» (А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров. *Введение в теорию вероятностей*, М.: Наука, 1982).

Итак, в нашей модели каждый отдельный розыгрыш мяча является *случайным испытанием* с двумя возможными исходами — выигрышами автора (A) и выигрышем читателя ($Ч$). Каждому исходу приписывается его *вероятность* — числа $\mathbf{P}(A)$ и $\mathbf{P}(Ч)$ такие, что

$$0<\mathbf{P}(A)<1,\ 0<\mathbf{P}(Ч)<1,$$
$$\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(Ч)=1.$$

Что означает, скажем, число $\mathbf{P}(A)$? Оно выражает долю мячей (отнесенную к единице), которую автор в среднем выигрывает у читателя. Если автор в среднем выигрывает у читателя 60 мячей из 100, то вероятность его выигрыша, $\mathbf{P}(A)$, равна 0,6. (Мы считаем, что автор, опытный перворазрядник, играет несколько лучше читателя. В нашем случае, разумеется, $\mathbf{P}(Ч)=0{,}4$ и выполняются написанные выше неравенства и равенство.)

Мы будем предполагать далее, что *вероятность* $\mathbf{P}(A)=0{,}6$ (*а значит, и* $\mathbf{P}(Ч)=0{,}4$) одинакова для всех розыгрышей мяча в течение всей встречи. Исходя из этой предпосылки, мы хотим выяснить, каковы шансы (вероятность) выигрыша автора сначала гейма, затем сета и наконец — всей встречи.

Обсуждение адекватности модели

Разумеется, всякая математическая модель является лишь схемой, идеализацией реального процесса или явления. Упрощая реальность, мы пренебрегаем определенными ее сторонами. Так, считая вероятность $\mathbf{P}(A)$ неизменной в течение встречи, мы пренебрегаем, в частности, *физической подготовкой* противников (в конце встречи автор, наверное, устанет больше своего более молодого соперника и станет чаще ошибаться) и *психологическими факторами* (проиграв очко, особенно два, автор обычно играет внимательнее и злее — его шансы на выигрыш очередного очка повышаются). У нашей модели есть и более серьезный недостаток, который заметит любой опытный теннисист, — она не учитывает *преимущество подающего*, особенно ощутимое на быстром корте (из травы, дерева или скользкого пластика).

На самом деле все названные факторы (и некоторые другие) можно включить в вероятностную модель игры в теннис. Мы не делаем это здесь — это существенно осложнило бы схему и технику счета, в то время как наша упрощенная модель уже позволяет прийти к интересным выводам, подчас неожиданным, но подтвержденным практикой.

Кто выиграет гейм?

Наша ближайшая цель — посчитать вероятность того, что автор выиграет гейм у читателя. На рисунке 2 показано, как последовательно может изменяться счет в гейме. При этом запись счета всегда начинается с очков подающего; для определенности будем считать, что подает автор. Для кратности обозначим $p=\mathbf{P}(A)$, $q=\mathbf{P}(Ч)$. Напомним, что p и q — вероятности выигрыша отдельного очка (мяча) автором и читателем — в течение гейма не меняются; мы приняли $p=0{,}6$, $q=0{,}4$.

По условию, вероятность перехода в состоянии 15:0 (то есть вероятность возникновения счета 15:0), которую мы обозначим $\mathbf{P}(15{:}0)$, равна p. Соответственно $\mathbf{P}(0{:}15)=q$.

Найдем **P**(30:0) — вероятность выигрыша автором первых двух мячей подряд. Очевидно

$$\mathbf{P}(30{:}0)=\mathbf{P}(15{:}0)\cdot p= \\ =p^2=0{,}36.$$

Но так ли это очевидно? Почему мы перемножили вероятности? На самом деле мы здесь пользуемся «теоремой умножения вероятностей последовательных независимых событий» (о ней можно прочитать в цитированной выше книге А. Н. Колмогорова и др.). Постараемся все же пояснить этот подсчет на языке средней частоты выигрыша. Если автор постоянно выигрывает у читателя в среднем 60 мячей из каждых 100 мячей (то есть в среднем 3/5 мячей), то из 60 мячей (разыгранных непосредственно после выигрыша первого мяча) автор тоже выиграет в среднем 3/5, то есть 60× × (3/5) = 36 раз из 100 (в среднем) автор будет выигрывать два первых мяча подряд.

Аналогично,

$$\mathbf{P}(0{:}30)=\mathbf{P}(0{:}15)\cdot q= \\ =q^2=0{,}16$$

— у читателя мало шансов выиграть первые два мяча подряд!

Сосчитаем теперь **P**(15:15). Имеем (подумайте, почему)

$$\mathbf{P}(15{:}15)=\mathbf{P}(15{:}0)\cdot q+ \\ +\mathbf{P}(0{:}15)\cdot p=2pq=0{,}48$$

— счет «по пятнадцати» после первых двух мячей будет возникать почти так же часто, как остальные два счета (30:0 и 0:30) вместе взятые.

Дальнейший подсчет производится совершенно аналогично. Двигаясь по рисунку 2 вниз, читатель может найти вероятность всех состояний (то есть возможных счетов) и заполнить клеточки, оставленные пустыми. Нас же интересует левый столбик («игра автора»). В нем A_1 обозначает выигрыш автора сразу после счета 40:0, A_2 — сразу после счета 40:15, A_3 — сразу после 40:30.

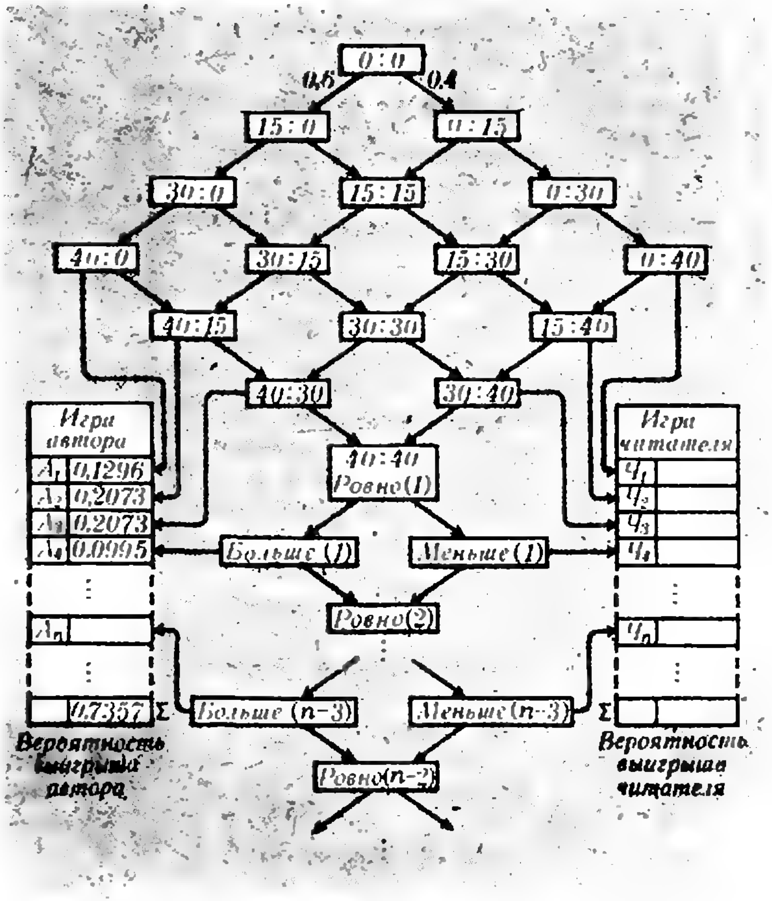

0:0
0,6
0,4
15:0
0:15
30:0
15:15
0:30
40:0
30:15
15:30
0:40
40:15
30:30
15:40
40:30
30:40
40:40 Ровно(1)
Больше(1)
Меньше(1)
Ровно(2)
Больше(n−3)
Меньше(n−3)
Ровно(n−2)
Игра автора
A_1 0,1296
A_2 0,2073
A_3 0,2073
A_4 0,0995
A_n
0,7357
Σ
Игра читателя
$Ч_1$
$Ч_2$
$Ч_3$
$Ч_4$
$Ч_n$
Σ
Вероятность выигрыша автора
Вероятность выигрыша читателя

Рис. 2.

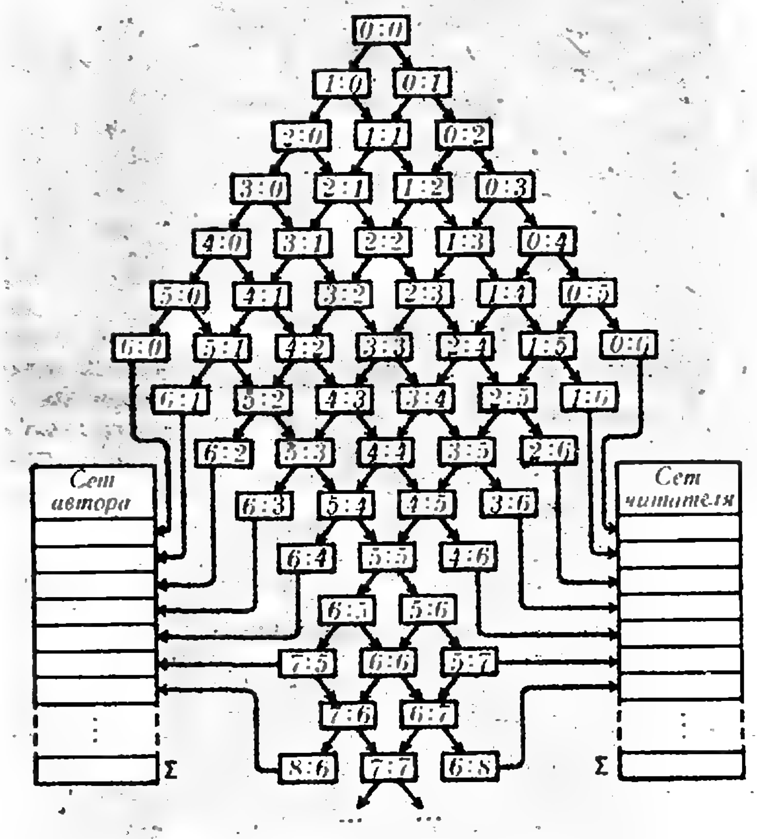

0:0
1:0
0:1
2:0
1:1
0:2
3:0
2:1
1:2
0:3
4:0
3:1
2:2
1:3
0:4
5:0
4:1
3:2
2:3
1:4
0:5
6:0
5:1
4:2
3:3
2:4
1:5
0:6
6:1
5:2
4:3
3:4
2:5
1:6
6:2
5:3
4:4
3:5
2:6
6:3
5:4
4:5
3:6
6:4
5:5
4:6
6:5
5:6
7:5
6:6
5:7
7:6
6:7
8:6
7:7
6:8
Сет автора
Сет читателя
Σ
Σ

Рис. 3

Ясно, что $\mathbf{P}(40:0)=p^3=0{,}216$ и поэтому

$$\mathbf{P}(A_1)=\mathbf{P}(40:0)\cdot p=p^4=0{,}1296,$$

автор выигрывает гейм «в сухую» довольно редко.

Легко подсчитать, что $\mathbf{P}(40:15)=4p^3q\approx 0{,}3456$, $\mathbf{P}(30:30)=4p^2q^2\approx 0{,}2304$ и $\mathbf{P}(40:30)=10p^3q^2\approx 0{,}3970$, откуда находим

$$\mathbf{P}(A_2)=P(40:15)\cdot p=4p^4q\approx 0{,}20736,$$
$$\mathbf{P}(A_3)=P(40:30)\cdot p=10p^4q^2\approx 0{,}20736.$$

Далее нетрудно видеть, что числа $\mathbf{P}(A_3)$, $\mathbf{P}(A_4)$, $\mathbf{P}(A_5)$, ... образуют геометрическую прогрессию с начальным членом $\mathbf{P}(A_3)=10p^4q^2\approx 0{,}20736$ и знаменателем $2pq=0{,}48<1$. По известной формуле находим сумму прогрессии

$$\mathbf{P}(A_3)+\mathbf{P}(A_4)+\ldots=\frac{10p^4q^2}{1-2pq}\approx 0{,}3988.$$

Прибавляя к ней начальные числа $\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)$, находим вероятность выигрыша гейма автором

$$\mathbf{P}(\text{гейм автора})=\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\ldots=$$
$$=p^4+4p^4q+\frac{10p^4q^2}{1-2pq}\approx 0{,}7357.$$

Таким образом, автор выигрывает у читателя в среднем около 74 геймов из 100, а читателю достается лишь 26 из 100.

Схемы, подобные той, что изображена на рисунке 2, называются *цепями Маркова*, по имени выдающегося русского математика А. А. Маркова (1856—1922). Цепь Маркова состоит из конечного или бесконечного числа *состояний* (у нас состояние — это счет в гейме), соединенных *переходами* (стрелками), на которых указываются *переходные вероятности* (у нас — числа p и q). Такие цепи описывают *случайные процессы* при условии, что переходные вероятности не зависят от предыстории процесса.

Задачи

1. При игре в пинг-понг игрок А выигрывает очко у игрока Б с вероятностью p; пусть $q=1-p$ (вероятность выигрыша Б). Тогда вероятности возникновения того или иного счета в начале игры следующие:

$$1:0(p);\ 0:1(q),$$
$$2:0(p^2);\ 1:1(2pq);\ 0:2(q^2).$$

а) Продолжите эту схему.

б) Пользуясь ей, сосчитайте вероятность выигрыша партии игроком А (партия играется до выигрыша им не менее 21 очка, но с преимуществом в 2 очка).

2. Исследуйте аналогичную модель для игры в волейбол.

Кто выиграет сет?

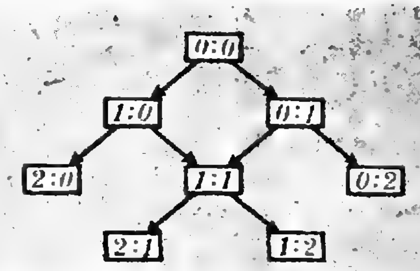


Рис. 4.

Теперь, по аналогичной схеме, пользуясь рисунком 3 вместо рисунка 2, читатель может самостоятельно сосчитать вероятность выигрыша сета (партии) автором (или читателем). На рисунке 3 в прямоугольничках ставится счет геймов в сете («состояния»); вероятность выигрыша гейма автором равна $p'=0{,}736$, читателем — $q'=0{,}264$ (p' и q' — это «переходные вероятности» для новой «цепи Маркова»; как и p, q в предыдущей цепи, они не только не зависят от предыстории, они просто постоянны). Вы должны получить

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{P}(\text{сет автора})\approx 0{,}966\\ \mathbf{P}(\text{сет читателя})\approx 0{,}034\end{array}}$$

Кто выиграет встречу?

Как видно, вероятность выигрыша сета автором близка к единице. Это, в общем, естественно, если учесть, что автор выигрывает отдельный мяч с вероятностью в полтора раза большей, чем читатель. Если же продвинуться дальше, то подсчет показывает (проверьте сами), что матч из трех сетов автор выиграет с вероятностью 0,996, а из пяти с вероятностью 0,9996, то есть практически — наверняка. Ясно поэтому, что более трех сетов играть в этом случае нецелесообразно.

Но допустим теперь, что класс игроков практически одинаков, например, вероятность выигрыша мяча автором составляет 0,51, а читателя — 0,49. Иными словами, из ста разыгранных мячей читатель выигрывает в среднем

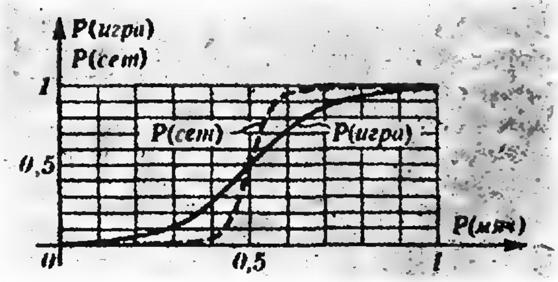


Рис. 5.

лишь на два меньше, чем автор. В этом случае можно найти (подсчитайте сами), что вероятность выигрыша сета автором составит 0,573, а читателем 0,427. Таким образом, при разнице вероятностей выигрыша мяча в 0,02 разница в вероятностях выигрыша сета возрастает в 8 раз. Тем не менее при розыгрыше одного сета преимущественно сильной стороны сказывается не очень убедительно: из десяти встреч, в среднем, автор выиграет шесть раз, читатель — четыре.

Вероятность выигрыша каждой стороной по одному сету велика — 0,488 (подсчитайте ее, используя схему на рисунке 4).

Поэтому для «выяснения отношений» в матче следует играть не менее трех сетов. Однако и в этом случае картина останется не очень убедительной: счет 2:1 и 2:0 в пользу автора может возникнуть соответственно с вероятностями 0,255 или 0,328. Следовательно, в пользу автора матч может завершиться с вероятностью 0,583.

В пятисетовом матче вероятность выигрыша автором составит уже 0,625, а читателем — 0,375.

При других исходных p и q вероятности выигрыша гейма и сета считается также. Их можно свести в график (рис. 5).

Долго ли продлится встреча?

Естественно, что чем продолжительнее встреча, тем четче будет проявляться преимущество одной из сторон. Однако физические возможности игроков (даже экстра-класса) все же ограничены, не говоря уже о приемлемых масштабов времени для зрителя. Как показывает опыт, пятисетовые (и даже трехсетовые) встречи зачастую длятся до трех-четырех часов. Вот почему в последние годы (начиная с 1970 года) введено новое правило tie break («тайбрейк» — нарушение равновесия), согласно которому розыгрыш сета (на некоторых встречах) не продолжается неограниченно (до достижения одной из сторон преимущества минимум в два гейма). При счете геймов 6:6 играется решающий *гейм — тайбрейк,* в котором, однако, счет ведется иначе, чем при розыгрыше обычного гейма: для победы в нем требуется выиграть не менее семи мячей с преимуществом не менее, чем в два. Хотя теоретически и в этом случае спор сторон может продолжаться сколь угодно долго, но в действительности редко затягивается.

Задача для исследования. Сосчитайте среднюю продолжительность обычного гейма и гейма с тайбрейком при вероятности выигрыша мяча одним из противников равным а) 0,5; б) 0,52; в) 0,6. Исходя из этого, найдите среднюю продолжительность сета с тайбрейком и без во всех трех случаях. Пересчитайте среднюю продолжительность геймов и сетов при встрече равных партнеров на быстрой площадке, считая, что подача дает преимущество подающему[*] (скажем, $p=0{,}6$).

Указания. Примите продолжительность розыгрыша одного очка (мяча) равной 30 сек. Средняя продолжительность при игре без тайбрейка вычисляется по формуле

$$S=\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)\,T(i),$$

где $\mathbf{P}(A_i)$ — вероятность выигрыша гейма (соответственно сета) на i-м мяче (соответственно i-м гейме), а $T(i)$ означает время розыгрыша i мячей (соответственно i геймов), то есть $T(i)=i\cdot 30$ сек или $T(i)=i\cdot$ (средняя длительность гейма).

Пять сетов, три сета, ...

Теперь можно понять, что сложившаяся традиция, согласно которой на крупнейших теннисных соревнованиях с участием лучших игроков мира финальные, полуфинальные (а иногда и предшествующие им) матчи проводятся из пяти (реже из трех) сетов, оправдана не только экспериментально, но имеет определенные теоретические основания. В первом и ближайших к нему кругах соревнований фавориты встречаются с уступающими им по классу противниками в трехсетовых матчах. По мере продвижения к финалу напряженность встреч растет, класс игроков выравнивается, переходят к пятисетовым матчам.

До 1976 года в системе «Гранд при» количество турниров, проводимых из трех и из пяти партий, было примерно равным (34 и 38 соответственно). К 1982 году из 93 турниров 62 проводились трехсетовыми встречами. В 1976 году в полуфинальном матче на Кубок Дэвиса (неофициальное командное первенство мира) Александр Метревели (СССР) встретился со вторым игроком мировой классификации 1975 года Мануэлем Орантесом и выиграл изнурительный четырехчасовой матч (6:4, 6:2, 2:6, 4:6, 6:4) — в пяти сетах!

---

[*] Для простоты можно считать, что при тайбрейке противники подают поочередно.

Дела и проделки феи Морганы

Г. И. ГРИНЁВА,
доктор физико-математических наук
Г. В. РОЗЕНБЕРГ

Фея забавляется

Есть у бедуинов старинная легенда. Живет в пустыне коварная Фата-Моргана. Подстерегая путников, изнемогающих от усталости и жажды, она вдруг разворачивает перед их взором пышный оазис с цветущими деревьями, озером, постройками и людьми. Но напрасно устремляется путник к заветной цели. Оазис, до которого, казалось, рукой подать, отступает все дальше и дальше, завлекая в сторону от пути, в глубь гибельной бесплодной пустыни...

Злые чары безжалостной феи отнюдь не игра воображения. В жарком воздухе порой действительно возникают вполне реальные изображения предметов, иногда удаленных от наблюдателя на сотни километров. Подобное явление — его называют миражем — вовсе не редкость. Недавно жители Евпатории несколько дней подряд любовались висевшим в воздухе Константинополем. Обитатели южного побережья Англии порой видят, будто бы совсем рядом, города и рыбачьи поселки, находящиеся на другом, французском побережье Ла-Манша. Их изображения располагаются так близко, что легко различимы не только постройки, но и люди.

Не раз обитатели степных и приморских краев сообщали, что им довелось видеть церкви и даже целые поселения, парящие в воздухе или как бы просвечивающие сквозь воду или землю. Нередко морякам доводится видеть корабли, плывущие высоко в небе, иногда днищем вверх. Такие миражи и породили в свое время легенду о «Летучем Голландце».

Шутит фея Моргана и с летчиками. Порой они обнаруживают, что земля под ними становится будто бы прозрачной. И под самолетом, и над ним раскидывается звездное небо, по которому плывут две луны — одна над головой, другая под ногами пилота...

А это произошло совсем недавно недалеко от Москвы. Ранним утром три девушки подходили к опушке леса. Одна из них шла в стороне, чуть поотстав. И вдруг две других увидели перед собой ее двойника. Нет, это был не смутный призрак, а точный двойник подруги — то же платье с цветочками, те же хорошо знакомые и отчетливо различимые черты лица, те же веснушки. Не обращая никакого внимания на перепуганных девушек, двойник шел им навстречу, шевеля губами, и вдруг бесследно исчез. А сама виновница переполоха, ни о чем не подозревая, продолжала весело напевать за их спиной.

Разумеется, то было не приведение. Девушки видели мираж — вполне реальное изображение своей подруги, возникшее в воздухе, подобно тому, как оно возникает в обыкновенном зеркале — впрочем, не совсем обыкновенном, но об этом немного позже.

Далеко не всегда миражи бывают величественны и отчетливы. Порой они только искажают очертания отдаленных предметов, например, гор и побережий. Обычно же, встречаясь повсеместно и повседневно, они едва приметны и ускользают от нашего внимания, особенно если нет навыка в их обнаружении. Вглядитесь в жаркий полдень в линию морского или степного горизонта, и вы непременно заметите, что это линия «плывет», что она изрезана причудливыми выступами и выемками, которые находятся в непрестанном движении — это тоже мираж. Очень часто появляются миражи на шоссейных дорогах. В ясные летние дни, когда асфальт сильно нагревается солнцем, на полотне дороги далеко впереди машины возникают как бы огромные светлые лужи, в которых отчетливо отражается небо. Но стоит подъехать поближе — и от «луж» не остается и следа. Такие же «лужи» или даже «озера» появляются иногда на лугах. Около сильно нагретых стен построек, у опушки леса, возле горных склонов иногда возникают «боковые» миражи.

В чем же разгадка этих, на первый взгляд таинственных, явлений?

Изогнутая прямая

Дикарь, строгающий острой раковиной стрелу для лука, проверял качество своего изделия, поднося его к глазу. Сам того не зная, он пользовался свойством прямолинейности световых лучей: если световой луч, не отклоняясь, скользил вдоль поверхности стрелы — значит, стрела прямая. Так же поступали строители египетских пирамид, контролируя прямизну их граней, и даже поведали об этом в одной из надписей, выгравированных на камне. Современные мастера следуют их примеру. Когда снайпер или землемер наводят свой видоискатель на отдаленный предмет, они рассчитывают на прямолинейность световых лучей. Да и как же иначе? Ведь само понятие прямой линии возникло из представления о световом луче — ничто не может быть прямее его.

Но и световой луч может изгибаться. Это происходит, когда он пронизывает неоднородную среду. Вам наверняка приходилось замечать, как сильно искажаются очертания предметов, находящихся под водой, если смотреть на них сквозь поверхность воды. Причина этих искажений в том, что, проходя через границу воды и воздуха, световой луч поворачивает — *преломляется*.

Как известно, поведение светового луча при переходе из одной среды в другую определяется законом преломления. Напомним этот закон: падающий луч, преломленный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для двух данных сред. Если Θ_1 — угол падения, Θ_2 — угол преломления, то

$$\frac{\sin\Theta_1}{\sin\Theta_2}=\frac{n_2}{n_1},$$

где n_1 и n_2 — показатели преломления (абсолютные) сред.

А что будет происходить, если по пути своего распространения световой луч будет проходить через несколько разных сред, то есть через несколько сред с разными показателями преломления?

Обратимся к рисунку 1 а. Согласно закону преломления, при переходе из среды I в среду II

$$\frac{\sin\Theta_1}{\sin\Theta_2}=\frac{n_2}{n_1}, \text{ или } n_1\sin\Theta_1=n_2\sin\Theta_2;$$

при следующем переходе, из среды II в среду III,

$$\frac{\sin\Theta_2}{\sin\Theta_3}=\frac{n_3}{n_2}, \text{ или } n_2\sin\Theta_2=n_3\sin\Theta_3;$$

при переходе из среды III в среду IV

$$\frac{\sin\Theta_3}{\sin\Theta_4}=\frac{n_4}{n_3}, \text{ или } n_3\sin\Theta_3=n_4\sin\Theta_4,$$

и т. д. Из всех записанных соотношений следует, что при переходе светового луча из одной среды в другую сохраняется постоянным произведение показателя преломления среды на синус

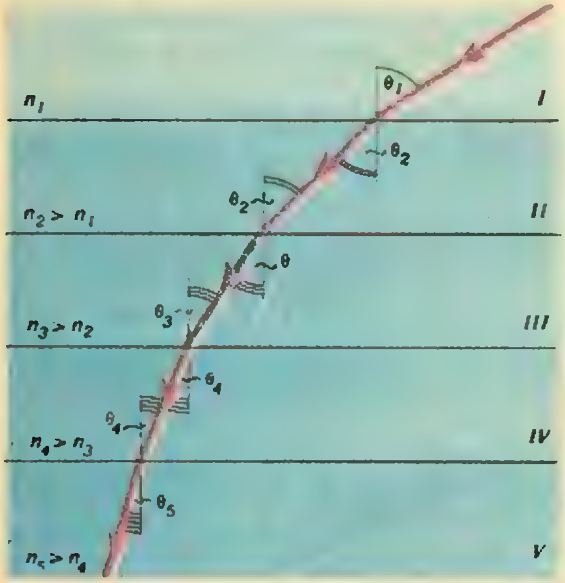


Рис. 1а.

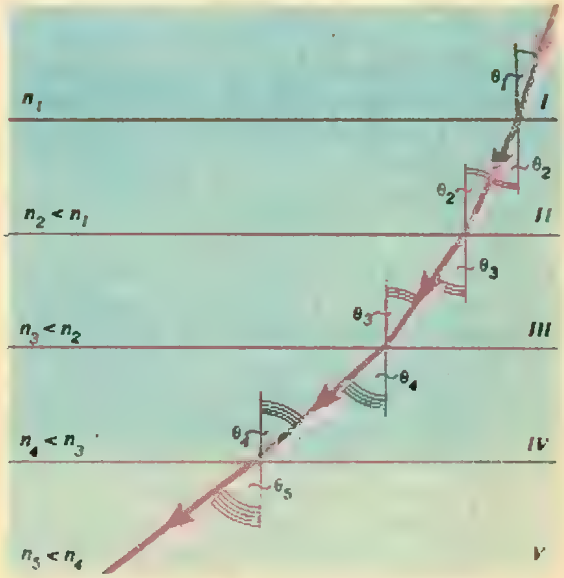


Рис. 1б.

угла падения луча на границу сред, то есть

$$n_i \sin\theta_i = \text{const}.$$

Отсюда следует, что чем больше показатель преломления среды, тем меньше угол падения луча на границу раздела, то есть тем больше угол, который составляет луч с самой границей раздела (угол $\frac{\pi}{2} - \theta_i$). По мере увеличения показателя преломления луч все больше отклоняется от границы раздела (в нашем примере — от горизонтали) и все больше «прижимается» к нормали к границе раздела (в нашем примере — к вертикали).

Мы рассмотрели случай, когда по пути распространения светового луча показатель преломления возрастал, то есть луч переходил из оптически менее плотной среды в оптически более плотную. Что будет происходить при «обратном» ходе луча — при переходе из оптически более плотной среды в менее плотную? В этом случае (рисунок 1 б) луч будет все больше отклоняться от нормали к границе раздела сред. На какой-то из границ угол падения может оказаться таким, что соответствующий угол преломления должен быть равным $\frac{\pi}{2}$. Как видно из соотношения $n_i \sin\theta_i = n_k \sin\theta_k$, это произойдет тогда, когда $\sin\theta_i = \frac{n_k}{n_i}$. В этом случае преломленный луч пойдет почти вдоль границы раздела сред.

Если же на какой-то границе раздела окажется, что $\sin\theta_i > \frac{n_k}{n_i}$, то луч отразится от границы, вернется в среду с показателем n_i и в дальнейшем будет распространяться «обратным» ходом — переходить из оптически менее плотной среды в более плотную.

Если нет резкой границы раздела сред, а свойства среды (ее показатель преломления) плавно меняются в каком-либо направлении, то и световой луч, распространяющийся в такой среде, будет представлять собой не ломаную линию, а плавную кривую. Такое искривление светового луча в среде с непрерывно меняющимся показателем преломления называют рефракцией света. На рисунке 2 показана рефракция световых лучей в двух случаях: когда на пути распространения лучей оптическая плотность убывает (*а*) и возрастает (*б*).

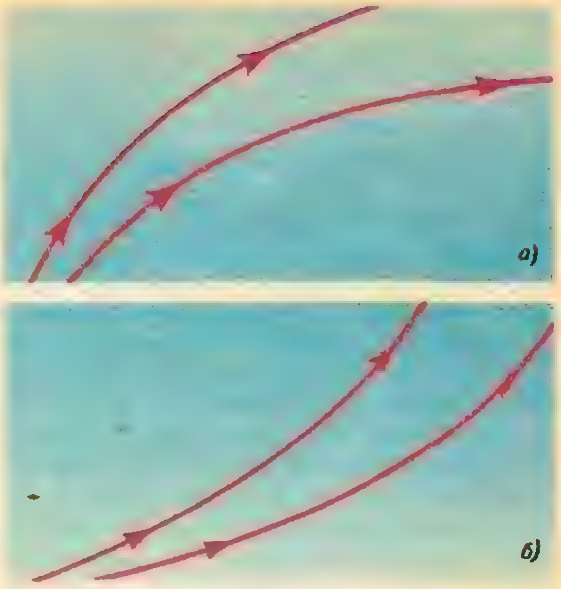


Рис. 2.

К чему это приводит?

Земная атмосфера — оптически неоднородная среда. Показатель преломления в атмосфере зависит от плотности воздуха: $n = 1 + A\rho$, где ρ (г/см^3) — плотность воздуха; коэффициент A слабо убывает с увеличением длины волны света; среднее значение A равно приблизительно 0,23.

Как известно, плотность воздуха быстро убывает с высотой. Поэтому лучи, идущие к нам от звезд, изгибаются по направлению к земле все сильнее и сильнее по мере «погружения» в атмосферу (рисунок 3) и тем круче, чем ближе звезда к горизонту.

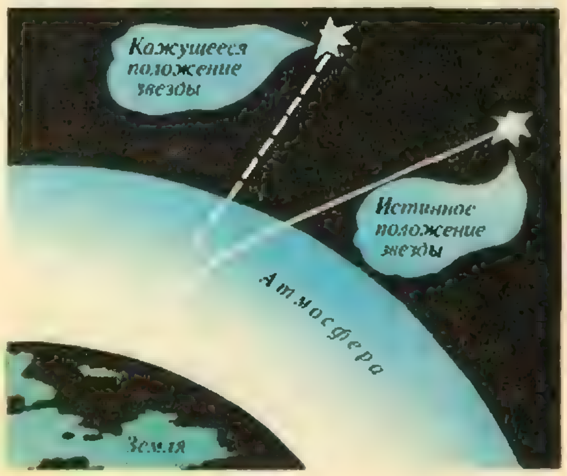


Рис. 3.

Так что с Земли все светила мы видим расположенными выше над горизонтом, чем на самом деле. По той же причине заход звезд и Солнца мы видим на несколько минут позже, а восход — на несколько минут раньше, чем было бы в отсутствие атмосферы; в результате рефракции фигуры Солнца и Луны искажаются вблизи горизонта. Лучи разного цвета искривляются по-разному: синие (для которых значение *A* больше) сильнее зеленых, а зеленые сильнее красных. Это особенно выразительно проявляется у горизонта, порождая множество красивых явлений.

Земные предметы мы тоже видим не совсем в том направлении, где они находятся. И это тоже связано с оптической неоднородностью воздуха. Плотность воздуха, как известно, зависит от температуры: $\varrho = p\mu/RT$. Давление p зависит от высоты, но на данной высоте оно практически одинаково. А вот температура воздуха на одной и той же высоте может быть разной — над лугом, над лесом, над поверхностью водоема, у склона горы и т. п. она не одинакова. В результате световые лучи, проходящие через столь неоднородный воздух, начинают «виться», и мы видим предметы смещенными то вверх, то вниз, то вбок. В предгорьях, как правило, все удаленные предметы кажутся как бы приподнятыми и слегка отодвинутыми от гор, а порой становятся видимыми и предметы, обычно скрытые горным массивом. Более того, если смотреть на один и тот же предмет с различных сторон, с различных расстояний или в разное время, то он будет находиться как бы в разных местах.

Атмосферное зеркало

Временами, особенно в тихую солнечную погоду, у поверхности земли или воды образуется устойчивый слой теплого, то есть менее плотного воздуха. Лучи, наклонно падающие сверху на этот слой, будут распространяться в среде с убывающей оптической плотностью. Если слой достаточно толст, то внутри слоя может произойти полное внутреннее отражение; лучи могут, пройдя некоторое расстояние, вновь вынырнуть из слоя, но теперь они будут направлены вверх, как будто после отражения от зеркала. Поэтому мы увидим зеркальное отражение всех предметов, вернее их мираж, где-то внизу, под землей или под водой (см. рисунок 4 а на с. 24). Мы можем видеть и сами предметы, ибо другие лучи могут попасть в наш глаз прямо, минуя нагретый слой.

Нечто подобное произошло с тремя девушками. Только слой нагретого воздуха находился не у них под ногами, а сбоку, у опушки леса, охранившего этот слой ночью от остывания. И зеркало, как мы видим, особое — в нем отражаются только очень наклонные лучи, постепенно изгибающиеся внутри толстого слоя, — этим и отличается мираж от обычного отражения.

Если достаточно толстый слой теплого воздуха расположен не под ногами, а на некоторой высоте над головой (рисунок 4 б), мираж будет висеть в воздухе, как в случае с «Летучим Голландцем». Сам же предмет может находиться далеко за горизонтом и быть невидимым. Такие миражи образуются лучами очень пологими, наклоненными под малыми углами к поверхности Земли.

Направление, в котором распространяется звук, тоже меняется при переходе из холодного воздуха в теплый. Поэтому в атмосфере бывают и звуковые миражи, отличающиеся от обыкновенного эха тем, что порождаются они не отражением, а рефракцией звука.

Во время войны 1914 года было замечено, что артиллерийская канонада, обычно слышимая до расстояний 50—60 км, вновь становилась слышна, если отдалиться на расстояния 100—150 км. Оказалось, что это был мираж, порожденный рефракцией звука в теплом слое воздуха, существующем на высоте 50—60 км.

А что будет, если в теплом воздухе образуется прослойка из холодного воздуха? Световые лучи, распространяющиеся в этой прослойке, могут оказаться как бы в западне — отражаясь поочередно от верхнего и нижнего слоев, они не смогут вырваться за их пределы (рисунок 4 в). В этом случае можно увидеть причудливо сочетающиеся многократно повторенные прямые и перевернутые изображения одних и тех же предметов, как в калейдоскопе или в комнате со множеством зеркал. Этому явлению фантастически переплетающихся множественных миражей собственно и присвоено наукой название Фата-Моргана.

Канал, по которому свет распространяется почти без потерь, называется волноводом. Попав внутрь такого волновода как в ловушку, свет, звук или радиоволны уже не могут из него вырваться, пока не достигнут его конца. Этим пользуются для передачи различных сигналов от одного прибора к другому. Способы изготовления волноводов различны в зависимости от цели их применения. Для микрорадиоволн, например, на которых работают локаторы, волноводами служат металлические трубы. Для света волноводы изготавливаются в виде тонких гибких стеклянных волокон.

Сравнительно недавно было обнаружено, что в океане существуют естественные звуковые волноводы. Они образуются чередующимися прослойками воды различной температуры или солености. Слабый звук небольшого колокольчика, звенящего у побережья Америки, по такому волноводу беспрепятственно пересекает Атлантику и при благоприятных условиях может быть слышим у берегов Франции.

Для радиоволн волноводом служит все пространство между земной поверхностью и ионосферой. Показатель преломления для радиоволн убывает в атмосфере с высотой. Радиолучи, удаляясь от Земли, испытывают, подобно световым лучам, рефракцию: они все более и более загибаются, пока не «отразятся» от ионосферы и не вернутся на Землю. То, что «ловят» наши приемники, — это радиомираж передающей станции.

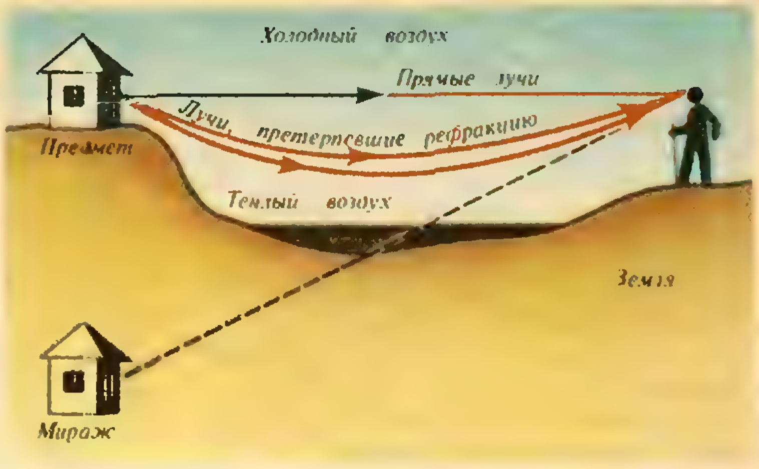

Холодный воздух
Прямые лучи
Лучи, претерпевшие рефракцию
Предмет
Теплый воздух
Земля
Мираж

Рис. 4а.

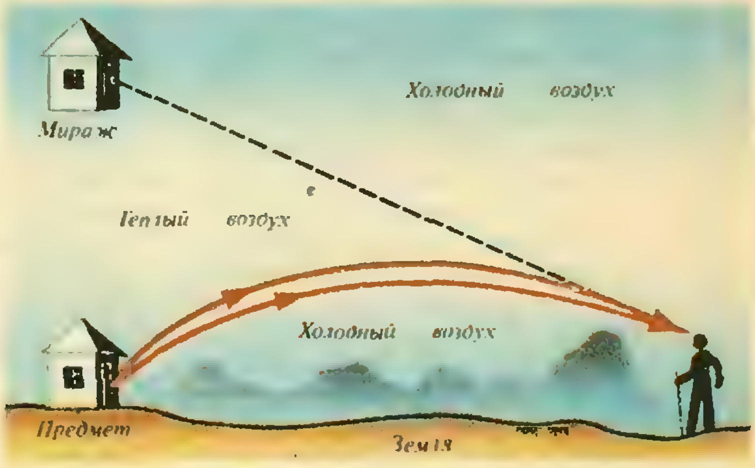

Мираж
Холодный воздух
Теплый воздух
Холодный воздух
Предмет
Земля

Рис. 4б

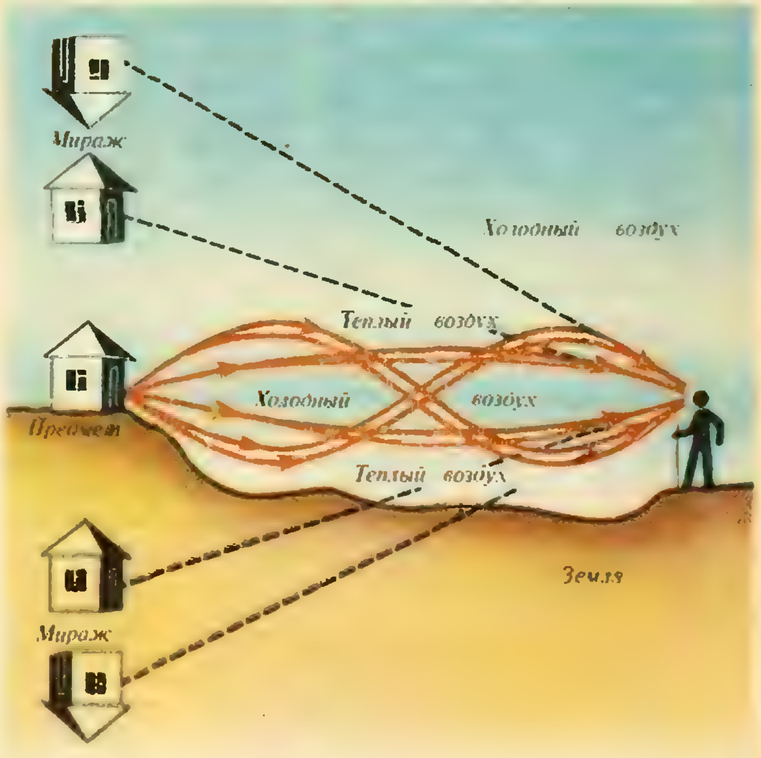

Мираж
Холодный воздух
Теплый воздух
Холодный воздух
Предмет
Теплый воздух
Земля
Мираж

Рис. 4в.

Фея снова куражится

Положение астронома, геодезиста, радиооператора и оператора у локатора осложняется еще одной неустранимой и очень досадной помехой. Под действием ветра в воздухе то и дело возникают местные изменения плотности, температуры, концентрации электронов и других характеристик состояния воздуха. Эти случайные, быстро сменяющиеся возмущения — флуктуации — неустойчивы и подвижны. Проходя сквозь такой трепещущий неоднородный воздух, луч вынужден все время немного менять свое направление. Путь его оказывается и очень извилистым, и очень переменчивым — соседние лучи то сходятся, то расходятся, то переплетаются. Поэтому изображения далеких предметов и огней (например, звезд) никогда не стоят на месте, а все время как бы танцуют и мерцают, то вспыхивая, то бледнея. Эта неспокойность оптической, звуковой или радиокартины, порождаемая шалостями Морганы, ограничивает реальные возможности астрономических и геодезических измерений, локационной техники, техники оптической связи и т. п. При сильных порывах ветра, когда плотность воздуха вдруг резко меняется, луч порой просто «сносится» на мгновенье ветром в сторону или рассыпается им на сноп независимо колышащихся самостоятельных лучиков. На рисунке 5 (он сделан с фотографии) приведен пример того, как движение воздуха размывает и дробит на части равномерный хорошо сформированный световой пучок (он показан справа), когда он проходит в воздухе путь всего в 1/2 км при сравнительно спокойной погоде.

Проследим путь локационного импульса (оптического или радио), отправленного оператором в атмосферу. По капризу Морганы он помчится в воздухе не как по асфальтовому шоссе, а как по ухабистой дороге — его будут трепать неоднородности воздуха, и путь его будет совсем не прямолинейным. Когда он настигнет искомый предмет и, отразившись от него, вернется к оператору, то вернется он, вообще говоря, по другой дороге и появится не оттуда, куда был послан. Обычно эти помехи не велики и не доставляют излишних хлопот. Впрочем... История минувшей войны знает случаи, когда огонь корабельных батарей направлялся не по вражескому флоту, а по его локационному миражу. Немало есть и примеров грубых навигационных ошибок, порожденных локационным миражем.

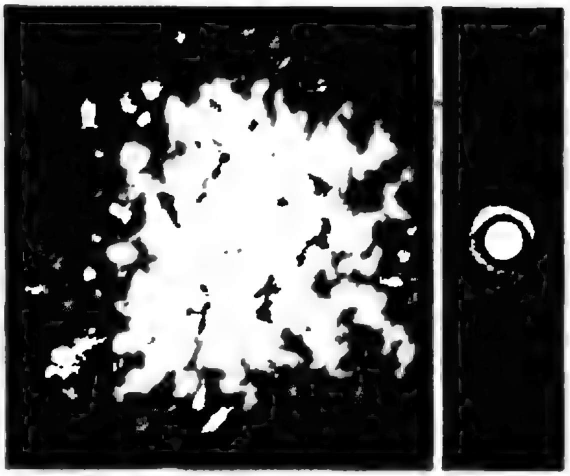


Рис 5.

Приручение феи

Прагматический ум ученых XX века не долго мирился с проделками шаловливой феи. Еще в первой четверти века возникло стремление приручить ее, сделать ее соучастницей полезных дел.

Первыми это сделали радиофизики. Открыв с ее помощью существование ионосферы, они поручили фее исследовать эти недоступные для человека высоты. Рефракционное изучение ионосферы принадлежит к числу наиболее ярких страниц истории науки. Упоминалось уже о том, как по рефракции звука было открыто существование теплого слоя воздуха на высотах 50—60 км. Дополним этот перечень еще двумя примерами.

То трепетание воздуха, которое мы в обиходе называем ветром, оказывает на нашу жизнь очень сильное и разностороннее влияние — от разрушения конструкций до опыления злаков. Но его законы сложны и еще мало изучены. Вот и оказалось разумным поручить их изучение Моргане — сделать порождаемые ею эффекты инструментом изучения самой атмосферы и движений воздуха в ней.

Другое направление возникло в процессе становления космической техники. Оказалось, что видимая с космического корабля линия горизонта заметно искажена рефракцией, а ею необходимо пользоваться для навигационных целей — ориентацию космического корабля относительно вертикали лучше всего осуществлять по линии горизонта. Но для этого надо знать, как меняется с высотой показатель преломления света и как погода влияет на эту зависимость.

Космонавт Г. М. Гречко с борта космической станции «Салют-4» заметил, что, когда солнце склоняется к горизонту, в результате рефракции не только искривляется его фигура, но и его края становятся изрезанными. Так появился метод дистанционного, из космоса, определения высотной зависимости показателя преломления, а вместе с тем и температуры воздуха.

Явления рефракции и миража, как все, что происходят в природе, в чем-то приносит нам пользу, а в чем-то вред. Наша задача — разумно использовать эти явления и избежать нежелательных последствий. А для этого необходимо знать эти явления и понимать их.

Как создавалась квантовая теория

(Начало см. на с. 2)

Вы видите, что импульс кванта точно так же связан с длиной волны, как и у частицы: $p=h/\lambda$. Значит, для бегущей волны кванты света можно считать дебройлевскими частицами — фотонами.

Итак, что же такое фотон? Это порция возбуждения квантового осциллятора — бегущей электромагнитной волны с данным волновым вектором $\vec{k}$.

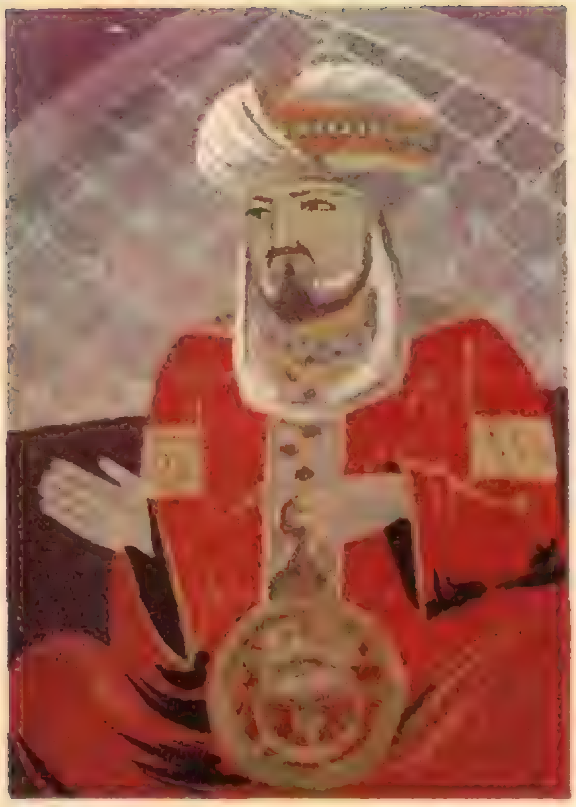
Что такое «нулевые» колебания электромагнитного поля? Это нулевые колебания квантовых осцилляторов — электромагнитных волн со всевозможными волновыми векторами.

Другие поля, существующие в природе, например, гравитационное, тоже можно представить в виде совокупности осцилляторов. Поэтому в пустоте должны существовать нулевые колебания гравитационного поля. Но, согласно теории относительности, поле тяжести связано с изменением геометрических свойств пространства. И эти геометрические свойства колеблются, геометрия мерцает! Отношение длины окружности к радиусу колеблется около 2π...

То же относится и к полям, описывающим частицы, например, электроны и позитроны или пи-мезоны. Существуют нулевые колебания в пустоте электронно-позитронного, пионного и вообще полей всех возможных частиц. Нулевые колебания в вакууме полей, описывающих частицы со спином 1/2, проявляются во временном рождении и уничтожении пар электрон — позитрон, нуклон — антинуклон... Вакуум наполнен такими не вполне родившимися частицами, их называют «виртуальными». Но стоит в вакууме столкнуться двум нуклонам или электрону с позитроном, виртуальные частицы могут превратиться в реальные — так при столкновениях рождаются новые частицы. Реальная частица большой энергии окружена облаком виртуальных частиц, и чем больше энергия частицы, тем больше облако. Достаточно краем его задеть другую реальную частицу, как все виртуальные частицы облака станут реальными!

После того как стало ясно, что такое квант, исчез мучительный философский вопрос, проблема волн-частиц. Свет — это волны, энергия которых изменяется порциями, и если мы рассматриваем всевозможные бегущие волны, то совокупность их напоминает газ частиц: у каждой есть определенная энергия и импульс.

Понять — значит уметь ответить на любой разумный вопрос, а разумными в физике считаются те и только те вопросы, ответы на которые могут быть проверены мысленным или реальным экспериментом.



Ал-Хорезми

(к 1200-летию со дня рождения)

Академик АН Тадж.ССР
З. Д. УСМАНОВ,
И. ХОДЖИЕВ

В прошлом году по решению ЮНЕСКО весь мир отмечал 1200-летие со дня рождения выдающегося арабского ученого, уроженца Хивы Мухаммеда ибн Муса ал-Хорезми.

Творчество ал-Хорезми приходится на время около 825 года и проходит в основном в Багдаде. Халиф ал-Мамун, правивший в то время и покровительствовавший астрономии и математике, соорудил в Багдаде «Дом мудрости» с библиотекой и обсерваторией. В этой своего рода Академии наук в то время были сосредоточены почти все крупные ученые арабского халифата.

Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми принадлежал к той группе ученых, которой халиф поручил переводы греческих математиков, измерение дуги меридиана и ряд других научных работ. Мухаммед написал много книг по математике и астрономии. В своей арифметике он разъясняет индийскую систему записи чисел и излагает правила письменного счета по десятичной позиционной системе. Арабский оригинал этой книги утерян, но имеется латинский перевод двенадцатого века. Эта книга была одним из источников, с помощью которых Западная Европа познакомилась с десятичной позиционной системой счисления. Заглавие перевода: «Об индийском числе, сочинение Алгоризми» (Algorizmi de numero Indozum). В других рукописях автор именовался Algorismus и Algorithmus, что ввело в математический язык термин «алгоритм» — латинизированное имя автора. Первоначально этот термин означал нумерацию по десятичной позиционной системе; впоследствии так стали называться труды, способствовавшие распространению в Европе индийского способа счета, а затем, наконец, — и сам этот счет*).

В своей арифметике ал-Хорезми разъясняет способ начертания чисел, четыре основных действия с целыми числами и простыми дробями; но удвоение и деление на два рассматривает как особые действия. Все в книге объясняется на словах; приводимые примеры излагаются (по крайней мере, в сохранившемся латинском тексте) не с помощью цифровых знаков, а с помощью чисел, изображенных словами или по римскому способу. В книге не объясняется, как производить вычитание в том случае, когда цифра вычитаемого больше цифры уменьшаемого.

Ал-Хорезми известен также как автор книги «Китаб ал-мухтасар фи хисаб ал-джабр ва-л-мукабала» (буквально: «краткая книга об исчислении восстановления и противопоставления»), что следует понимать как «науку об уравнениях». Эта «алгебра», арабский текст которой сохранился, стала известной на Западе в латинском переводе, и слово «ал-джабр» стало употребляться как синоним всей науки «алгебры», которая действительно до середины девятнадцатого столетия была ничем иным, как наукой об уравнениях.

На самом деле слово «ал-джабр» означает операцию, с помощью которой можно перенести члены из одной стороны равенства в другую так, чтобы обе эти стороны содержали только положительные члены. Слово же «ал-мукабала» означает следующую за этим операцию приведения подобных членов, так что в конце концов в уравнении для каждой степени остается только один положительный член, расположенный с той или другой стороны. Так, например, благодаря первой операции уравнение $3x^2-5x+6=x^2+7x+2$ превращается в $3x^2+6=x^2+12x+2$, и благодаря второй — в $2x^2+4=12x$. Таким образом, вся наука об уравнениях («алгебра»), а затем и употребление требующейся для нее совокупности символов, и, наконец, теория абстрактных операций получили название, относившееся сначала только к одной, вышедшей теперь из употребления операции «ал-джабр»; в настоящее время мы — в отличие от греков, арабов и их непосредственных преемников в Европе — не требуем, чтобы на обеих сторонах уравнения были только положительные члены.

---

*) В настоящее время слово «алгоритм» используется для обозначения конечного набора правил, позволяющих чисто механическим путем решать конкретные задачи (притом не только вычислительные), например, с помощью ЭВМ или робота.

В своей «алгебре» ал-Хорезми рассматривает линейные и квадратные уравнения, но без какого бы то ни было алгебраического формализма. Все здесь излагается с помощью слов; так, переменная уравнения называется *корнем*, а ее квадрат — просто *квадратом*. Рассматриваются шесть типов уравнений:

«квадраты равны корням»,
«квадраты равны числу»,
«корни равны числу»,
«квадраты и корни равны числу»,
«квадраты и число равны корням»,
«корни и число равны квадратам» *).

Первые три типа разбираются на следующих примерах уравнений:

$x^2+10x=39$; $x^2+21=10x$; $3x+4=x^2$

(эти уравнения затем часто встречаются в последующих алгебраических текстах). Уравнение $x^2+10x=39$ описывается так: «...квадрат и десять его корней равны тридцати девяти дирхемам **), ... это означает, что если добавить к некоторому квадрату то, что равно десяти корням, получится тридцать девять». Процедуру нахождения корня, а именно

$$x=\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+39}-\frac{10}{2}=3,$$

ал-Хорезми описывает следующими словами: «... раздвой число корней, получится в этой задаче пять, умножь это на равное ему, будет двадцать пять. Прибавь это к тридцати девяти, будет шестьдесят четыре. Извлеки из этого корень, будет восемь; вычти из этого половину числа корней, то есть пять, останется три. Это и будет корень квадрата, который ты искал, а квадрат есть девять.»

Для решения этого уравнения приводятся и два геометрических способа (рисунки 1, 2). На рисунке 1 на четырех сторонах квадрата x^2 строятся прямоугольники с высотой 10/4, после чего углы получающейся фигуры заполняются квадратами со стороной 10/4; образованный таким образом квадрат со стороной $x+10/2$ будет иметь известное значение $39+(10/2)^2$. На рисунке 2 квадрат той же площади 64 составляется из двух квадратов площади x^2 и 25, что со-

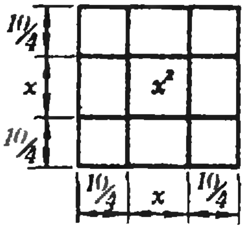


Рис. 1.

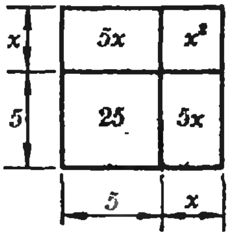


Рис. 2

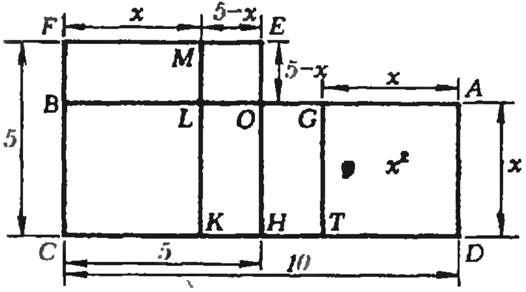


Рис. 3

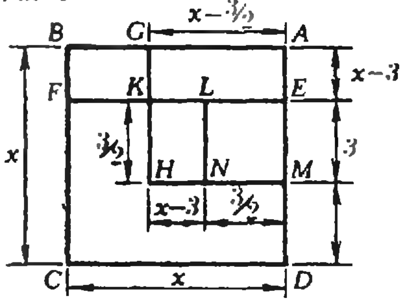


Рис. 4

---

*) В переводе на наш алгебраический язык эти уравнения выглядят так

$ax^2=bx$; $ax^2=b$, $ax=b$,
$ax^2+bx=c$, $ax^2+b=cx$, $ax+b=cx$
$(a, b, c>0)$

**) Дирхем — серебряная монета; здесь это слово используется для указания свободного члена уравнения ответствует записи уравнения $x^2+10x=39$ в виде $x^2+2\cdot5x+25=64$.

Для нахождения положительных корней уравнений $x^2+21=10$ и $3x+4=x^2$ также используются геометрические соображения.

Хотя уравнение $x^2+21=10$ имеет два положительных корня ($x_1=3$, $x_2=7$), ал-Хорезми приводит геометрический способ решения лишь для $x_1=3$, однако указывает на то, что $x_2=7$. Этот способ изображен на рисунке 3. Вначале строится прямоугольник $ABCD$ со сторонами x и 10, затем квадрат $EFCH$ со стороной 5. После этого двумя способами вычисляется площадь квадрата $EMLO$. С одной стороны, она равна $(5-x)^2$; с другой стороны, пл. $(EMLO)$ = пл. $(EFCH)$ — пл. $(MFCHOLM)=25-$пл. $(GBCT)=25-(10x-x^2)=25-21=4$. Поэтому $(5-x)^2=4$, откуда $x_1=3$.

На рисунке 4 приведены построения ал-Хорезми для уравнения $3x+4=x^2$. Квадрат $ABCD$ со стороной x разбивается на прямоугольники $ABFE$ и $EFCD$, площади которых равны, соответственно, 4 и $3x$. Затем строится квадрат $AGHM$ со стороной $x-\frac{3}{2}$. Устанавливается, что его площадь равна 25/4, ибо пл. $(ELNM)=9/4$ и пл. $(AGHNLE)=$пл. $(ABFE)=4$. Но тогда $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$, откуда $x=4$.

Свой трактат ал-Хорезми заканчивает «Книгой о завещаниях», в которой мы находим всевозможные применения уравнений к вопросам практической жизни — например, к существовавшему у арабов наследственному праву.

Математические труды ал-Хорезми сыграли важную роль в истории математики как один из главных источников, с помощью которых Западная Европа познакомилась с индийскими цифрами и арабской алгеброй. Но деятельность ал-Хорезми не ограничивалась рамками одной математики. Он был автором сочинения по географии, которое положило начало развитию географических исследований на средневековом Востоке. Он был организатором научных экспедиций в Византию, Хазарию (нижняя Волга) и Афганистан. Под его руководством выполнены достаточно точные вычисления длины одного градуса земного меридиана.

На родине великого ученого

Член-корреспондент АН СССР
А. П. ЕРШОВ

В один прохладный осенний вечер сентября 1979 года дехкане, выстроившиеся с тракторными тележками, полными хлопка, в очередь у приемного пункта хлопкоочистительного комбината на главной площади Ургенча, обратили внимание на необычный транспарант над входом в здание Хорезмского облисполкома:

Приветствуем участников международного симпозиума «Алгоритм и современной математике и ее приложениях»!

Через несколько дней вечерняя программа узбекского телевидения разъяснила непонятную надпись. Сотни тысяч жителей Хорезмской области узнали, что их родной край стал местом научного паломничества группы выдающихся ученых, приехавших из разных стран, чтобы не только обсудить актуальные проблемы современной математики, но и почтить память их земляка Мухаммеда ал-Хорезми, принесшего Хорезму мировую славу еще в IX столетии, и чье имя в течение многих веков было для миллионов людей символом научного авторитета и точности. А для местных школьников было интересно и радостно узнать, что такие знакомые для них слова «алгоритм» и «алгебра» тоже непосредственно связаны с их соотечественником: «алгоритм» — это его видоизмененное имя (алгоритм — алгоризми — ал-Хорезми), а «алгебра» — это одна из частей названия его главного труда, ставшая впоследствии названием всей науки составления и решения уравнений *).

Итак, каждый раз, когда мы говорим «алгоритм», мы произносим имя ученого, а когда говорим «алгебра» — произносим название его главного труда. Если учесть, что этим терминам уже под тысячу лет, то легко понять, что мало еще какой ученый в истории науки так прочно вошел в культурный багаж образованного человека. И в то же время мы непростительно мало знаем об ал-Хорезми. Многие поколения людей употребляли слова «алгоритм» и «алгебра», и не подозревая, что они связаны с конкретным человеком. Его работы, хотя и переписывавшиеся десятками раз, стали предметом научного анализа только в самое последнее время, и никто еще не может сказать, что все его существующие труды собраны.

---

*) Подробнее об этом говорится в статье З. Д. Усманова и И. Ходжиева (см. с. 27).

Хорезмский симпозиум стал первым в истории науки собранием, на котором была сделана попытка не только собрать вместе все, что известно об ал-Хорезми и его работах, но и проследить через связь времен, как сложилась та огромная роль, которую понятия алгоритма и алгебры играют в современной математике и вычислительном деле.

С большим докладом о жизни и работах ал-Хорезми выступил известный австрийский ученый Хейниц Земанек. Он посвятил много лет изучению всего, что связано с великим хорезмийцем. Земанек обратил внимание слушателей на то, почему именно работы ал-Хорезми, посвященные арифметике и алгебре, пережили его время и стали главным источником знания для средневековой Европы. Это произошло потому, что ал-Хорезми, как никто другой, заботился о том, чтобы изложить правила арифметики и решения линейных и квадратных уравнений в форме общей, убедительной и понятной. Он хотел, чтобы его правила были понятны каждому грамотному человеку. Достичь этого было очень трудной задачей. В то время не было алгебраической символики — скобок, знаков операций, буквенных обозначений и т. п., да если бы она и существовала, то, скорее всего, была бы недоступна конкретному уму горожанина, купца или землевладельца того времени. И ал-Хорезми выработал в своих работах неподражаемый стиль четкого, строгого и, одновременно, образного предписания, не дающего читателю никаких шансов уклониться в сторону или пропустить что-либо.

Вот, например, как ал-Хорезми говорил в IX веке о правиле пропорций:

«Знай, что сделки людей, как покупка и продажа, обмен и наем, а также другие, имеют дело с четырьмя числами — мерой, ценой, количеством и стоимостью. Число, равное мере, стоит против числа, равного стоимости, а число, равное цене, стоит против числа, равного количеству. Из этих четырех чисел три всегда известны, а одно неизвестно, и о нем-то говорящий и говорит «сколько», спрашивает спрашивающий. Правило это таково: ты рассматриваешь три известных числа, среди них обязательно имеются два, каждое из которых стоит напротив другого. Умножь каждое из двух стоящих друг против друга известных чисел на другое, а произведение раздели на другое известное число, стоящее против неизвестного. Если у тебя есть это частное, оно есть неизвестное число, о котором спрашивает спрашивающий, оно стоит против числа, на которое ты делил.»

Каждое такое правило сопровождается многочисленными примерами его применения в самых разных житейских ситуациях.

В латинских переводах трудов ал-Хорезми многие из правил арифметики начинались словами Dixit Algorizmi (Алгоризми сказал). Читая его книги, читатель привыкал, что такими словами начинается любое четкое и однозначно понимаемое правило. Постепенно люди забыли, что Алгоризми — это автор правила, и стали понимать это слово как общее название правил десятичной системы счисления, а со временем — как синоним любого точного правила действий. Так «Алгоризми сказал» постепенно превратилось в «алгоритм гласит».

Вот еще пример алгоритма ал-Хорезми. В поздней древности был создан первый прибор для ориентировки на местности — астролябия, предшественник современных теодолита и секстана. Грубо говоря, астролябия — это прибор для измерения углов, состоящий из диска с делениями и подвижного визира, называвшегося алидадой*). Трактат ал-Хорезми «Изготовление астролябии и работа с астролябией» является древнейшим текстом, рассказывающим об этом инструменте.

«**Ал-Хорезми сказал**: Первое, что необходимо при работе с астролябией, — это определение высоты солнца. Для этого поверни астролябию задней стороной к себе и дай ей повиснуть в твоей правой руке; солнце должно быть напротив твоего левого плеча. Затем разверни на солнце девяностую линию на шкале градусов, расположенную на задней стороне астролябии. Потом медленно подымай алидаду, пока не увидишь солнце через оба отверстия. Теперь прочитай, на какое из девяноста делений, расположенных на задней стороне астролябии, показывает своим острым концом указатель алидады. Это и есть высота солнца в этот час. Запомни ее!»

Значительную часть симпозиума в Ургенче заняло обсуждение роли алгоритмов в современной теоретической и прикладной математике. На эту тему с обширным докладом выступили московские ученые В. А. Успенский и А. Л. Семенов. Они обратили внимание на то, что понятие алгоритма стало предметом теоретического анализа

---

*) См. вторую страницу обложки.

На открытии конференции. На переднем плане Х. Земанек (слева) и А. П. Ершов.

только в первой половине XX века. Люди тысячелетиями придумывали и применяли алгоритмы, но только в начале тридцатых годов появились точные математические понятия алгоритма. Однако с первыми шагами новая теория алгоритмов принесла математике серию крупнейших открытий, во многом определивших ее современный облик.

Уже первое определение алгоритма, известное под названием *примитивно рекурсивных функций*, позволило австрийскому математику К. Геделю доказать в 1931 г. свою знаменитую теорию истинных, но недоказуемых утверждений. Это очень глубокий результат, который, с одной стороны, установил пределы формальных теорий, а с другой стороны, обосновал беспредельность процесса человеческого познания. Еще одно определение алгоритма, напоминающее общеизвестное правило подстановки и замены переменных при вычислениях по формулам, позволило американскому математику А. Черчу в 1936 г. обнаружить существование *алгоритмически неразрешимых проблем*, то есть серий задач, допускающих точную математическую формулировку, для которых не может существовать единого алгоритма решения. Примером неразрешимой задачи является такая: найти общий способ, который для любого алгоритма обнаруживал бы, дает ли он результат для любых своих аргументов или же существуют такие данные, для которых он будет работать бесконечно.

Естественно, что как только появились такие ограничительные результаты, стали думать, что, может быть, эти ограничения могут быть не столь стеснительными, если как-то видоизменить или усилить определение алгоритма. И здесь математики столкнулись еще с одним удивительным феноменом: самые разные определения алгоритма, придуманные из совершенно несходных предпосылок, оказались друг другу полностью эквивалентными.

По общему мнению участников, ургенчский симпозиум стал уникальным научным собранием. По выражению одного из его организаторов, американского ученого-информатика Д. Кнута

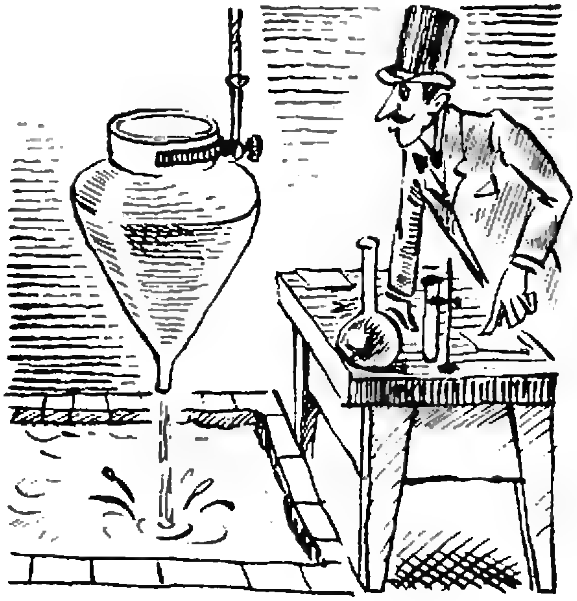
«...это был незабываемый опыт. Вместо «обычной» конференции, где участники зачитывают заранее приготовленные доклады, мы провели взаимные дискуссии по фундаментальным проблемам вычислительной науки. Ландшафт пустыни, окружающий хорезмский оазис, и дыхание истории отвлекли нас от повседневных мыслей, одолевающих нас дома, и помогли сосредоточиться на наиболее глубоких и устремленных вдаль философских размышлениях.»

Вечером 22-го сентября 1979 г. симпозиум закончил свою работу. Участники разъехались. Площадь опустела, труженики-хлопкоробы тоже разъехались по домам. Около гостиницы полная луна освещала камень, положенный участниками симпозиума в основание памятника Мухаммеду ал-Хорезми, выходцу из Хорезма, оставившему человечеству в наследство индийскую позиционную систему счисления, арифметику, алгебру и свое доброе имя.

Из старых опытов

Кандидат физико-математических наук
А. А. ВАРЛАМОВ

Под таким названием мы публикуем статьи о занимательных и вместе с тем весьма поучительных опытах по физике, которые проводили любознательные гимназисты в прошлом веке.*)
Сегодня вниманию читателей предлагается рассказ об опытах, иллюстрирующих взаимное влияние водяной струи и... звука.



Кто из вас не знаком с микрофоном? Вы его видите по телевизору, в театре и кино, пользуетесь им во время записи на магнитофонную пленку, его устройство описано даже в школьном учебнике по физике. А вот как сделать *водяной* микрофон, наверное, знают немногие. Да, да, не удивляйтесь. Оказывается, с помощью водяной струи можно успешно усиливать различные звуки. Сделал этот необычный прибор американец Александер Грейам Белл, который известен миру как один из изобретателей телефона. Но прежде чем приступить к изготовлению водяного микрофона, познакомимся поближе с некоторыми свойствами его «усилителя» — водяной струи.

Если в дне сосуда с водой просверлить небольшое круглое отверстие, то можно заметить, что вытекающая сквозь него струя воды состоит из двух, различных по своим свойствам, частей. Верхняя часть струи прозрачна и неподвижна настолько, что кажется стеклянной. По мере удаления от истока она становится все тоньше, и в точке наибольшего сокращения начинается нижняя часть, переменчивая по форме и непрозрачная. На первый взгляд эта часть струи, как и верхняя, кажется непрерывной, монолитной. Однако иногда удается быстро провести через нее палец, не замочив его.

Французский физик Феликс Савар провел подробное исследование свойств водяных струй и пришел к выводу, что в самом узком месте водяная струя перестает быть сплошной и распадается на отдельные капельки. Попробуйте убедиться в этом сами, сделав фотографию струи воды со вспышкой или посмотрев на струю при стробоскопическом освещении*).

Другим важным открытием Савара было то, что на длину верхней, прозрачной части струи большое влияние оказывают окружающие звуки. Если вблизи водяной струи возбудить звуковые колебания определенной частоты, прозрачная часть струи мгновенно становится мутной**).

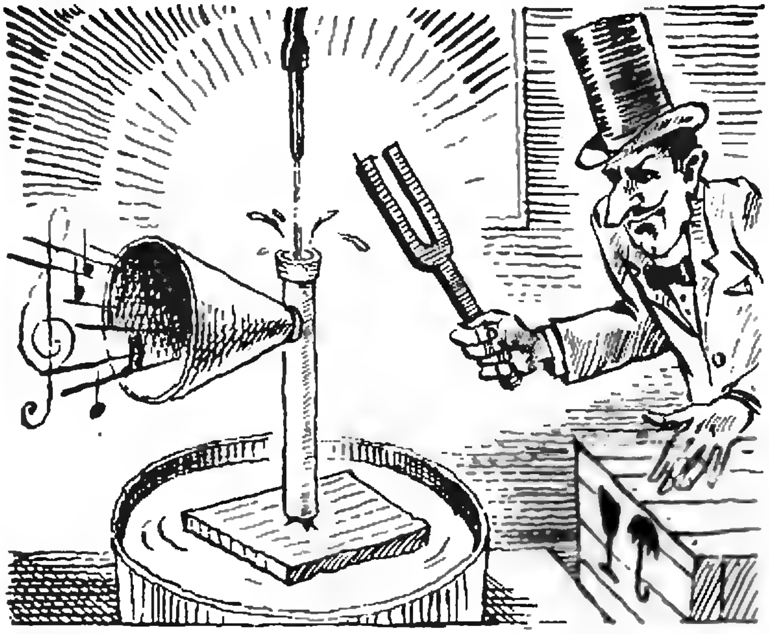
Савар объяснял это так. Капли, на которые распадается водяная струя в

---

*) См. статьи А. А. Варламова в «Кванте» № 10 за 1982 год и в № 5 за 1983 год. (*Прим. ред.*)

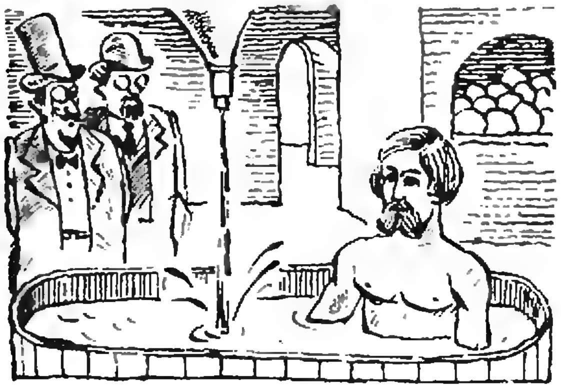
*) Подробнее об этом можно прочитать в статье С. Л. Гаврилова «Что такое стробоскоп» («Квант», 1983, № 1). (*Прим. ред.*)

**) О том, что происходит под влиянием звука со струей воды, вытекающей под углом к горизонту, можно прочитать в статье В. Майера и Р.-Э. Шафира «Звук и струя» («Квант», 1977, № 7). (*Прим. ред.*)



своей нижней части, зарождаются еще вверху, у самого отверстия. Представляясь как бы кольцевыми выступами, по мере удаления от отверстия они проявляются все четче и четче, пока не отделятся совсем. Эти выступы следуют друг за другом настолько часто, что производят слабый звук. Музыкальная нота, звучащая в унисон с этим звуком, способствует более раннему распадению струи на отдельные капли, то есть переводит прозрачную часть струи в мутную.

Известный вам по предыдущим публикациям английский физик Джон Тиндаль повторил в своей лаборатории опыты Савара. Ему удалось создать струю (жилу, по выражению Тиндаля), прозрачная часть которой достигала длины около 90 футов (≈27,4 м). При воздействии звука органной трубы соответствующей частоты и умеренной силы эта прозрачная жила тут же превращалась в мутную, распадаясь на огромное количество водяных капель.



В одной из статей Тиндаль так описывает свое наблюдение за падением водяной струи в бассейн с водой: «Когда нисходящая струя пересекает жидкую поверхность выше точки перерыва (точки перехода от прозрачной части струи к мутной — *А. В.*), причем давление не слишком сильно, то она входит в жидкость молча; но когда эта поверхность пересекает струю ниже точки перерыва, то сейчас же слышится журчание и появляется множество пузырьков. В первом случае не только нет сильного разбрызгивания жидкости, но она вокруг основания жилы собирается в кучку, в выступ, где движение противоположно струе». Попытайтесь повторить эти простые опыты со струей из водопроводного крана и, скажем, тазом с водой. Обратите внимание на напор, под которым струя вытекает из крана.

Описанные свойства водяной струи используем теперь для создания водяного микрофона. Приготовьте медную трубку диаметром 2 см и длиной 20 см, кусочек резины от лопнувшего воздушного шарика и несколько стеклянных трубок. На боковой поверхности медной трубки, отступив на 3 см от верхнего конца, проделайте отверстие и впаяйте в него патрубок немного меньшего диаметра и длиной примерно 3 см. На патрубок наденьте воронку (рупор), склеенную из картона. (В вершине рупора следует сделать небольшую шейку, диаметром чуть превышающим диаметр патрубка, с помощью которой рупор будет крепиться к трубке). Верхний конец медной трубки немного расширьте и края зачистите напильником, чтобы они не перерезали резину. После этого наденьте на трубку резину и обвяжите ее шерстяной ниткой, которая резину не режет. Нижний конец трубки укрепите на деревянной подставке. Итак, прибор готов, можно приступать к экспериментам.

Как вы уже видели из опытов Тиндаля, если струя попадает в бассейн с водой своей нижней, распавшейся на капли, частью, она производит шум. Если же в воду попадает верхняя, целая, часть струи, то она втекает в воду бесшумно. Подобный опыт можно провести и с листом картона. Так, если поднимать кусок картона, на который попадает струя, к ее истоку, то удары капель будут слышны все слабее и слабее. Когда же вы достигнете точки перехода к целой части струи, ударов не станет слышно вовсе.

Наш прибор с мембраной играет роль того же куска картона. Однако, благодаря резонатору, которым является трубка, каждый тихий удар капли слышен гораздо лучше. Падающие на резиновую мембрану капли производят в комнате впечатление слабых ударов молотка по наковальне. Попробуйте убедиться в этом.

Для дальнейших опытов вам понадобится тонкая струя. Ее можно получить с помощью стеклянной трубки с закругленным концом диаметра порядка 1 мм. Если такой трубки у вас нет, не огорчайтесь. Возьмите трубку диаметром около 3 мм, расплавьте ее конец (подержав его над пламенем и слегка поворачивая), пока отверстие не станет закрываться, и сильно дуньте в противоположный конец трубки. Вы получите трубку с круглым отверстием малого диаметра. Затем наполните водой достаточно большой сосуд, поставьте его на шкаф и выпускайте из него воду через длинную резиновую трубку (устроив сифон), в конец которой вставлена сделанная вами стеклянная трубочка. Таким образом можно получить струю с довольно длинной верхней прозрачной частью.

Направьте струю на резиновую мембрану сделанного ранее прибора. Сначала шум будет довольно сильным, но по мере приближения конца трубки к мембране он стихнет, и, наконец, струя станет падать практически беззвучно.

Теперь можно убедиться в чувствительности струи к музыкальным звукам, о которой писали Савар и Тиндаль. Приложите, например, к стеклянной трубке ножку камертона. Струя тут же распадется на капли, которые, ударяя по мембране, «запоют» в такой степени, что захочется заткнуть уши.

Это и есть водяной микрофон, в котором слабый исходный звук усиливается за счет энергии падающей струи. Приложив вместо камертона к трубке часы, можно сделать слышным их ход для всех присутствующих в комнате. Б. Донат, в книге*) которого описан этот опыт, утверждает, что, приладив к стеклянной трубке, из которой вытекала струя, воронку, он попытался передать через струю звуки своего голоса. При этом струя действительно «заговорила», но так неясно и грубо и таким ужасным голосом, что все присутствующие при этом опыте разбежались. Попробуйте и вы провести такой эксперимент. Может быть, нервы у ваших друзей окажутся покрепче, и интерес к результату опыта удержит их на месте?

---

*) Здесь речь идет об упоминавшейся в предыдущих статьях книге «Физика в играх для юношества», изданной в конце XIX века (*Прим ред*)

Задачи наших читателей

Предлагаемые здесь задачи связаны со статьей Ю. И. Ионина и А. И. Плоткина «Выбор модуля», опубликованной в «Кванте» № 6 за этот год.

1. Докажите, что уравнение

$$x^3+y^3=(x+y)^2+(xy)^2$$

не имеет решений в натуральных числах.

М. Гараев, уч. 9-го класса

2. Пусть a и b — натуральные числа, p — простое число, большее, чем a и b. Докажите, что число $(a+b)^p-a^p-b^p$ не делится на p^3.

А. Т. Курганский

3. Докажите, что

а) если числа $n+1$ и $2n+1$ — квадраты натуральных чисел, то n делится на 24;

б) если числа $2n+1$ и $3n+1$ — квадраты натуральных чисел, то n делится на 40;

в) при любом натуральном n число 5^n-1 не делится на 4^n-1;

г) при любом натуральном $n>2$ число 5^n-4^n не является точным квадратом.

Л. Д. Курляндчик

Если массы заменить на площади...

ЧАН КУАНГ

В этой статье мы докажем несколько теорем, которые можно смело отнести к жемчужинам элементарной геометрии. Бесспорно, эти теоремы должны доставить читателю удовольствие даже одними своими формулировками. Но мы рассказываем о них здесь по другой причине — они будут выведены из одной формулы — формулы Лагранжа для вычисления «момента инерции». Приведем ее для случая трех точек A, B, C:

$$\alpha|PA|^2+\beta|PB|^2+\gamma|PC|^2=$$
$$=\frac{1}{\mu}(\alpha\beta c^2+\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2)+\mu|PZ|^2; \qquad (1)$$

здесь A, B, C и P — произвольные точки, α, β и γ — произвольные числа (понимаемые как «массы», сосредоточенные в точках A, B и C), $\mu=\alpha+\beta+\gamma\neq0$, a, b, c — длины отрезков BC, CA, AB, наконец, Z — это *центр масс* системы материальных точек αA, βB, γC, то есть, по определению, точка, удовлетворяющая условию

$$\alpha\overrightarrow{ZA}+\beta\overrightarrow{ZB}+\gamma\overrightarrow{ZC}=\vec{0}$$

(*материальной точкой* называют пару (точка, число), αA, βB и γC — краткие обозначения материальных точек (A, α), (B, β), (C, γ)). В принципе, сказанного достаточно, и чтобы вывести формулу (1), и чтобы понимать дальнейшее. Но все же мы советуем ознакомиться со статьей В. Н. Дубровского «Момент инерции в геометрии» в предыдущем номере журнала, где доказывается формула Лагранжа (формула (7) из этой статьи), объясняется, как она связана с «моментом инерции», и приводятся еще некоторые ее геометрические следствия, а также необходимые свойства центра масс.

Массы и площади

Оказывается, «массам» α, β, γ, определяющим заданную точку — центр масс Z, можно придать простой геометрический смысл: если треугольник ABC, внутри которого дана точка Z, разбить на три треугольника отрезками ZA, ZB и ZC и поместить в каждую вершину массу, равную площади противоположного треугольника (рис. 1), то центр этих масс попадет как раз в точку Z. Иначе говоря,

$$S_a\cdot\overrightarrow{ZA}+S_b\cdot\overrightarrow{ZB}+S_c\cdot\overrightarrow{ZC}=\vec{0}, \qquad (2)$$

где $S_a=S_{ZBC}$, $S_b=S_{ZCA}$, $S_c=S_{ZAB}$ — площади соответствующих треугольников. Для доказательства обозначим через A_1 точку пересечения прямых AZ и BC (рис. 2), тогда

$$S_b\cdot\overrightarrow{ZB}+S_c\cdot\overrightarrow{ZC}=S_b(\overrightarrow{ZA_1}+\overrightarrow{A_1B})+$$
$$+S_c(\overrightarrow{ZA_1}+\overrightarrow{A_1C})=(S_b+S_c)\overrightarrow{ZA_1}+$$
$$+(S_b\cdot\overrightarrow{A_1B}+S_c\cdot\overrightarrow{A_1C}).$$

Треугольники ZCA и ZAB имеют общую сторону ZA, поэтому отношение их площадей $S_b : S_c$ равно отношению их высот $h_C : h_B$, опущенных на эту сторону, но, очевидно, $h_C : h_B=|A_1C|:|A_1B|$. Следовательно, $S_b\cdot|A_1B|=S_c\cdot|A_1C|$, то есть $S_b\cdot\overrightarrow{A_1B}+S_c\cdot\overrightarrow{A_1C}=\vec{0}$ и

$$\vec{0}=S_a\cdot\overrightarrow{ZA}+S_b\cdot\overrightarrow{ZB}+S_c\cdot\overrightarrow{ZC}=S_a\cdot\overrightarrow{ZA}+$$
$$+(S_b+S_c)\overrightarrow{ZA_1}.$$

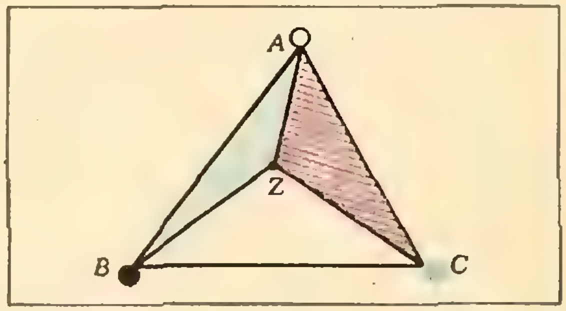


Рис. 1.

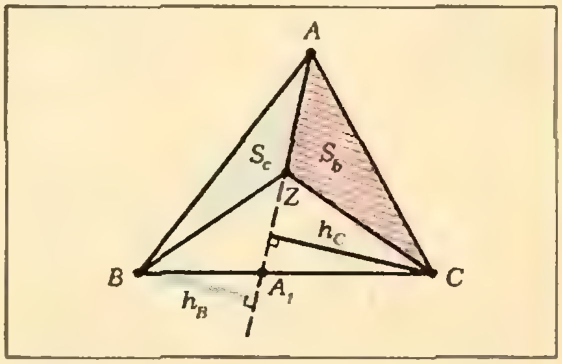


Рис. 2.

Таким образом, вектор $\vec{v}$ коллинеарен $\overrightarrow{ZA}$ ($\overrightarrow{ZA_1} \parallel \overrightarrow{ZA}$); по тем же соображениям $\vec{v} \parallel \overrightarrow{ZB}$ и $\vec{v} \parallel \overrightarrow{ZC}$, а это возможно только, когда $\vec{v}=\vec{0}$.

Разумеется, и для всех наборов масс α, β, γ, пропорциональных S_a, S_b, S_c, точка Z тоже будет центром масс системы αA, βB, γC. Набор S_a, S_b, S_c можно выделить из них очевидным условием

$$S_a+S_b+S_c=S=S_{ABC}. \qquad (3)$$

Мы вывели свойства (2) и (3) только для точек Z, лежащих внутри треугольника, да их и нельзя непосредственно перенести на остальные точки (скажем, для точки Z на рисунке 3, *а* равенство (3) будет выглядеть так: $S=-S_a+S_b+S_c$). Чтобы эти формулы оказались верными для всех точек, надо обобщить понятие площади.

Назовем *ориентированной площадью* S_{KLM} треугольника KLM его площадь, взятую со знаком плюс, если обход вершин $K \to L \to M \to K$ совершается против часовой стрелки, и со знаком минус — в противном случае*). Тогда утверждения (2) и (3) будут справедливы для любой точки Z в плоскости треугольника ABC, если считать величины S_a, S_b, S_c, S ориентированными площадями соответствующих треугольников. (Подчеркнем, что в определении ориентированной площади имеет значение порядок вершин треугольника: например, $S_a=S_{ZBC}=S_{CZB}=-S_{ZCB}$ и т. д.)

Доказательство (2) при этом обобщении почти не меняется. Поясним подробнее его ключевой момент: вывод равенства $S_b \cdot \overrightarrow{A_1B}+S_c \cdot \overrightarrow{A_1C}=\vec{0}$. Так же, как и раньше, доказывается, что $S_b \cdot |A_1B|=S_c \cdot |A_1C|$ при любом положении точки Z. Теперь надо заметить, что если точки B и C лежат по разные стороны от прямой ZA (рис. 2; 3,*б*), то треугольники ZCA и ZAB ориентированы одинаково (имеют одно и то же направление обхода вершин), то есть S_b и S_c — одного знака, и при этом точка A_1 лежит между B и C, то есть векторы $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1C}$ противоположно направлены; если же точки B и C лежат по одну сторону от ZA (рис. 3,*а*), то числа S_b и S_c имеют противоположные знаки, а точка A_1 лежит вне отрезка BC, то есть векторы $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1C}$ сонаправлены. В обоих случаях векторы $S_b \cdot \overrightarrow{A_1B}$ и $S_c \cdot \overrightarrow{A_1C}$ противоположно направлены, а поскольку их длины равны, они дают в сумме $\vec{0}$. Уточнение остальных деталей мы предоставим читателю (рассмотрите, в частности, случай $\overrightarrow{ZA} \parallel \overrightarrow{BC}$).

Равенство (3) в общем случае легко доказать простым перебором вариантов расположения точки Z; например, на рисунке 3,*а* $S=-|S_a|+|S_b|+|S_c|=S_a+S_b+S_c$, на рисунке 3,*б* $S=|S_a|-|S_b|-|S_c|=S_a+S_b+S_c$ и т. д.

Теорема Птолемея

Итак, в формуле Лагранжа (1) в качестве «масс» α, β, γ можно взять ориентированные площади S_a, S_b и S_c. Запишем ее для случая, когда точка P совпадает с центром O описанной окружности треугольника, обозначив ее радиус через R:

$$(S_a+S_b+S_c)R^2= \\ =\frac{1}{S}(S_aS_bc^2+S_bS_ca^2+S_cS_ab^2)+S|OZ|^2$$

или

$$R^2-|OZ|^2=\frac{1}{S^2}(S_aS_bc^2+S_bS_ca^2+ \\ +S_cS_ab^2). \qquad (4)$$

Выведем отсюда классическую теорему Птолемея: *произведение диагоналей вписанного в окружность четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.*

Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O радиуса R (рис. 4). Применим формулу (4) к точке $Z=D$. Левая ее часть будет равна нулю ($|OD|=R$); ориентированные площади S_a, S_b, S_c вычислим, пользуясь тем, что площадь треугольника равна четверти произведения его сторон, деленного на радиус описанной окружности:

$$S_a=S_{DBC}=\frac{1}{4R}\cdot a \cdot |DB| \cdot |DC|,$$

$$S_b=S_{DCA}=-\frac{1}{4R}\cdot b \cdot |DC| \cdot |DA|,$$

$$S_c=S_{DAB}=\frac{1}{4R}\cdot c \cdot |DA| \cdot |DB|.$$

Подставляя эти выражения в (4) и сокращая на $abc\cdot|DA|\cdot|DB|\cdot|DC/4RS^2$, получим, что

---

*) Мы вынуждены ограничиться этим наглядным определением, потому что строгое определение заняло бы слишком много места и увело бы нас от темы статьи. Читатель, которого это определение не удовлетворяет, может обратиться к статье А. М. Лопшица «Площади ориентированных фигур» («Квант», 1978, № 3, с. 2). С помощью введенных в ней понятий можно абсолютно строго доказать все утверждения, где мы существенно пользуемся ориентированной площадью. См. также статью Н. Вагутена «Формула площади» («Квант», 1981, № 4, с. 17).

$$-c\cdot|DC|-a\cdot|DA|+b\cdot|DB|=0,$$

то есть

$$|DB|\cdot|AC|=|DA|\cdot|BC|+|AB|\cdot|DC|.$$

Площадь педального треугольника

Выражение, стоящее в правой части (4), выглядит довольно неуклюже, но, как мы сейчас увидим, оно имеет хороший геометрический смысл. Опустим из точки Z перпендикуляры ZA_1, ZB_1 и ZC_1 на прямые BC, CA и AB (рис. 5). Образовавшийся треугольник $A_1B_1C_1$ называется *педальным треугольником* точки Z. *Леонард Эйлер обнаружил*, что его площадь равна

$$S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{|OZ|^2}{R^2}\right)S_{ABC}$$

(обе площади ориентированные!). Выведем этот результат из нашей формулы (4). Для этого мы докажем, что $S_aS_bc^2=abcR\cdot S_{ZA_1B_1}$. Складывая это равенство с аналогичными равенствами для двух других слагаемых в правой части (4), мы получим:

$$R^2-|OZ|^2=\frac{1}{S^2}abcR\,(S_{ZA_1B_1}+S_{ZB_1C_1}+$$

$$+S_{ZC_1A_1})=\frac{4R^2}{S_{ABC}}S_{A_1B_1C_1},$$

что эквивалентно формуле Эйлера.

Итак, рассмотрим выражение $S_aS_bc^2$. Ясно, что $|S_a|=a|ZA_1|/2$, $|S_b|=b|ZB_1|/2$, $c=2R\sin\cdot ACB=2R\sin\widehat{A_1ZB_1}$ (поскольку стороны углов ACB и A_1ZB_1 взаимно перпендикулярны, их величины равны или дают в сумме 180°). Следовательно, $|S_aS_bc^2|=$

$$=abcR\cdot\frac{1}{2}|ZA_1||ZB_1|\sin\widehat{A_1ZB_1}=$$

$$=abcR|S_{ZA_1B}|.$$

Остается доказать, что знак произведения S_aS_b совпадает со знаком $S_{ZA_1B_1}$. Это легко сделать, перебирая четыре возможных случая расположения точки Z относительно прямых AC и BC (внутри каждого из четырех углов, образованных этими прямыми, знаки S_a, S_b и $S_{ZA_1B_1}$ постоянны).

В заключение приведем еще одну старинную теорему: *основания перпендикуляров, опущенных из точки описанной окружности треугольника на его стороны (или их продолжения), лежат на одной прямой — «прямой Симсона»* (рис. 6).

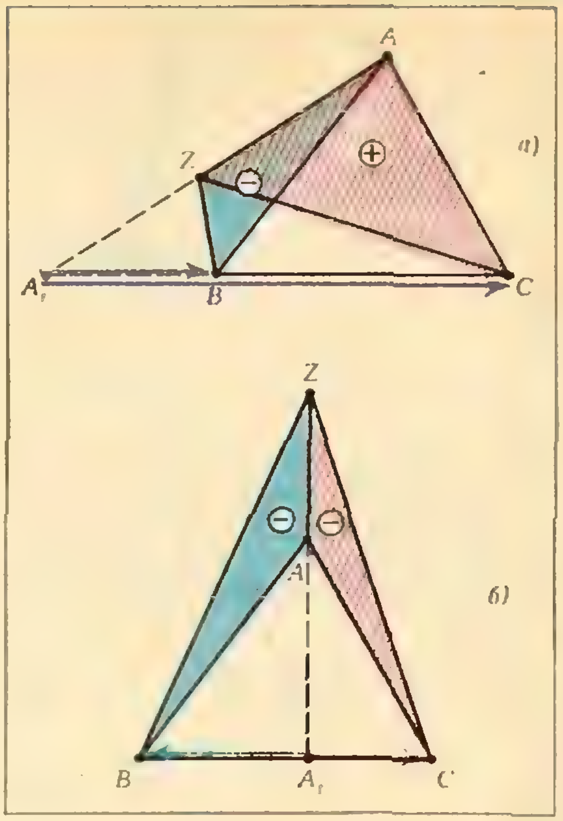


Рис. 3.

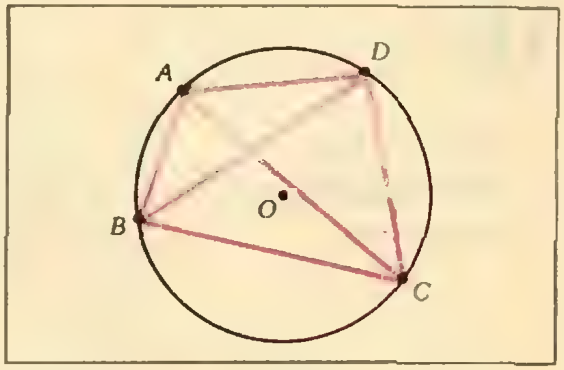


Рис. 4.

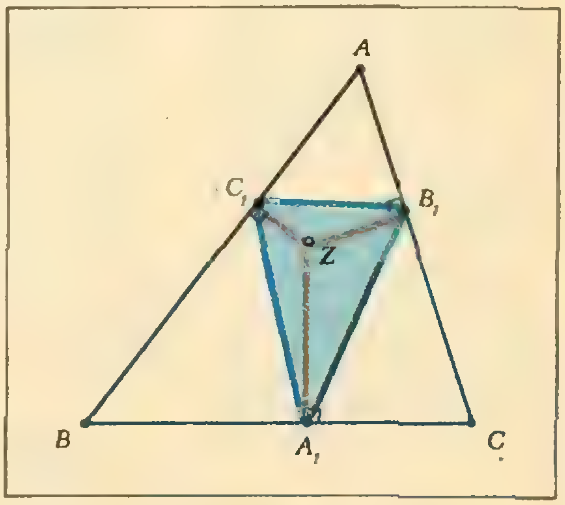


Рис. 5.

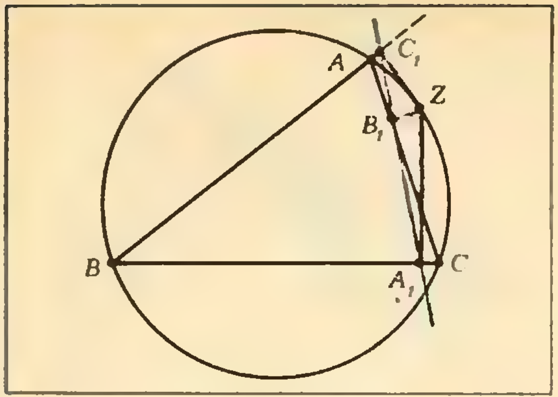


Рис. 6.

Эта теорема сразу следует из формулы Эйлера, потому что для точки Z, лежащей на описанной окружности, площадь педального треугольника равна нулю, то есть он вырождается в прямую.

Задачи

Если точка Z служит центром масс системы материальных точек αA, βB, γC, то три числа α, β, γ называются *барицентрическими координатами* точки Z относительно точек A, B, C.

1. Докажите, что для любой точки плоскости барицентрические координаты определены однозначно с точностью до пропорциональности и обратно, любая тройка чисел (α, β, γ) с ненулевой суммой задает ровно одну точку плоскости.

2. Докажите, что барицентрические координаты «замечательных точек» в треугольнике ABC относительно его вершин равны: для центра Z вписанной окружности — (a, b, c); для центра Z вневписанной окружности, касающейся стороны BC, — $(-a, b, c)$; для центра O описанной окружности — $(\sin 2\hat{A}, \sin 2\hat{B}, \sin 2\hat{C})$; для точки H пересечения высот — $(\operatorname{tg}\hat{A}, \operatorname{tg}\hat{B}, \operatorname{tg}\hat{C})$; для точки G пересечения медиан — $(1, 1, 1)$.

3. Докажите, что расстояние между двумя точками M и M' с барицентрическими координатами (α, β, γ) и $(\alpha', \beta', \gamma')$ относительно точек A, B, C при $\alpha+\beta+\gamma=\alpha'+\beta'+\gamma'=1$ можно вычислить по формуле $|MM'|^2=-(a^2k_bk_c+b^2k_ck_a+c^2k_ak_b)$, где $k_a=\alpha-\alpha'$, $k_b=\beta-\beta'$, $k_c=\gamma-\gamma'$.

4. Выразите расстояния от центра описанной окружности треугольника до центров вписанной и вневписанной окружности через радиусы этих окружностей.

5. Докажите, что (в обозначениях задачи 2) $|OG|^2=R^2-(a^2+b^2+c^2)/9$, где R — радиус описанной окружности.

Новости науки

Новый вид радиоактивного распада

В природе есть много элементов, в основном тяжелых, которые самопроизвольно излучают альфа-частицы, бета-частицы и гамма-лучи.*) Эти элементы образуют три естественно-радиоактивных ряда (семейства), где каждый последующий член возникает в результате радиоактивного распада предыдущего.

Родоначальник одного ряда — это ядро $^{238}_{92}U$, изотопа урана с массовым числом 238 (семейство урана), другого — ядро тория $^{232}_{90}Th$ (семейство тория) и третьего — ядро изотопа урана $^{235}_{92}U$, называемого также актиноураном (семейство актиния). Заканчиваются все три ряда устойчивым ядром того или иного изотопа свинца.*)

В семействе, которое начинается с $^{235}_{92}U$, есть ядро изотопа радия, которое распадается с излучением альфа-частицы, превращаясь в ядро радона. За этим распадом следуют еще два аналогичных — превращение радона в полоний и полония в свинец:

$$^{223}_{88}Ra \xrightarrow{\alpha} {}^{219}_{86}Rn \xrightarrow{\alpha} {}^{215}_{84}Po \xrightarrow{\alpha} {}^{211}_{82}Pb.$$

Физиков давно интересовал вопрос — обязательно ли α-частицам вылетать во очереди или они могут объединиться в ядро углерода $^{12}_{6}C$ и вылететь одним большим «куском»? Этому процессу, естественно, мешает отсутствие в ядре радия готового ядра углерода. Впрочем, α-частица тоже не «заготовлена» заранее, а должна «собраться» перед самым вылетом из ядра. Оказывается, α-частице это сделать все же легче, чем ядру углерода, и до последнего времени никто не наблюдал вылета легкого ядра (кроме ядра атома гелия, то есть альфа-частицы) из тяжелого.

В 1940 году было открыто (К. А. Петржаком и Г. Н. Флёровым) спонтанное деление тяжелых ядер на два примерно одинаковых осколка, но это явление вовсе не похоже на вылет легкой частицы. Лишь совсем недавно был обнаружен новый вид радиоактивного распада, который происходит с излучением ядра углерода. Оказалось, что из радия действительно вылетают ядра углерода, причем не $^{12}_{6}C$, а $^{14}_{6}C$, так что три α-частицы прихватывают с собой еще два нейтрона. При этом, как показывает расчет, достигается максимальный выигрыш энергии — 32 МэВ. Если бы вылетало ядро изотопа $^{12}_{6}C$, то оно уносило бы меньше энергии — 28 МэВ.

Вероятность вылета ядра $^{14}_{6}C$ очень мала — она меньше вероятности α-распада радия в 10^{10} раз. Другими словами, одно ядро углерода вылетает на 10 миллиардов альфа-частиц. По оценкам вылет ядра $^{12}_{6}C$ еще менее вероятен (меньше еще в 10^6 раз). С такой же вероятностью должны вылетать ядра и других изотопов ($^{13}_{6}C$, $^{15}_{6}C$).

Можно с уверенностью сказать, что для физиков открылась новая область исследований.

Я. С.

---

*) Естественная радиоактивность была открыта в 1896 году.

*) Есть еще одно семейство — семейство нептуния, полученное искусственно. Его родоначальник — ядро нептуния $^{237}_{93}Np$, а конечный продукт — ядро висмута $^{209}_{83}Bi$.

квант для младших школьников

Задачи

1. Какая ошибка допущена художником в заставке к вечерней телевизионной передаче «Спокойной ночи, малыши»?

2. Высота треугольника в 2 раза меньше его основания, а один из углов при основании равен 75°. Доказать, что треугольник равнобедренный.

3. Первокласснице Наташе было задано на дом выразить заданное целое число часов в секундах. Она красиво написала ответ в тетради и тут же закрыла ее. Прийдя в школу, Наташа обнаружила, что две цифры расползлись в кляксы. Ко всему, она еще забыла какое именно число часов нужно было выразить в секундах. Какие цифры нужно написать вместо клякс?

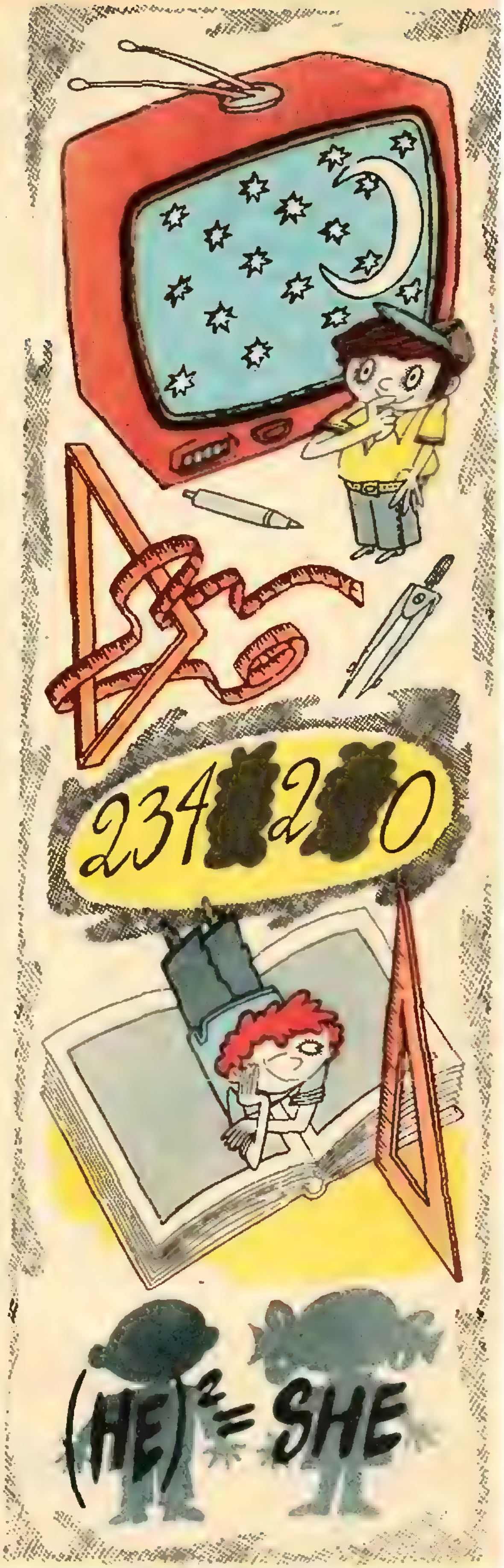
4. Слава взял у товарища книгу на три дня. В первый день он прочел полкниги, во второй — треть оставшихся страниц, а в третий день прочитал количество страниц, равное половине страниц, прочитанных за первые два дня. Успел ли Слава прочесть за три дня книгу?

5. Решите числовой ребус

$$(HE)^2=SHE$$

(HE и SHE — это «он» и «она» по-английски).

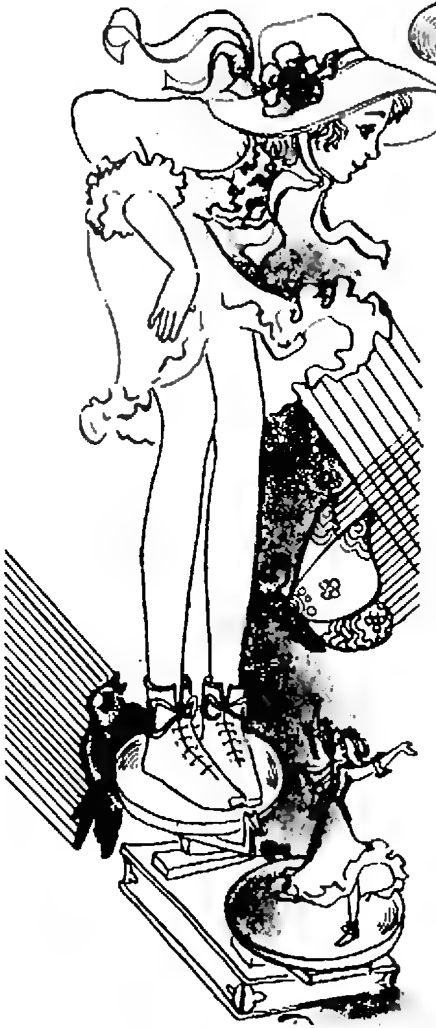
Эти задачи нам предложили: ученик 5-го класса школы № 8 г. Мозыря *Саша Коршков*,
А. Н. Смоляков, Н. К. Антонович,
В. Д. Вьюн, А. П. Савин



Море слёз

Мы завершаем краткий цикл публикаций отрывков из замечательной книги Л. Кэрролла «Алиса в стране чудес» ее второй главой («Море слез»), снабженной (как и первая в предыдущем номере «Кванта») вопросами и задачами. Мы возобновим подобные публикации, если первые две понравятся нашим читателям.

Л. КЭРРОЛЛ



Вопрос 1

Приблизительно оцените, с какой скоростью изменился рост Алисы. Во сколько раз изменился её вес?

— Все страньше и страньше! — вскричала Алиса. От изумления она совсем забыла, как нужно говорить. — Я теперь открываюсь, словно подзорная труба. Прощайте, ноги!

(В эту минуту она как раз взглянула на ноги и увидела, как стремительно они уносятся вниз. Еще мгновение — и они скроются из виду.)

— Бедные мои ножки! Кто же вас будет теперь обувать? Кто натянет на вас чулки и башмаки? Мне же до вас теперь, мои милые, не достать. Мы будем так далеки друг от друга, что мне будет не до вас... Придется вам обходиться без меня...

В эту минуту она ударилась головой о потолок: ведь она вытянулась футов до девяти, не меньше. Тогда она схватила со стола золотой ключик и побежала к двери в сад.

Бедная Алиса! Разве могла она теперь пройти в дверцу? Ей удалось лишь заглянуть в сад одним глазком — и то для этого пришлось лечь на пол. Надежды на то, чтобы пройти в нору, не было никакой. Она уселась на пол и снова расплакалась.

когда я встала, я это была или не я? Кажется, уже не совсем я! Но если это так, то кто же я в таком случае? Все так сложно...

И она снова принялась перебирать в уме подружек, которые были с ней одного возраста. Может, она превратилась в одну из них?

— Во всяком случае, я не Ада! — сказала она решительно. У нее волосы вьются, а у меня нет. И уж, конечно, я не Мейбл. Я столько всего знаю, а она совсем ничего. И вообще, она это она, а я это я. Как все непонятно! А ну-ка, проверю, помню я то, что знала, или нет. Значит, так: четырежды пять — двенадцать, четырежды шесть — тринадцать, четырежды семь... Так я до двадцати никогда не дойду!

Ну ладно, таблица умножения это неважно. Попробую географию, Лондон — столица Парижа, а Париж столица Рима, а Рим... Нет, все не так, попробую прочитать «Дом который построил Джек...»

Она сложила руки на коленях, словно отвечала урок, и начала. Но голос ее зазвучал как-то странно, будто кто-то

4×5=12
4×6=13
4×7=...

Задача 2. Ада, Алиса и Мейбл однажды вышли на прогулку в белом, зеленом и синем платьях. Их туфли были одного из тех же цветов. Известно, что только у Алисы туфли были того же цвета, что и платье. У Ады ни платье, ни туфли не были белыми. Мейбл была в зеленых туфлях. Определить цвет платья каждой из девочек.

Задача 3. Возможны ли равенства, о которых говорит Алиса? И почему она никогда не дойдет до двадцати?

Задача 1. В темной комнате кролика в ящике лежат перчатки: 10 пар белых, 5 пар черных и 7 пар синих. Какое количество перчаток надо вынуть из ящика, чтобы среди них заведомо оказалась пара белых перчаток?

— Стыдись, — сказала себе Алиса немного спустя. — Такая большая девочка (тут она, конечно, была права), — и плачешь! Сейчас же перестань! Слышишь?

Но слезы лились ручьями, и вскоре вокруг нее образовалась большая лужа дюйма в четыре глубиной. Вода разлилась по полу и уже дошла до середины зала.

Немного спустя вдалеке послышался топот маленьких ног. Алиса торопливо вытерла глаза и стала ждать. Это возвращался Белый Кролик. Одет он был парадно, в одной руке держал пару лайковых перчаток, а в другой — большой веер.

На бегу он тихо бормотал про себя:

— Ах, боже мой, что скажет Герцогиня! Она будет в ярости, если я опоздаю! Просто в ярости!

Алиса была в таком отчаянии, что готова была обратиться за помощью к кому угодно. Когда Кролик поравнялся с нею, она робко прошептала:

— Простите, сэр...

Кролик подпрыгнул, уронил перчатки и веер, метнулся прочь и тут же исчез в темноте.

Алиса подняла веер и перчатки. В зале было жарко, и она стала обмахиваться веером.

— Нет, вы только подумайте! — говорила она, — Какой сегодня день странный! А вчера все шло как обычно. Может, это я изменилась за ночь? Дайте-ка вспомнить: сегодня утром, другой хрипло произносил за нее совсем другие слова...

— Слова совсем не те, — сказала бедная Алиса, и глаза у нее снова наполнились слезами. — Значит, я все-таки Мейбл! Придется мне теперь жить в этом старом домишке. И игрушек у меня совсем не будет. Зато уроки надо будет учить без конца. Ну что ж, решено: если я Мейбл, останусь здесь навсегда. Пусть тогда попробуют прийти сюда за мной! Свесят головы вниз, станут звать: «Подымайся, милочка, к нам! А я на них только посмотрю и отвечу: «Скажите мне сначала, кто я? Если мне это понравится, я поднимусь, а если нет — останусь здесь, пока не превращусь в кого-нибудь другого!

Тут слезы брызнули у нее из глаз.

— Почему за мной никто не приходит? Как мне надоело сидеть здесь одной!

С этими словами Алиса глянула вниз и, к своему удивлению, заметила, что, пока говорила, натянула на одну руку крошечную перчатку Кролика.

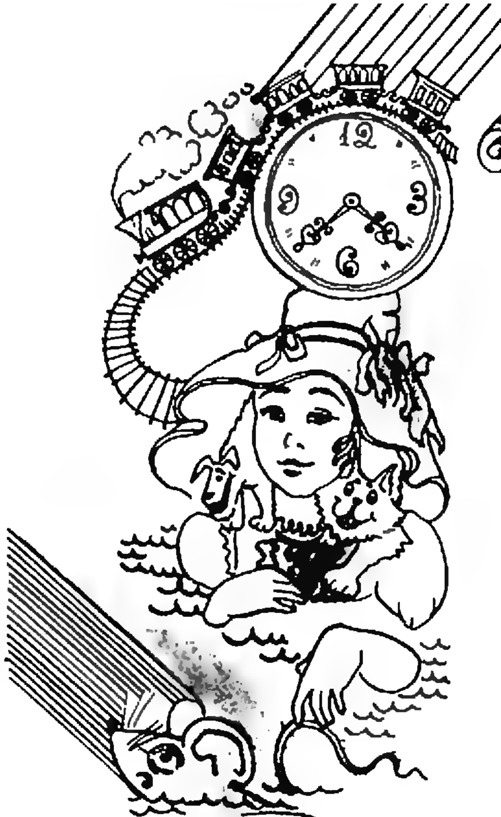
«Как это мне удалось? — подумала она. — Видно, я опять уменьшаюсь».

Алиса встала и подошла к столику, чтобы выяснить, какого она теперь роста. Судя по всему, в ней было не больше двух футов, и она продолжала стремительно уменьшаться. Вскоре она поняла, что виной тому веер, который она держала в руках, и тут же швырнула его на пол. И хорошо сделала, а то могла бы и вовсе исчезнуть.

Вопрос 2

Как, по вашему должен бы измениться голос у „выросшей" Алисы?

«Переверни страницу»



Вопрос 3

Какие части железнодорожных вагонов движутся в направлении, противоположном направлению движения поезда?

Задача 4. А на станции — часы, которые стоят (см. рисунок), причем стрелки образуют равные углы с линией, соединяющей их ось с цифрой 6. В котором (точно) часу остановились часы?

Вопрос 4

Во сколько раз больше может наплакать слез „большая" Алиса по сравнению с „маленькой"? Можно ли в такой луже утонуть?

Продолжение

— Уф, едва спаслась! — сказала Алиса, испуганная столь внезапной переменой, но радуясь, что уцелела. — А теперь — в сад!

И она подбежала к дверце. Но увы! Дверца опять была заперта, а золотой ключик так и лежал на стеклянном столе.

«Час от часу не легче! — подумала бедная Алиса. — Такой крошкой я еще не была ни разу! Плохо мое дело! Хуже некуда...»

Тут она поскользнулась и — бух! — шлепнулась в воду. Вода была соленая на вкус и доходила ей до подбородка. Сначала она подумала, что каким-то образом упала в море.

«В таком случае, — подумала она, — можно уехать по железной дороге».

Алиса всего раз в жизни была на взморье, и потому ей казалось, что всё там одинаково: в море — кабинки для купания, на берегу — малыши с деревянными лопатками строят замки из песка; потом — пансионы, а за ними — станция.

Вскоре, однако, она поняла, что упала в лужу слез, которую сама же и наплакала, когда была ростом в девять футов.

«Ах, зачем я так ревела! — подумала Алиса, плавая кругами и пытаясь понять, в какой стороне берег. — Вот глупо будет, если я утону в собственных слезах. И поделом мне! Конечно, это было бы очень странно. Впрочем, сегодня все странно».

Алиса, видя, что обидела бедного зверька. — Я забыла, что вы не любите кошек.

— Не люблю кошек! — вскричала пронзительно Мышь. — А ты бы их на моем месте любила?

— Наверное, нет! — попробовала успокоить ее Алиса. — Прошу вас, не сердитесь! Жаль, что я не могу показать вам нашу Дину, Если б вы только ее увидели, вы бы, мне кажется, полюбили кошек. Она такая милая, такая спокойная, — задумчиво продолжала Алиса, лениво плавая в соленой воде. — Сидит себе у камина, мурлычет и умывается. И такая мягкая, так и хочется погладить. А как она ловит мышей!... Ах, простите! Простите, пожалуйста!

Шерстка у Мыши стала дыбом. Алиса поняла, что оскорбила ее до глубины души.

— Если вам неприятно, не будем больше об этом говорить! — сказала Алиса.

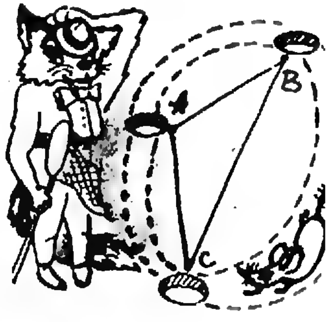
— Не будем? — вскричала Мышь, трепеща от головы до самого кончика хвоста. — Можно подумать, что я завела этот разговор! У нас в семье всегда ненавидели кошек. Низкие, гадкие, вульгарные твари. Слышать о них не желаю!

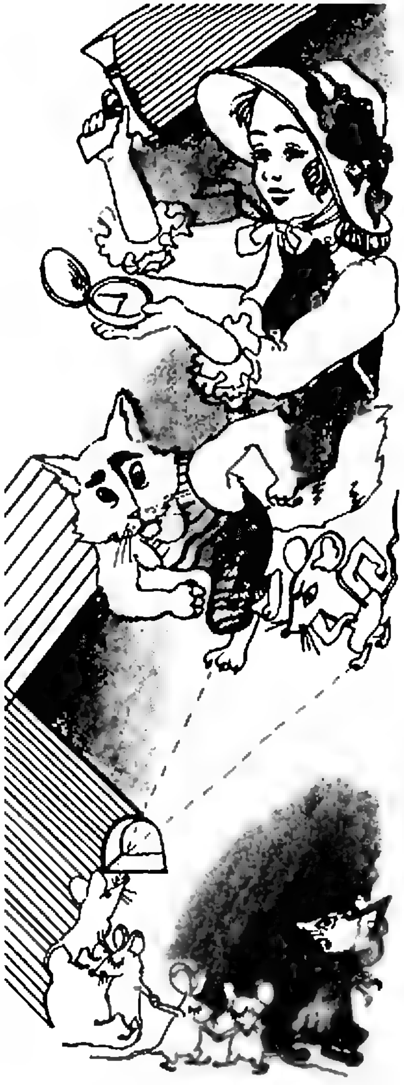
— Хорошо, хорошо! — сказала Алиса, торопясь перевести разговор. — А... собак... вы любите?

Мышь промолчала.

— Рядом с нами живет такой милый

Задача 6. В одной из тр
норок *A*, *B*, *C* сидит мышка (р
сунок). Кошка хочет распол
житься так, чтобы наибольш
из расстояний от нее до нор
было наименьшим. Как она э
может сделать?





Задача 5. Мышке до норки 20 шагов. Кошке до мышки 5 прыжков. За один прыжок кошки мышка делает 3 шага. Один прыжок кошки равен 10 шагам мышки. Догонит ли кошка мышку?

Тут она услышала какой-то плеск неподалеку и поплыла туда, чтобы узнать, кто это там плещет. Сначала она решила, что это морж или гиппопотам, но потом вспомнила, какая она теперь крошка, и вглядевшись, увидала всего лишь мышь, которая, видно, также упала в воду.

«Заговорить с ней или нет? — подумала Алиса. — Сегодня все так удивительно, что, возможно, и она умеет говорить. Во всяком случае, попытаться стоит».

И она начала:

— О Мышь! Не знаете ли вы, как выбраться из этой лужи? Мне так надоело здесь плавать, о Мышь!

Алиса считала, что именно так и следует обращаться к мышам.

Мышь взглянула на нее с недоумением и легонько ей подмигнула (так, во всяком случае, показалось Алисе), но не сказала в ответ ни слова.

«Может, она по-английски не понимает? — подумала Алиса. — Вдруг она француженка родом? Приплыла вместе с Вильгельмом Завоевателем...»

Хоть Алиса и гордилась своим знанием истории, она не очень ясно представляла себе, что когда происходило.

В учебнике французского языка первой стояла фраза: «Где моя кошка?» Эту фразу она и произнесла по-французски.

Мышь рванулась из воды и вся затрепетала от ужаса.

— Простите! — быстро сказала Али-

песик! — радостно продолжала Алиса. — Мне бы очень хотелось вас с ним познакомить! Маленький терьер. Глаза у него блестящие, а шерстка коричневая, длинная и волнистая! Бросишь ему что-нибудь, он тотчас несет назад, а потом сядет на задние лапки и просит, чтобы ему дали косточку. Чего только он ни делает — всего не упомнишь! Хозяин у него фермер, он говорит: этому песику цены нет! Он всех крыс перебил в округе и всех мыш... Ах, боже мой! — грустно промолвила Алиса. — По-моему, я ее опять обидела!

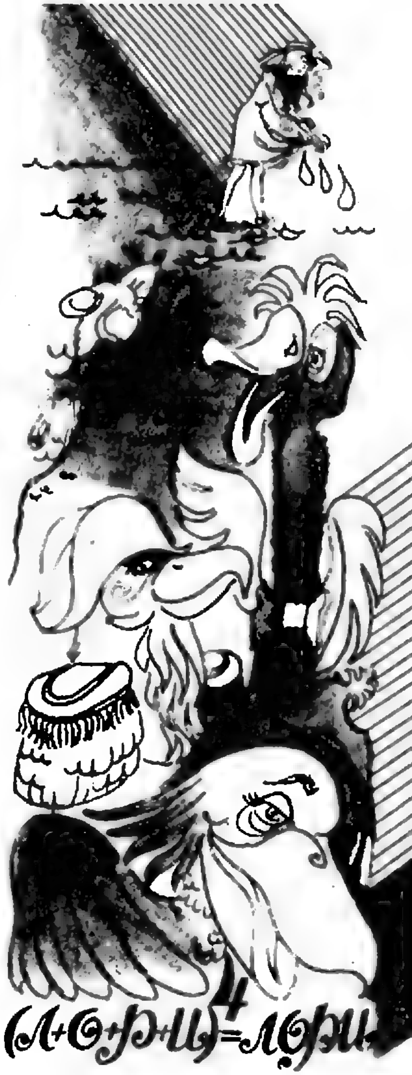
Мышь изо всех сил плыла от нее прочь, по воде даже волны пошли.

— Мышка, милая! — ласково закричала ей вслед Алиса. — Прошу вас, вернитесь. Если кошки и собаки вам не по душе, я о них больше ни слова не скажу!

Услышав это, Мышь повернула и медленно поплыла назад. Она страшно побледнела («От гнева!» — подумала Алиса.)

— Вылезем на берег, — сказала Мышь тихим, дрожащим голосом, — и я расскажу тебе мою историю. Тогда ты поймешь, за что я ненавижу кошек и собак.

И в самом деле надо было вылезать. В луже становилось все теснее от всяких птиц и зверей, упавших в нее. Там были Робин Гусь, Птица Додо, Попугайчик Лори, Орленок Эд и всякие другие удивительные существа. Алиса поплыла вперед, и все потянулись за ней к берегу.



Задача 7. Отгадайте числовой ребус

$(л+о+р+и)^4=лори.$

Задача 8. Поезд длиной 18 м проезжает мимо столба за 9 секунд. За сколько времени он проедет через мост длины 36 м.

задачник Кванта

Задачи

M876—M880: Ф888—Ф892

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 октября 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8 — 84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M876, M877» или «Ф888». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M876—M880 предлагались на заключительном туре юбилейной 50-й ленинградской городской олимпиады.

Задача Ф892 предлагалась на Всесоюзной физической олимпиаде (апрель 1984, г. Ереван).

M876. На окружности, касающейся сторон угла с вершиной O, выбраны две диаметрально противоположные точки A и B (отличные от точек касания). Касательная к окружности в точке B пересекает стороны угла в точках C и D, а прямую OA — в точке E (рис. 1). Докажите, что длины отрезков BC и DE равны.

А. С. Меркурьев

M877. Из листа клетчатой бумаги размерами 29×29 клеток вырезали 99 квадратиков размерами 2×2 каждый. Докажите, что из него можно вырезать еще один такой квадратик.

С. В. Фомин

M878. Докажите, что если сумма плоских углов при вершине пирамиды больше 180°, то каждое боковое ребро пирамиды меньше полупериметра ее основания.

Ю. И. Ионин, А. В. Смирнов

M879. Про пять целых чисел a, b, c, d, e известно, что суммы $a+b+c+d+e$ и $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ делятся на нечетное число p. Докажите, что число

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$$

также делится на p.

С. В. Фомин

M880*. В последовательности 1, 0, 1, 0, 1, 0,... каждый член, начиная с седьмого, равен последней цифре сумме шести предыдущих. Докажите, что в этой последовательности не встретятся подряд шесть чисел ..., 0, 1, 0, 1, 0, 1,...

А. С. Меркурьев

Ф888. На рисунке 2 изображена принципиальная схема гравиметра — прибора для измерения вариаций ускорения свободного падения g. В теплоизолированных газовых баллонах *1* и *2* давления соответственно $p_1\approx 2\cdot 10^4$ Па и $p_2\approx 3\cdot 10^4$ Па. Цилиндрические сосуды A и B радиуса 10 см и соединяющая их трубка заполнены ртутью. Поверх ртути налита очень легкая жидкость (толуол); эта жидкость заполняет также частично капилляры радиуса 1 мм, соединяющие сосуды A и B с баллонами *1* и *2*. Опишите процесс измерения вариаций ускорения g с помощью этого прибора. Какова величина вариаций g, которые можно зарегистрировать этим гравиметром, если известно, что при измерениях в разных пунктах изменения разности горизонтальных смещений толуола в капиллярах могут достигать нескольких миллиметров (до 1 см)? Температура во время разных измерений поддерживается постоянной; плотность ртути $\varrho=13{,}5\times\times10^3$ кг/м^3.

Ю. М. Брук

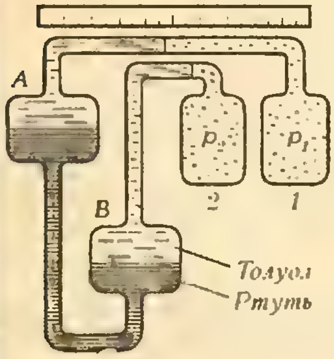


Рис. 2.

Ф889. Солнце находится на угловой высоте φ над горизонтом. Под каким углом к поверхности Земли нужно бросить тело в вертикальной плоскости, проходящей через Солнце, чтобы тень тела прошла наибольший путь по Земле?

В. А. Нахшин

Ф890. Кристаллы железа при температуре до 910 °C состоят из элементарных ячеек, имеющих форму куба с длиной ребра $a_1=2{,}87\cdot10^{-10}$ м. Атомы железа располагаются в вершинах куба и в его центре (рис. 3). Такая разновидность элемента — с объемноцентрированной кубической решеткой — называется альфа-железом (Fe_α). При температуре выше 910 °C ячейки кристалла железа представляют собой гранецентрированный куб с длиной ребра $a_2=3{,}63\cdot10^{-10}$ м. Атомы располагаются в вершинах куба и в центрах его граней (рис. 4). Такая разновидность элемента называется гамма-железом (Fe_γ). Одинакова ли плотность железа в этих состояниях? Относительная атомная масса железа $\mu=55{,}847$.

И. М. Низамов

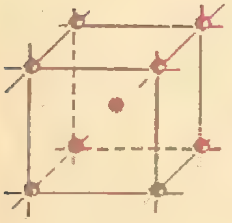


Рис. 3.

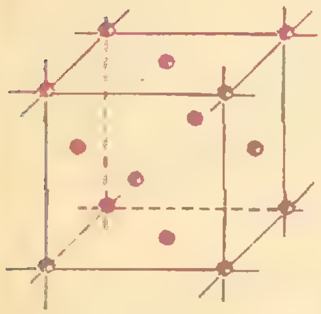


Рис. 4.

Ф891. Как изменится электроемкость проводящей сферы, если в ней сделать вмятину?

Р. Л. Энфиаджян

Ф892. На стеклянный шарик радиуса R падает луч света, направленный вдоль радиуса. На расстоянии r от центра шарика свет рассеивается равномерно по всем направлениям на маленьком воздушном пузырьке, образовавшемся при изготовлении шарика. Определить зависимость доли выходящего из шарика света от r. Показатель преломления стекла n. Потерями света в стекле пренебречь.

А. А. Лапидес

Problems

M876—M880: P888—P892

M876. Diametrically opposed points A and B are chosen on a circle which touches the sides of an angle with vertex O (neither A nor B is a tangency point). The tangent to the circle at B intersects the angle's sides at the points C and D and the line OA at E. Prove that the segments BC and DE are of equal length (see figure Рис. 1).

A. S. Merkuriev

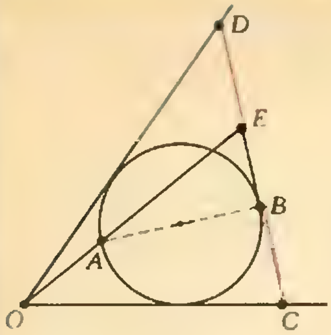


Рис. 1

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who propo-

sed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than October 31st, 1984, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».

Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use in to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

Problems M876—M880 were proposed at the final round of the 50th Leningrad city olympiad.

Problem P892 was proposed at the All-Union physics olympiad (April 1984, Erevan).

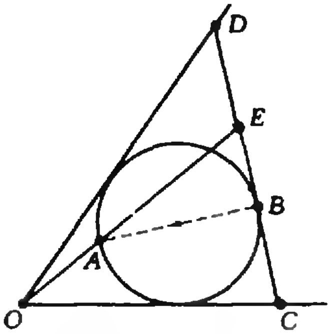


Рис. 1.

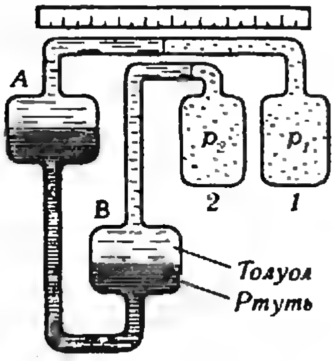


Рис. 2.

M877. In a 29 by 29 square of lined paper, 99 squares, each of which consists of 4 little squares, have been cut out. Prove that one more 2 by 2 square may be cut out.

S. V. Fomin

M878. Prove that if the sum of plane angles at the summit of a pyramid is more than 180°, then each lateral edge of the pyramid is shorter than half the perimeter of its base.

Yu. I. Ionin, A. V. Smirnov

M879. The five integers a, b, c, d, e are chosen so that $a+b+c+d+e$ and $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ are divisible by the odd number p. Prove that

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$$

is also divisible by p.

S. V. Fomin

M880. In the sequence 1,0,1,0,1,0,... each term, beginning with the seventh, equals the last digit of the sum of the previous six terms. Prove that the numbers 0,1,0,1,0,1 do not appear in that order in the sequence.

A. S. Merkuriev

P888. Figure Рис. 2 shows the working principle of a gravimeter — an apparatus for measuring variations in the acceleration g of freely falling bodies. The pressure in the two thermoisolated gaz balloons *1* and *2* is, respectively, $p_1 \approx 2 \cdot 10^4$ Pa and $p_2 \approx 3 \cdot 10^4$ Pa. The cylindrical receptacles A and B, of radius 10 cm, and the pipe joining them are filled with mercury, with a very light liquid (toluol) added above the mercury; this liquid partially fills the capillaries of radius 1 mm joining the receptacles A and B with the balloons *1* and *2*. Describe the measurement process of the variations of g by means of this apparatus. What smallest variation of g can be registered by the gravimeter, if it is known that the changes in the difference between the horizontal displacements of the toluol level in the capillaries may reach the magnitude of a few millimeters (<1 cm) in the different locations where the measurements take place? The temperature during different measurements is always the same; the density of mercury is $\varrho = 13{,}5 \cdot 10^3$ kg/m^3.

Yu. M. Bruk

P889. The sun is at the angle φ above the horizon. At what angle to the Earth's surface must a body be thrown (in the vertical plane passing through the sun) so that the shadow of the body covers the longest possible path along the Earth surface?

V. A. Nakhshin

P890. The crystallic structure of iron at temperature 910 °C consists of elementary cube-shaped cells with edge $a_1 = 2{,}87 \cdot 10^{-10}$ m. The ferrum atoms are located at the vertices of the cube and in its centre (figure Рис. 3). Such a state of iron — with "volume-centered" cubic structure — is called α-iron (Fe_α). At temperatures above 910 °C the iron crystalls become

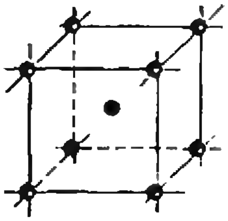


Рис. 3

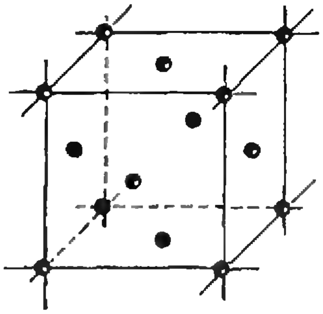


Рис. 4

"face-centered" cubes of edge $a_2=3{,}63\cdot10^{-10}$ m, the Fe atoms now being located at the vertices of the cube and at the centres of its faces (figure Рис. 4). Iron in this state is called γ-iron (Fe_γ). Is the density of iron the same in these two states? The relative atom mass of iron is $\mu=55{,}847$.

I. M. Nizamov

P891. How will the electric capacity of a conducting sphere change if we make a dent in it?

R. L. Enfiadjan

P892. A ray of light falls along a diameter on a glass ball of radius R. At the distance r from the ball's centre the ray is dissipated uniformly in all direction by a little air bubble in the glass. Find how the amount of light leaving the glass ball depends on r. The refraction coefficient of glass is n. Light losses within the glass are negligible.

A. A. Lapides

Решения задач

М861 — М865; Ф873 — Ф877

М861. *Докажите, что из любых n чисел можно выбрать несколько (быть может, одно) так, что сумма выбранных чисел отличается от ближайшего к ней целого числа не более, чем на $1/(n+1)$.*

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — данные числа, $b_1=\{a_1\}$, $b_2=\{a_1+a_2\}, \ldots, b_n=\{a_1+a_2+\ldots+a_n\}$ ($\{x\}$ — дробная часть x). Все числа $b_1, \ldots, b_n$ лежат в промежутке $[0;1[$. Разделим его на $n+1$ равных промежутков $\Delta_0=[0;1/(n+1)[$, $\Delta_1=[1/(n+1);\ 2/(n+1)[, \ldots$ $\ldots, \Delta_n=[n/(n+1);1[$. Если хотя бы одно из чисел b_i попадет в один из крайних промежутков Δ_0 или Δ_n, то утверждение задачи, очевидно, будет выполнено для суммы $a_1+\ldots+a_i$. В противном случае в $n-1$ промежутках $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ будет расположено n точек $b_1, \ldots, b_n$, поэтому хотя бы в одном из них окажутся две точки, b_k и b_l. Пусть $k>l$, тогда

$$a_{l+1}+a_{l+2}+\ldots+a_k=(a_1+\ldots+a_k)-(a_1+\ldots+a_l)=$$
$$=\text{целое число}+(b_k-b_l),$$

то есть $a_{l+1}, \ldots, a_k$ — искомые числа (ибо $|b_k-b_l|<1/(n+1)$).

Легко видеть, что число $1/(n+1)$ в условии уменьшить нельзя — достаточно взять все числа равными $1/(n+1)$.

С. Ю. Оревков

◆

М862. *а) Внутри данного правильного треугольника укажите множество всех точек M таких, что расстояния от M до его сторон сами служат длинами сторон некоторого треугольника.*
б) Внутри данного правильного тетраэдра укажите множество всех точек M таких, что расстояние от M до граней тетраэдра служат длинами сторон некоторого четырехугольника.

а) Ответ: искомое множество — это внутренность треугольника, ограниченного средними линиями данного треугольника (рис. 1).

Пусть $d_a=d_1$, d_b, d_c — расстояния от точки M до сторон BC, CA, AB данного правильного треугольника ABC. Для существования треугольника со сторонами длин d_a, d_b и d_c необходимо и достаточно выполнения трех неравенств: $d_a<d_b+d_c$, $d_b<d_a+d_c$ и $d_c<d_a+d_b$, или $d_a<d/2$, $d_b<d/2$, $d_c<d/2$, где $d=d_a+d_b+d_c$, но d — это длина высоты треугольника ABC (если l — длина стороны треугольника, то $ld/2=(ld_a+ld_b+ld_c)/2=S_{MBC}+S_{MCA}+S_{MAB}=S_{ABC}$).

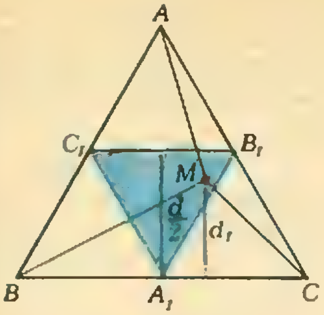


Рис. 1.

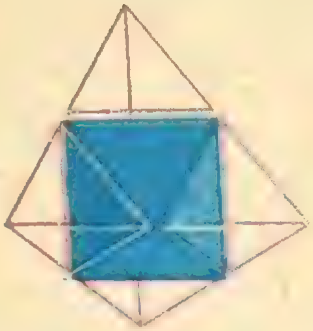


Рис. 2.

Поэтому условие $d_a<d/2$ определяет в треугольнике ABC трапецию BCB_1C_1, отсекаемую от него средней линией B_1C_1 (сам отрезок B_1C_1 при этом исключается). Аналогичные трапеции задаются и двумя другими неравенствами, а пересечение этих трех трапеций и есть внутренность треугольника $A_1B_1C_1$.

б) Ответ: искомое множество — это внутренность правильного октаэдра с вершинами в серединах ребер данного тетраэдра (рис. 2).

Повторяя ход решения задачи а), разобьем данный тетраэдр T на четыре тетраэдра, основаниями которых служат грани данного, а вершины расположены в точке M. Пусть d_1, d_2, d_3, d_4 — их высоты, то есть расстояния от точки M до граней тетраэдра T, тогда сумма их объемов равна $(d_1S+d_2S+d_2S+d_4S)/3$ (где S — площадь грани данного тетраэдра), следовательно, $d=d_1+d_2+d_3+d_4$ — это высота тетраэдра T. Для того чтобы из отрезков длин d_1, d_2, d_3, d_4 можно было составить четырехугольник, каждая из этих длин должна быть меньше $d/2$ (скажем, неравенство $d_1<d/2$ эквивалентно $d_1<d_2+d_3+d_4$). Очевидно, каждое из неравенств «отсекает» от тетраэдра вдвое меньший тетраэдр (тетраэдры с красными ребрами на рисунке 2). После четырех «отсечений» останется правильный октаэдр.

Обратно, для любой точки внутри этого октаэдра будут выполнены неравенства $d_i<d/2$, поэтому из отрезков длин d_1, d_2, d_3, d_4 можно составить четырехугольник. (Действительно, пусть $d_1>d_2>d_3>d_4$; интервалы $]d_1-d_2, d_1+d_2[$ и $]d_3-d_4, d_3+d_4[$ содержат общую точку l, так как $d_1-d_2<d_3+d_4<d_1+d_2$; теперь нужный четырехугольник можно получить, приставляя друг к другу треугольники со сторонами d_1, d_2, l и d_3, d_4, l.)

Э. А. Ясиновый

М863. *В каждой клетке доски $n\times n$ стоит по фишке. Можно ли переставить их так, чтобы любые две фишки, угрожавшие друг другу ходом коня, после перестановки стали угрожать друг другу ходом короля, если а) $n=3$, б) $n=6$, в) $n=4$?*

◆

а) Ответ: можно. Требуемая перестановка изображена на рисунке 1.

б) Ответ: нельзя. Для доказательства введем два «расстояния» между клетками доски: $d_1(a, b)$ — наименьшее число ходов коня, необходимых для перехода из клетки a в клетку b, $d_2(a, b)$ — аналогичное число для ходов короля. Обозначим через a' и b' клетки, на которые попадают фишки из клеток a и b после перестановки. Тогда рассматриваемое в задаче условие, очевидно, влечет неравенство $d_1(a, b)\geqslant d_2(a', b')$. Если a' и b' — противоположные угловые клетки, то (при $n=6$) $d_2(a', b')=5$, но для любых двух клеток a и b $d_1(a, b)\leqslant 4$. В этом можно убедиться непосредственно, причем достаточно рассмотреть случай, когда a — угловая клетка (например, d_1-расстояние между голубыми клетками на рисунке 2 заведомо не превосходит d_1-расстояния между розовыми клетками; цифры на этом рисунке равны d_1-расстояниям от соответствующих клеток до левой нижней).

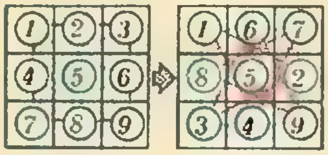


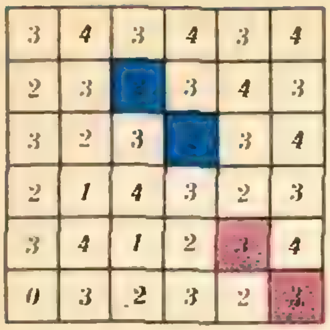
Рис. 1.

Точно так же рассматривается случай любого $n>6$: можно показать, что наибольшее значение $d_1(a, b)$ для доски $n\times n$ равно $[2(n+1)/3]$ (при $n\geqslant 5$)*), то есть меньше, чем $n-1$ — d_2-расстояние между противоположными углами.

в) Ответ: нельзя. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — поля, на которых стояли фишки, попавшие после перестановки в углы доски. Тогда $d_1(a_i, a_j)\geqslant 3$ при $1\leqslant i<j\leqslant 4$ (см. пункт б)). На рисунке 3 для трех существенно различных положений (с учетом симметрий) клетки a_1 отмечены клетки, расположенные на d_1-расстоянии 3, 4 или 5 от a_1. Пользуясь этим рисунком, нетрудно проверить прямым перебором, что ни в одном из случаев нельзя подыскать клетки a_2, a_3, a_4 с соблюдением условия $d_1(a_i, a_j)\geqslant 3$.

Аналогично доказывается, что и при $n=5$ требуемой перестановки не существует.

С. Стефанов



3	4	3	4	3	4
2	3	2	3	4	3
3	2	3	[illegible]	3	4
2	1	4	3	2	3
3	4	1	2	3	4
0	3	2	3	2	3

Рис. 2.

5		3	
		4	3
3	4		
a_1	3		5

	3		3
			4
	3		
3	a_1	3	

			4
	3		
3	a_1	3	
4	3		

Рис. 3.

◆

М864. *Назовем «красивым» разбиение треугольника на подобные ему треугольники, никакие два из которых не равны по размерам.*

а) Докажите, что для всякого прямоугольного треугольника существует красивое разбиение.

б) Можно ли устроить красивое разбиение равностороннего треугольника?*

в) Для каких неравносторонних треугольников существует красивое разбиение?

а) Красивое разбиение неравнобедренного прямоугольного треугольника (это самый простой случай) показано на рисунке 1, *а*, равнобедренного — на рисунке 1, *б*.

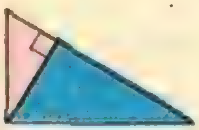


Рис. 1,*а*.

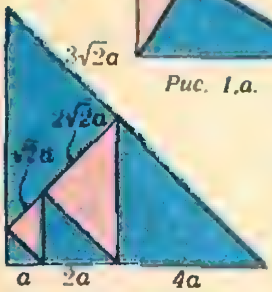


Рис. 1,*б*.

б) Ответ: нельзя. Доказательство проведем от противного. Допустим, что красивое разбиение равностороннего треугольника △ существует, и оценим число N «внутренних» сторон составляющих его треугольников, то есть сторон, лежащих внутри треугольника △. Концы этих сторон (вершины треугольников разбиения) бывают трех типов:

1-й тип — точки, лежащие внутри сторон треугольника (пример — точка A на рисунке 2, *а*); из каждой такой точки выходят 4 внутренние стороны (AB, AC, AD и AE на рисунке);

2-й тип — точки внутри треугольника △, в которых сходятся 6 треугольников разбиения; из такой точки выходят 12 внутренних сторон (рис. 2,*б*);

3-й тип — точки, лежащие внутри какой-либо стороны треугольника разбиения (рис. 2, *в*); такая точка служит концом для 6 внутренних сторон.

Обозначим число точек каждого типа через n_1, n_2, n_3 соответственно. Поскольку каждая сторона имеет два конца, число внутренних сторон равно

$$N=\frac{1}{2}(4n_1+12n_2+6n_3)=2n_1+6n_2+3n_3.$$

В то же время, каждой точке A 3-го типа можно сопоставить три внутренние стороны: сторону s, внутри которой лежит точка A, и две примыкающие к s стороны, выходящие из вершины A (на рис. 2, *в* точке A сопоставляются стороны $s=BC$, AD и AE). При этом каждая внутренняя сторона будет

---

*) См. статью Д. Коэна «Метрика коня» («Квант», 1981, № 10, с. 13).

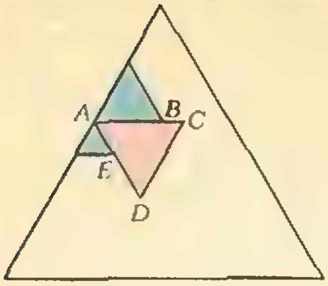


Рис. 2,а.

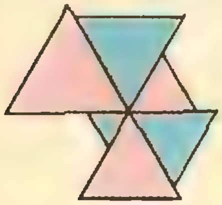


Рис. 2,б.

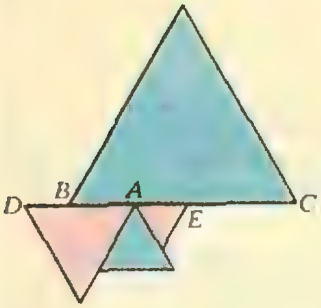


Рис. 2,в.

сопоставлена хотя бы одной точке 3-го типа — в противном случае внутри этой стороны нет вершин разбиения и сама она не содержится ни в какой большей стороне, а значит, она является общей для двух треугольников разбиения; но это невозможно, так как треугольники разбиения не должны быть равными. Отсюда следует, что $N \leqslant 3n_3$, то есть $2n_1+6n_2+3n_3 \leqslant 3n_3$, или $2n_1+6n_2 \leqslant 0$ и, таким образом, $n_1=n_2=0$. Но если на сторонах исходного треугольника $\triangle$ нет вершин разбиения ($n_1=0$), то нет и разбиения, как такового, — оно состоит из одного треугольника $\triangle$.

в) О т в е т: красивое разбиение имеется у любого неравностороннего треугольника. Его построение по-

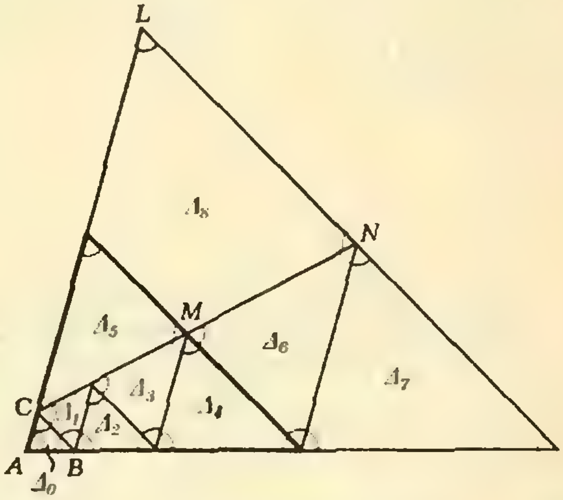


Рис. 3.

казано на рисунке 3 (равные углы отмечены на рисунке дужками одного цвета).

Удобно решать как бы обратную задачу: дополнить заданный треугольник ABC до большего подобного ему треугольника другими подобными ему и попарно различными треугольниками. Очевидно, эта задача эквивалентна исходной. Пусть для определенности $|BC|:|AC|=k>1$. Пристроим к треугольнику $\triangle_0=ABC$ подобные треугольники $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ и $\triangle_5$ в соответствии с рисунком 3. Легко видеть, что при этом коэффициент подобия треугольников $\triangle_{n+1}$ и $\triangle_n$ для $n=0, 1, 2, 3$ равен k, поэтому коэффициент подобия треугольников $\triangle_0$ и $\triangle_n$ при $n=1, 2, 3, 4$ равен k^n, а $\triangle_5$ и $\triangle_0$ — $|CM|:|AB|=(|CK|+|CM|):|AB|=k+k^3$. Отсюда ясно, что единственной парой конгруэнтных треугольников здесь могут быть только $\triangle_5$ и $\triangle_4$ — если $k+k^3=k^4$. В последнем случае дополним конструкцию треугольниками $\triangle_6$, $\triangle_7$, а $\triangle_5$ заменим на $\triangle_8=CNL$ (см. рис. 3). Снова единственной парой конгруэнтных треугольников среди $\triangle_0$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$, $\triangle_6$, $\triangle_7$ и $\triangle_8$ могут быть только $\triangle_8$ (подобный $\triangle_0$ с коэффициентом $|CN|:|AB|=k+k^3+k^5$) и $\triangle_7$ (подобный $\triangle_0$ с коэффициентом k^6). Но если $k+k^3=k^4$, то

$k+k^3+k^5>k^3+k^5=k^2(k+k^3)=k^6$, а значит $\triangle_7$ и $\triangle_8$ не конгруэнтны.

Итак, любой неравносторонний треугольник имеет красивое разбиение (на 6 или 8 треугольников).

А В Савкин

◆

М865. *Обозначим через $[a, b]$ наименьшее общее кратное целых чисел a и b. Докажите, что для любых $n+1$ чисел $a_0<a_1<\ldots<a_n$ выполнено неравенство*

$$\frac{1}{[a_0, a_1]}+\frac{1}{[a_1, a_2]}+\ldots+\frac{1}{[a_{n-1}, a_n]}\leqslant 1-\frac{1}{2^n},$$

если а) $n=2$; б) $n=3$; в) n — любое натуральное число.*

При небольших n задачу можно решить с помощью перебора.

а) Так как $[a, b]\geqslant 2a$ при $a<b$, и $a_0\geqslant 1$, $a_1\geqslant 2$, справедливы неравенства $\frac{1}{[a_0, a_1]}\leqslant\frac{1}{2}$, $\frac{1}{[a_1, a_2]}\leqslant\frac{1}{4}$ и

$$\frac{1}{[a_0, a_1]}\leqslant\frac{1}{[a_0, a_1]}+\frac{1}{[a_1, a_2]}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

б) Если $a_2\geqslant 4$, то, как и в пункте а), $\frac{1}{[a_0, a_1]}\leqslant\frac{1}{2}$, $\frac{1}{[a_1, a_2]}\leqslant\frac{1}{4}$, $\frac{1}{[a_2, a_3]}\leqslant\frac{1}{8}$, если же $a_2=3$, то $a_0=1$, $a_1=2$, $[a_0, a_1]=2$, $[a_1, a_2]=6$, $[a_2, a_3]\geqslant 6$, и

$$\frac{1}{[a_0, a_1]}+\frac{1}{[a_1, a_2]}+\frac{1}{[a_2, a_3]}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}<\frac{7}{8}.$$

в) Доказательство проведем методом математической индукции. При $n=1$ наше неравенство очевидно. Допустим теперь, что оно справедливо при $n=k$ и докажем его для $n=k+1$. Рассмотрим два случая

1) Пусть $a_{k+1}\geqslant 2^{k+1}$, тогда $[a_k, a_{k+1}]\geqslant a_{k+1}\geqslant 2^{k+1}$ и по предложению индукции

$$\left(\frac{1}{[a_0, a_1]}+\ldots+\frac{1}{[a_{k-1}, a_k]}\right)+\frac{1}{[a_k, a_{k+1}]}\leqslant$$
$$\leqslant\left(1-\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^{k+1}}.$$

2) В случае, когда $a_{k+1}<2^{k+1}$, воспользуемся тождеством $[a, b]=ab/(a, b)$, где (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b. Поскольку $b-a$ делится на (a, b), и следовательно, $(a, b)\leqslant b-a$ (при $b>a$), из этого тождества вытекает, что $1/[a, b]\leqslant(b-a)/ab=1/a-1/b$. Поэтому

$$\frac{1}{[a_0, a_1]}+\frac{1}{[a_1, a_2]}+\ldots+\frac{1}{[a_k, a_{k+1}]}\leqslant\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_1}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_{k+1}}<1-\frac{1}{2^{k+1}},$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что указанная оценка точная: при любом n равенство достигается для последовательности $a_0=1$, $a_1=2$, ..., $a_n=2^n$.

Б. М. Ивлев

◆

Ф873. *Вымпел на мачте корабля образует угол 60° с курсом корабля при его скорости 20 км/ч. Не меняя курса, корабль увеличил скорость в 2 раза, и угол стал равным 30°. Найти по этим данным скорость ветра (считая ее неизменной). При какой скорости корабля угол станет равным 90°?*

Вымпел на мачте корабля показывает направление вектора $\vec{u}+\vec{v}$, где $\vec{v}$ — вектор скорости корабля (он определяет курс корабля), $\vec{u}$ — вектор скорости ветра.

Спроектируем вектор $\vec{u}$ на направление курса корабля и на направление, перпендикулярное курсу. Пусть u_1 и u_2 — абсолютные значения соответствующих проекций. Поскольку направление ветра нам неизвестно, мы можем в общем случае записать следующие соотношения:

при скорости корабля $|\vec{v}|=20$ км/ч —

$$\frac{\pm u_2}{v\pm u_1}=\operatorname{tg} 60^\circ=\sqrt{3}, \qquad (1)$$

при скорости корабля $2|\vec{v}|=40$ км/ч —

$$\frac{\pm u_2}{2v\pm u_1}=\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad (2)$$

Решив совместно уравнения (1) и (2), найдем

$$u_1=\frac{1}{2}v, \quad u_2=\frac{\sqrt{3}}{2}v.$$

Отсюда можно найти модуль вектора скорости ветра:

$$|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}=|\vec{v}|=20 \text{ км/ч}.$$

Направление вектора $\vec{u}$ по этим данным найти нельзя, но можно сказать, что угол α, который образует вектор скорости ветра с курсом корабля, с точностью до знака определяется условием

$$\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{u_2}{u_1}=\pm\sqrt{3}.$$

В том случае, когда вымпел образует угол 90° с курсом корабля, скорость v_x корабля и скорость u ветра связаны соотношением

$$|\vec{u}|^2-|\vec{v}_x|^2=u_2^2, \text{ или } u_1^2+u_2^2-|\vec{v}_x|^2=u_2^2,$$

откуда

$$|\vec{v}_x|=u_1=\frac{1}{2}v=10 \text{ км/ч}.$$

Итак, вымпел будет составлять с курсом корабля угол 90° при скорости корабля $|\vec{v}_x|=10$ км/ч.

В. Е. Скороваров

Ф874. *Автомобиль движется вдоль прямой OO′ (рис. 1) и в точке A начинает поворачивать, не снижая скорости. В точке B автомобиль сбил придорожный столбик. Оцените скорость, с которой мог ехать автомобиль. Считайте сцепление шин с асфальтом хорошим. Руль автомобиля управляет его передними колесами.*

◆

Ясно, что мы можем оценить только максимальную скорость автомобиля, соответствующую самому крутому из возможных поворотов — когда автомобиль движется по дуге AB окружности, которая касается прямой OO'. Радиус этой окружности (см. рис. 2) —

$$R=|AC|=\frac{1}{2}|AD|; R\approx 35 \text{ м}.$$

Разворачивает автомобиль (сообщает ему центростремительное ускорение) сила трения, действующая на передние колеса в направлении, перпендикулярном скорости автомобиля. Если считать, что центр масс автомобиля расположен примерно посредине

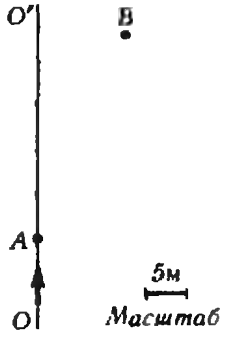


Рис 1

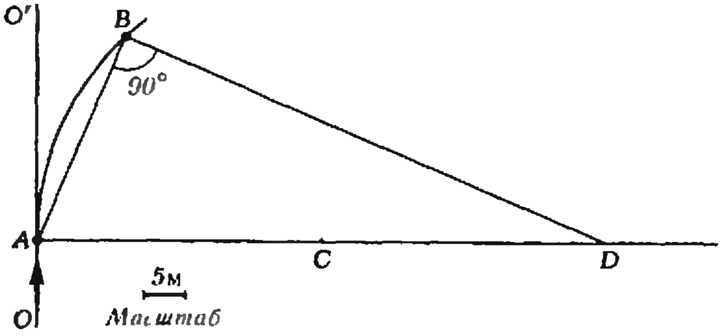


Рис 2

и поднят не очень высоко над дорогой, а ускорение автомобиля не очень велико (подумайте сами, почему это существенно), то сила нормальной реакции, действующая со стороны дороги на два передних колеса, равна половине силы тяжести, а сила трения равна $\mu\frac{mg}{2}$. Уравнение движения автомобиля при повороте —

$$\frac{mv_м^2}{R}=\mu\frac{mg}{2},$$

откуда находим максимальную скорость $v_м$:

$$v_м=\sqrt{\frac{\mu gR}{2}}.$$

Приняв $\mu=0{,}8$, получаем $v_м\approx12$ м/с≈43 км/ч.

Итак, скорость автомобиля

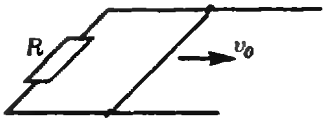
$$v\leqslant v_м\approx43 \text{ км/ч}.$$

Разумеется, это довольно грубая оценка. Более точную оценку можно было бы получить, рассматривая весь след автомобиля от точки A до точки B.

А. Р. Зильберман

◆

Ф875. *По горизонтальным параллельным рельсам, расстояние между которыми равно d, может скользить без трения перемычка, масса которой равна m (см. рисунок). Рельсы соединены резистором с сопротивлением R и помещены в вертикальное магнитное поле, индукция которого B. Перемычке сообщают скорость v_0. Найти путь, пройденный перемычкой до остановки. Как зависит ответ от направления вектора $\vec{B}$?*



При движении перемычки меняется поток магнитной индукции через контур, образуемый перемычкой, рельсами и резистором. В контуре возникает ЭДС индукции и появляется ток. В результате действия магнитного поля на ток, текущий по перемычке, перемычка будет тормозиться.

Найдем тормозящую силу F. Пусть скорость перемычки равна v. За малый промежуток времени Δt перемычка переместится вдоль рельсов на малое расстояние $\Delta x=v\cdot\Delta t$. Изменение площади контура будет равно $vd\cdot\Delta t$, поток магнитной индукции за это время изменится на $\Delta\Phi=B\cdot vd\cdot\Delta t$, в контуре появится ЭДС

$$\mathcal{E}=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=-Bvd,$$

и по перемычке, согласно закону Ома, будет течь ток $i=\mathcal{E}/R$. Сила, действующая на перемычку со стороны магнитного поля, будет равна

$$f=iBd=-\frac{B^2d^2}{R}v;$$

направлена сила f, согласно правилу Ленца, против скорости v.

Запишем теперь уравнение движения перемычки (при малом перемещении Δx):

$$ma=f=-\frac{B^2d^2}{R}v,$$

или, учитывая, что $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$, $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$,

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t}=-\frac{B^2d^2}{R}\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow m\cdot\Delta v=-\frac{B^2d^2}{R}\cdot\Delta x.$$

Мы видим, что изменение скорости перемычки пропорционально изменению ее координаты x (в начальный момент $x_0=0$). Значит, полное изменение скорости $v_{кон}-v_0=0-v_0=-v_0$ связано с изменением координаты (с полным перемещением X) соотношением

$$m(-v_0)=-\frac{B^2d^2}{R}X.$$

Отсюда находим путь X, пройденный перемычкой до полной остановки:

$$X=\frac{mRv_0}{B^2d^2}.$$

В том случае, когда вектор $\vec{B}$ составляет угол α с нормалью к плоскости рельсов,

$$X=\frac{mRv_0}{B^2d^2\cos^2\alpha}.$$

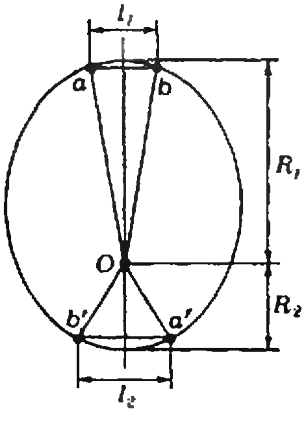
Действительно, ЭДС индукции и, следовательно, ток i, текущий по перемычке, определяются потоком магнитной индукции через контур, а поток в этом случае определяется проекцией вектора $\vec{B}$ на нормаль к плоскости контура.

А. И. Буздин

Ф876. *Два спутника движутся по одной орбите на небольшом (по сравнению с радиусом R_0 Земли) расстоянии друг от друга. Расстояние это при движении периодически меняется от l_1 до l_2. Определите минимальное и максимальное удаление спутников от центра Земли, если период обращения спутников равен T.*

◆

Согласно второму закону Кеплера площади, заметаемые радиусом-вектором спутника за равные промежутки времени, равны. За одно и то же время один спутник перешел из точки a в точку a', а другой спутник перешел из точки b в точку b' (см. рисунок). Значит, площади секторов $Oaba'$ и $Oba'b'$ равны. Если из этих площадей вычесть площадь сектора Oba', то получатся площади секторов Oab и $Oa'b'$, которые, таким образом, одинаковы.



Поскольку по условию задачи расстояние между спутниками мало, вместо секторов можно рассматривать соответствующие равнобедренные треугольники. Следовательно, площади треугольников Oab и $Oa'b'$ одинаковы, то есть

$$\frac{1}{2}l_1R_1=\frac{1}{2}l_2R_2. \qquad (1)$$

Согласно третьему закону Кеплера отношение квадратов периодов обращения спутника на разных орбитах равно отношению кубов больших полуосей этих орбит. Если T_0 — период обращения спутника по круговой орбите вблизи поверхности Земли, то

$$\frac{T^2}{T_0^2}=\frac{\left(\frac{1}{2}(R_1+R_2)\right)^3}{R_0^3}, \qquad (2)$$

где R_0 — радиус Земли. Период T_0 найдем из уравнения движения спутника по круговой орбите радиуса R_0:

$$m\omega^2R_0=mg,\ \text{или}\ m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2R_0=mg,$$

откуда

$$T_0^2=\frac{4\pi^2R_0}{g}.$$

Таким образом, из (2) находим:

$$R_1+R_2=2R_0\sqrt[3]{\frac{T^2g}{4\pi^2R_0}}. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) и (3), найдем максимальное и минимальное удаление спутников от центра Земли:

$$R_1 = \frac{l_2}{l_1+l_2}\sqrt[3]{\frac{2R_0^2gT^2}{\pi^2}},$$

$$R_2 = \frac{l_1}{l_1+l_2}\sqrt[3]{\frac{2R_0^2gT^2}{\pi^2}}.$$

В. Е. Скороваров

◆

Ф877. *При каких положениях точечного источника относительно тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F=1 м можно хотя бы из одной точки увидеть и изображение, и источник?*

Изображение и источник можно увидеть из одной точки, если область II (см. рис. 1) не лежит целиком внутри области I. Крайний случай — такое положение точки A, когда лучи AB и DC будут параллельны. Легко видеть, что это будет в том (и только в том) случае, когда точка A расположена на двойном фокусном расстоянии от линзы.

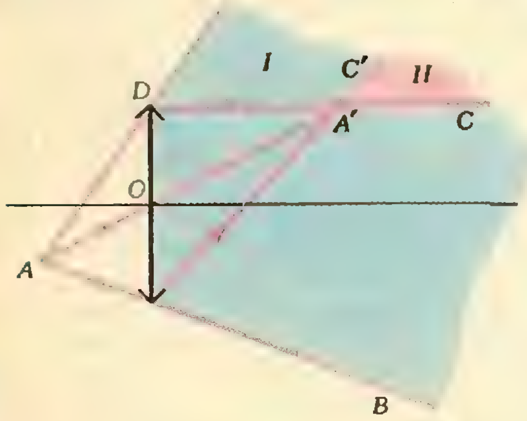


Рис. 1.

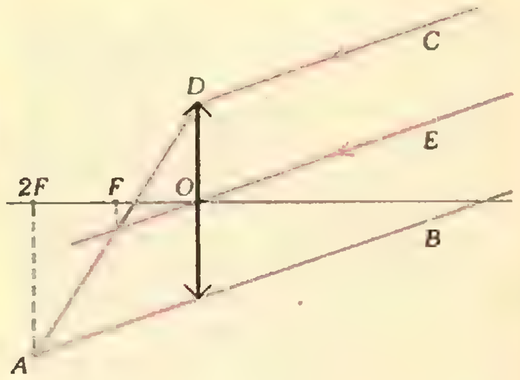


Рис. 2

Для доказательства проведем луч EO параллельно AB и CD (рис. 2) и воспользуемся тем, что лучи CD и EO после преломления в линзе пересекутся в фокальной плоскости.

Итак, изображение и источник можно увидеть одновременно, если источник расположен от плоскости линзы на расстоянии большем, чем $d=2F=2$ м. (Напомним, однако, что формула линзы применима только для узких пучков, что ограничивает справедливость ответа.)

А. Р. Зильберман

Наша обложка

Фотография, воспроизведенная на первой странице обложки, сделана в Лаборатории высоких напряжений Московского ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции энергетического института.

На переднем плане изображен *так называемый воздушный* промежуток — рогообразные электроды, разделенные воздухом. Промежуток подключен к испытательному трансформатору (он виден на заднем плане).

При напряжении выше определенного воздушный промежуток в самой нижней части, где расстояние между электродами наименьшее, пробивается, и возникает дуговой разряд. Канал дугового разряда поднимается вверх, растягивается и *обрывается. В момент обрыва* канала внизу снова происходит электрический пробой. Именно такой момент и запечатлен на фотографии.

Воздушные промежутки применяются для защиты электрооборудования от чрезмерных повышений напряжения (например, в результате каких-либо переходных процессов в электрической сети или после удара молнии).

Подробнее о возникновении различных электрических пробоев *рассказывается в номере в* статье «Что такое электрический пробой».

Ленинградским олимпиадам — 50 лет

Доктор физико-математических наук
А. С. МЕРКУРЬЕВ,
член-корреспондент АН СССР
Д. К. ФАДДЕЕВ

Пятьдесят лет тому назад, весной 1934 года, в Ленинграде была проведена первая математическая олимпиада школьников*). Тем самым было положено начало всему олимпиадному движению в СССР, которое затем разрослось вглубь и вширь, захватило все города и республики нашей страны, перекинулось на другие предметы — физику, химию, биологию. Сейчас трудно поверить, что такая естественная вещь, как школьные олимпиады, когда-то не существовала — настолько очевидными кажутся достижения олимпиадного движения в деле математического (да и не только математического) образования школьников, их профессиональной ориентации, пробуждения интереса к научной работе.

Но вернемся к истории. Вдохновителем и организатором первой олимпиады в Ленинграде был член-корреспондент АН СССР Б. Н. Делоне, предложивший систему проведения олимпиад, которая в своей основе сохранилась до настоящего времени. В оргкомитет вошли профессора ЛГУ В. А. Тартаковский, Г. М. Фихтенгольц и О. К. Житомирский. Вслед за школьным и районным турами (осень 1933 г.) состоялся общегородской тур. Его проведению предшествовала большая подготовительная работа. Оргкомитет распространил воззвание к ученикам и учителям, в котором предлагалось «не только выявить одаренных в научном отношении людей, но и вообще повысить тонус учебной работы в школе, развернуть широкую сеть школьных научных кружков и районных научных станций, провести внутришкольные научные соревнования и таким образом вовлечь в научные занятия многомиллионные массы советских школьников». Был организован цикл лекций, которые читали ведущие математики Ленинграда. В 1933 году была создана «Научная станция для одаренных школьников» — прообраз современных математических кружков. Являясь исключительно массовым мероприятием, олимпиада — благодаря своему спортивному аспекту — стимулировала приобщение многих школьников к математике. Математические олимпиады оказались необычно удачным и эффективным средством научной пропаганды. Они стали инструментом, который помогает профессиональным математикам и школьникам находить друг друга.

Надо сказать, что организаторы первых ленинградских олимпиад уделяли первостепенное внимание вопросам профессиональной ориентации. Победители олимпиад получали рекомендации для поступления, причем не только в ЛГУ, но и в различные технические вузы. Младшие школьники привлекались к работе в кружках и научных секциях. Учителя, другие работники просвещения получили прекрасную возможность сравнивать результаты своей работы, обнаруживать недочеты в преподавании, а в случае успеха — обретать признание и поддержку. По существу, олимпиады стали для системы просвещения одной из форм социалистического соревнования.

Иное дело — «спортивный» аспект олимпиад как соревнования между школьниками. Ленинградские математики — организаторы первых олимпиад — прекрасно понимали, что собственно научная деятельность требует от математика не спринтерского умения решить «на время» несколько разнородных задач, а глубокого проникновения в суть изучаемой проблемы, высокой научной культуры, тяжелого труда. Поэтому организаторы постарались, с одной стороны, исключить явления «олимпиадного профессионализма» (запретив победителям олимпиад вторично участвовать в них), и, с другой стороны, избрали такую форму проведения олимпиады, которая давала бы возможность максимально использовать ее для рекламы математики. Здесь речь идет прежде всего об устной олимпиаде. Традиция устных олимпиад чисто ленинградская. Между тем вряд ли что-либо, кроме практических сложностей, возникающих при проведении устного тура, служит аргументом в пользу письменной олимпиады (если говорить о городской олимпиаде, проходящей в университетском центре). На устной олимпиаде каждый участник имеет право на три подхода по любой из предложенных задач. Такая система дает возможность исключить описки, нелепые арифметические ошибки, неправильное понимание условия, неоправданно большие затраты времени и усилий на запись решений и т. д. Но не это главное. Главное — это общение с математиками, доброжелательное и заинтересованное, которое происходит в ходе олимпиады. Именно оно — в не меньшей степени, чем само по себе решение задач — содействует достижению основной цели: показать, что такое математика и как много в ней красоты. Многолетняя статистика свидетельствует, что на Всероссийских и Всесоюзных олимпиадах ленинградцы стабильно показывают высокие результаты. Одна из причин этого — то, что на Ленинградских олимпиадах не только соревнуются, но и учатся.

---

*) Воспоминания об этой олимпиаде одной из ее участниц, М. Л. Александровой, будут опубликованы в следующем номере журнала.

В настоящее время ленинградская олимпиада является частью Всесоюзной и включает в себя школьный, районный, городской и отборочный туры. Последние два тура — устные. В городском туре участвуют ученики 5—10 классов (по 100—150 человек от параллели), в отборочном — 8—10-классники (по 10—20 человек). Школьнику, пришедшему на городскую олимпиаду, предлагается 4 задачи. Решившие две из них переводятся в другую аудиторию, где к оставшимся двум задачам добавляются еще две. Таким образом, вариант в целом состоит из 6 задач. Такая схема, как показал опыт, обеспечивает лучшую организацию проверки на устной олимпиаде. Проверяют решения преподаватели и студенты матмеха ЛГУ под контролем членов жюри. Основным критерием при определении победителей является число решенных задач. Организационными вопросами, связанными с проведением олимпиад, занимается оргкомитет, который уже свыше 20 лет возглавляет заведующий сектором науки Ленинградского Дворца пионеров В. Я. Григошин.

Особо стоит сказать о деятельности жюри, которое занимается «математическим обеспечением» олимпиады. Основная работа жюри — подбор задач и организация проверки на самой олимпиаде. Если второе требует квалифицированности, доброжелательности и педагогического мастерства, то первое — большого, незаметного и бескорыстного труда. Надо сказать, что на ленинградских олимпиадах жюри старается придерживаться принципа «новизны» в подборе задач, то есть предлагать только те задачи, которые ранее не предлагались ни на одной олимпиаде (иначе участники окажутся в неравных условиях). Кроме того, задача должна быть элементарной, то есть допускать решение, не выходящее за рамки школьной программы. Это решение должно, по возможности, опираться на нестандартные (для школьника) идеи. Оно должно быть достаточно прозрачно, чтобы его изложение на олимпиаде не отняло слишком много времени. Наконец, самое главное — задача должна быть красивой. Смысл этого эпитета понятен каждому, кто хоть раз получал удовольствие от решения олимпиадной задачи.

За прошедшие 50 лет на ленинградских олимпиадах было предложено немало интересных задач, многие из которых знакомы читателям по публикации в «Задачнике «Кванта».

Придумывать задачи для олимпиады — дело непростое, требующее фантазии и вкуса; это своего рода композиция, которая сродни шахматной или музыкальной. Но олимпиада — это не просто набор задач. Необходимо сбалансировать вариант в целом. Он должен включать в себя задачи различной сложности и тематики, дающие возможность проявить себя людям разного темперамента и склада мышления. А ведь, кроме этого, жюри должно планировать и решение чисто технической проблемы — расслоения участников по числу решенных задач (иначе будет просто неинтересно). И совсем плохо, когда большинство уходит с олимпиады, ничего не решив. Неудивительно, что формирование одного-единственного 6-задачного варианта занимает много часов работы жюри.

Ленинградское жюри всегда состояло из энтузиастов, людей, которым не жалко потратить свое время и силы из «любви к искусству» математических олимпиад. Эти люди — преподаватели, студенты, учителя — заслуживают того, чтобы их имена были названы в юбилейной статье. Конечно, всех, кто за 50 лет внес свой вклад в деле ленинградских математических олимпиад, упомянуть невозможно. Назовем некоторых.

Возглавляли работу жюри в разные годы Б. Н. Делоне, В. А. Тартаковский, Г. М. Фихтенгольц, И. П. Натансон, Д. К. Фаддеев, В. А. Залгаллер, Г. П. Акилов, Г. И. Натансон, А. В. Яковлев, А. С. Меркурьев и другие (здесь, как и ниже, мы стараемся придерживаться хронологической последовательности). Активно участвовали в работе жюри О. К. Житомирский, М. К. Гаврин, С. П. Оловянишников, Г. В. Епифанов, Е. Н. Сокирянская, И. В. Романовский, А. Л. Вернер, Н. М. Митрофанова, М. И. Башмаков, Б. Б. Лурье, Ю. И. Ионин, Н. А. Широков, С. С. Валландер, В. Е. Лапицкий, В. П. Федотов, А. Г. Гольдберг, А. И. Плоткин, И. Я. Веребейчик, С. В. Фомин, М. Н. Гусаров, С. Е. Рукшин, А. Б. Александров.

Следует упомянуть о преемственности в работе ленинградского жюри. Едва ли не все его члены в послевоенные годы — это бывшие победители олимпиад. Может быть поэтому ленинградскому олимпиадному движению удалось за 50 лет сохранить своеобразие, свои математические традиции.

Для большинства бывших победителей олимпиад математика стала профессией. Некоторые из них добились больших успехов. Например, среди ленинградцев — победителей международных олимпиад — доктор физико-математических наук Ю. Матиясевич, решивший знаменитую 10 проблему Гильберта, и лауреат премии Ленинского Комсомола доктор физико-математических наук А. А. Суслин.

Наряду с олимпиадами в Ленинграде появились и получили распространение другие формы деятельности, направленной на повышение уровня математического образования школьников. В 1937 году начали работу математические кружки Дворца Пионеров, в 1962 году — Юношеская математическая школа при ЛГУ. В 1964 году была открыта физматшкола-интернат при университете, которая, наряду с ленинградскими школами № 30 и № 239, играет в последние десятилетия ведущую роль в физико-математической подготовке школьников. Ежегодно проводятся математическая конференция школьников, летние математические школы, матбои между физматшколами и т. д.

Прошедшие 50 лет показали, что математические олимпиады являются важным звеном в математическом образовании школьников. Без сомнения, они откроют еще немало талантов, которые так нужны нашей науке и народному хозяйству.

Турнир памяти Ф. А. Бартенева

В г. Евпатории организован физико-математический турнир памяти Ф. А. Бартенева. Федор Александрович Бартенев — Кавалер ордена Ленина, заслуженный учитель школы УССР, депутат городского Совета народных депутатов нескольких созывов, был замечательным учителем, много сделавшим для развития математического образования, как в г. Евпатория, так и во всей стране.

Не все ученики Бартенева стали математиками, но все они научились логично мыслить, через математику они постигли культуру мышления. Статьи и задачи Ф. А. Бартенева неоднократно публиковались на страницах журналов «Математика в школе» и «Квант», а в 1976 году в издательстве «Просвещение» вышла его книга «Нестандартные задачи по алгебре».

Физико-математический турнир, который решено проводить ежегодно, — дань памяти человеку, жившему делами молодежи.

Турнир проводится в три этапа среди учащихся 5—7 классов г. Евпатории. На первом — заочном, школьники решают задачи, публикуемые в городской газете «Евпаторийская здравница».

Второй этап — соревнование команд шести школ, показавших лучшие результаты на первом этапе. К участию на этом этапе привлекаются школьники и других школ, показавшие лучшие результаты на первом этапе.

Третий этап — конкурс двух лучших школьных команд по итогам первых двух этапов.

Приведем несколько задач первого этапа турнира 1984 года.

3. Почему руки моют с мылом?

6. Можно ли пользоваться промокательной бумагой в условиях состояния невесомости?

8. Существуют ли в трамвае точки, которые движутся не вперед, а назад?

10. Вода при замерзании увеличивается на 1/9 своего объема. На какую часть своего объема уменьшается лед при превращении в воду?

11. В стозначном числе 12345678901234567890l ... 7890 вычеркнули все цифры, стоящие на нечетных местах. С полученным числом проделали ту же операцию и т. д. Какая цифра была вычеркнута последней?

А. П.

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском государственном университете им. Ленинского комсомола работает заочная школа (ЗШ) для учащихся 8—10 классов общеобразовательных школ Сибири, Дальнего Востока, Средней Азии и Урала.

Основная задача ЗШ — оказать помощь в формировании и развитии у учащихся интереса к естественным наукам.

В ЗШ 5 отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 8—10 классов; на биологическое отделение — 9—10 классов; на экономическое отделение — только учащиеся 10 класса.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ принимаются также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки, которые могут быть организованы в школе по инициативе преподавателей. Руководители каждого кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель кружка сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью школы.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ, а также дополнительный методический материал. Работы учащихся-заочников проверяют в ЗШ, а членов кружков — его руководители. По желанию руководителей работы членов кружков (или части их) могут проверяться в ЗШ.

Лучшие учащиеся 8—9 классов ЗШ приглашаются в Летнюю школу при НГУ, которая работает с 1 по 22 августа. Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, знакомятся с университетом и институтами Академгородка, организованно отдыхают и развлекаются. В период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ. В работе этих школ принимают участие также руководители кружков.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ЗШ заявление, написанное на почтовой карточке, с просьбой выслать первое задание. В заявлении необходимо указать

а) свою фамилию, имя, отчество;
б) класс, в котором Вы учитесь;
в) отделение ЗШ, на котором желаете учиться;
г) подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения.

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и методические материалы.

Заявление о приеме на физическое или математическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решением соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 15 октября*. Для поступления может оказаться достаточным хорошо решить одну — две задачи.

Работы отсылайте только простой бандеролью. В тетрадь с решениями вложите листок бумаги размером 6×10 см с написанным на нем Вашим адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем отсылать ответ).

Наш адрес: 630090, Новосибирск, 90, ул. Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ.

Первое задание по физике

Задачи 1—5 предназначены для восьмиклассников, 5—11 — для девятиклассников и 9—12 — для десятиклассников.

1. Отверстие в стенке цилиндрического сосуда с водой закрыто пробкой квадратного сечения со стороной a (рис. 1). Верхний край пробки находится на расстоянии h от уровня воды в сосуде. Найдите силу, с которой вода выталкивает пробку. Плотность воды ϱ.

2. В U-образную трубку налиты одинаковые по объему количества воды и керосина, так что длина столбика каждой жидкости $l=10$ см. Найдите разность уровней жидкостей. Плотность воды $\varrho_в=1000$ кг/м^3, керосина $\varrho_к=800$ кг/м^3.

3. Электрическая плитка, работающая от сети с напряжением $U_0=220$ В, расходует мощность $P_0=600$ Вт. Какой будет мощность плитки, если ее включить в сеть с напряжением $U=127$ В? Сопротивление плитки можно считать постоянным.

4 Проволока длины l имеет сопротивление R. Концы проволоки замкнули и получившееся кольцо подсоединили к клеммам так, что одна из частей кольца имеет длину a. Найдите сопротивление цепи между клеммами.

5. Обруч подвесили на гвоздь, вбитый в стену, и отклонили в сторону (в вертикальной плоскости). В какую точку стены нужно вбить еще один гвоздь так, чтобы обруч, опираясь и на него

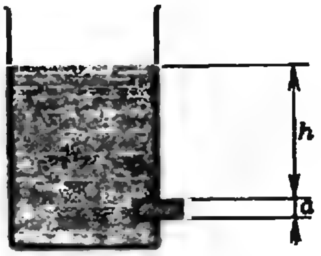


Рис. 1.

тоже, оказался в равновесии? Укажите все такие точки.

6. Мяч, брошенный мальчиком вниз со скоростью v, отскочив от пола, достигает потолка спортзала. С какой скоростью должен мальчик бросить мяч вниз с подставки высоты h, чтобы мяч опять достиг потолка?

7. Спортсмен выполняет прыжок в воду «два с половиной оборота назад прогнувшись» с десятиметровой вышки. На какой высоте над водой он окажется в момент завершения второго оборота?

8. Стержень изготовлен из большого числа чередующихся отрезков одинаковой длины, но из двух разных материалов. В одном материале скорость звука v_1, в другом v_2. Найдите среднюю скорость распространения звука в стержне.

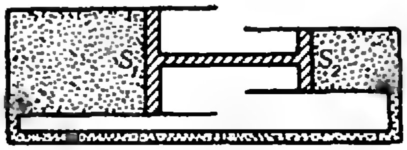


Рис. 2

9. Двигатель, развивающий мощность N, работает с КПД η. Определите секундный расход воды для охлаждения двигателя, если на входе в систему охлаждения она имеет температуру T_0, а на выходе T. Удельная теплоемкость воды c.

10. Цилиндры с сечениями S_1 и S_2 соединены трубкой и перекрыты поршнями, жестко соединенными друг с другом (рис. 2). Давление p_0 воздуха в цилиндрах равно атмосферному, а объем его — V_0. На какое расстояние сдвинутся поршни, если атмосферное давление изменится и станет равным p? Температуру считать постоянной.

11. Главная часть барометра-анероида — металлическая коробочка, из которой выкачан воздух. При изменениях атмосферного давления крышка коробочки деформируется, и ее смещение передается стрелке-указателю. Почему из коробочки нужно выкачивать воздух? Казалось бы, запаянная коробочка с воздухом тоже будет реагировать на изменение атмосферного давления, а изготовление барометра значительно упростится, если воздух не откачивать.

12. Два одинаковых конденсатора зарядили и соединили параллельно, после чего расстояние между пластинами одного из них уменьшили вдвое. Определите, каким стало при этом отношение энергий конденсаторов.

Первое задание по математике

Задачи 1—5 предназначены восьмиклассникам, 4—9 — девятиклассникам, 4, 5, 8—10 — десятиклассникам.

1. Найдите три попарно неравных натуральных числа a, b, c, удовлетворяющих уравнению $cb+ac=ab$. Можете ли вы указать бесконечное множество таких троек?

2. Какие трехзначные целые числа от зачеркивания последней цифры уменьшаются в целое число раз? (Обоснуйте ответ.)

3. Известно, что некоторый треугольник можно разрезать на два равных (конгруэнтных) треугольника. Покажите, что этот треугольник равнобедренный.

4. Имеется 1984 гири массой 1 г, 2 г, ..., 1984 г. Разложите эти гири на четыре равные по массе группы.

5. Сколько существует попарно неравных (неконгруэнтных) треугольников периметра 100, все стороны которых имеют целочисленную длину?

6. Докажите, что числа 33! и 35! дают одинаковые остатки при делении на 41. (Напомним, что $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.)

7. Найдите сумму $\lg\frac{10}{21}+\lg\frac{21}{32}+\lg\frac{32}{43}+\ldots+$ $+\lg\frac{87}{98}+\lg\frac{98}{100}$.

8. В треугольник со сторонами a, b, c вписан полукруг с диаметром, лежащим на стороне c. Используя формулу Герона, найдите длину этого диаметра.

9. Перпендикуляр, опущенный из вершины при основании равнобедренного треугольника на противоположную сторону, делит ее в отношении $m:n$. Найдите тангенсы углов треугольника.

10. Найдите сумму четвертых степеней корней уравнения $x^2-6x+1=0$.

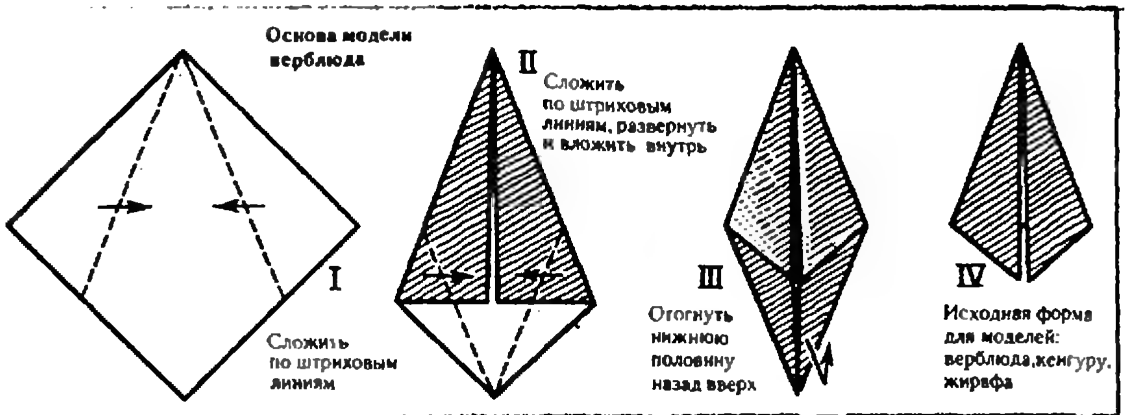
Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия в школе проводятся в форме лекций, читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых познакомиться с основными направлениями современной физики. Для десятиклассников организуются факультативные занятия по математике. Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться, начиная с 26 сентября. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (с приложением двух фотокарточек размером 3×4 см). Заявление можно подавать с 5 по 24 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов.

Адрес ВФШ: 119899, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 139-26-56.



Основа модели верблюда

I. Сложить по штриховым линиям

II. Сложить по штриховым линиям, развернуть и вложить внутрь

III. Отогнуть нижнюю половину назад вверх

IV. Исходная форма для моделей: верблюда,кенгуру, жирафа

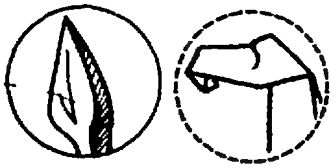
Оригами

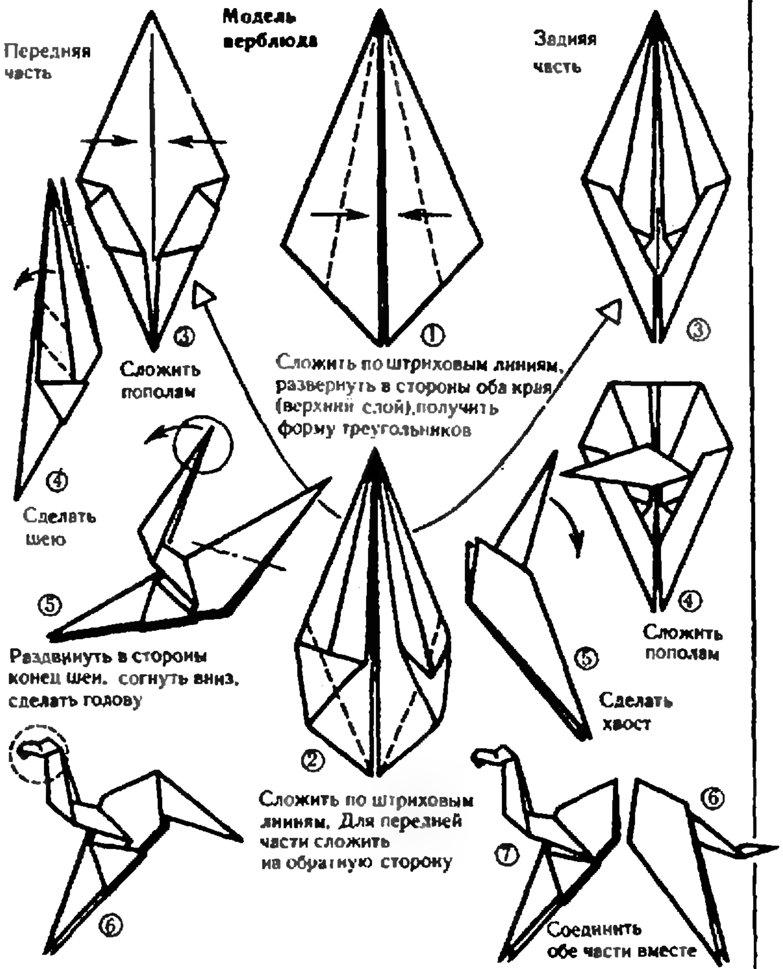
(складывание фигурок из бумаги)

А. И. КЛИМАНОВ

Складывание фигур животных и птиц из бумаги — древнее искусство, наиболее популярное, пожалуй, в Японии, где оно называется «оригами». Все фигуры складываются из цельных прямоугольных листов бумаги (одного или двух), без помощи ножниц или клея (клей применяют разве что для скрепления «половинок» фигур, составленных из двух листов). Порядок изготовления фигурок показан на чертежах-схемах.

Начальная стадия работы над фигурами показана на чертежах, обозначенных римскими цифрами. Руководствуясь приведенными чертежами, сделайте модели животных и птиц, затем попытайтесь сложить (без чертежа) фигурку жирафа (см. фото на 4-ой с. обложки). Модели жирафа и верблюда делаются из двух одинаковых по размеру заготовок. Овладев «секретами» моделирования, вы научитесь составлять и свои композиции.





Модель верблюда

① Сложить по штриховым линиям, развернуть в стороны оба края (верхний слой),получить форму треугольников

② Сложить по штриховым линиям. Для передней части сложить на обратную сторону

③ Сложить пополам

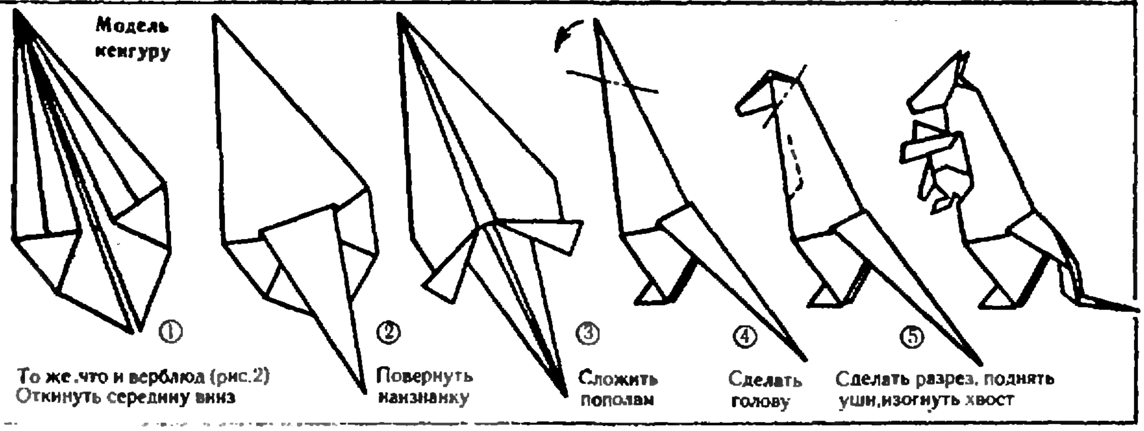
④ Сделать шею

⑤ Раздвинуть в стороны конец шеи, согнуть вниз, сделать голову

④ Сложить пополам

⑤ Сделать хвост

⑦ Соединить обе части вместе



Модель кенгуру

① То же,что и верблюд (рис.2) Откинуть середину вниз

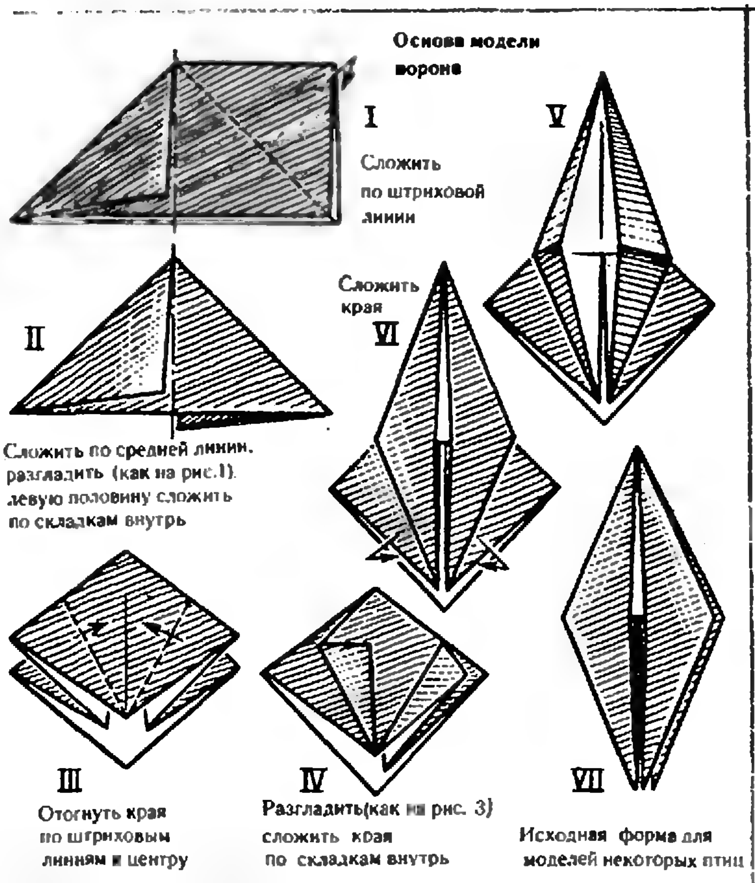
② Повернуть наизнанку

③ Сложить пополам

④ Сделать голову

⑤ Сделать разрез, поднять уши,изогнуть хвост

Основа модели ворона



I Сложить по штриховой линии

II Сложить по средней линии, разгладить (как на рис.1), левую половину сложить по складкам внутрь

III Отогнуть края по штриховым линиям к центру

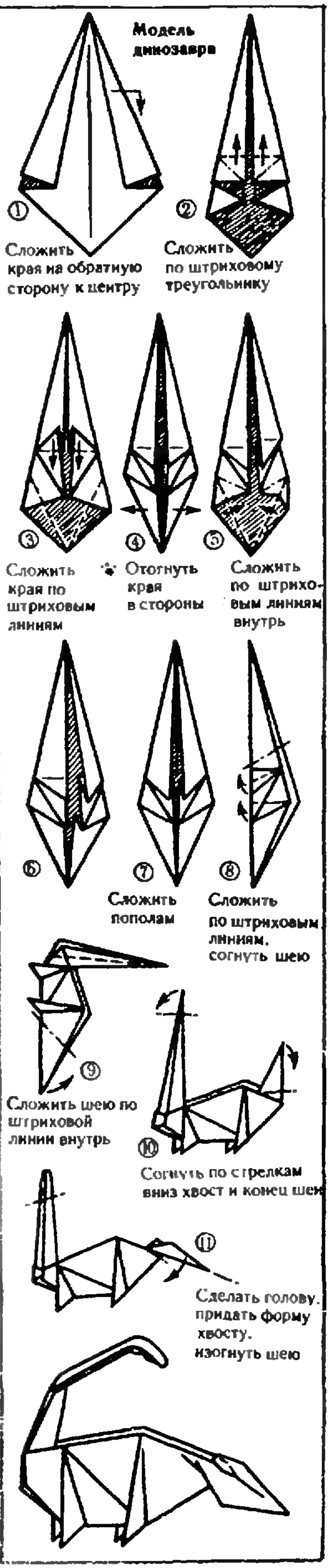
IV Разгладить (как на рис. 3) сложить края по складкам внутрь

V

VI Сложить края

VII Исходная форма для моделей некоторых птиц

Модель динозавра



① Сложить края на обратную сторону к центру

② Сложить по штриховому треугольнику

③ Сложить края по штриховым линиям

④ Отогнуть края в стороны

⑤ Сложить по штриховым линиям внутрь

⑥

⑦ Сложить пополам

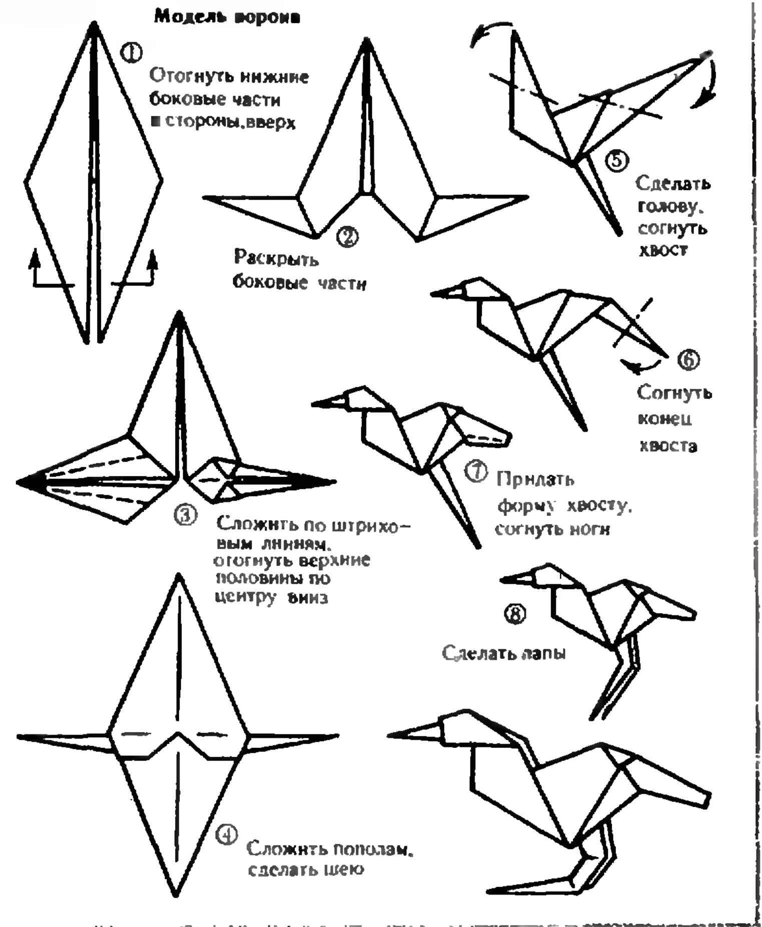
⑧ Сложить по штриховым линиям, согнуть шею

⑨ Сложить шею по штриховой линии внутрь

⑩ Согнуть по стрелкам вниз хвост и конец шеи

⑪ Сделать голову, придать форму хвосту, изогнуть шею

Модель ворона



① Отогнуть нижние боковые части в стороны, вверх

② Раскрыть боковые части

③ Сложить по штриховым линиям, отогнуть верхние половины по центру вниз

④ Сложить пополам, сделать шею

⑤ Сделать голову, согнуть хвост

⑥ Согнуть конец хвоста

⑦ Придать форму хвосту, согнуть ноги

⑧ Сделать лапы

Если бы Следопыт знал физику...

(см. «Квант» № 7)

После того как пуля вылетела из ствола, центр тяжести ружья имеет скорость $\sim\bar{v}_p$. Соответствующий импульс $\sim M\bar{v}_p$. Из формул, приведенных в статье, следует, что

$$M\bar{v}_p \sim \frac{L}{\bar{v}_п}(f\alpha - Mg).$$

В этой формуле, так же как в формуле (6) в статье, можно пренебречь вторым слагаемым в скобках; поэтому

$$M\bar{v}_p \sim \frac{L}{\bar{v}_п} f\alpha \sim \frac{L}{\bar{v}_п}\frac{m\bar{v}_п^2}{L}\alpha \sim m\bar{v}_п\alpha.$$

Кинетическая энергия ружья в момент вылета пули — величина порядка

$$\frac{(M\bar{v}_p)^2}{M} \sim \frac{m^2\bar{v}_п^2\alpha^2}{M}.$$

Строго говоря, мы должны были бы использовать в наших рассуждениях понятие о кинетической энергии вращательного движения вокруг точки A. Однако энергия вращения ружья по порядку величины совпадает с энергией поступательного движения тела массы M со скоростью $\bar{v}_p$. Поэтому, «забывая» о вращении, мы не делаем ошибки в наших порядковых оценках.

После вылета пули ружье продолжает двигаться по инерции до тех пор, пока вся кинетическая энергия не перейдет в потенциальную. Сделаем еще одно упрощающее предположение (для оценок оно вполне разумно). Углы α и φ, как мы уже знаем, малы, а интересует нас угловое отклонение Ψ, связанное с движением ружья по инерции. Мы будем сейчас считать для простоты, что линия $O'B'$ вначале практически горизонтальна (на рисунке 1 для ясности углы изображены бóльшими, чем они есть на самом деле). Если и угол Ψ мал, то высота, на которую поднимется центр тяжести ружья, $\sim l\Psi$, а закон сохранения энергии можно записать в виде

$$Mgl\Psi \sim \frac{m^2\bar{v}_п^2\alpha^2}{M}.$$

Отсюда

$$\Psi \sim \frac{m^2\bar{v}_п^2\alpha^2}{M^2gl}.$$

Полное отклонение ружья при выстреле будет определяться суммой углов φ и Ψ.

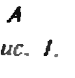


Рис. 1.

Запишем еще соотношение

$$\frac{\psi}{\varphi} \sim \frac{\alpha m\bar{v}_п^2}{MgL}.$$

Подставив сюда уже известные нам числовые значения всех параметров и $\bar{v}_п \sim 8\cdot10^2$ м/с, мы получим, что $\frac{\psi}{\varphi} > 25$. Это означает, что угол ψ по крайней мере на порядок превосходит угол φ. Это, по-видимому, и объясняет, почему автор «Кожаного чулка» считал большую отдачу ружья при выстреле причиной неточного попадания. Мы убедились сейчас в том, что существенно большее отклонение ружье испытывает уже тогда, когда пуля улетела. Величина же угла ψ никак не связана с точностью стрельбы.

Момент инерции в геометрии

(см. «Квант» № 7)

2. Указание: а) выразите длины отрезков, на которые стороны треугольника делятся точками A_1, B_1, C_1, через длины сторон a, b, c; покажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через центр масс системы $(p-a)A$, $(p-b)B$, $(p-c)C$, где $p=(a+b+c)/2$; б) примените теорему о группировке к системам материальных точек pA, pB, pC и $-aA$, $-bB$, $-cC$.

3. $2\frac{11}{12}$.

7. $(p-a)(p-b)c^2=abc^2-p(p-c)c^2 = abc^2-p(p-c)((p-a)+(p-b))^2 = abc^2-2S^2-p(p-c)((p-a)^2+(p-b)^2)$ (по формуле Герона); аналогично, $(p-b)(p-c)a^2=bca^2-2S^2-p(p-a)((p-c)^2+(p-b)^2)$. Сложив эти выражения с $(p-c)(p-a)b^2=cab^2-p(p-b)b^2$, получим выражение $abc(a+b+c)-4S^2-p[(p-c)\times(p-a)^2+(p-c)(p-b)^2+(p-a)(p-c)^2+(p-a)(p-b)^2+(p-b)b^2] = 2abcp-4S^2-pabc$, поскольку $(p-c)(p-a)^2+(p-a)\times(p-c)^2=(p-a)(p-c)b=abc-p(p-b)b$, а $(p-c)(p-b)^2+(p-a)(p-b)^2+(p-b)b^2 = (p-b)((p-c)+(p-a))(p-b)+b^2) = (p-b)bp$ (мы неоднократно пользовались тождеством $(p-a)+(p-b)=c$ и аналогичными, полученными перестановкой букв a, b, c).

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 7)

1. Пусть v — скорость катера в стоячей воде, u — скорость реки и t — время движения первого катера от A до B. Тогда расстояние между A и B равно $(v+u)t=S$. Второй катер за время t пройдет расстояние $L=(v-u)t$ и будет находиться от пункта A на расстоянии $S-L=2ut$. Плот же за это время пройдет путь ut, то есть будет ровно посредине между пунктом A и вторым катером.

2. Цвет накрытого контура — красный. Действительно, допустим противное — целиком закрыт синий контур и видны части двух других синих контуров. Но верхняя часть синего контура не может быть соединена ни с одной из других выступающих синих частей, так как тогда невозможно было бы замкнуть окружающий эту часть красный контур. Значит верхняя синяя дуга принадлежит одному синему контуру, а остальные три — другому. Но в этом случае три красных дуги: слева, справа и снизу, также принадлежат одному контуру, следовательно, видны куски только двух красных контуров. Получили противоречие с тем, что закрыт целиком только один синий контур, а все три красных контура имеют

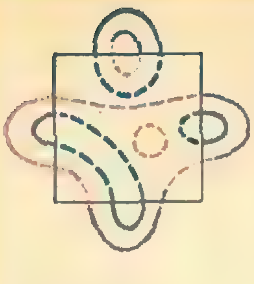


Рис. 2.

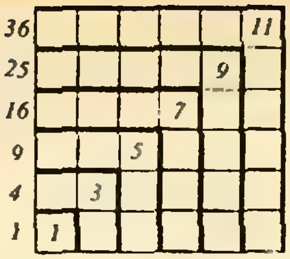


Рис. 3.

выступающие части. Значит закрыт целиком красный контур, например так, как на рисунке 2.

3. **Ответ:** 77. **Указание:** искомых шестизначных чисел будет 61, четырех и трехзначных — по 8, двузначных — 0; подсчет упрощается, если заметить, что искомые числа имеют вид $a0b0c$ или $a0b0$ или же $a0b$.

4. Будем находить количество яблок. В первом ряду имеем 1 яблоко, в первом и во втором 1+3=4, потом 1+3+5+7=16. Заметим, что получаемые числа являются квадратами количества складываемых рядов. Объяснение этому видно на рисунке 3: квадрат составляется из полосок, содержащих последовательные нечетные количества клеток. Каждый четный ряд содержит на один фрукт больше, чем лежащий над ним нечетный ряд, поэтому количество груш равно квадрату числа рядов, в которых они лежат плюс еще столько, сколько рядов. Естественно, что ответ на задачу зависит от того, четно ли число рядов или нечетно. Если n — четное число $n=2k$, то на витрине лежит k яблок и k^2+k груш. Если же n — нечетное число $n=2k+1$, то количество яблок будет $(k+1)^2$, количество груш останется равным k^2+k.

5. Зимой снег на тропинке утаптывается, уровень тропинки ниже уровня окружающего пушистого снега, в который нога глубже проваливается. В углубление ветер наметает снег, который тоже утаптывается. Таким образом, каждый снегопад с ветром увеличивает количество снега на тропинке больше, чем вокруг нее. Весной же обледенелая тропинка тает медленнее, чем окружающий рыхлый снег.

Две задачи о числах Фибоначчи

(см. «Квант» № 7, с. 14)

1. **Решение.** Возьмем частное двух любых различных, отличных от единицы, чисел Фибоначчи f_k/f_n. Очевидно, можно рассматривать только $n\geqslant 3$, $k>n$. Пусть $m=k-n$, тогда $f_k/f_n=f_{n+m}/f_n$. Покажем, что для любых таких n и m выполняется условие $f_{m+1}<(f_{n+m}/f_n)<f_{m+2}$. Действительно (мы пользуемся задачей 6 из статьи И. М. Яглома*)

$$\frac{f_{n+m}}{f_n}-f_{m+1}=\frac{f_{n+m}-f_nf_{m+1}}{f_n}=\frac{f_{n-1}f_m}{f_n}>0.$$

$$\frac{f_{n+m}}{f_n}-f_{m+2}=\frac{f_{n+m}-f_nf_{m+2}}{f_n}=$$

$$=\frac{f_{n-1}f_m+f_nf_{m+1}-f_n(f_{m-1}+f_m)}{f_n}=$$

$$=\frac{(f_{n-1}-f_n)f_m}{f_n}=-\frac{f_{n-2}f_m}{f_n}<0.$$

Таким образом, частное двух любых различных, отличных от единицы, чисел Фибоначчи находится между двумя соседними числами Фибоначчи, а между ними нет и не может быть других чисел Фибоначчи.

2. **Указание.** Воспользуйтесь задачами 6 и 9 из статьи И. М. Яглома.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. П. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров,
Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:
И. Б. Горская, М. Б. Дубах, В. М. Ильин, А. И. Климанов,
В. С. Коваль, А. П. Лисицын, С. Ф. Лухин, А. К. Малкин,
Ю. П. Мартыненко, И. А. Смирнов, И. Е. Смирнова,
Е. С. Шабельник
Фото представили:
В. И. Ободзинский, Б. Л. Раскин, В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Б. Румянцева

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54
Сдано в набор 20.6.84
Подписано к печати 19.7.84
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Усл. кр.-от. 28,3
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,28. Т-14882
Цена 40 коп. Заказ 1612 Тираж 172 798

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

КАСПАРОВ — ПОБЕДИТЕЛЬ МАТЧЕЙ ПРЕТЕНДЕНТОВ

На шахматной страничке в «Кванте» № 5 за 1981 год мы пытались выяснить мнение выпускника бакинской школы Г. Каспарова о возможности матча Карпов — Каспаров. Тогда он мечтал только о межзональном турнире. Теперь же Гарри — претендент № 1.

О победах Каспарова в четвертьфинальном и полуфинальном матчах претендентов мы уже рассказывали, осталось ознакомить вас с его партиями из финального матча, который нынешний соперник чемпиона мира считает своим высшим творческим достижением. Четыре победы (при девяти ничьих) одержал Каспаров над Смысловым в этом матче. Перед вами первая из них (в третьей партии).

Г. Каспаров — В. Смыслов
Ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. Kf3 Kf6 3. c4 c6 4. Kc3 e6 5. Cg5 Kbd7. Возникла так называемая кембридж-спрингская защита. Теория расценивает ее как чересчур пассивную для черных, и данная встреча не меняет оценки. **6. e3 Фa5 7. cd K:d5 8. Фd2 Cb4 9. Лc1 0—0 10. Cd3 e5 11. 0—0 ed 12. ed f6 13. Ch4 Лd8 14. a3 C:c3 15. bc Kf8 16. Cg3 Ce6 17. Лfe1 Cf7 18. c4 Ф:d2 19. K:d2 Kb6 20. Kb3 Ka4 21. Cf1 Лd7 22. Ka5 Ke6 23. d5 Kd4 24. dc K:c6 25.K:c6 bc 26.c5!** Каспаров безупречно ведет поединок. Последний ход открывает перспективы сразу обоим слонам белых — один пристроится на d6, другой в скором времени решит судьбу партии, проникнув в тыл противника через a6. **26...Лe8 27. Л:e8+ C:e8 28. Cd6 Cf7.** Ускоряет развязку. Следовало продолжать 28...Лb7, хотя и в этом случае после 29. Лc4 у черных немало трудностей. **29. Лb1 Cd5 30. Лb8+ Kpf7 31. Лf8+ Kpe6 32. g3 g6 33. Ca6! Л:d6 34. cd Kp:d6 35. Л:f6+ Kpe5 36. Лf8 c5 37. Лe8+ Kpd4 38. Лd8 Kpe5 39. f4+ Kpe4 40. Cf1 Cb3 41. Kpf2 Kb2. Черные сдались.** Классический образец реализации преимущества двух слонов над слоном и конем.

Четвертую партию Каспаров выиграл в загадочном стиле. Хотя белые неприхотливо разыграли дебют, они не сделали ничего такого, чтобы их позиция внушала опасения. Но скачок конем на край доски внес сумятицу в лагерь белых фигур.

В. Смыслов — Г. Каспаров
Ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. Kf3 Kf6 3. c4 e6 4. Kc3 Ce7 5. Cf4 0—0 6. e3 c5 7. dc C:c5 8. Ce2 dc. Чего только не бывает в шахматах! Такой простой ход, а в гроссмейстерской практике встречается впервые. Известное продолжение 8...Kc6 ведет к приятной для белых игре, но Каспаров уготовил для этого коня другое место. **9. C:c4 a6 10. Фe2 b5 11. Cd3 Cb7 12. 0—0 Kbd7 13. e4.** Грозит e4—e5, C:h7+ Kg5+ и т. д. Но в матче претендентов обидно получать мат... **13...Kh5! 14. Cd2.** Видимо, следовало предпочесть 14.Ce3. Через ход слон займет это поле, но дорог каждый темп. **14...Фc7 15.g3 Лad8 16.Ce3 C:e3 17.Ф:e3 Фc5 18.Лfe1 Khf6 19.a3 Kg4 20.Ф:c5 K:c5 21. Cc2 f5!** Дальнейшая часть партии протекает весьма остро, но при явном превосходстве черных. **22.Kg5 f4 23. Лad1 Л:d1 24. C:d1 Ke5 25. gf Ked3 26.b4 h6 27.bc hg 28.Лe3 K:f4 29.a4 b4 30.Ke2 Лc8 31.Cb3 Л:c5 32.K:f4 gf 33.C:e6+ Kpf8 34.Лe1 Лe5 35.Cb3 Л:e4 36.Лd1 Kpe7 37.Kpf1 a5 38.Лc1 Kpf6 39.h3 g5 40.Лc7 Лe7 41.Лc5 Лe5. Белые сдались.**

Следующая победа была одержана Каспаровым в девятой партии.

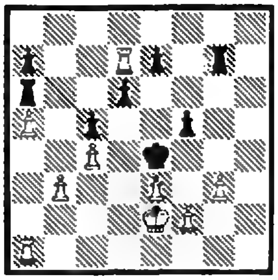
Г. Каспаров — В. Смыслов
Ферзевый гамбит

1.d4 d5 2.Kf3 Kf6 3.c4 c6 4.Kc3 e6 5.Cg5 Kbd7 6.e3 Фa5 7.cd K:d5 8.Фd2 Cb4 9.Лc1 e5. В третьей партии, как вы видели, этот ход Смыслов сделал после предварительного 9...0—0 10.Cd3. Непосредственное движение пешки «e» приводит черных к еще большим неприятностям. **10.a3 Cd6 11.de K:e5 12.K:e5 C:e5 13.b4! C:c3 14.Ф:c3!** Красивый ход, не предусмотренный Смысловым. После 14.Л:c3 K:b4 черные защищались. Теперь же ферзи разменяваются, белые получают преимущество двух слонов, которые вновь реализуют по всем правилам науки и техники, образуя проходную пешку на королевском фланге. **14...K:c3 15.ba Ke4 16.Cf4 0—0 17.f3 Kf6 18.e4 Лe8 19.Kpf2 a6 20.Ce2 Ce6 21.Лb1 Лe7 22.Лhd1 Лae8 23.Лb2 Cc8 24.Лbd2 Лd7 25.Л:d7 K:d7 26.g4 Kc5 27.Ce3 Kd7 28.g5 Ke5 29.Cd4 Kg6 30.Kpg3 Kf8 31.h4 Лd8 32.f4 Ce6 33.Cc3 Л:d1 34.C:d1 Kd7 35.f5 Cc4 36.h5 h6 37.gh gh 38.e5 Kc5 39.Kpf4 Cd5 40.Cc2 f6 41.e6 Kpg7 42.Cb4 Kb3 43.Kpe3 c5 44.Cc3.** Черные записали ход 44...Kpf8, но сдали партию без доигрывания.

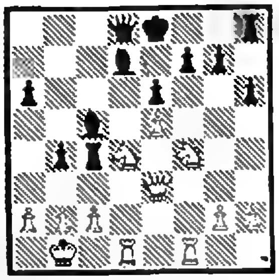
Двенадцатая партия подвела итоги дебютной дискуссии, разгоревшейся вокруг защиты Тарраша, которая четыре раза встретилась в матче. Каспаров, игравший черными, каждый раз легко преодолевал дебютные затруднения, а в этом поединике белые потерпели фиаско.

Четыре лишних очка, которые получил бакинец в этом матче, были в точности предсказаны разницей в рейтингах со Смысловым. И вот Каспаров доказал эту математическую «теорему». Теперь Каспарову предстоит сразиться за шахматную корону с Анатолием Карповым.

Конкурсные задания

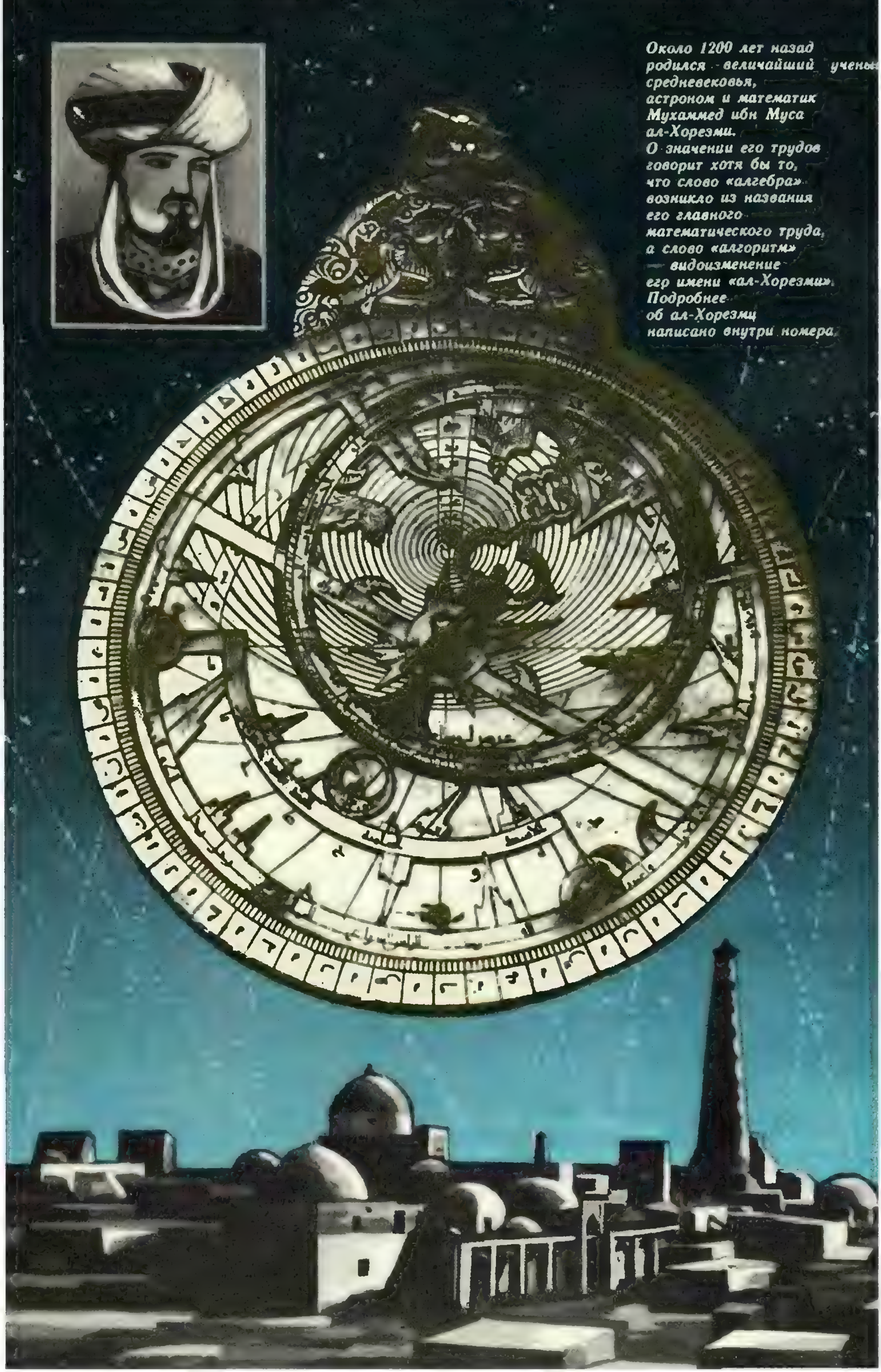


15. Белые начинают и выигрывают.



16. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 октября 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 15, 16»).



Около 1200 лет назад
родился величайший учены
средневековья,
астроном и математик
Мухаммед ибн Муса
ал-Хорезми.
О значении его трудов
говорит хотя бы то,
что слово «алгебра»
возникло из названия
его главного
математического труда,
а слово «алгоритм»
— видоизменение
его имени «ал-Хорезми».
Подробнее
об ал-Хорезми
написано внутри номера.

Цена 40 коп.

Индекс 70465

На этой фотографии представлены фигурки животных и птиц, сложенные из бумаги. При их изготовлении заготовка — прямоугольный лист бумаги — только складывается, но не разрезается и не склеивается. (Клей используется только для скрепления двух частей фигур, составленных из двух листов бумаги.) Желающие ознакомиться и приобщиться к этому увлекательному геометрическому искусству — «оригами», как называют его в Японии — могут прочитать заметку А. И. Климанова внутри номера.

НОМЕР
9

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант

9 1984

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	*И. К. Кикоин.* День знаний	*I. K. Kikoin.* Knowledge Day
3	*Л. Г. Асламазов.* Сверхпроводящие магниты	*L. G. Aslamazov.* Superconducting magnets
9	*А. П. Веселов, С. Г. Гиндикин.* Элементарные функции	*A. P. Veselov, S. G. Gindikin.* Elementary functions
15	*А. И. Прохоров.* Золотая спираль	*A. I. Prokhorov.* The golden spiral
	Новости науки	**Science news**
18	*Л. С. Марочник.* Существуют ли планетные системы у других звезд?	*L. S. Marochnik.* Do other stars have planetary systems?
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
19	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
24	Математика 8, 9, 10	Mathematics 8, 9, 10
27	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
29	Задачи	Problems
30	*А. Л. Стасенко.* Закон Архимеда	*A. L. Stasenko.* Archimedes' law
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
34	Задачи М881—М885; Ф893—Ф897	Problems M881—M885; P893—P897
37	Решения задач М866—М870; Ф878—Ф882	Solutions M866—M870; P878—P882
45	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
	Наш календарь	**Our calendar**
47	Эффект Эдисона	The Edison effect
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
49	*П. П. Горнуша.* Сведем неравенство к известному	*P. P. Gornusha.* Reducing the inequality to a known one
	Олимпиады	**Olympiads**
52	*М. Л. Александрова.* Первая математическая олимпиада	*M. L. Alexandrova.* The first mathematical olympiad
54	Избранные задачи 50-й ленинградской городской олимпиады по математике	Selected problems from the 50th Leningrad olympiad in mathematics
55	Ленинградская городская олимпиада по физике	The Leningrad olympiad in physics
	Информация	**Information**
57	VI Московский турнир юных физиков	The VIth Moskow young physicist's tournament
60	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь *(8, 48, 56)*	**Miscellaneous** *(8, 48, 56)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Последняя тренировка (*3-я с. обложки*)	Last practice session (*3rd cover page*)

Почему две одинаковые половинки яблока ведут себя столь различно — одна плавает на поверхности воды, а другая лежит на дне сосуда (см. фотографию на первой странице обложки)? Ответ на этот вопрос вы найдете в статье «Закон Архимеда».

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1984

День знаний

Дорогие друзья, читатели «Кванта»!

Поздравляю вас и в вашем лице всех школьников Советского Союза с праздником — началом учебного года, который решением Советского правительства объявлен Днем знаний.

Знание! Вдумайтесь, какой глубокий смысл содержится в этом слове. Без знания не сделать никакого дела. Старинная русская пословица гласит: «не умеючи и лаптя не сплетешь». Многие из вас, возможно, даже не знают, что такое лапти, а несколько десятков лет назад это был один из наиболее дешевых и доступных видов обуви в русской деревне.

В нашей стране человеческому знанию придается особое значение. Советский гражданин должен обладать большим запасом знаний, в самых разных областях человеческой деятельности.

У человека существует врожденный инстинкт любознательности. Потребность в знаниях присуща человеку любого возраста. В Советской стране созданы все условия для удовлетворения этой потребности. Основным источником знаний у нас служит школа. В нашем государстве провозглашен закон о бесплатном обучении в начальной, средней и высшей школах.

Великое счастье —, каждый день узнавать что-то новое в самых разных областях человеческого знания, будь то математика, физика, литература, химия и т. д. Большое удовлетворение доставляет самостоятельно найденное решение трудной задачи. Не меньше радости приносит успешно выполненное общественное поручение в масштабе класса или даже школы.

Когда я вспоминаю свои школьные годы, они представляются мне самым светлым и радостным периодом моего детства и юности. Мы с товарищами проводили бóльшую часть дня в школе, а во время каникул мечтали о том дне, когда снова попадем в пахнущий свежей краской родной класс и погрузимся в привычные школьные «будни». Мне бы хотелось, чтобы и для вас школа стала вторым домом, а учебные занятия доставляли бы вам радость познания окружающего мира.

Коммунистическая партия и Советское правительство всегда уделяли большое внимание вопросу школьного обучения. Недавно высший орган государственной власти — Верховный Совет СССР — принял постановление о реформе школьного образования.

В законе предусмотрен ряд мер, которые должны привести уровень школьного образования в соответствие с новыми требованиями, выдвинутыми развитием нашего общества. Современные наука и техника разрабатывают новейшие средства промышленного и сельскохозяйственного производства, призванные резко повысить производительность труда. Это приведет к росту выпуска продукции народного хозяйства и в результате — к дальнейшему улучшению благосостояния советского народа.

Вам, будущим выпускникам школ, предстоит участвовать в осуществлении научно-технического прогресса. Это очень увлекательная задача. Быть может, вам повезет, и вы откроете новые закономерности в явлениях природы, разработаете новые методы решения физико-математических задач или новые технологические приемы. Все зависит от вас, от вашего отношения к школьному труду.

Главный редактор журнала «Квант» академик И. К. Кикоин

Сверхпроводящие магниты

Доктор физико-математических наук
Л. Г. АСЛАМАЗОВ

Сильные магнитные поля можно получать, пропуская через катушку сильный ток. Чем больший ток течет через катушку, тем большее магнитное поле он создает. Но если катушка обладает электрическим сопротивлением, то в ней выделяется тепло. Приходится тратить огромную энергию на поддержание тока, возникают серьезные проблемы, связанные с отводом тепла (иначе катушка может расплавиться). Так, в 1937 году впервые было получено магнитное поле с индукцией 10 Тл. Но удерживать это поле удавалось только ночью, когда другие потребители электростанции, подающей ток в обмотку, были отключены. Выделявшееся тепло отводилось проточной водой, и при этом каждую секунду 5 литров воды доводились до кипения.

Именно это и ограничивает возможности получения сильных магнитных полей в обычных соленоидах.

Идея использования сверхпроводимости для создания сильных магнитных полей возникла сразу после ее открытия. Казалось бы, все, что требуется,— это намотать из сверхпроводящей проволоки катушку, замкнуть ее концы и пустить по такому контуру достаточно сильный ток. Так как электрическое сопротивление катушки равно нулю, то выделения тепла не происходит. И хотя охлаждение соленоида до температур жидкого гелия, при которых наступает сверхпроводимость, создает определенные трудности, преимущества окупили бы недостатки, если бы... магнитное поле само не разрушало сверхпроводимость.

Открытие сверхпроводимости

На рисунке 1 показана схема опыта Камерлинга-Оннеса, который был сделан в 1911 году в Лейдене. Голландские ученые изготовили катушку из свинца, подсоединили ее к источнику ЭДС и, поместив катушку в жидкий гелий, охладили ее до температуры кипения гелия (4,2 К). При этом электрическое сопротивление свинца исчезло — он перешел в сверхпроводящее состояние. Затем изменили положение ключей и замкнули катушку накоротко — по ней начал циркулировать незатухающий сверхпроводящий ток.

Этот ток создает магнитное поле, индукция которого пропорциональна силе тока. Казалось бы, чем сильнее ток в катушке, тем большее магнитное поле можно получить таким образом. Результат, однако, оказался разочаровывающим: при индукции поля в несколько сотых долей тесла соленоид переходил в нормальное состояние (у него появлялось сопротивление). Пытались делать катушки из других сверхпроводников, но и в них разрушение сверхпроводимости происходило при сравнительно малых магнитных полях. В чем же дело?

Эффект Мейснера

Разгадку такого «неудобного» поведения сверхпроводников нашли в 1933 году в Берлине в лаборатории В. Мейснера. Оказалось, что сверхпроводник обладает свойством полностью вытеснять из себя магнитное поле; в его толще индукция магнитного поля равна нулю.

Представим себе, что металлический цилиндр (кусок проволоки) охладили до низкой температуры и перевели в

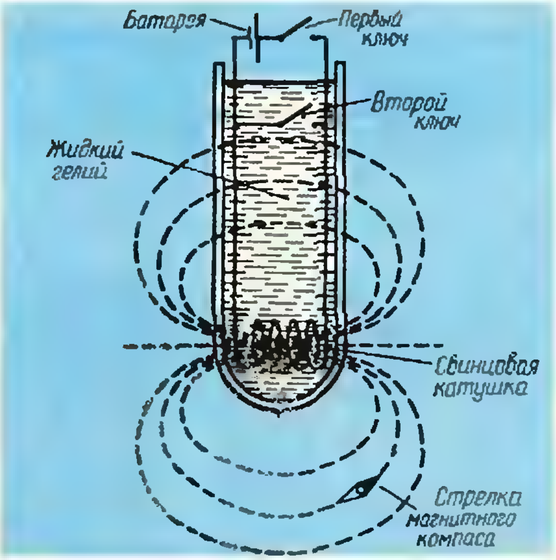


Рис. 1.

сверхпроводящее состояние. Затем включили магнитное поле с индукцией $\vec{B}_{внеш}$. По закону электромагнитной индукции на поверхности цилиндра появятся круговые токи (рисунок 2), которые создадут в цилиндре магнитное поле с индукцией $\vec{B}_{ток}$, равной по величине и противоположной по направлению индукции внешнего поля. Эти токи — сверхпроводящие и затухать не будут. Поэтому в толще сверхпроводника суммарная индукция равна нулю: $\vec{B}=\vec{B}_{внеш}+\vec{B}_{ток}=0$. Линии индукции магнитного поля в сверхпроводник не проникают.

Ну, а что, если изменить последовательность операций — сначала поместить металл во внешнее магнитное поле, а затем охладить его до сверхпроводящего состояния. Казалось бы, индукция магнитного поля при этом не меняется и нет причин для возникновения экранирующих поверхностных токов. Именно так и думал Мейснер, когда проверял расчеты Лауэ, относящиеся к первому способу проведения эксперимента.*) Думать-то думал, но все-таки решил проверить. Результат измененного эксперимента получился удивительный. Оказалось, что и в этом случае магнитное поле полностью вытесняется из сверхпроводника, не проникает в него.

Это явление назвали эффектом Мейснера.

Теперь ясно, почему магнитное поле разрушает сверхпроводимость. Ведь на возбуждение поверхностных токов тратится определенная энергия. В этом смысле сверхпроводящее состояние менее выгодно, чем нормальное состояние, когда магнитное поле проникает в металл и экранирующих поверхностных токов нет. Чем больше индукция внешнего поля, тем более сильный ток должен течь по поверхности, чтобы обеспечить экранировку. При некотором значении индукции магнитного поля сверхпроводимость обязательно разрушается, и металл переходит в нормальное состояние. Поле, при котором происходит разрушение сверхпроводимости, называется критическим полем сверхпроводника. Важно понимать, что для разрушения сверхпроводимости не обязательно внешнее магнитное поле. Ток, текущий по сверхпроводнику, сам создает магнитное поле. Когда при определенном значении тока индукция этого поля достигает значения, соответствующего критическому полю, сверхпроводимость разрушается.

Величина критического поля растет с уменьшением температуры, но даже вблизи абсолютного нуля критическое поле у чистых сверхпроводящих металлов невелико (см. график на рисунке 3). В лучших случаях оно составляет всего десятые доли тесла. Так что, казалось бы, нечего и думать о создании сильных магнитных полей с помощью сверхпроводников.

Но дальнейшее исследование сверхпроводимости показало, что выход все-таки есть. Было обнаружено, что имеется целая группа сверхпроводников, которые и в очень сильных магнитных полях сохраняют сверхпроводимость, правда, в несколько ослабленном виде.

Абрикосовские вихри

В 1957 году советский физик А. А. Абрикосов теоретически показал, что в сплавах разрушить сверхпроводимость

---

*) Об истории открытия эффекта Мейснера рассказывалось в «Кванте» № 10 за прошлый год (с. 16).

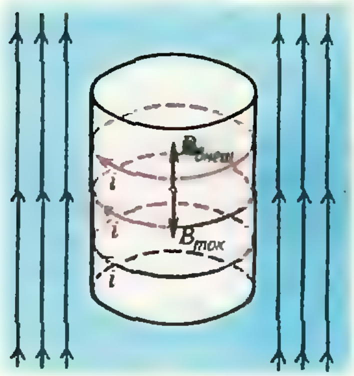


Рис. 2.

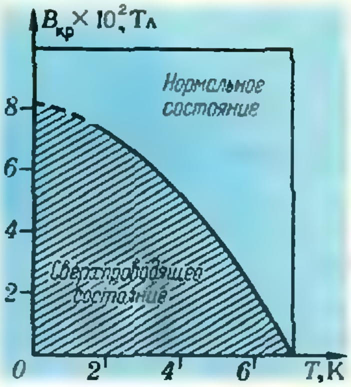


Рис. 3.

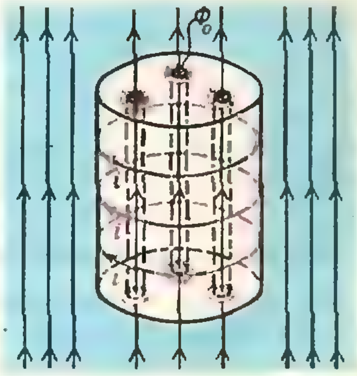


Рис. 4.

магнитным полем не так-то просто. Так же как у чистых сверхпроводников, при некотором значении индукции магнитное поле начинает проникать внутрь сверхпроводника. Но в сплавах магнитное поле обычно не сразу заполняет весь объем сверхпроводника. В толще его вначале образуются лишь отдельные сгустки линий индукции магнитного поля (рисунок 4). В каждом таком сгустке содержится строго определенная порция магнитного потока $\Phi_0 = 2\cdot 10^{-15}$ Вб. Величина Φ_0 называется квантом магнитного потока.

Чем больше внешнее магнитное поле, тем больше таких сгустков, и следовательно, и квантов магнитного потока проникает в сверхпроводник. Поэтому магнитный поток в сверхпроводнике меняется не непрерывно, а скачками, дискретно. Обычно дискретность физических величин проявляется в микромире (например, квантуется энергия электронов в атоме). Здесь мы сталкиваемся с удивительным явлением — законы квантовой механики «работают» в макроскопических масштабах.

Каждый сгусток линий индукции магнитного поля в сверхпроводнике окружен кольцевыми незатухающими токами (см. рисунок 4), которые напоминают вихри в жидкости или газе. Вот почему такие сгустки линий, окруженные сверхпроводящими токами, называют абрикосовскими вихрями. Внутри каждого вихря сверхпроводимость, разумеется, разрушена. Но в пространстве между вихрями она сохраняется! Только при очень сильных полях, когда вихрей становится так много, что они начинают перекрываться, наступает полное разрушение сверхпроводимости.

Такая необычная картина разрушения сверхпроводимости магнитным полем в сплавах впервые была открыта «на кончике пера». Однако современная экспериментальная техника позволяет наблюдать абрикосовские вихри непосредственно. Для этого на поверхность сверхпроводника (например, поперечное сечение цилиндра) наносят тончайший магнитный порошок. Частицы порошка скапливаются в тех областях, куда проникло магнитное поле. Размеры каждой области невелики и обычно составляют доли микрона. Если посмотреть на поверхность в электронный микроскоп, то видны темные пятна.

На рисунке 5 показана фотография структуры абрикосовских вихрей, полученная таким способом. Видно, что вихри расположены периодически и образуют решетку, аналогичную кристаллической решетке. Вихревая решетка треугольная (ее можно составить из повторяющихся правильных треугольников).

Итак, в отличие от чистых металлов сплавы имеют не одно, а два критических поля: нижнее критическое поле, при котором первый вихрь проникает в сверхпроводник, и верхнее критическое поле, при котором происходит полное разрушение сверхпроводимости. В промежутке между этими значениями полей сверхпроводник пронизан вихревыми линиями и находится в особом смешанном состоянии. Сверхпроводники с такими свойствами теперь называют сверхпроводниками второго рода, в отличие от сверхпроводников первого рода, в которых разрушение сверхпроводимости в магнитном поле происходит сразу, скачком.

В 50-х годах началась настоящая охота за сверхпроводящими материалами, обладающими высокими критическими полями и температурами. Какими только способами их ни получали! И дуговой сваркой, и быстрым охлаждением, и напылением на горячую подложку. Были открыты, например, сплавы Nb_3Sn и Nb_3Al, имеющие критическую температуру (температуру перехода в сверхпроводящее состояние) 18 К и верхние критические поля более 10 Тл, и многие другие сверхпроводящие соединения с рекордными критическими параметрами.

Казалось бы, проблема создания сверхпроводящих магнитов тем самым решена. Но тут природа поставила на пути исследователей еще одну преграду. Ведь для сверхпроводящего со-

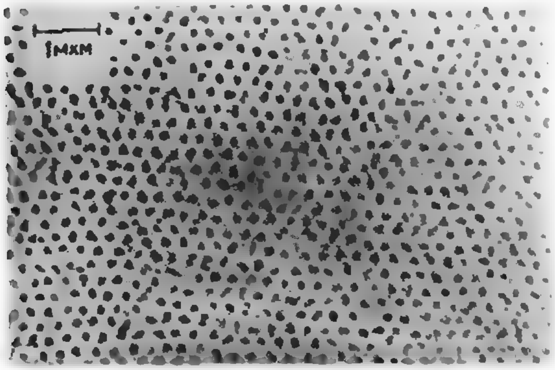


Рис. 5.

леноида необходима проволока, которая выдерживала бы не только сильное магнитное поле, но и сильный электрический ток. А это, оказывается, не одно и то же.

Что такое пиннинг?

Известно, что на проводник с током в магнитном поле действует сила. А куда приложена сила противодействия, возникающая по третьему закону Ньютона? Если, например, магнитное поле создается другим проводником с током, то на него действует равная по величине и противоположная по направлению сила (силы взаимодействия между проводниками с током определяются законом Ампера).

В нашем случае ситуация более сложная.

Когда сверхпроводник находится в смешанном состоянии и по нему течет ток, то в тех областях, где имеется магнитное поле (сердцевины вихрей), возникают силы взаимодействия между током и полем. В результате распределение тока изменяется, но и области, в которых сосредоточено магнитное поле, не остаются неподвижными, а начинают перемещаться. Абрикосовские вихри под действием тока движутся!

Сила, действующая на ток в магнитном поле, перпендикулярна индукции магнитного поля и направлению проводника. Сила, действующая со стороны тока на абрикосовский вихрь, тоже перпендикулярна индукции магнитного поля и направлению тока. Если, например, в сверхпроводнике в смешанном состоянии, показанном на рисунке 5, создать ток, протекающий слева направо, то абрикосовские вихри под действием тока начнут двигаться снизу вверх или сверху вниз (в зависимости от направления индукции магнитного поля). Но движение абрикосовского вихря сквозь сверхпроводник — это перемещение нормальной, не сверхпроводящей, сердцевины. При таком движении возникает своеобразное трение, которое приводит к выделению тепла. Значит, при протекании тока через сверхпроводник, находящийся в смешанном состоянии, все-таки появляется сопротивление и использовать такие сверхпроводники для создания соленоидов нельзя.

В чем же выход? Надо помешать вихрям двигаться, закрепить их на месте.

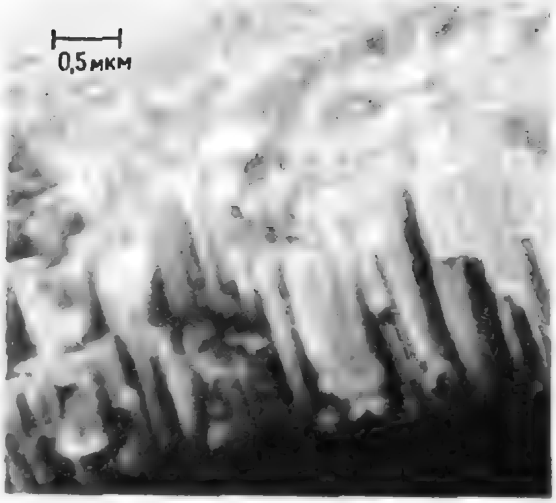


Рис. 6.

Сделать это, оказывается, можно. Надо только «испортить» сверхпроводник, создать в нем какие-то дефекты. Дефекты обычно возникают сами по себе в результате механической или термической обработки материала. На рисунке 6, например, показана электронно-микроскопическая фотография пленки нитрида ниобия (критическая температура которой 15 К), полученной напылением металла на стеклянную пластинку. Ясно видна зернистая (столбчатая) структура материала. Перескочить через границу зерна вихрю довольно сложно. Вот почему до определенного значения тока (его называют критическим током) вихри остаются неподвижными. Электрическое сопротивление в таком случае равно нулю.

Это явление называют пиннингом — от английского слова pinning, что в переводе на русский язык означает прикалывание.

Благодаря пиннингу можно получать сверхпроводящие материалы с высоким значением как критического поля, так и критического тока. При этом, если значение критического поля определяется свойствами самого материала, то значение критического тока (точнее, его плотности, то есть силы тока, приходящейся на единицу площади сечения) во многом зависит от способа приготовления, методов обработки материала. Сейчас разработана технология, позволяющая получать сверхпроводящие материалы, имеющие высокие значения всех критических параметров. Например, на основе сплава ниобия с оловом можно получить материал с плотностью критического тока в сотни тысяч ампер на квадратный сантиметр, верхним критическим полем 25 Тл и критической температурой 18 К.

Но это еще не все. Ведь важны и механические свойства материала — из него предстоит сделать катушку. Сам по себе сплав ниобия с оловом хрупкий, и такую проволоку изгибать нельзя. Поэтому сверхпроводящие соленоиды изготавливали следующим образом: порошок из ниобия и олова набивали в ниобиевую трубку. Затем трубку вытягивали в проволоку, наматывали катушку и нагревали. В результате получался готовый соленоид из сплава Nb_3Sn.

В промышленности используются более технологичные материалы, например, сплав ниобия с титаном NbTi, который обладает достаточной пластичностью. На основе этого сплава создают так называемые композиционные сверхпроводники.

В бруске меди просверливается множество дыр и туда вводят стержни сверхпроводника. Затем брусок вытягивают в длинную проволоку. Проволоку разрезают на куски и снова вводят в медный брусок. Опять вытягивают проволоку, разрезают на куски и т. д. В результате получается кабель, содержащий до миллиона сверхпроводящих жил, из которого и наматывают катушки.

Важное преимущество кабелей состоит в том, что сверхпроводящий ток распределяется в них по всем жилам. Для сверхпроводника даже медь является хорошим изолятором — при параллельном соединении медного и сверхпроводящего проводников весь ток течет по сверхпроводнику, обладающему нулевым сопротивлением. Есть и еще одно преимущество. Представим себе, что в какой-то жиле сверхпроводимость случайно разрушилась. Тогда выделяется тепло, и важно отвести его, для того чтобы предотвратить переход всего кабеля в нормальное состояние. Медь, которая является хорошим теплопроводником, успешно справляется и с этой задачей, осуществляя термическую стабилизацию. Кроме того, медь обеспечивает хорошие механические свойства кабелей.*)

Где применяют сверхпроводящие соленоиды

«Профессии» сверхпроводящих магнитов весьма разнообразны. Они играют важную роль в физике высоких энергий, помогают исследовать твердые тела, применяются в электротехнике и даже на транспорте. О проектах поездов на магнитной подушке в наше время, наверное, слышали все школьники. Сверхпроводящие соленоиды, установленные в вагоне, создают мощное магнитное поле, которое при движении поезда наводит индукционные токи в специальных рельсах. Согласно правилу Ленца магнитное поле этих токов направлено так, чтобы препятствовать приближению соленоида к рельсу, и поезд... повисает над полотном. В Японии уже создана семикилометровая экспериментальная линия, на которой поезд весом в 10 тонн мчится со скоростью более 500 (!) километров в час. В нашей стране разработан технический проект транспортной системы на магнитной подушке для города Алма-Ата.

В электротехнике использование сверхпроводящих магнитов становится целесообразным при создании электрических двигателей и генераторов гигантской мощности в сотни и более мегаватт. Сверхпроводящие обмотки в статоре создают сильное постоянное магнитное поле, в котором вращается ротор из нормального металла. При этом достигается значительное уменьшение размеров и веса установки. Такие двигатели мощностью в несколько мегаватт уже созданы и разрабатываются проекты более мощных машин. Еще бо́льшие преимущества дает применение сверхпроводящей обмотки ротора, но при реализации этой идеи возникает много технических проблем.

Мы знаем, что магнитное поле действует на движущиеся заряженные частицы (токи) силой Лоренца. Она направлена перпендикулярно скорости частицы и искривляет ее траекторию. Чем больше индукция магнитного поля, тем меньше радиус окружности, по которой движется частица в магнитном поле. Именно такой принцип магнитного «удержания» частиц применяется в ускорителях, пузырьковых камерах, установках управляемого термоядерного синтеза. Преимущества использования для этих целей сверхпроводящих магнитов, создающих сильные магнитные поля без затрат огромных энергий, очевидны. В нашей стране уже действует первая в мире сверхпроводящая система для установки термоядерного синтеза «Токамак-7» и разработана установка «Токамак-15», в которой будет накапливаться магнитная энергия в 600 миллионов джоулей. Создание устройств следующих поколений, рассчитанных на более высокие энергии, без использования сверхпроводимости просто невозможно.

---

*) В «Кванте» № [illegible] за 1982 год на обложке были показаны образцы многожильных сверхпроводящих кабелей.

При исследовании твердых тел, молекул и атомов, ядер необходимо создавать сильные магнитные поля в малых объемах, а также очень однородные магнитные поля. Сверхпроводящие магниты в таких случаях незаменимы и сейчас широко используются в физических лабораториях. Маленькие сверхсильные соленоиды в комплекте с системой охлаждения стали уже промышленной продукцией, выпуск которой все более расширяется.

Энергетика будущего — это не только новые источники энергии. Необходимо разработать новые эффективные способы хранения и передачи электроэнергии. Сверхпроводники и здесь предлагают свои услуги. Учеными Висконсинского университета (США) разработан проект системы хранения электроэнергии. Гигантская сверхпроводящая катушка диаметром более 100 метров будет установлена в специальном тоннеле, пробитом в горах. В нем с помощью холодильных установок с жидким гелием будет поддерживаться температура, близкая к абсолютному нулю. Незатухающий сверхпроводящий ток в такой катушке запасет гигантскую энергию в $4 \cdot 10^{11}$ Дж. Установку планируется создать к 1987 году.

А передача энергии без потерь по сверхпроводящим кабелям? Пока что можно только мечтать о линиях электропередач, которые, «купаясь» в жидком гелии, переносили бы электричество без потерь на огромные расстояния. Но сверхпроводимость ведь еще не сказала последнего слова. Вполне возможно, что появятся материалы, которые будут становиться сверхпроводниками при температурах жидкого азота. И тогда сразу все изменится. Фантазия станет реальностью. Хочется верить, что читателям «Кванта» предстоит это увидеть.

Традиционный осенний праздник юных математиков

В начале ноября в гостеприимной столице Аджарии — г. Батуми в очередной раз соберутся юные любители математики. Традиционный батумский праздник — давний друг и почти ровесник «Кванта»: в прошлом году он отметил свое 15-летие. Этот небольшой юбилей был отмечен рекордным числом делегаций (14), участников (более 200), докладов на конференции (43). Тем больше заслуга организаторов праздника, сумевших четко продумать и осуществить всю его весьма насыщенную программу. Среди них нужно отметить работников Министерства просвещения Аджарской АССР (Л. А. Чантурая и В. М. Цулукидзе), Батумского гороно (А. В. Готишвили), общества «Знание» (Л. У. Чхеидзе), Областного совета профсоюзов (Ш. М. Окропиридзе) и, конечно, главного инициатора и вдохновителя этого замечательного слета юных математиков — заслуженную учительницу республики Медею Илларионовну Жгенти.

За 15 лет батумцы выработали прочные традиции проведения своего праздника и многое из их опыта безусловно может быть использовано в других городах, не только на конференциях, собирающих участников из разных мест, но и на встречах нескольких школ одного города. Это касается и собственно конференции, занимающей центральное место, то есть докладов школьников и их обсуждения (с участием членов жюри — математиков и педагогов), и вечера занимательной математики, и конкурса математических стенгазет и, конечно, любимого всеми веселого математического КВНа (ведущий которого, по традиции, главный «затейник» нашего журнала А. П. Савин).

Истинно праздничному настроению участников в прошлом году весьма способствовала великолепная солнечная погода, не совсем обычная для этого времени в Батуми. Она украсила экскурсии в знаменитый ботанический сад и дельфинарий, ноябрьскую демонстрацию, на которой гостям особенно понравились живые картины, посвященные 200-летию Георгиевского трактата — союза между Грузией и Россией, прогулки по приморскому бульвару.

(Окончание см. на с. 28)

Элементарные функции

Кандидат физико-математических наук
А. П. ВЕСЕЛОВ
Кандидат физико-математических наук
С. Г. ГИНДИКИН

В этой статье рассматриваются показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Эти функции причисляют к классу элементарных функций (в который еще входит линейная функция $y=ax+b$, степенная $y=x^n$, а также всевозможные комбинации перечисленных функций — суммы, разности, произведения, частные и композиции). Эти функции называют так потому, что это были первые функции, которые изучались в математике, и долго багаж математиков не выходил за пределы этих функций.

Мы рассмотрим два основных подхода к определению показательных, логарифмических и тригонометрических функций: аксиоматический и кинематический, убедимся в том, что эти подходы приводят к тем же функциям, и обсудим их связь со «школьными» определениями.

Аксиоматическое определение показательной функции

Показательная функция a^x — это такая функция $y=f(x)$, что выполнены следующие условия:

1) f определена для всех x;

2) $f(1)=a>0$ $(a\neq 1)$; (1)

3) для любых x, y выполнено соотношение

$$f(x+y)=f(x)f(y); \tag{2}$$

4) $f(x)$ — монотонная функция.

Школьная теория показательной функции заключается в построении функции, удовлетворяющей четырем перечисленным свойствам; важно, что существует только одна функция, обладающая этими свойствами. Впрочем, в школе доказывается лишь, что 2), 3) определяют f однозначно для рациональных x; утверждение об однозначном продолжении на все x с рациональных x при условии 4) приводится без доказательства (доказательство можно найти в статье Р. К. Гордина «Что такое степень», Квант, 1981, № 2).

Такие определения объекта при помощи перечисления свойств, его характеризующих, называются *аксиоматическими*. Необходимо уяснить, что аксиоматическое определение показательной функции в сущности не отличается от школьного определения. Соотношение (2) называется *функциональным уравнением* для показательной функции. Функциональные уравнения связывают значения функций в разных точках, а их *решениями* называют функции, которые этим соотношениям удовлетворяют. В данном случае показательные функции являются решениями функционального уравнения (2) (а при выполнении указанных выше дополнительных ограничений других решений нет).

Задача 1. Докажите, что всякое решение (2), определенное для всех x, — это или тождественный нуль или всюду положительная функция (и значит всюду определенная показательная функция существует лишь для неотрицательных оснований a).

Принятый сегодня аксиоматический *подход к определению показательной* функции возник не сразу. Замечательно, что показательная функция появилась впервые как решение дифференциального уравнения. Эта история заслуживает того, чтобы ее вспомнить.

Кинематическое определение показательной функции

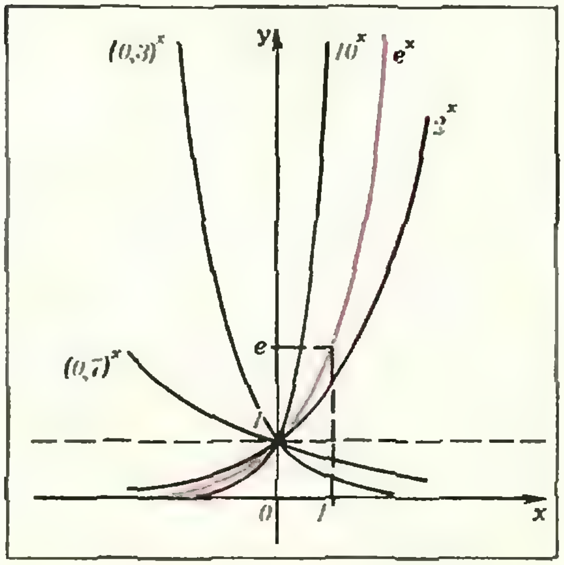
В самом начале XVII века Галилей (1564—1642) хотел открыть закон, по которому происходит свободное падение. Он надеялся открыть этот закон чисто умозрительно, руководствуясь лишь соображениями простоты. Поэтому он предположил, что скорость свободного падения должна быть пропорциональна пройденному пути:

$$\dot{s}=\lambda s. \qquad (3)$$

По физическим соображениям $\lambda>0$ (движение ускорено) и $s(0)=0$ (в начальный момент тело покоится). Через некоторое время Галилей с большим удивлением обнаружил, что дифференциальное уравнение (3) не может иметь решения с $s(0)=0$, отличного от $s\equiv0$ (невозможно движение со свойствами, которые Галилей первоначально приписал свободному падению).

Задача 2. Докажите утверждение Галилея.

Указание. Пусть $\lambda>0$; тогда скорость $\dot{s}$ возрастает с увеличением s. Если в некоторый момент времени t_0 имеем: $s(t_0)=c>0$, то $\dot{s}(t_0)=\lambda c$; $\dot{s}(t)<\lambda c$ при $t<t_0$, а значит, $t_0>1/\lambda$ *независимо от c! Отсюда легко вывести, что $s\equiv0$.*



Графики некоторых показательных функций.

Это наблюдение побудило Галилея поменять предполагаемый закон на $\dot{s}=gt$, что привело его к открытию закона свободного падения, а движением по закону (3) он больше не интересовался. Подробнее об этом можно прочитать в книге С. Г. Гиндикина «Рассказы о физиках и математиках» (М., «Наука», 1981).

Мы же должны вспомнить еще об одном замечательном математике — Джоне Непере, бароне Мерчистоне (1550—1617), который почти в те же годы, что и Галилей, совершенно по другим причинам исследовал движение по закону (3). Если Галилей стремился получить математическое описание реального механического явления, то Непер двигался прямо в противоположном направлении: он хотел дать механическую интерпретацию чисто математическим процедурам. Еще до Непера математики пытались воспользоваться связью между арифметической и геометрической прогрессией для упрощения вычислений (замены умножения сложением!). Для увеличения точности требовались все более «частые» прогрессии и гениальная догадка Непера состояла в том, что следует дойти в этом до конца и заменить дискретные прогрессии непрерывными величинами — функциями. Рассматривая для этого воображаемое движение по закону (3) и интерпретируя время как непрерывный аналог арифметической прогрессии, Непер убеждается, что тогда путь будет аналогом геометрической прогрессии. Именно, если время t увеличить на k единиц, то путь умножается на q^k для некоторого q; если перейти к более мелким единицам времени, то по-прежнему сдвигам по времени t отвечают преобразования по закону геометрической прогрессии.

Главное отличие подхода Непера от подхода Галилея состоит в том, что он снимает ограничение $s(0)=0$. Пусть λ фиксировано. Из утверждения Галилея следует важное свойство движений (3). Движение по закону (3) для фиксированного λ полностью определяется значением s в любой фиксированный момент времени t_0. Действительно, если $s_1(t)$, $s_2(t)$ — два движения с $s_1(t_0)=s_2(t_0)$, то для $s(t)=s_1(t)-s_2(t)$, также являющегося решением (3), имеем: $s(t_0)=0$, то есть $s\equiv0$; по теореме Галилея и $s_1(t)=s_2(t)$. Далее, если s — решение (3), то $s_1(t+t_0)$ — также решение, а значит, все решения (3) отличаются лишь постоянным множителем. Также, если s — решение, то $s_1(t)=s(t+t_0)$ — также решение (для фиксированного t_0).

Пусть $S_\lambda(t)$ — такое решение (3), что $S_\lambda(0)=1$. Возьмем

$$s_1(t)=S_\lambda(t+t_0), \quad s_2(t)=S_\lambda(t)S_\lambda(t_0).$$

Обе эти функции будут решениями (3), принимающими одно и то же значение $S_\lambda(t_0)$ при $t=0$, а потому должны совпадать. Мы получаем, что

$$S_\lambda(t+t_0)=S_\lambda(t)S_\lambda(t_0). \qquad (4)$$

Далее, функция S_λ дифференцируема, значит, она непрерывна. По теореме Галилея она нигде не обращается в нуль, а значит, она всюду имеет один и тот же знак, то есть $S_\lambda(t)>0$ ($S_\lambda(0)=1$). В силу (3), тогда $S_\lambda(t)$ всюду имеет тот же знак, что и λ, то есть возрастает при $\lambda>0$, убывает при $\lambda<0$. Итак, *решение уравнения* (3) *с* $s(0)=1$ *обязательно является показательной функцией.* Если теперь продифференцировать (4) по t_0 и положить $t_0=0$, мы получим

$$S_\lambda(t)=S_\lambda(t)S_\lambda(0). \qquad (5)$$

Значит, показательная функция (в предположении, что она дифференцируема) является решением (3), $\lambda=S_\lambda(0)$. Дифференцируемость показательной функции доказывается непосредственно (см. «Алгебра и начала анализа 9—10», п. 65).

Необходимо обсудить еще один вопрос. Мы исследовали решения (3) в предположении, что они существуют. Это предположение следует из общего факта про дифференциальные уравнения, который мы не будем здесь доказывать*). Если принять его, то мы получим доказательство существования показательной функции, отличное от обсуждавшегося выше. С другой стороны, из существования и дифференцируемости показательной функции следует разрешимость уравнения (3).

Число *e* (неперово число)

У нас теперь два подхода к определению показательной функции. При аксиоматическом определении показательные функции естественно различать по их основаниям $f(1)=a$. Если же исходить из уравнения (3), то в основу более естественно положить коэффициент λ. *Как связаны эти константы?* Прежде всего при кинематическом подходе естественно выделить показательную функцию, отвечающую $\lambda=1$. Ее основание принято обозначать через e и называть *неперовым числом*, а саму функцию иногда обозначают $\exp t$ (по началу слова «экспонента»). Итак, для движения, происходящего по закону $\dot s=s$, для которого $s(0)=1$, имеем: $s(t)=e^t\ (=\exp t)$.

Исследуем число e. Это расстояние от начала, на котором в момент времени $t=1$ окажется точка. Поскольку движение происходит со скоростью, большей 1, а начинается движение на расстоянии 1 от начала, мы получаем, что при $t=1$ расстояние $e>1+1=2$. Покажем, что, с другой стороны, $e<3$ (точка не успеет уйти за отметку 3). Для этого разобьем путь от 1 до 3 на 8 равных частей (длина одной части 1/4). Первый отрезок точка пройдет со скоростью, не превышающей ее значения в правом конце отрезка, где, в силу (3), она равна 5/4; следовательно, время, которое потребуется на этот отрезок, не менее 1/5. Аналогично на второй отрезок уйдет не менее 1/6, на третий — не менее 1/7 и т. д. Общее время на путь от 1 до 3 не менее, чем

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12},$$

а эта сумма больше 1. Значит, точка e лежит ближе 3.

Если теперь разбить отрезок времени [0, 1] на n равных частей, то на первом отрезке времени скорость больше 1, точка пройдет за $\Delta t=1/n$ путь, больший $1/n$ и окажется от начала дальше, чем $1+1/n$ со скоростью, превышающей, в силу (3), $1+1/n$; тогда на следующем отрезке $\Delta=1/n$ будет пройден путь, больший $(1+1/n)/n$, и точка окажется от начала на расстоянии большем $(1+1/n)^2$ со скоростью, большей $(1+1/n)^2$ и т. д., в момент времени $t=1$ — на расстоянии $(1+1/n)^n$ от начала.

Из этого рассуждения представляется правдоподобным, что при увеличении n величина $a_n=(1+1/n)^n$ возрастает (докажите, что это действительно так!) и стремится к e. В учебнике «Алгебра и начала анализа 9—10» (§ 22, п. 113) доказывается, что

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

откуда, в частности, e можно определить с любой точностью. Напомним, что $e=2{,}718281828459045\ldots$ Аналогично доказывается, что

$$e^t=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n. \qquad (6)$$

Продумайте кинематическую интерпретацию этого равенства.

Задача 3. Дайте кинематическое доказательство неравенства

---

*) «Квант» предполагает вернуться к этому вопросу в одном из ближайших номеров журнала.

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Указание. Разбейте отрезок пути $\left[1, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$ на $(n+1)$ отрезков вида $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k}\right]$. Тогда при движении по k-му отрезку длины $\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k}$ по закону $\dot{s}=s$ скорость не превосходит $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k}$, *а затраченное время соответственно* больше,чем $1/n+1$, то есть общее время больше 1.

Вернемся к вопросу, с которого начинался наш разговор о числе e. Пусть $S_\lambda(t)=a^t$. Как связаны λ и a? Замечая, что если $s(t)$ — решение (3) для некоторого λ, то $s(ct)$ — решение (3) с $\lambda'=c\lambda$ и тем же значением в нуле, то есть $S_{\lambda c}(t)=S(ct)$, откуда

$$S_\lambda(t)=a^t, \text{ где } a=e^\lambda.$$

Таким образом, связь между a и λ очень просто выражается через неперово число.

Подведем итоги рассмотрения уравнения (3). Мы доказали, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$s(t)=s_0\exp(\lambda t),\ s_0=s(0).$$

Уравнение (3) называют *уравнением показательного* (или *экспоненциального*) *роста* (или *убывания* при $\lambda<0$). Оно описывает многие процессы, встречающиеся в природе: радиоактивный распад, изменение температуры со временем и давления с высотой, законы биологического и социального развития и другие процессы. Важнейшей характеристикой показательной функции, проявляющейся в описываемых ею явлениях, является быстрый рост (при $\lambda>0$). В частности, экспоненциальный рост (при $\lambda>0$) превосходит любой степенной рост, а экспоненциальное убывание (при $\lambda<0$) — степенное убывание, именно

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^k}{e^{\lambda t}}=0\ (\lambda>0),\ \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t}t^k=0\ (\lambda<0)$$

(«Алгебра и начала анализа 9—10», § 22, п. 117).

Логарифмическая функция $\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$

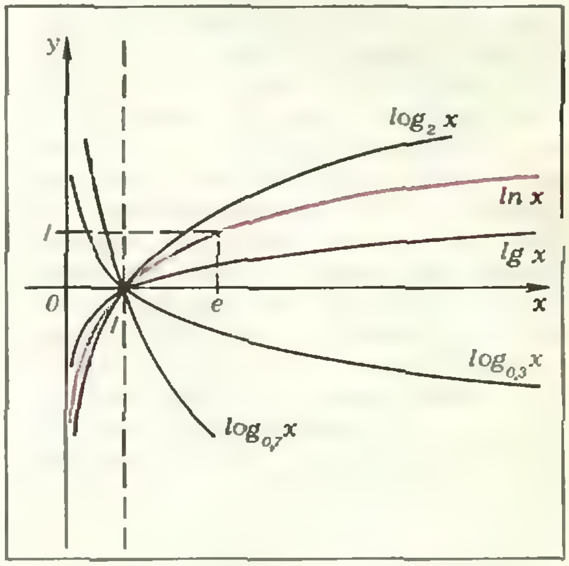
Эта функция определяется как функция, обратная к показательной функции a^x, $a\neq 1$, и все ее свойства непосредственно следуют из этого определения. Она определена при $x>0$, ее область значений — вся прямая, $\log_a x$ возрастает при $a>1$ и убывает при $a<1$, $\log_a 1=0$, но, самое главное, имеет место функциональное уравнение (называемое «основным свойством логарифма» в школе)

$$\log_a xy=\log_a x+\log_a y, \qquad (7)$$

которое непосредственно следует из функционального уравнения для показательной функции (1) (почему?). Логарифмическую функцию можно также описать аксиоматически: $\log_a x$ — *это монотонная функция, равная* 1 *при* $x=a$, удовлетворяющая (7) и определенная при всех $x>0$ (докажите!). Отметим, что при переходе к логарифмической функции мы существенно пользуемся строгой монотонностью a^x при $a\neq 1$ (это обеспечивает существование обратной функции); по этой причине исключено $a=1$.

Натуральный логарифм $\ln x$ определяется как функция, обратная к e^x, то есть как время, необходимое точке, движущейся по закону $\dot{s}=s$, чтобы попасть из 1 в x.

Надо сказать, что именно логарифмическая функция, а не показательная, была целью Непера. Однако построенная им картина была несколько осложнена. Он рассмотрел уравнение (3) с $\lambda=10^{-7}$ и взял его решение с $s(0)=10^7$, то есть $s(t)=10^7\exp(10^{-7}t)$; соответственно обратная функция — неперов логарифм — имела вид $t=\text{Nep}\log x=10^7\ln 10+10^7\ln x$, и для нее не верно, что $l(x\cdot y)=l(x)l(y)$, $l(1)=0$. К концу двадцатилетних усилий по составлению таблиц логарифмов Непер чувствовал несомненную неудовлетворенность принятой им системой. Он уже *обладал идеей* десятичных логарифмов, но не имел сил провести необходимые вычисле-



Графики некоторых логарифмических функций.

ния. Соответствующие таблицы составил лондонский математик Генри Бригс, который имел возможность обсуждать идею десятичных логарифмов с Непером в его последние годы. Десятичные логарифмы до сих пор иногда называют *бригсовыми* (им была посвящена книга Бригса «Арифметика логарифмов», вышедшая в 1624 г.). Натуральные логарифмы появились в 1619 году в книге малоизвестного учителя математики Спейделя (небольшая анонимная таблица появилась на год раньше в приложении ко второму изданию книги Непера).

Из кинематического определения логарифмов по правилу дифференцирования обратной функции получается

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Далее, указанная выше связь между λ и основанием решения $S_\lambda(t)$ означает, что $(a^t)' = \ln a \cdot a^t$, откуда

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Задача 4. Найти максимальное среди чисел вида $\sqrt[n]{n}$ (n — натуральное число).

Указание. Исследуйте на экстремум функцию

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

или, что эквивалентно, $g(x) = \ln x / x$.

Функция $\ln x$ удобна для вычисления различных показателей процессов, описываемых уравнением (3). Так, если за характеристику роста (убывания) принять время τ, в течение которого величина удваивается (или уменьшается в два раза), то поскольку $e^{\lambda\tau} = 2$, получим $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$ при $\lambda > 0$ и $\tau = -\frac{\ln 2}{\lambda}$ при $\lambda < 0$. В случае радиоактивного распада τ называют *временем полураспада* ($\lambda < 0$).

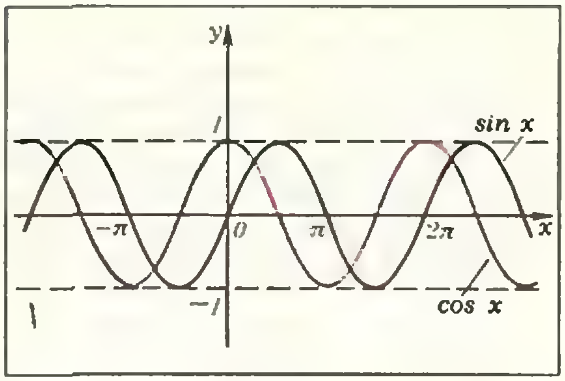
Задача 5. Срочный вклад в сберегательной кассе за год увеличивается на 3%. За сколько лет он увеличится в 2 раза?

Наконец, отметим, что в силу того, что показательная функция очень быстро растет, логарифмическая функция, напротив, растет чрезвычайно медленно. Она растет медленнее любой положительной степени x:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0.$$

Тригонометрические функции

Оба пути, которые мы обсуждали в связи с показательной функцией (аксиоматический и кинематический), имеются и для тригонометрических функций. Однако не один из них не был исторически первым. Первично естественно определять тригонометрические функции через отношения сторон в треугольнике или тригонометрическом круге. Правда, при этом возникают функции, принимающие числовые значения, в то время как их аргумент принимает угловые, а не числовые значения. Чтобы перейти к функциям числового аргумента, надо научиться измерять углы. Надо сказать, что хотя тригонометрия развивалась, начиная со II века до н. э., причем ей придавалось большое значение в связи с астрономическими вычислениями, сегодняшнее определение тригонометрических функций появилось лишь в XVIII веке (в значительной степени у Эйлера). До этого обходились всевозможными таблицами, например, хорд, отвечающих углам. Нельзя забывать, что долго для большинства математиков функции не выходили за пределы алгебраических функций и не приходило в голову, что тригонометрия как-то связана с анализом.



Графики некоторых тригонометрических функций.

Остановимся на кинематическом определении тригонометрических функций. Рассмотрим один из самых простых законов: ускорение (или сила) пропорциональны расстоянию, или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \qquad (8)$$

Это уравнение называется *уравнением гармонических* колебаний (оно описывает движение шарика на пружинке, качания маятника около положения равновесия и т. д.). Ограничимся вначале случаем $\omega = 1$

$$\ddot{x} + x = 0. \qquad (9)$$

Мы знаем, что решениями этого уравнения являются $\sin t$ и $\cos t$, но попытаемся получить их независимое определение. Прежде всего надо получить аналог теоремы Галилея для (3) — теорему единственности. Надо доказать, что единственное решение (9) с $x(0)=\dot x(0)=0$ — это $x\equiv 0$. Обратите внимание, что нам приходится задавать два условия при $t=0$, что связано с тем, что в (9) входит вторая производная. Доказательство следует из сохранения величины $E=\frac{1}{2}(\dot x^2+x^2)$ (проверьте, что $\dot E=0$ в силу уравнения (9)).

Обозначим через $s(t)$ решение (9) с $s(0)=0$, $\dot s(0)=1$. Исследуем свойства этого решения (которое на самом деле совпадает с $\sin t$, но мы хотим вывести все свойства из уравнения (9)).

1) Пусть $c(t)=\dot s(t)$; тогда $c(t)$ — решение (9) с начальными условиями $c(0)=1$, $\dot c(0)=0$ (проверяется непосредственным дифференцированием: $\ddot c=\dddot s=-\dot s=-c$, $\dot c=-s$).

2) $s(t)=-s(-t)$, $c(t)=c(-t)$ (достаточно проверить, что $x(t)=-s(-t)$ является решением (9) с теми же условиями при $t=0$, что и $s(t)$; аналогично для $c(t)$).

3) Имеют место теоремы сложения

$$s(t+t_0)=s(t)c(t_0)+s(t_0)c(t), \qquad (10)$$

$$c(t+t_0)=c(t)c(t_0)-s(t)s(t_0). \qquad (11)$$

Достаточно убедиться, что левые и правые части при фиксированном t_0 являются решениями (9) с одинаковыми начальными данными при $t=0$.

Из теорем сложения можно вывести уже много новых тригонометрических формул (на самом деле почти все, но мы об этом еще поговорим). Например, полагая в (11) $t_0=-t$, получаем

$$c^2(t)+s^2(t)=1. \qquad (12)$$

Из (12) следует, что $|c(t)|\leqslant 1$, $|s(t)|\leqslant 1$.

4) Можно показать, что $c(t)$ обращается в нуль при некотором положительном значении аргумента.

Если бы это было не так, то $c(t)$ было бы положительным при $t>0$, а это означало бы, что функция $s(t)$ монотонно возрастает и, следовательно, при $t>0$ принимает положительные значения. Зафиксируем некоторый момент времени $t=t_0>0$, при этом $s(t_0)=s_0>0$. Равенство $\dot c(t)=-s(t)$ означает, что скорость убывания $c(t)$, начиная с момента t_0, больше s_0, и, следовательно, $c(t)$ обратится в нуль не позднее, чем через время $c(t_0)/s(t_0)$, что противоречит предположению о положительности $c(t)$.

Пусть τ — наименьшее из положительных чисел, обращающих в нуль функцию $c(t)$ (τ — константа, полностью определяемая уравнением (9), она равна $\pi/2$, но это требует специального доказательства). Из равенства (12) следует, что $s(\tau)=\pm 1$, но, поскольку $s(t)$ возрастает на интервале $(0,\ \tau)$ $(s(t)=c(t)>0)$, получаем $s(\tau)=1$. Из теорем сложения (10), (11) находим, что

$$s(t+\tau)=c(t),\quad c(t+\tau)=-s(t).$$

Следовательно,

$$s(t+2\tau)=c(t+\tau)=-s(t),$$
$$c(t+2\tau)=-s(t+\tau)=-c(t),$$
$$s(t+4\tau)=-s(t+2\tau)=s(t),$$
$$c(t+4\tau)=-c(t+2\tau)=c(t).$$

Итак, решения $c(t)$, $s(t)$ периодичны с периодом $T=4\tau$. Можно показать, что меньшего периода не существует (докажите!).

Тем самым мы показали, что можно строить теорию тригонометрических функций, исследуя лишь уравнение (9). Что касается уравнения (8), то его общее решение имеет вид

$$x(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t,\quad a=x(0),$$
$$b=\frac{\dot x(0)}{\omega}.$$

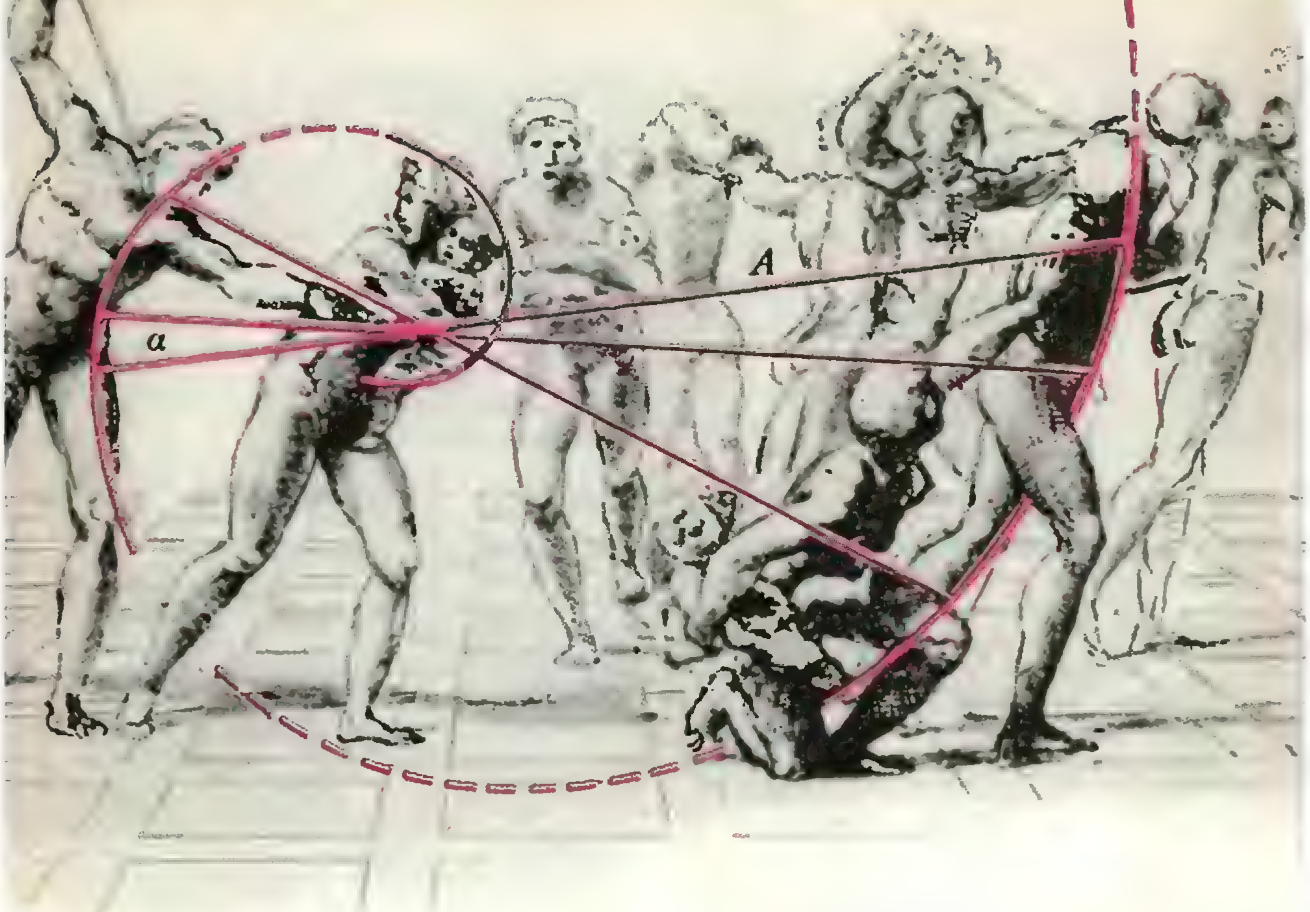
Функциональные уравнения для тригонометрических функций

Возможность характеризовать тригонометрические функции при помощи функциональных уравнений является принципиальным фактом. Грубо говоря, это означает, что при геометрическом определении тригонометрических функций достаточно доказать геометрически лишь теоремы сложения. Все остальные бесчисленные формулы тригонометрии (кроме формул с участием π) могут быть уже чисто формально выведены из теорем сложения без привлечения дополнительных геометрических соображений.

Точное утверждение (сравните с аналогичным аксиоматическим описанием показательной функции) составляет содержание следующей задачи.

Задача 6*. Пусть $s(t)$ и $c(t)$ — функции, которые: 1) определены при всех t; 2) $s(0)=0$, $c(0)=1$; 3) удовлетворяют функциональным уравнениям (10) и (11); 4) непрерывны. Тогда $c(t)=\cos\omega t$, $s(t)=\sin\omega t$ для некоторого действительного числа ω.

Указание. Воспользуйтесь тем фактом, что непрерывная функция полностью определяется своими значениями в точках вида $t=\frac{m}{2^k}t_0$ (m, k — целые числа, t_0 — произвольное фиксированное действительное число, не равное нулю).



Золотая спираль

А. И. ПРОХОРОВ

> *Измеряй все, что можешь измерить, и сделай таковым все, не поддающееся измерению.*
>
> Галилео Галилей

Геометрические мотивы нередко присутствуют в картинах великих живописцев. Геометрические схемы с большей или меньшей очевидностью просматриваются в самой композиции многих полотен. Их можно назвать пирамидальными, круговыми, диагональными, спиральными и т. п. в зависимости от той геометрической фигуры, которая положена в основу композиции. Художник при этом часто действует интуитивно, а искусствовед, исследуя композицию, выявляет ее основу, приводит картину к упрощенной геометрической схеме. Наша заметка — пример такого исследования, относящегося к художественному наследию великого Рафаэля Санти, 500-летие со дня рождения которого отмечалось в прошлом году.

Для дальнейшего нам потребуются

Две геометрические конструкции

Еще древние ввели в рассмотрение *золотое сечение* — такое деление («сечение») данного отрезка длины a на две неравные части x и y, $a=x+y$, $x>y$, при котором меньшая часть относится к большей так же, как большая часть к целому, то есть $x:y=x:a$. Из этого определения следует

$$\frac{a-x}{x}=\frac{x}{a}$$

или $x^2+ax-a^2=0$. Решая это квадратное уравнение и отбрасывая отрицательный корень, находим

$$\frac{x}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}62.$$

Эта пропорция часто использовалась в древнегреческой архитектуре, например при строительстве знаменитого Парфенона. Архитекторы понимали, что при зрительном восприятии прямоугольник, отношение сторон которого

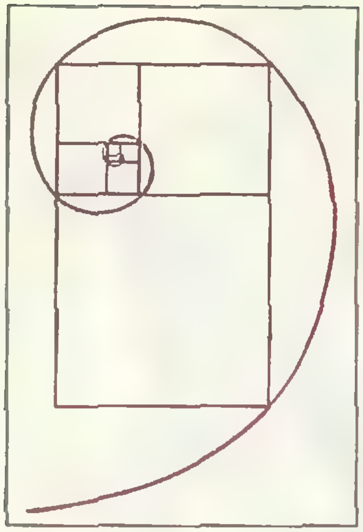


Рис. 1.

выбрано по золотому сечению, вызывает ощущение гармонии, покоя.

Напротив, ощущение динамики, волнения проявляется, пожалуй, сильней всего в другой простейшей геометрической фигуре — спирали. *Спираль* — это плоская линия, образованная движущейся точкой, которая удаляется по определенному закону от начала луча, равномерно вращающегося вокруг своего начала. Если точка удаляется от начала равномерно ($r=k\varphi$, где r — расстояние от начала, а φ — угол поворота луча), то получается *спираль Архимеда*. Если же точка удаляется по экспоненциальному закону ($r=ke^{m\varphi}$, рисунок 1), то получается *логарифмическая спираль*. Частным случаем логарифмической спирали является интересующая нас золотая спираль: она получается в том случае, если начало луча и параметры k и m экспоненциального закона выбраны так, чтобы спираль проходила через три из четырех вершин каждого из последовательно построенных на рисунке 1 «золотых прямоугольников».

Задача. Найдите параметры k и m для золотой спирали.

«Корабельная роща»

На этой знаменитой картине И. И. Шишкина (рисунок 2) с очевидностью просматриваются мотивы золотого сечения. Ярко освещенная солнцем сосна (стоящая на первом плане) делит длину картины по золотому сечению. Справа от сосны — освещенный солнцем пригорок. Он делит по золотому сечению правую часть картины по горизонтали. Слева от главной сосны находится множество сосен — при желании можно с успехом продолжить деление картины по золотому сечению и дальше. Наличие в картине ярких вертикалей и горизонталей, делящих ее в отношении золотого сече-

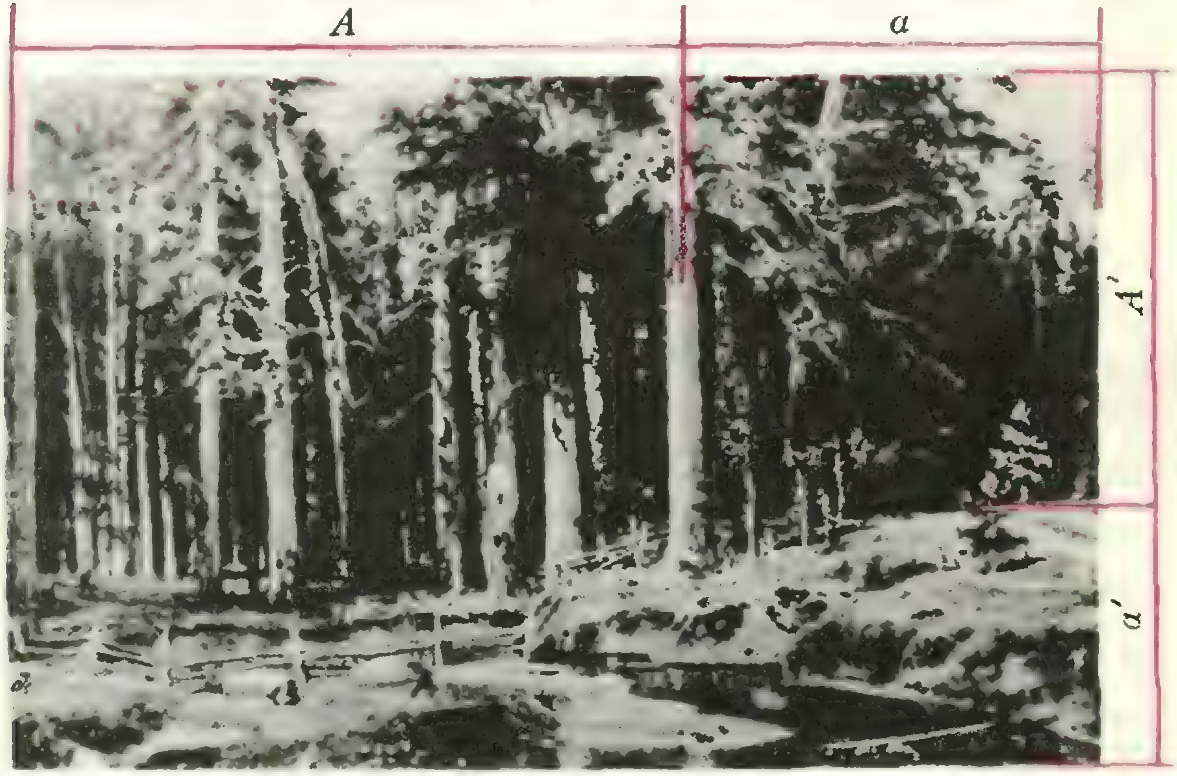


Рис. 2.

ния, придают ей характер уравновешенности и спокойствия, в соответствии с замыслом художника.

Когда же замысел художника иной, если, скажем, он создает картину с бурно развивающимся действием, подобная геометрическая схема композиции (с преобладанием вертикалей и горизонталей) становится неприемлемой.

«Избиение младенцев»

Многофигурная композиция (см. рисунок на с. 15), выполненная в 1509—1510 годах Рафаэлем, когда прославленный живописец создавал свои фрески в Ватикане, как раз отличается динамизмом и драматизмом сюжета. Рафаэль так и не довел свой замысел до завершения, однако, его экскиз был гравирован известным итальянским графиком Маркантонио Раймонди, который на основе этого эскиза и создал гравюру «Избиение младенцев» (рисунок 3).

На подготовительном эскизе Рафаэля мы провели красные линии, идущие от смыслового центра композиции — точки, где пальцы воина сомкнулись вокруг лодыжки ребенка, — вдоль фигур ребенка, женщины, прижимающей его к себе, воина с занесенным мячом и затем вдоль фигур такой же группы в правой части эскиза. Если естественным образом соединить эти куски кривой пунктиром, то с очень большой точностью получается ... золотая спираль! Это можно проверить, измеряя отношение длин отрезков, высекаемых спиралью на прямых, проходящих через начало кривой.

Мы не знаем, рисовал ли на самом деле Рафаэль золотую спираль при создании композиции «Избиение младенцев» или только «чувствовал» ее. Однако с уверенностью можно сказать, что гравер Раймонди эту спираль увидел. Об этом свидетельствуют добавленные им новые элементы композиции, подчеркивающие разворот спирали в тех местах, где она у нас обозначена лишь пунктиром. Эти элементы можно увидеть на окончательной гравюре Раймонди: арка моста, идущая от головы женщины, — в левой части композиции и лежащее тело ребенка — в ее центре.

Первоначальную композицию Рафаэль выполнил в рассвете своих творческих сил, когда он создавал свои наиболее совершенные творения. Глава школы романтизма французский художник Эжен Делакруа (1798—1863)

(Окончание см. на с. 33)

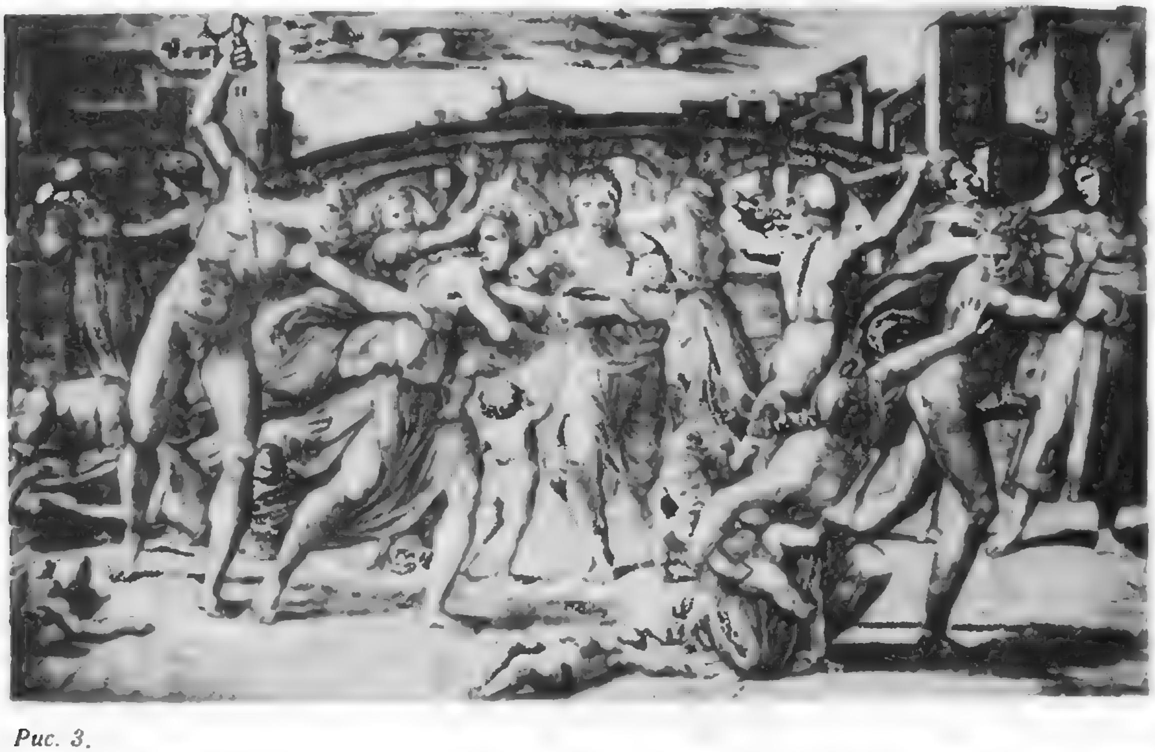


Рис. 3.

Существуют ли планетные системы у других звезд?

Доктор физико-математических наук
Л. С. МАРОЧНИК

Вопрос о том, существуют ли планетные системы у каких-либо еще звезд, кроме Солнца, в нашей Галактике, беспокоит человечество давно. Беспокоит, потому что, не имея на него ответа, невозможно даже подступиться к таким волнующим проблемам, как происхождение жизни, существование внеземных цивилизаций и т. п.

Если не доказательства, то, по крайней мере, серьезные аргументы в пользу существования планетной (или протопланетной) системы у звезды Веги (α созвездия Лиры) совсем недавно представил англо-американо-голландский спутник ИРАС (IRAS — Infra Red Astronomical Satellite).

Известно, что максимум интенсивности в спектре свечения Веги приходится на ультрафиолетовую область и что по мере увеличения длин волн интенсивность должна быстро спадать. ИРАС, однако, зарегистрировал большую избыточную интенсивность в инфракрасной части спектра. Это означало, что инфракрасные детекторы ИРАСа обнаружили окружающее Вегу холодное облако твердых частиц, нагретых до температуры 90 K и имеющих миллиметровые размеры*), что в тысячи раз больше, чем размеры пылинок в обычной межзвездной среде.

По мнению ученых, ведущих эксперимент, в облаке безусловно должны быть частицы и бо́льших размеров, и если их распределение такое же, как в поясе астероидов в Солнечной системе, то полная масса облака, окружающего Вегу, близка к 0,001 M_C (M_C — масса Солнца). Но это как раз та доля массы Солнечной системы, которая приходится на всю совокупность больших и малых ее планет.

Диаметр облака, окружающего Вегу, определен пока очень неточно. По оценкам он близок к 170 астрономическим единицам. Это приблизительно в два раза больше диаметра орбиты Плутона — последней планеты Солнечной системы.

Очевидно, чтобы не упасть на Вегу, частицы облака должны вращаться вокруг нее.

Итак, получено первое прямое доказательство существования вращающейся вокруг звезды «твердой материи».**) Специалисты программы ИРАС полагают, что облако, окружающее Вегу, примерно такое же, каким было протопланетное облако на относительно ранних стадиях эволюции Солнечной системы. Такая гипотеза кажется привлекательной, потому что Вега довольно молода — она приблизительно в 5 раз моложе Солнца.

Советский астрофизик И. С. Шкловский привел еще один красивый аргумент в пользу этой гипотезы. Хорошо известно, что основная масса Солнечной системы сосредоточена в Солнце, но что вращение Солнца происходит существенно медленнее, чем вращение окружающих его планет. Значит, если «твердая материя», вращающаяся вокруг Веги, близка по своим свойствам к планетной (или протопланетной) системе, то сама звезда должна вращаться очень медленно. Оказалось, что астрономы-наблюдатели, изучавшие близкие звезды, давно обращали внимание на то, что Вега не вращается (или вращается очень медленно), хотя звезды того же типа (спектральный класс A) обладают быстрым вращением.

ИРАС обследовал около 9000 ярких звезд на небе. Из них только 450 звезд были настолько яркими в инфракрасном свете, что могли быть зарегистрированы детекторами ИРАСа. По мнению специалистов, из них около 50 могут оказаться системами, подобными Веге, но окончательных подтверждений пока не получено.

И в этом нет ничего удивительного. Как отмечает один из руководителей эксперимента Джордж Ауманн, если бы спутник, подобный ИРАСу, обследовал Солнце с расстояния в 30 световых лет (расстояние до Веги составляет приблизительно 26 световых лет), то он не смог бы обнаружить нашу планетную систему даже на пределе своей чувствительности. С его «инфракрасной точки зрения» Солнце оказалось бы совершенно нормальной и неинтересной звездой.

---

*) Частицы меньших размеров должны «выдуваться» из окрестностей Веги под действием давления ее света.

**) Другие причины, которые могли бы объяснить избыток интенсивности в инфракрасной части спектра, например «падение» твердой материи (аккреция) на звезду или наличие близкого, но не связанного с Вегой, пылевого облака, специалисты программы ИРАС исключают.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Траектория, путь, перемещение» предназначена восьмиклассникам, «Об агрегатных состояниях вещества» — девятиклассникам, «Гармонические колебания. Сложение колебаний» — десятиклассникам. Материалы подготовил И. К. Белкин.

Траектория, путь, перемещение

Три слова в заглавии этой заметки связаны с движением тел (материальных точек). Первые два широко употребляются в житейском обиходе, третьим пользуются, главным образом, в науке о движении тел — механике.

Траектория — это непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка. Она может быть прямой линией. О теле (точке), движущемся по такой троектории, говорят, что оно совершает прямолинейное движение. Траектория может представлять собой и кривую линию любой формы. Тело, движущееся по такой траектории, совершает криволинейное движение. Например, траектория свободно падающего тела по отношению к Земле (если пренебречь ее вращением) — вертикальная прямая, а траектория искусственного спутника Земли — кривая (окружность или эллипс).

Если траектория известна заранее, то задачей механики может быть, скажем, определение точки на траектории, где находится движущееся тело в тот или иной момент времени. Траектория может быть и неизвестной, тогда задача состоит в том, чтобы найти вид траектории. Законы движения позволяют решать и ту, и другую задачи.

Путь, пройденный телом (точкой),— это длина его траектории (измеренная в метрах, километрах и т. д.). Его можно определить, например, по счетчику километров в автомобиле.

Для решения задач механики знать пройденный путь обычно недостаточно и вот почему. Явление движения тела состоит в том, что с течением времени изменяются координаты тела. Путь же с изменением координат связан не всегда. Может даже случиться и так, что пройденный путь не равен нулю, а изменение координат равно нулю (тело прошло по замкнутой траектории). Вот поэтому путь, как правило, в уравнения механики не входит.

Для описания движения тела (точки) в механике (точнее — в кинематике) используется другая физическая величина — *перемещение*. Напомним, что перемещение — это направленный отрезок прямой (вектор), соединяющий некоторое начальное положение движущейся точки с каким-то последующим ее положением («Физика 8», § 3). Важность для механики именно этой величины вытекает из того, что *проекции* вектора перемещения на оси координат равны изменениям соответствующих координат («Физика 8», § 5). А это значит, что, если известен вектор перемещения, можно найти и координаты тела. Правда, для этого нужно знать еще начальные координаты.

Возникает вопрос: не равны ли друг другу модуль вектора перемещения и пройденный путь (и то и другое — скаляры)? Оказывается, что в общем случае — нет, не равны. Например, если тело из точки A пришло в точку B по траектории, представляющей собой половину окружности радиуса R, то пройденный телом путь $l=\pi R$, а модуль перемещения $|\vec{s}|=2R$ (рис. 1). Если бы тело прошло не половину окружности, а сделало полный оборот (вторая половина траектории показана на рисунке 1 штриховой линией), то путь

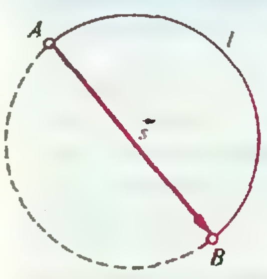


Рис. 1.

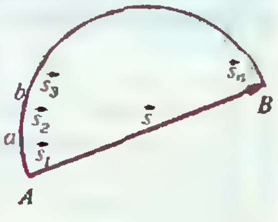


Рис. 2.

был бы равен $2\pi R$, а модуль перемещения — нулю. Только в одном случае, когда траектория движения тела — прямая линия и тело движется по такой траектории в одном направлении, модуль перемещения и пройденный путь равны друг другу.

Существует простая связь между величинами перемещения и пройденного пути. Поясним ее на уже рассмотренном примере движения тела по полуокружности. Разобьем эту траекторию на малые участки *1, 2, 3* и т. д. (рис. 2). На участке *1* путь тела — это длина дуги Aa, а перемещение $\vec{s}_1$ по модулю равно длине хорды Aa. На участке *2* путь тела — это длина дуги ab, а модуль перемещения $\vec{s}_2$ — длина хорды ab и т. д. Можно сделать участки, на которые мы разбили траекторию, такими малыми, чтобы дуга участка мало отличалась от хорды. Тогда, как это видно из рисунка 2, вектор полного перемещения $\vec{s}$ равен сумме векторов элементарных перемещений $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\vec{s}_3$ и т. д.:

$$\vec{s}=\vec{s}_1+\vec{s}_2+\vec{s}_3+\ldots+\vec{s}_n,$$

а длина пути l равна алгебраической сумме модулей $|\vec{s}_1|$, $|\vec{s}_2|$, $|\vec{s}_3|$ и т. д. элементарных перемещений:

$$l=|\vec{s}_1|+|\vec{s}_2|+|\vec{s}_3|+\ldots+|\vec{s}_n|.$$

Об агрегатных состояниях вещества

Молекулярно-кинетическая теория строения вещества — одно из величайших достижений физической науки — основана на трех утверждениях: 1) всякое вещество состоит из частиц — молекул или атомов; 2) частицы (молекулы, атомы) совершают беспорядочное тепловое движение; 3) частицы (молекулы, атомы) взаимодействуют друг с другом. Эта теория позволяет понять множество самых разнообразных явлений и в их числе факт существования вещества в трех, как говорят, агрегатных состояниях — твердом, жидком, газообразном.

Почему же совокупности совершенно одинаковых частиц, например молекул воды (H_2O), могут образовать такие столь непохожие друг на друга тела, как лед, вода, водяной пар? «Виновато» в этом третье из перечисленных выше утверждений, лежащих в основе молекулярно-кинетической теории, — утверждение о том, что между молекулами действуют силы («Физика 9», §§ 4 и 5). Однако существование различных агрегатных состояний удобнее объяснить, пользуясь не «силовым», а «энергетическим» языком.

Тепловое *движение* молекул характеризуется их средней кинетической энергией. Она, как известно, определяет температуру тел. Для идеальных газов, например, температура T и средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул $m\overline{v^2}/2$ связаны соотношением

$$\frac{m\overline{v^2}}{2}=\frac{3}{2}kT,$$

где k — постоянная Больцмана ($k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К). Кинетическая энергия вместе с концентрацией n молекул (число молекул в единице объема) определяет и второй основной макроскопический параметр газа — его давление p:

$$p=\frac{2}{3}n\frac{m\overline{v^2}}{2}.$$

Если бы молекулы обладали только *кинетической* энергией, они разлетелись бы по всем направлениям (движение молекул хаотическое!) и вещество заняло бы весь доступный ему объем. Единственно возможным состоянием вещества было бы газообразное состояние.

Взаимодействие молекул (как и всякое взаимодействие) характеризуется *потенциальной* энергией. Она зависит от расстояния между молекулами. Если бы молекулы обладали только потенциальной энергией, они заняли бы друг относительно друга такие положения, чтобы сумма сил, действующих на каждую молекулу со стороны ее соседей, была равна нулю. При этом потенциальная энергия взаимодействия молекул была бы минимальной. Единственным возможным состоянием вещества было бы твердое состояние.

Но молекулы движутся и взаимодействуют одновременно, и, следовательно, они обладают и кинетической и потенциальной энергией. Поэтому быть ли телу твердым, жидким или газообразным, зависит от соотношения обоих видов энергии. А изменение этого соотношения и приводит к переходу вещества из одного состояния в другое.

Твердое состояние — это состояние, в котором потенциальная энергия W_p взаимодействия молекул подавляюще велика по сравнению с кинетической W_k:

$$W_p \gg W_k.$$

Как можно изменить это соотношение? Например, нагревая твердое тело. Ясно, что при нагревании увеличивается кинетическая энергия частиц тела, а их потенциальная энергия при этом практически не изменяется. Таким образом можно добиться того, чтобы кинетическая энергия стала примерно равной потенциальной. Тогда и произойдет переход из твердого состояния в жидкое, для которого характерно примерное равенство W_p и W_k:

$$W_p \approx W_k.$$

В этом состоянии потенциальная энергия еще достаточно велика, чтобы молекулы не могли разлететься друг от друга, и кинетическая энергия уже достаточно велика, чтобы молекулы приобрели определенную подвижность, то есть возможность перемещаться внутри объема. Жидкость сохраняет свой объем, но становится текучей и поэтому не сохраняет своей формы.

Будем продолжать поставлять энергию, нагревая теперь уже жидкость. Кинетическая энергия молекул будет расти и в какой-то момент превзойдет потенциальную энергию их взаимодействия настолько, что ею (потенциальной энергией) можно будет пренебречь:

$$W_p \ll W_k.$$

Вещество перейдет в состояние, которое соответствует идеальному газу («Физика 9», § 6).

А что если продолжать нагрев, теперь уже газа? Приведет ли дальнейший рост кинетической энергии молекул к еще одному агрегатному переходу? Оказывается, да. Но только потому, что молекулы (атомы) это не просто очень маленькие шарики. Они представляют собой сложные системы заряженных частиц, еще меньших, чем атомы, размеров. При достаточно высокой температуре газа столкновения его частиц приводят к тому, что молекулы разваливаются на атомы, а атомы — на составляющие их заряженные частицы. В результате получается особого рода вещество, состоящее из одинакового числа положительно и отрицательно заряженных частиц (в целом — электрически нейтральное). Это и есть четвертое состояние вещества — плазма.

В отличие от других агрегатных состояний плазма состоит из электрически взаимодействующих друг с другом частиц. Вот почему свойства плазмы существенно отличаются от свойств вещества в других состояниях.

Гармонические колебания. Сложение колебаний

Колебательное движение — это периодическое движение, то есть такое, при котором координата тела через определенные промежутки времени (минимальный промежуток называют периодом колебаний) повторяется. Типичный пример колебаний — движение тела, прикрепленного к пружине («Физика 10», §§ 2 и 4). Вызывает такое движение сила упругости $F_x = -kx$, изменяющаяся от точки к точке, поэтому изменяющимся оказывается и ускорение тела. При движении колеблющееся тело проходит и через такое положение, в котором действующая на него сила обращается в нуль. Это — положение равновесия, оно служит центром колебаний. Максимальное отклонение тела от положения равновесия называется амплитудой колебаний.

Так как сила упругости — сила переменная, то решить уравнение второго закона Ньютона

$$-kx = ma_x$$

и найти, как координата x изменяется со временем, средствами обычной алгебры нельзя. Поэтому мы заменим на время физику геометрией и рассмотрим движение совсем другое, но «как две капли воды» похожее на движение тела, скрепленного с пружиной.

Пусть некоторое тело (материальная точка) движется с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса A (рис. 1). Движение по окружности — это тоже периодическое движение, поскольку через определенные промежутки времени $T = 2\pi/\omega$ (период обращения) тело оказывается в одном и том же месте на окружности. Рассмотрим, однако, движение не самой точки, а ее проекции на диаметр XX окружности. Сразу видно, что при движении точки по окружности ее проекция движется вдоль диаметра XX и это движение действительно похоже на движение тела, скрепленного с пружиной. Двигаясь вдоль диаметра, проекция удаляется от центра окружности на расстояние, не большее, чем радиус A. Можно, значит, сказать, что проекция совершает колебания с амплитудой A. Центр окружности O играет здесь такую же роль, как положение равновесия в опыте с пружиной. Период обращения точки по окружности — это в то же время и период колебаний ее проекции. Но если для точки, движущейся по окружности, ω — это угловая скорость, то для проекции ω — это так называемая *циклическая частота,* то есть число колебаний за 2π секунд:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Здесь ν — *частота колебаний,* то есть число колебаний за одну секунду.

Предположим, что в некоторый момент времени, который мы примем за начальный ($t=0$), движущаяся по окружности точка находится в положении M_0 (рис. 2). Проведем из центра окружности как из начала координат вектор $\overrightarrow{OM_0}$. Его называют *радиус-вектором* (модуль этого вектора равен A). Радиус-вектор определяет положение точки на окружности, а проекция его конца на диаметр XX определяет положение проекции M_0' точки, то есть координату x_0 этой проекции, отсчитываемую от центра окружности O. Движение точки по окружности означает в то же время вращение радиус-вектора вокруг центра O с той же угловой скоростью ω. Из рисунка 2 видно, что начальная координата x_0 проекции равна $A\cos\varphi_0$, где φ_0 — угол, отсчитанный от оси X против часовой стрелки до вектора $\overrightarrow{OM_0}$.

Пусть через промежуток времени t движущаяся по окружности точка оказалась в M, а ее проекция — в M'. Угол поворота радиус-вектора увеличился на $\Delta\varphi=\omega t$ и стал равным $\Delta\varphi+\varphi_0$. Координата x проекции точки теперь равна

$$x=A\cos(\Delta\varphi+\varphi_0)=A\cos(\omega t+\varphi_0).$$

Формула

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0) \qquad (*)$$

и показывает, как координата x проекции движущейся по окружности точки, то есть *координата точки, совершающей колебания,* зависит от времени. Колебания, при которых координата колеблющегося тела (точки) зависит от времени по закону $(*)$, называются *гармоническими.* Величина $\varphi=\omega t+\varphi_0$ называется *фазой* колебания, а φ_0 — *начальной фазой.*

Как мы уже говорили, движение проекции конца радиус-вектора на диаметр окружности во всем похоже на движение тела, скрепленного с пружиной. Верно и обратное: движение тела, прикрепленного к пружине, совершенно подобно движению проекции точки, движущейся по окружности, на диаметр этой окружности. Поэтому каждому колеблющемуся телу можно сопоставить вращающийся радиус-вектор, проекция конца которого есть колеблющееся тело (точка). Это и показано на рисунке 3 для случая тела, прикрепленного к горизонтальной пружине.

Только что высказанное соображение позволяет решить важную задачу о сложении колебаний, происходящих вдоль одной прямой и с одинаковыми частотами. Например, когда положение равновесия, около которого тело совер-

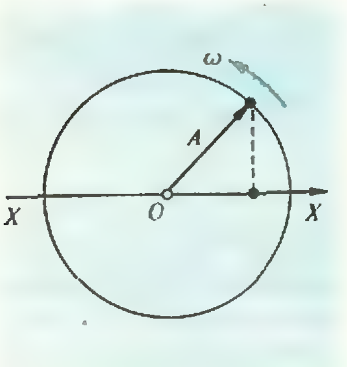


Рис. 1.

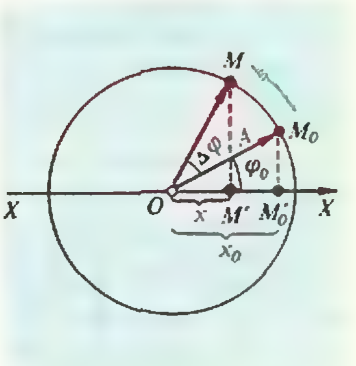


Рис. 2.

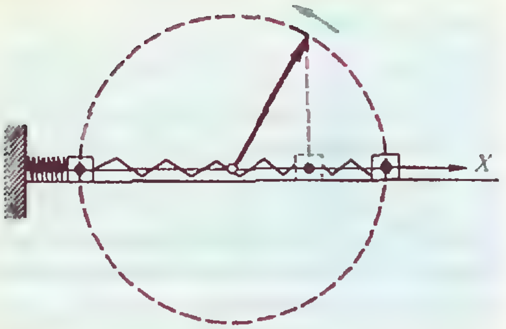


Рис. 3.

шает колебания, само совершает колебания с такой же частотой и вдоль той же прямой. Скажем, тело, скрепленное с пружиной, совершает колебания на платформе, которая сама колеблется относительно неподвижной системы отсчета.

Предположим, что нужно сложить такие два колебания:

$$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_{01}),$$
$$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_{02}).$$

Как видно из написанных формул, колебания могут различаться амплитудами (A_1 и A_2) и начальными фазами (φ_{01} и φ_{02}). Чтобы узнать, что получится в результате сложения, изобразим соответствующие складываемым колебаниям вращающиеся радиус-векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ как бы застывшими в начальный момент времени и покажем окружности, по которым движутся их концы (рис. 4; для упрощения на рисунке приведены не полные окружности). Очевидно, что результирующее колебание будет происходить с той же частотой ω, но с другой амплитудой и другой начальной фазой:

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0).$$

Значения A и φ_0 мы получим, если сложим векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ по правилу параллелограмма. Диагональ параллелограмма $A=|\vec{A}|$ и есть амплитуда суммарного колебания, а угол φ_0, который вектор $\vec{A}$ образует с осью X, — начальная фаза этого колебания.

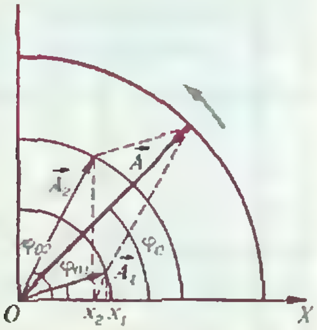


Рис. 4.

Согласно известной теореме косинусов, мы можем написать

$$A^2=A_1^2+A_2^2-2A_1A_2\cos O\widehat{A_1}A,$$

где $O\widehat{A_1}A=180°-A_2\widehat{O}A_1=180°-(\varphi_{02}-\varphi_{01})$. Так как $\cos(180°-(\varphi_{02}-\varphi_{01}))=-\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})$, то

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01}).$$

Результат сложения двух колебаний зависит, таким образом, от разности фаз колебаний-слагаемых. Поскольку колебания происходят с одной и той же частотой, разность фаз $\varphi_2-\varphi_1$ колебаний в любой момент времени равна разности $\varphi_{02}-\varphi_{01}$ начальных фаз.

Представляют особый интерес два крайних случая:

1) Разность фаз $\varphi_2-\varphi_1=0$ (или 2π, 4π и т. д.). Колебания, фазы которых в любой момент времени одинаковы, называются синфазными. В таком случае $\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})=\cos(\varphi_2-\varphi_1)=0$, и $A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2$, или $A=A_1+A_2$ — амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых колебаний. Другими словами, колебания в результате сложения усиливаются.

2) Разность фаз $\varphi_2-\varphi_1=\pi$ (или 3π, 5π и т. д.). О таких колебаниях говорят, что их фазы противоположны (колебания антифазные). В этом случае $\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})=\cos(\varphi_2-\varphi_1)=-1$, и $A^2=A_1^2+A_2^2-2A_1A_2$, или $A=A_1-A_2$ — результирующее колебание оказывается ослабленным: амплитуда равна разности амплитуд колебаний-слагаемых. Если $A_1=A_2$, то амплитуда результирующего колебания равна нулю, то есть колебаний вовсе нет: одно колебание «погасило» другое.

В этом состоит одно из самых важных свойств колебаний — при сложении они могут усиливаться или ослабляться. Это свойство играет важную роль в волновых процессах («Физика 10», § 36).

Из рисунка 4 легко получить и значение начальной фазы φ_0 результирующего колебания:

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{A_1\sin\varphi_{01}+A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01}+A_2\cos\varphi_{02}}.$$

Математика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Таблица составных чисел» предназначена восьмиклассникам, «Простой прием в непростых задачах» — девятиклассникам и «Кто же прав?» — десятиклассникам. Это деление в какой-то мере условно, так как каждая из этих заметок может быть полезной не только учащимся указанных классов.

Таблица составных чисел

При решении различных практических задач нередко возникает необходимость в анализе чисел, то есть в выяснении вопроса, являются ли они простыми или составными. Для простых чисел, не превышающих 6000, в справочниках по элементарной математике есть таблица. Но если мы имеем дело с составным числом или с числом за пределами таблицы простых чисел, к которому не подходят известные нам признаки делимости на 2, 3 и 5, то анализ его может оказаться довольно трудоемким. Например, определить, является ли число 10607 простым или составным, можно лишь путем перебора более двух десятков простых делителей, начиная с 7 и кончая 101.

Облегчить эту задачу и избавить нас от необходимости анализа чисел методом последовательного перебора простых делителей позволяет таблица составных чисел.

Таблица предназначена для разложения составных чисел, не кратных 2, 3 и 5, на простые множители от 7 до 101 включительно. С ее помощью можно разложить на простые множители все прочие составные числа с множителями, превышающими 101, при условии, что таких множителей не более одного, а остальные входят в указанный ряд. С помощью этой таблицы можно также выявлять простые числа, если они меньше 103^2. Охватывая, в принципе, бесконечное множество чисел, она позволяет, не прибегая к записям, анализировать числа до пяти знаков включительно.

В верхней строке таблицы — простые делители от 7 до 101. Правая крайняя колонка — возрастающий ряд двухзначных чисел, без чисел, оканчивающихся на 0, 2, 4, 5, 6, 8. В дальнейшем мы будем обозначать эти двухзначные числа символом R. Остальные числа в таблице обозначим символом Q_T.

Правила пользования таблицей поясним на примерах чисел 3827, 5251 и 51620. Проанализируем **число 3827.** Для этого разделим его с остатком на 100. Получаем в остатке число 27. Это значение R для данного числа, с которым мы входим в таблицу. Частное равно 38. Это величина Q для данного числа. Для того, чтобы найти простые множители данного числа, необходимо в строке R=27 таблицы

Таблица составных чисел

7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	*R*
3	10	10	9	15	20	20	22	27	25	3	39	9	23	25	2	22	27	15	39	8	32	1	01
2	8	4	10	7	14	2	4	7	34	9	23	27	10	14	6	66	8	45	34	24	96	3	03
0	4	5	12	10	2	24	30	4	11	21	38	10	43	53	14	12	43	26	24	56	30	7	07
6	2	12	13	2	19	6	12	21	20	27	22	28	30	42	18	56	24	56	19	72	94	9	09
5	0	6	14	13	13	17	25	1	29	33	6	46	17	31	22	29	5	7	14	88	61	11	11
4	9	0	15	5	7	28	7	18	38	39	37	11	4	20	26	2	59	37	9	15	28	13	13
2	5	1	0	8	18	21	2	15	15	8	5	47	37	59	34	19	21	18	82	47	59	17	17
1	3	8	1	0	12	3	15	32	24	14	36	12	24	48	38	63	2	48	77	63	26	19	19
0	1	2	2	11	6	14	28	12	33	20	20	30	11	37	42	36	56	78	72	79	90	21	21
6	10	9	3	3	0	25	10	29	1	26	4	48	57	26	46	9	37	29	67	6	57	23	23
4	6	10	5	6	11	18	5	26	19	38	19	31	31	4	54	26	72	10	57	38	88	27	27
3	4	4	6	17	5	0	18	6	28	1	3	49	18	54	58	70	53	40	52	54	55	29	29
2	2	11	7	9	22	11	0	23	37	7	34	14	5	43	62	43	34	70	47	70	22	31	31
1	0	5	8	1	16	22	13	3	5	13	18	32	51	32	66	16	15	21	42	86	86	33	33
6	7	6	10	4	4	15	8	0	23	25	33	15	25	10	7	33	50	2	32	29	20	37	37
5	5	0	11	15	21	26	21	17	32	31	17	33	12	60	11	6	31	32	27	45	84	39	39
4	3	7	12	7	15	8	3	34	0	37	1	51	58	49	15	50	12	62	22	61	51	41	41
3	1	1	13	18	9	19	16	14	9	0	32	16	45	38	19	23	66	13	17	77	18	43	43
1	8	2	15	2	20	12	11	11	27	12	0	52	19	16	27	40	28	73	7	20	49	47	47
0	6	9	16	13	14	23	24	28	36	18	31	17	6	5	31	13	9	24	2	36	16	49	49

найти такое значение Q_T, которое отвечало бы условию

$$\frac{Q-Q_T}{d}=\text{целое число}, \qquad (1)$$

где d — простой делитель в колонке найденного значения Q_T.

В строке $R=27$ условию (1) отвечают табличные значения $Q_T=38$ в колонках делителей $d=89$ и $d=43$. Это и есть простые множители заданного числа ($89\times 43=3827$).

Проанализируем теперь **число 5251.** При делении его на 100 получаем частное $Q=52$ и остаток $R=51$. Для чисел с $R>49$ берем вместо R во входе таблицы его «приведенное» значение $R'=100-R$, т. е. в данном случае $R'=100-51=49$. При этом вместо условия (1) требуется соблюдение условия

$$\frac{Q'+Q_T}{d}=\text{целое число}, \qquad (2)$$

где $Q'=Q+1$. В данном случае $Q'=52+1=53$.

В строке $R=49$ условию (2) отвечают $Q_T=36$, в колонке делителя $d=89$ ($53+36=89$) и $Q_T=6$ в колонке делителя $d=59$ ($53+6=59$). Таким образом, простые множители данного числа $89\times 59=5251$.

Число 51620. После деления его на 20 остается проанализировать число 2581. Здесь $R=81$. Следовательно, $R'=100-81=19$, $Q=25$. Следовательно, $Q'=25+1=26$.

Условию (2) здесь отвечают $Q_T=63$ в колонке делителя $d=89$ и $Q_T=3$ в колонке делителя $d=29$. Итак, $89\times 29\times 20=51620$.

Отметим, что общим множителем для всех трех чисел является простое число 89.

С помощью таблицы нетрудно определить, что упомянутое выше число 10607 — простое. Действительно, в строке $R=07$ нет ни одного значения Q_T, которое при вычитании его из $Q=106$ удовлетворяло бы условию (1).

В. С. Хитрук

Простой прием в непростых задачах

С формулой квадрата суммы или разности двух чисел знаком шестиклассник. Нетрудно научиться выделять из алгебраического выражения полный квадрат, «узнавать» его, а затем извлекать корень. Эти действия часто помогают при решении конкурсных задач. Конечно, приведенные ниже задачи допускают и другие способы решения, однако умелое использование указанных приемов позволит абитуриенту «сэкономить» так необходимое на экзамене время.

Упрощение выражений

Пример 1 (МГУ, мехмат, 1978). Разность $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$ является целым числом. Найти это число.

В книге Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехника, М. К. Потапова «Задачи вступительных экзаменов по математике» (М., Наука, 1980) авторы обозначают искомое число через x, находят, что x есть одно из чисел 10 или -10 и сравнением уменьшаемого и вычитаемого приходят к выводу, что $x=-10$ (с. 132).

Этот же пример решим, выделяя полный квадрат, этот прием пригодится нам впоследствии

$$A=\sqrt{40\sqrt{2}+57}=\sqrt{25+40\sqrt{2}+32}=$$
$$=\sqrt{(5+4\sqrt{2})^2}=5+4\sqrt{2},$$

$$B=\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}=\sqrt{|(5-4\sqrt{2})^2|}=$$
$$=-5+4\sqrt{2}.$$

Таким образом, $B-A=-10$.

Пример 2 (МГУ, мехмат, 1969; КПИ, 1980). Упростить:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}.$$

Решение:

$$A=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}+1-1}+$$
$$+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}+1-1}=$$
$$=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=$$
$$=|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|=$$
$$=\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|.$$

Очевидно, что $x\geqslant 1$;

а) при $2\geqslant x\geqslant 1$, имеем

$$A=\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2;$$

б) при $x\geqslant 2$

$$A=\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}.$$

Пример 3 (КПИ, 1980). Упростить:

$$\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}.$$

Решение:

$$\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=$$

$$=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}=$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}=\frac{2}{3}.$$

Решение уравнений

При решении иррациональных уравнений не следует торопиться возводить в квадрат, стоит посмотреть — нельзя ли его выделить?

Пример 4 (КПИ, 1979). Решить уравнение:

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

Решение:
Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-5+2\sqrt{2x-5}+1}+$$
$$+\sqrt{2x-5+6\sqrt{2x-5}+9})=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{(\sqrt{2x-5}+1)^2}+$$
$$+\sqrt{(\sqrt{2x-5}+3)^2}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\sqrt{2x-5}+1|+|\sqrt{2x-5}+3|).$$

Итак, заданное уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-5}+1+\sqrt{2x-5}+3)=7\sqrt{2}$$

или $2\sqrt{2x-5}=10$, откуда $x=15$.

Пример 5 (КГУ, экон. фак. 1978). Решить уравнение:

$$(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}})^{2x}+2^{2x+3}=144.$$

Решение:
Имеем

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=$$
$$=\sqrt{3}+1;$$

аналогично $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$. Поэтому заданное уравнение примет вид

$$4^x+8\cdot 4^x=144,\ x=2.$$

Пример 6 (МГУ, 1978, филфак). Число α подобрано так, что уравнение $\sqrt{x-\sqrt{3}}+\alpha^2x^2+2\alpha x(\sqrt{6}-\sqrt{3})=6\sqrt{2}-9$ имеет решение. Найти решение.

Решение: Обозначим x_1 — корень уравнения. Тогда $x_1\neq 0$ и $\sqrt{x_1-\sqrt{3}}+\alpha^2x_1^2+2\alpha x_1(\sqrt{6}-\sqrt{3})-6\sqrt{2}+9=0$, или

$$\alpha^2+2\alpha\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{x_1}\right)+\frac{\sqrt{x_1-\sqrt{3}}+9-6\sqrt{2}}{x_1^2}=0.$$

Выделим полный квадрат относительно чисел x_1 и α. Имеем

$$\left(\alpha+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{x_1}\right)^2+\frac{\sqrt{x_1-\sqrt{3}}}{x_1^2}=0.$$

Так как каждое слагаемое неотрицательно, то $x_1=\sqrt{3}$, при этом $\alpha=1-\sqrt{2}$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sin^2x+\sin^2y=$$
$$=\sin x\sin y+\sin x+\sin y-1.$$

Решение: Данное уравнение эквивалентно такому:

$$(\sin^2x-2\sin x+1)+$$
$$+(\sin^2y-2\sin y+1)+$$
$$+(\sin^2x+\sin^2y-2\sin x\sin y)=0,$$

или $(\sin x-1)^2+(\sin y-1)^2+(\sin x-\sin y)^2=0$, откуда $\sin x-1=0$, $\sin y-1=0$, то есть $\sin x=\sin y=1$, $\sin x=\sin y$. Таким образом, решением уравнения будет любая пара вида

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad y=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad k,\ n\in Z.$$

Упражнения

1. (МГУ, 1979, экон. фак.) Решить уравнение:

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}\times$$
$$\times(6x^2+23x+21)=4.$$

2. (КГУ, 1978, химфак.) Решить уравнение:

$$(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}})^{2x}+2^{2(x+1)}=320.$$

3. (МГУ, 1965, мехмат) Найти все пары чисел, которые удовлетворяют уравнению

$$\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\frac{3}{2}.$$

4. (КГУ, 1973, мехмат) Решить неравенство

$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}\geqslant 3.$$

5. (МГУ, 1982, биофак) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x)=x+\sqrt{(x^2+6x+9)(x^2+2x+1)}$$

на отрезке $\left[-4;\ -\frac{5}{4}\right]$.

И. А. Кушнир

Кто же прав?

В некоторой школе, в некотором классе только что прошли производную. И с ее помощью решали разные задачки. И попалась среди прочих задачек такая: *Функция*

$$y=x^2+ax+4$$

убывает при $x<1$ и возрастает при $x>1$. Найдите соответствующее этому условию значение параметра a.

На следующий день Федя Крестиков и Вася Нуликов пришли в школу заметно удрученные. «Мы пришли к противоречивым результатам», — сказал Федя. «А где ошибка — не понимаем», — добавил Вася. И все, конечно, захотели их послушать.

Начал Федя.

— Я взял производную: $y'=2x+a$. Дальше решил такое неравенство $2x+a>0 \Leftrightarrow x>-\frac{a}{2}$. Итак, наша функция возрастает при $x>-\frac{a}{2}$, но согласно условию она должна возрастать при $x>1$. Оба эти неравенства выполняются, если $-\frac{a}{2}<1$, то есть при $a>-2$.

Затем выступил Вася.

— Я тоже начал с производной. И вообще, у меня все, как у Феди, только наоборот. Я лучше напишу. И оказалось на доске вот что:

$$2x+a<0 \Leftrightarrow x<-\frac{a}{2},\ x<1,$$

$$-\frac{a}{2}>1 \Leftrightarrow a<-2.$$

Увидев оба результата, мы естественно загудели. Потом начали высказываться.

— У Феди неправильно, — сказал кто-то. — При $a=0$ мы получаем совсем не такую параболу, какую надо. Нарисуйте — увидите сами. Мы нарисовали и увидели сами: действительно — парабола не такая.

— И у Васи неправильно, — добавил другой. — При $a=-4$ мы тоже получаем совсем другую параболу. Мы взяли это значение a, нарисовали график и опять увидели совсем другую параболу.

— Послушайте, но ведь из этих их записей, которые конечно нужно рассматривать совместно, получается, что такой параболы вовсе нет!

— Не знаю, что там получилось у Феди с Васей, но такая парабола есть! Вот она! — воскликнула Дуся Квадратикова. И вышла к доске, и быстренько нарисовала параболу, удовлетворяющую условию полностью.

— Да ..., — протянул кто-то в наступившей тишине.

— Мы делали все так, как написано в учебнике, можете проверить, — сказали Федя и Вася.

Потом мы все же разобрались в чем было дело. Ответьте на следующие вопросы:

1. *Какая парабола была нарисована Дусей?*

2. *Где же ошибка в совместных рассуждениях Феди и Васи, которые приводят к выводу о невозможности такой параболы?*

3. *Верна ли их ссылка на учебник?*

С. И. Рыжик

Избранные школьные задачи

Из «Истории с узелками» и «Полуночных задач» Льюиса Кэрролла*)

8 класс

1. Имеются 5 мешков. Первый и второй мешки вместе весят 12 фунтов, второй и третий — 13,5 фунтов, третий и четвертый — 11,5 фунтов, четвертый и пятый — 8 фунтов, первый, третий и пятый — 16 фунтов. Сколько весит каждый мешок?

2. Докажите, что утроенная сумма трех квадратов натуральных чисел равна сумме четырех квадратов натуральных чисел.

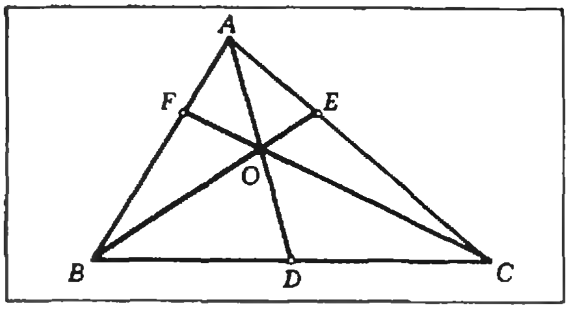
3. В данном треугольнике проведите прямую, параллельную основанию, так, чтобы сумма длин отрезков боковых сторон, заключенных между этой прямой и основанием была равна основанию.

4. Пусть α, β и γ — правильные дроби и пусть в некотором классе α-я часть всех учеников посещает хоровой кружок, β-я часть — кружок по фотографии, γ-я часть — драмкружок. Чему равна наименьшая доля учеников, посещающих все три кружка?

5. Точки D, E и F лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC. Отрезки AD, BE и CF пересекаются в точке O (см. рисунок). Найдите $\frac{|DO|}{|DA|}$, если $\frac{|EO|}{|EB|}=\alpha$, $\frac{|FO|}{|FC|}=\beta$.

---

*) Л. Кэрролл. *История с узелками.* — М.: Мир, 1973.



9 класс

6. Сколько существует различных видов треугольников с величинами углов $\frac{360°}{k}$, $\frac{360°}{l}$, $\frac{360°}{m}$, где k, l, m — натуральные числа?

7. Внутри данного угла с вершиной A дана точка P. Постройте прямой угол с вершиной в точке P так, чтобы треугольники APE и APF были равновелики (E и F — точки пересечения сторон прямого угла со сторонами данного).

8. Длины медиан треугольника ABC равны m_a, m_b и m_c. Найдите стороны и углы треугольника ABC.

9. При каких значениях x существуют числа y и z, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = x - z, \\ \frac{x}{z} = x - y. \end{cases}$$

10. Найдите сумму

а) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)$;

б) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2)$;

в) $1\cdot3\cdot5+2\cdot4\cdot6+3\cdot5\cdot7+\ldots+n(n+2)(n+4)$.

10 класс

11. На сторонах данного треугольника, как на диаметрах, построены окружности. Длины отрезков общих касательных этих окружностей равны k, l, m. Найдите периметр треугольника.

12. Четыре равносторонних треугольника сделаны боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды. Найдите отношение объема этой пирамиды к объему тетраэдра, составленного из тех же четырех треугольников.

13. В данный треугольник впишите шестиугольник так, чтобы противоположные стороны шестиугольника были равны и параллельны, три из этих сторон лежали на сторонах треугольника, а диагонали пересекались в заданной точке внутри треугольника.

14. Два путешественника садятся на поезда, идущие по одному и тому же замкнутому маршруту в противоположных направлениях и отправляющиеся одновременно. Поезда отходят от станции отправления каждые 15 минут в обоих направлениях. Поезд, идущий на восток, возвращается через 3 часа, поезд, идущий на запад, — через 2 часа. а) Сколько поездов встретил в пути каждый из путешественников? б) Сколько поездов встретятся каждому из путешественников, если они начнут считать встречные поезда с момента встречи их поездов?

15. Докажите, что если a и b взаимно-простые числа, то при некотором натуральном $n \leqslant b$ число $a^n - 1$ делится на b.

Публикацию подготовил *А. А. Егоров*

Традиционный осенний праздник юных математиков

(Начало см. на с. 8)

Но даже эта погода не могла рассеять тесные группы ребят, толпившихся по утрам в дни конференции перед классами, где проходила конференция. Доклады читались одновременно в трех секциях — это было вызвано и их обилием, и их разнообразием по уровню и тематике.

Пожалуй, с наибольшим вниманием слушатели отнеслись к докладам ребят о своих собственных решениях интересных трудных задач. Например, Денис Косыгин (ФМШ при МГУ) доказал, что сумма цифр чисел последовательности 2^n (и 5^n) стремится к бесконечности, Елена Шашкова (ПТУ № 13, Ленинград) решала геометрическую задачу об оценке ширины двери и коридора, позволяющей протащить боком стол заданных размеров, а Николай Григорьев (с. ш. № 57, Москва) рассказал о замощении фигур отрезками. Некоторые участники конференции познакомили со своими достижениями в области математики, существенно выходящими за рамки школьного курса,— разумеется, при этом им приходилось ограничиваться постановкой задачи и объяснением результата. Среди таких научных сообщений наиболее интересные были посвящены алгебре (так, Олег Матвеев из Свердловска рассказал об оценке числа корней многочленов от матриц, Алексей Родин из ФМШ при МГУ — о формуле для вычисления определителей); понравился жюри и доклад Бориса Музыкантского (с. ш. № 57, Москва) о некоторых задачах математической логики.

Все большее число школьников с увлечением занимается программированием; ряд докладов в Батуми был связан с вычислительными экспериментами (работы свердловчан), с алгоритмами, в разработке которых принимали участие докладчики (несколько интересных докладов об этом представили члены клуба юных программистов «ЮТА» из Таллина, в частности, они изучали модели кольцевого и встречного знакомства или, например, книгообмена).

Накануне торжественного закрытия праздника состоялся традиционный вечер дружбы — пожалуй, самый символический пункт программы. Разъезжались ребята, обогащенные не только приятными воспоминаниями и новыми знаниями, но и новыми друзьями из разных городов. А самые прочные дружеские связи установили, наверное, «специалисты по знакомствам и обменам» из Таллина; на зимних каникулах у них гостили ребята из ФМШ при МГУ.

Н. Б. Васильев,
В. Н. Дубровский

Квант для младших школьников

Задачи

1. Можно ли в 400-значном числе

84198419...8419

вычеркнуть несколько цифр в начале и в конце так, чтобы сумма оставшихся цифр равнялась 1984?

2. Расставьте в клетки таблицы 4×4 числа, не равные 0, так, чтобы сумма чисел в углах каждого квадрата 2×2, 3×3 и 4×4 клетки была равна 0.

3. В ряд выписаны числа 1 2...100. Двое играющих по очереди вставляют между ними знаки +, — и × (очередной знак можно ставить на любое свободное место). Докажите, что игрок, делающий первый (а значит, и последний) ход, может добиться, чтобы окончательный результат был нечетным числом.

4. 175 Шалтаев стоят дороже, чем 125 Болтаев, но дешевле, чем 126 Болтаев. Докажите, что на покупку 3 Шалтаев и 1 Болтая рубля не хватит, если каждый Шалтай и каждый Болтай стоят целое число копеек.

5. Звенья AB и CD шарнирного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O; при этом $AB=CD$ и $BC=AD$. Докажите, что $AO=CO$ и $BO=DO$.

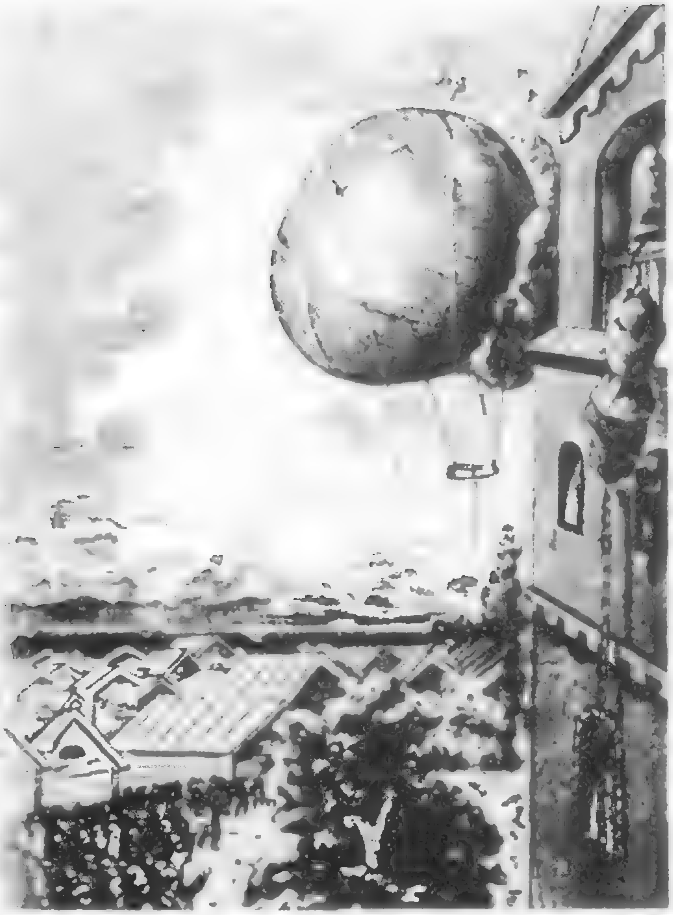
Эти задачи предлагались в 5—7 классах на юбилейной 50-й ленинградской олимпиаде. Их авторы: *А. Г. Гольдберг, С. Л. Генкин, С. В. Фомин.*

84198419
8419
0 11 12 13 14 15 16
A
D
O
C
B

Закон Архимеда

Доктор технических наук
А. Л. СТАСЕНКО

...фурвин (мешок) сделал, как мяч большой, надуя дымом поганым и вонючим, от него сделал петлю, сел в нее, и нечистая сила подняла его выше березы...
(рассказ о полете подъячего Крякутного в Рязани в 1731 году)



Возьмите кубик из дерева или пластмассы, который, может быть, остался от древних времен детского сада. Подержите его в воздухе где-то между полом и потолком и отпустите. Кубик упадет на пол. Почему? Понятно: его притягивает Земля с силой, которую называют силой тяжести.

Теперь, засучив рукава, поместите этот кубик в ванну, наполненную водой, где-то между дном и поверхностью воды и отпустите. Кубик всплывет. Почему? Разве сила притяжения Земли не действует на него через воду? Не может быть: ведь утюг или гантель опускаются на дно!

Значит, действует еще какая-то сила, направленная вверх,— выталкивающая сила. В случае кубика она «перебарывает» силу тяжести, в случае гантели ее не хватает, чтобы заставить гантель двигаться вверх.

Как бы узнать, чему равна эта выталкивающая сила? Обратимся к рисунку 1 и посмотрим, какое действие оказывает вода на опущенный в нее кубик. На все грани кубика действуют силы давления воды. Но, как известно, давление в жидкости на разной глубине разное — оно тем больше, чем больше глубина погружения. Значит, силы давления, действующие на верхнюю и нижнюю грани кубика, различны. Нетрудно догадаться, что сила, действующая на нижнюю грань, больше. Посмотрим, на сколько больше.

На верхнюю грань действует сила давления, направленная вниз и равная

$$F\downarrow=\varrho_ж g y a^2.$$

Сила, действующая со стороны воды на нижнюю грань, направлена вверх и равна

$$F\uparrow=\varrho_ж g(y+a)a^2.$$

Так что действие этих двух сил эквивалентно действию одной силы, направленной вверх и равной

$$F=F\uparrow-F\downarrow=\varrho_ж g(y+a)a^2-\varrho_ж g y a^2=\\=\varrho_ж g a^3.$$

Это и есть выталкивающая сила. Но $\varrho_ж g a^3$ это вес воды, которую можно было бы налить в наш кубик, если бы он был полым, то есть это вес воды в объеме кубика. Теперь понятно: если выталкивающая сила больше силы тяжести, которая «тянет» тело вниз, — тело всплывает; если эта сила меньше силы тяжести — тело опускается на дно; ну, а если тело плавает в глубине жидкости, это означает, что выталкивающая сила численно равна силе тяжести.*)

В справедливости наших вычислений можно убедиться и на опыте. Возьмите кусочек льда, например, из холодильника, положите его на дно стакана и налейте в стакан воду до краев. Лед будет плавать на поверхности — значит, действующая на лед сила тяжести уравновешена выталкивающей силой. У кубика, как и у корабля, есть надводная и подводная части. Через некоторое время лед растает, надводная его часть исчезнет. А что произойдет с уровнем воды в стакане? Оказывается, он не изменится! Значит, лед, став водой, заполнил как раз тот объем, который раньше занимала его подводная часть. Эту воду (бывший лед) на рисунке 2 мы заштриховали. Сила тяжести, действующая на нее, в точности равна силе тяжести, действовавшей на ледяной кубик. Получается, что для воды в стакане удерживать на плаву ледяной кубик — это то же самое, что удерживать заштрихованную воду. Со стороны воды в стакане на заштрихованную воду действует направленная вверх сила, численно равная весу этой воды. Она-то и есть выталкивающая сила, которая уравновешивает силу тяжести.

Итак, мы пришли к выводу, что на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, направленная вверх и численно равная весу жидкости в объеме погруженной части тела. Это и есть знаменитый закон Архимеда.

Сам Архимед формулировал эту мысль в других словах: «Твердое тело, которое имеет равный вес в равном объеме с жидкостью, погружается в нее настолько, что ни одна часть его поверхности не выступает над ее поверхностью, и не опускается ниже». Мы бы перевели это теперь так: если плотность твердого тела равна плотности жидкости, то тело погружается в эту жидкость целиком и не тонет. И еще Архимед говорил так: «Тела, относительно более тяжелые, чем жидкость, опускаются вниз до самого дна и становятся в жидкости на столько *легче, сколько весит объем жидкости*, равный объему тела».

Закон Архимеда люди, даже не зная его, использовали издревле, когда на бревне, надутом мехе или долбленой лодке переправлялись через реку. Но когда в прошлом веке от деревянных парусных кораблей стали переходить к железным пароходам, люди, далекие от физики и техники, возмутились: ведь железо, в отличие от дерева, тонет в воде.

Да, железная гантель тонет в воде, но если ее раскатать в тонкий лист и согнуть его «лодочкой» или в виде полушария, он будет плавать (ведь плавают же в пруду и реке пустые консервные банки, брошенные нехорошими туристами). *И банка, и лодочка вытесняют* такой объем воды, что выталкивающая сила, численно равная весу этого объема воды, уравновешивает силу тяжести, действующую на них. А вес воды, вытесняемой гантелью, мал, выталкивающая сила мала — и сила тяжести опускает гантель на дно.

Корабль погружается в воду настолько, что вес вытесняемой им воды оказывается в точности равным силе тяжести, действующей на корабль. А если плавающий корабль хотя бы немного

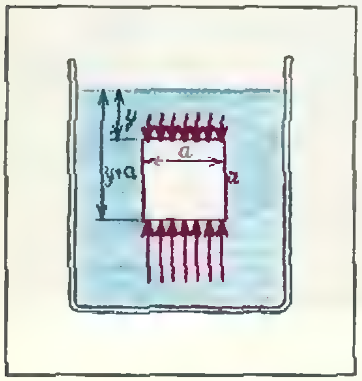


Рис. 1.

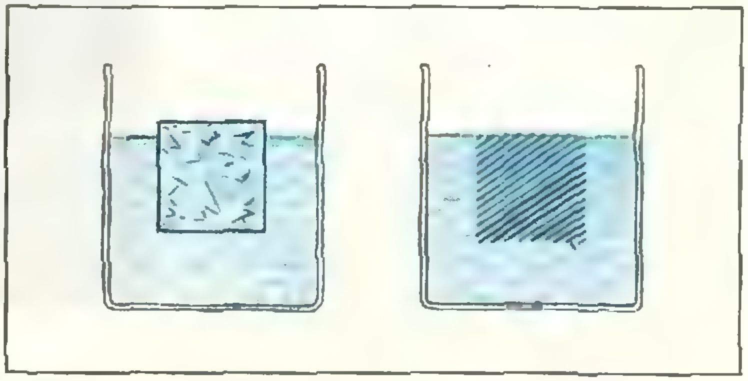


Рис. 2

---

*) Силы, действующие на боковые грани кубика, взаимно уничтожаются — они попарно равны и направлены в противоположные стороны. Поэтому в наших вычислениях мы их не учитывали.

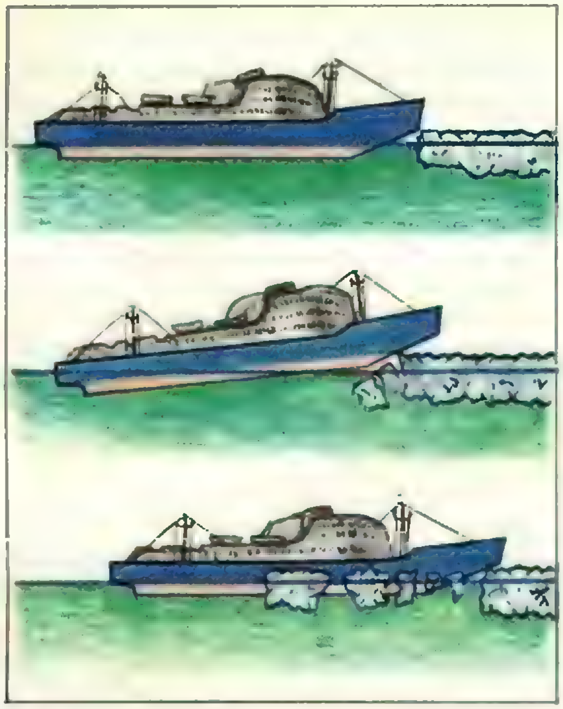


Рис. 3.

приподнять? Сила тяжести от этого не изменится, а выталкивающая сила уменьшится, так как уменьшится объем вытесняемой воды; и сила тяжести потянет корабль вниз. На таком принципе работает ледокол (рисунок 3): с разбегу он выползает носом на кромку льдины (для этого его нос делается очень пологим), и льдина лопается под действием той части веса корабля, которая оказывается уже не скомпенсированной выталкивающей силой воды.

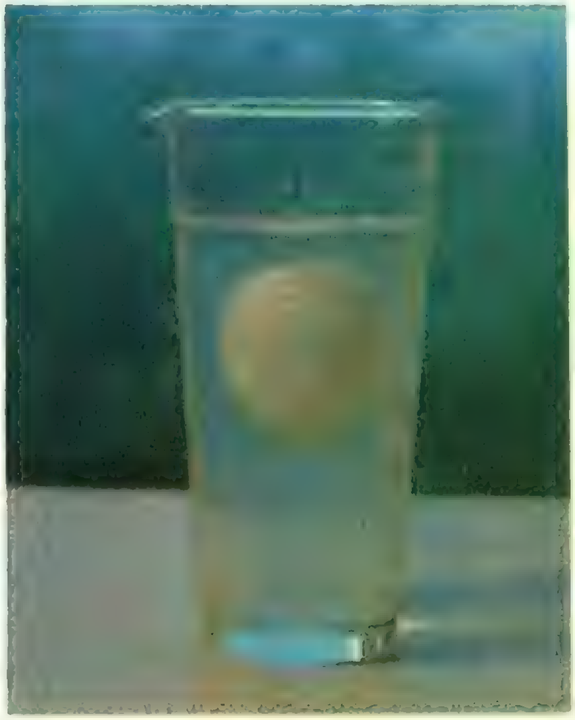
Итак, мы выяснили, при каких условиях тела плавают в жидкостях, при каких — тонут. Теперь давайте проделаем маленький эксперимент. Возьмите яблоко, разрежьте его пополам и опустите половинку в кастрюлю с водой — половинка плавает. А вторую половинку положите на дно пустой кастрюли срезом вниз и осторожно залейте водой, так, чтобы вода не проникала между яблоком и дном кастрюли (для этого можно заранее смазать срез по краям маслом). Эта половинка будет лежать на дне, как приклеенная. (О том, что все будет происходить именно так, свидетельствует фотография на обложке этого номера журнала.) Чем же объясняется столь разное поведение яблочных половинок? Дело в том, что во втором случае — половинка на дне — выталкивающая сила отсутствует, так как под яблоком нет воды. Кстати, не похоже ли это на резиновые присоски, которые используют, например, для развешивания полотенец? Конечно, похоже. Только присоски «работают» не в воде, а в воздухе.

До сих пор мы все время говорили о жидкостях. А воздух?!

Если вес воды — факт, очевидный из ежедневной практики, то осознание весомости воздуха пришло после долгих размышлений и фундаментальных физических опытов. Наконец эту мысль сформулировал Торричелли в следующих образных выражениях: «Мы погружены на дно безбрежного моря воздушной стихии, которая, как известно из неоспоримых опытов, имеет вес, причем он наибольший вблизи поверхности Земли».

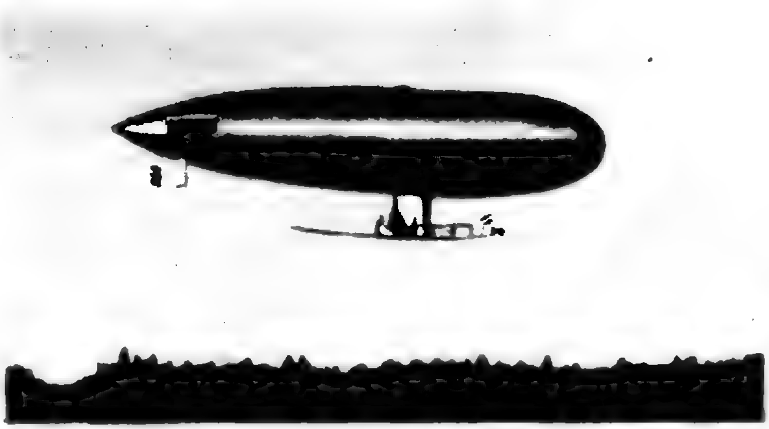
Значит, закон Архимеда должен работать и в воздухе.

...В 1783 году французские изобретатели братья Монгольфье построили бумажный шар, наполнили его горячим воздухом, и этот шар поднялся в небо. Посол России во Франции Барятинский, который наблюдал этот полет, писал «о поднятии на воздух великой тягости посредством дыма»: «Величество сего зрелища и чувствование, какое происходило в нескольких ста тысячах народа, описать никак невозможно, ибо ра-



Плотность куриного яйца равна, в среднем, 1095 кг/м^3, а плотность воды — 1000 кг/м^3. Почему же плавает яйцо?

Во время первой мировой войны на вооружении русской армии состоял дирижабль «Альбатрос». Длина этого воздушного корабля была 77 м, высота — 22 м. На дирижабле были установлены два двигателя общей мощностью около 350 лошадиных сил (1 л. с.≈736 Вт). Он развивал скорость до 19 м/с и мог подниматься до высоты 2000 м. «Альбатрос» совершил несколько боевых полетов, подвергая бомбардировке немецкие укрепления.



дость, чувствительность, страх, ужас и восторг видимы были на всех лицах, и до сего момента... публика еще как в чаду».

Нам теперь несложно объяснить, что удерживало шар Монгольфье «на плаву»: выталкивающая сила, равная весу воздуха в объеме шара, компенсировала действие силы тяжести, поскольку горячий воздух, заполнявший шар, легче холодного.

А вот еще один легкий «газ». Подумайте, почему облака оказываются вверху. Ведь облака образуются из водяного пара. Значит, водяной пар легче воздуха, и сила Архимеда «транспортирует» его вверх. А раз так, мы могли бы наполнить тонкую оболочку водяным паром и летать на таком устройстве?! Конечно, могли бы, надо только поддерживать температуру оболочки не ниже 100 °С, чтобы пар не конденсировался на ней,— иначе по ее внутренней поверхности потекут «слезы», как на холодном стекле окна зимой, и шар спустится.

Благодаря закону Архимеда летают аэростаты — это ведь своего рода «пузыри», заполненные легким газом, плавающие в «тяжелом» воздухе.

Во время первой мировой войны дирижабли (управляемые аэростаты) участвовали в военных действиях. Но дирижабли — не только прошлое. Недавно о них вспомнили снова из-за их экономичности: ведь самолет или вертолет, чтобы держаться в воздухе, должны изо всех сил «грести» винтами, пропеллерами или выбрасывать реактивные струи, а дирижабль висит «сам собой», не затрачивая энергии. И вот в недалеком будущем блестящие громадные сигары длиною в несколько сот метров, наполненные горячим воздухом, будут перемещать многотонные конструкции в труднодоступные районы гор или тайги. Сейчас это — проекты, а завтра...

Золотая спираль

(Начало см. на с. 15)

писал о нем: «В сочетании всех чудес грации и простоты, познаний и инстинкта в композиции Рафаэль достиг такого совершенства, в котором с ним еще никто не сравнился (...) В самых простых, как и в самых величественных, композициях повсюду его ум вносит вместе с жизнью и движением совершенный порядок и чарующую гармонию».

В композиции «Избиение младенцев» очень ярко проявляются эти черты великого мастера. В ней прекрасно сочетаются динамизм и гармония. Этому сочетанию способствует выбор золотой спирали за композиционную основу рисунка Рафаэля: динамизм ему придает вихревой характер спирали, а гармоничность — выбор золотого сечения как пропорции, определяющей развертывание спирали.

Задачник Кванта

Задачи

М881—М885; Ф893—Ф897

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 ноября 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9—84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М881, М882» или «Ф893». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М881, М882, М883 б) предлагались на юбилейной Ленинградской математической олимпиаде, М883 а), М884, М885 — на турнире городов (апрель 1984 г.).

Задачи Ф893—Ф897 предлагались на Всесоюзной физической олимпиаде (апрель 1984 г., Ереван).

М881. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки плоскости до трех вершин равнобедренной трапеции больше расстояния от этой точки до четвертой ее вершины.

С. Е. Рукшин

М882. Сумма трех целых чисел a, b и c равна 0. Докажите, что число $2a^4+2b^4+2c^4$ — квадрат целого числа.

Л. Д. Курляндчик, А. С. Меркурьев, С. В. Фомин

М883. В какое наименьшее число цветов нужно раскрасить клетки бесконечного листа клетчатой бумаги, чтобы

а) любые две клетки на расстоянии 6 были покрашены в разные цвета? (Расстояние между клетками — наименьшее число линий сетки, горизонтальных и вертикальных, которые должна пересечь ладья на пути из одной клетки в другую.)

б) любые четыре клетки, образующие фигуру в форме буквы Г (рис. 1), были покрашены в четыре разных цвета?

А. Г. Печковский, И. В. Итенберг

М884. Непрерывная и монотонная функция f определена на отрезке $[0;1]$ и принимает значения также на отрезке $[0;1]$. Докажите, что ее график можно прикрыть n прямоугольниками площади $1/n^2$ каждый (стороны прямоугольников параллельны осям координат).

А. В. Анджанс

М885*. Для каждого натурального числа n обозначим через $p(n)$ число разбиений n в сумму натуральных слагаемых (разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми; рис. 2). Количество различных чисел в данном разбиении назовем его *разбросом*.

а) Докажите, что сумма $q(n)$ разбросов всех разбиений числа n равна $1+p(1)+p(2)+\ldots+p(n-1)$.

б) Докажите, что эта сумма не больше $\sqrt{2n}\,p(n)$.

А. В. Зелевинский

Ф893. Для измерения распределения скорости ветра по высоте используются шары-зонды, которые имеют постоянную вертикальную скорость подъема. При запуске такого шара была получена зависимость угла α возвышения шара над горизонтом от времени t (рис. 3). Полагая скорость ветра у поверхности

Земли равной нулю, а расстояние от места запуска шара до наблюдателя равным $L=1$ км (рис. 4), определить высоту подъема шара через 7 минут после запуска и скорость ветра на этой высоте.

В. В. Можаев

Ф894. В одном из проектов для перелетов космических аппаратов в Солнечной системе предполагалось использовать солнечный парус площадью $S=1$ км^2. Парус раскрывается, когда аппарат движется вокруг Солнца по земной орбите, радиус которой равен $R_З=1{,}5\cdot10^8$ км. При дальнейшем движении парус постоянно ориентирован перпендикулярно солнечным лучам, давление которых на земной орбите составляет $p=10^{-5}$ Па.

1) При какой массе космического аппарата он может улететь из Солнечной системы?

2) При какой максимальной массе аппарат может достичь орбиты Марса, радиус которой равен $R_М=2{,}3\cdot10^8$ км?

Гравитационное влияние Земли и других планет не учитывать. Произведение массы Солнца на гравитационную постоянную — $M_СG=1{,}3\cdot10^{11}$ км^3/с^2.

В. А. Данилин

Ф895. Одна из гипотез о происхождении пояса астероидов восходит к древнегреческой легенде о сыне бога солнца Гелиоса — Фаэтоне, пораженном Зевсом (Юпитером). Согласно этой гипотезе рой каменных глыб, из которого должна была сформироваться планета Фаэтон, слишком близко подошел к Юпитеру. Под влиянием гравитационного поля Юпитера рой распался на отдельные глыбы — астероиды.

Радиус роя по оценкам составлял примерно 10^4 км; масса роя (суммарная масса астероидов) в 10^6 раз меньше массы Юпитера.

На каком расстоянии от центра Юпитера должен был пройти рой, чтобы он начал разваливаться?

В. Е. Белонучкин

Ф896. В замкнутом сосуде находятся насыщенный водяной пар при температуре 100 °С и остатки воды. Масса пара $M=100$ г, масса воды $m=1$ г. Сосуд нагревают, пока вся вода не испарится. До какой температуры надо нагреть сосуд? Какое количество тепла для этого потребуется? Давление насыщенного водяного пара возрастает на 3,7 кПа при повышении температуры на 1 °С. Удельная теплота испарения воды $r=2{,}25\cdot10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость водяного пара $c_V=1{,}38\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

А. И. Буздин

Ф897. Находящаяся на бесконечности в состоянии покоя заряженная частица притягивается однородно заряженным полукольцом вдоль линии AB (рис. 5). Отношение скоростей частицы в точках B и A равно $v_A/v_B=n$. Найти отношение ускорений частицы в этих точках.

В. Т. Карапетян

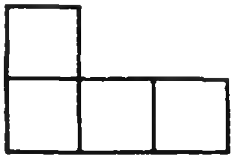


Рис. 1.

Разбиения	Разбросы
1+1+1+1	1
2+1+1	2
2+2	1
3+1	2
4	1
$p(4)=5$	$q(4)=7$

Рис. 2.

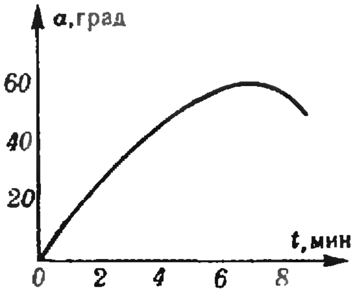


Рис. 3.

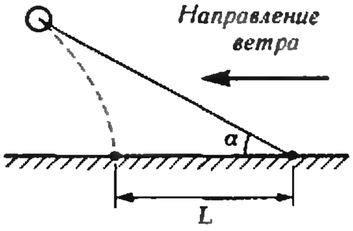


Рис. 4.

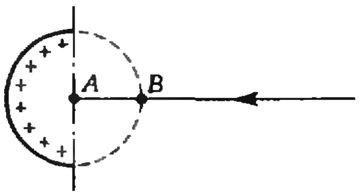


Рис. 5.

Problems

M881—M885; P893—P897

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than November 30th, 1984 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».
Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

Problems M881, M882, M883b) were proposed at the 50th Leningrad mathematics olympiad, while M883a), M884, M885 were proposed at the Intercity math tournament (April 1984).
Problems P893—P897 were proposed at the Allunion physics olympiad (April 1984, Erevan).

M881. Prove that the sum of distances from an arbitrary point of the plane to three vertices of an equilateral trapezium is greater than the distance to the fourth vertex.

S. E. Rukshin

M882. The sum of the three integers a, b and c is zero. Prove that the number $2(a^4+b^4+c^4)$ is the square of an integer.

L. D. Kurlyandchik, S. V. Fomin, A. S. Merkuriev

M883. What least number of colours are needed to paint an infinite sheet of square lined paper so that
a) any two little squares at a distance of 6 from each other are painted in different colours? (The distance between two squares is the number of lines — horizontal and vertical — that a rook going from one square to the other will intersect.)
b) any four little squares constituting a Greek Γ (see figure 1) have different colours?

A. V. Pechkovski, I. B. Itenberg

M884. The monotonic function f is defined on the closed interval $[0, 1]$ and ranges over $[0, 1]$. Prove that its graph, for any n, may be covered by n rectangles of area $1/n^2$ each. (The sides of the rectangles are parallel to the coordinate axes.)

A. V. Andjans

M885*. For each natural number n denote by $p(n)$ the number of partitions of n into a sum of natural numbers. (Partitions which differ only in the order of summands are not distinguised; e. g. $p(4)=5$ (see figure 2). The *diversity* of the given partition is by definition the quantity of different summands in the partition.
a) Prove that the sum $q(n)$ of diversities of all the partitions of n is equal to $1+p(1)+p(2)+\ldots$ $\ldots+p(n-1)$.
b) Prove that this sum does not exceed $\sqrt{2n}\cdot p(n)$.

A. V. Zelevinsky

P893. In order to measure wind velocity distribution depending on altitude, baloon probes with constant vertical elevation velocity are used. When such a baloon was sent up, the following dependence of the angle of elevation α of the baloon above the horizon on time t was obtained (see figure 3). Assuming wind velocity at the earth's surface to be zero and the distance from the observer to the point where the baloon was released to be $L=1$ km (figure 4), determine the altitude of the baloon 7 minutes after it was released and the wind velocity at that altitude.

V. V. Mozhaev

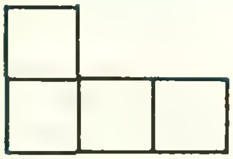


Fig. 1

Partitions	Diversity
1+1+1+1	1
2+1+1	2
2+2	1
3+1	2
4	1
$p(4)=5$	[illegible](4)=1

Fig. 2

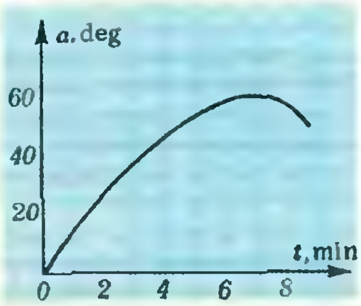


Fig. 3.

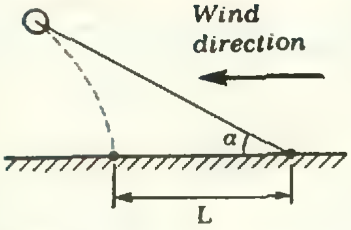


Fig. 4.

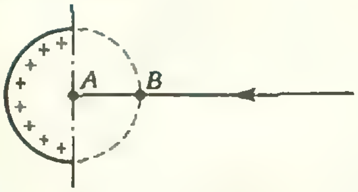


Fig. 5.

P894. In one of the projects for the flight of spacecraft within the Solar system a solar sail of area $S=1$ km^2 was proposed. The sail is opened when the spacecraft moves around the Sun on the Earth's orbit, whose radius is $R_E=1{,}5\times10^8$ km. As the spacecraft moves, the sail is kept oriented perpendicularly to the sun's rays, whose pressure in the vicinity of the orbit is $p=10^{-5}$ Pa.

1) For what mass of the spacecraft will it be able to leave the Solar system?

2) For what maximal mass will the spacecraft be able to reach Mars' orbit, whose radius in $R_M=2{,}3\times10^8$ km? The gravitational attraction of Earth and other planets may be neglected. The product of the Sun's mass by the gravitational constant is $M_S\gamma=1{,}3\times10^{11}$ km^3/c^2.

V. A. Danilin

P895. One of the hypotheses explaining the asteroid belt goes back to the ancient Greek legend about the Sun's son Phaeton, struck down by Jupiter (Zeus). According to this legand, the group of rock pieces, which eventually would have formed the planet Phaeton, moved too close to Jupiter. Under the influence of Jupiter's gravitational field, the group fell apart into separate pieces — asteroids. The radius of the group was estimated as approximately equal to 10^4 km; the mass of the group (the total mass of the asteroids) is 10^6 less than that of Jupiter. How close did the group have to approach Jupiter in order to fall apart?

V. E. Belonuchkin

P896. A closed receptacle contains saturated vapor at temperature 100 °C and leftover water. The mass of vapor is $M=100$ g, the mass of water $m=1$ g. The receptacle is heated until all the water evaporates. To what temperature must be receptacle be heated? What amount of heat will be required? The pressure of saturated vapor increases by 3,7 kPa when the temperature in creases by 1 °C. The specific heat of water vaporation is $r=2.25\cdot$J/kg, the specific heat capacity of vapor is $C_V=1.38\times10^3$ J/(kg·K).

A. I. Buzdin

P897. A particle, located at infinity in motionless state, is attracted by a uniformly charged half ring along the line AB (see figure 5). The ratio of velocities at points B and A is $v_A/v_B=n$. Find the ratio of accelerations at these points.

V. T. Karapetian

Решения задач

М866—М870; Ф878—Ф882

М866. *а) Во всех клетках квадрата 20×20 стоит по одному солдатику. Для какого наибольшего d можно переставить солдатиков в другие клетки так, чтобы каждый передвинулся на расстояние не меньше d?*

Решение задачи во всех вариантах основано на таком простом соображении: солдатик, стоящий в центре прямоугольника, не может передвинуться на расстояние, большее чем расстояние между центральной и угловой клеткой. Именно это расстояние d и слу-

(Расстояние измеряется по прямой между центрами старой и новой клеток; сторона клетки равна 1.)
Решите эту же задачу
б) для квадрата 21×21;
в) для прямоугольника m×n клеток.

жит ответом. Но детали доказательства слегка зависят от четности чисел m и n.

Мы будем рассматривать три случая: прямоугольники $2k\times 2l$, у которых имеются четыре центральные клетки (рис. 1), $(2k+1)\times 2l$ с двумя центральными клетками (рис. 2) и $(2k+1)\times(2l+1)$ с единственной центральной клеткой (рис. 3). Докажем, что во всех трех случаях искомое расстояние d равно $\sqrt{k^2+l^2}$. (С использованием знака $[x]$ для целой части числа x ответ в общей задаче в) можно записать так:

$$d=\sqrt{\left[\frac{m}{2}\right]^2+\left[\frac{n}{2}\right]^2}.)$$

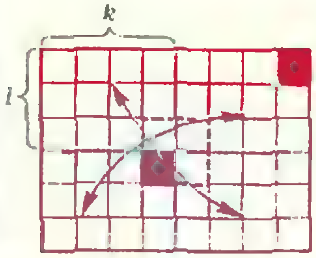


Рис. 1.

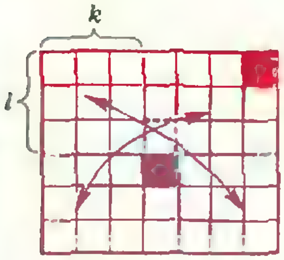


Рис. 2.

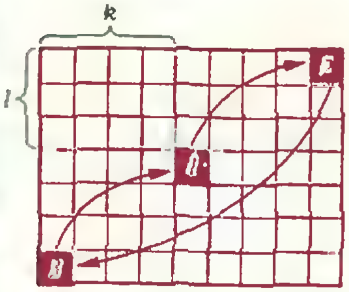


Рис. 3.

Таким образом, ответ в обеих задачах а) и б): $d=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$.

Чтобы обосновать ответ, мы должны, во-первых, доказать, что при любой перестановке найдется солдатик, смещающийся на расстояние не более d, и, во-вторых, привести пример перестановки, при которой любой солдатик смещается на такое (или большее) расстояние.

Первая часть почти очевидна: при любой перестановке центральный солдатик смещается по гипотенузе прямоугольного треугольника, у которого катеты (параллельные сторонам прямоугольника) не превосходят k и l, то есть на расстояние, не большее $d=\sqrt{k^2+l^2}$.

Вторая часть — пример перестановки — показана на рисунках 1—3. В самом простом случае прямоугольник $2k\times 2l$ разрезается на четыре прямоугольника $k\times l$ и расположенные по диагонали пары прямоугольников (точнее, стоящие в них солдатики) переставляются друг с другом с помощью параллельных переносов. Аналогично, прямоугольник $(2k+1)\times l$ разрезается на пары переставляющихся прямоугольников $(k+1)\times l$ и $k\times l$. Для прямоугольников $(2k+1)\times(2l+1)$ солдатик из центральной клетки 1 отправляется в угол 2, солдатик из 2 — в противоположный угол 3, а солдатик из 3 — в центр на место 1 (рис. 3); остальные, — стоящие в двух прямоугольниках $(k+1)\times(l+1)$ с удаленными углами и двух других диагональных прямоугольниках $k\times l$, — меняются местами, как и в предыдущих вариантах.

Заметим, что если «расстояние» измерять не напрямик, *а по числу ходов ладьи* (*как в условии задачи* **М883** *этого номера*), то решение задачи никак не изменится, а ответом будет (в тех же обозначениях) число $d=k+l=\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]$.

Н. Б. Васильев, С. С. Кротов

◆

М867. *На уроке танцев 17 мальчиков и 17 девочек построили двумя параллельными рядами так, что образовалось 17 пар. При этом рост мальчика и девочки в каждой паре отличаются не более чем на десять сантиметров. Докажите, что если в каждом ряду перестроить мальчиков и девочек по росту, то по-прежнему в каждой паре мальчик и девочка будут отличаться по росту не более чем на десять сантиметров.*

Пусть мальчики и девочки построены в пары в порядке убывания роста. Предположим, что в одной из пар, скажем k-й, рост мальчика отличается от роста девочки больше, чем на 10 см, например, мальчик (обозначим его B) выше девочки (G). Тогда B, а значит и все первые k мальчиков, выше следующих за G девочек больше чем на 10 см. Таким образом, при первом построении в парах с этими k мальчиками могли стоять только предшествующие G девочки, а их всего $k-1$. Противоречие.

Напомним замечательную старую задачу, очень похожую по формулировке и идее решения. Пусть числа в прямоугольной таблице $m\times n$ в каждой строке стоят в порядке возрастания; надо доказать, что если в каждом столбце их переставить в порядке возрастания, то по-прежнему в каждой строке они будут стоять в порядке возрастания.

В. Л. Гутенмахер, Н. Б. Васильев

◆

M868. *Из вершин основания тетраэдра в боковых гранях проведены высоты. Докажите, что три прямые, соединяющие основания высот в каждой грани, параллельны одной плоскости. (Плоские углы при вершине — не прямые.)*

Приведем три решения задачи. Два из них опираются на следующий полезный факт:

если в треугольнике ADB (в котором угол D — не прямой) соединить основания высот AK и BL, то образуется треугольник KDL, подобный данному, причем $\widehat{DKL}=\widehat{DAB}$, $\widehat{DLK}=\widehat{DBA}$ (рис. 1).

(В самом деле, пусть угол $ADB=\varphi$ — острый. Тогда для рассматриваемых треугольников он общий, и содержащие его стороны пропорциональны:

$$\frac{|DK|}{|DL|}=\frac{|DA|\cdot\cos\varphi}{|DB|\cdot\cos\varphi}=\frac{|DA|}{|DB|}. \qquad (*)$$

В случае тупого угла ADB рассуждение аналогично.)

Первое решение. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, ABC — его основание. Докажем, что три прямые из условия задачи параллельны плоскости, которая касается описанной сферы тетраэдра в вершине D. Очевидно, каждая из боковых граней тетраэдра пересекает эту плоскость по касательной к описанной окружности этой грани, поэтому достаточно доказать, что эти три прямые параллельны соответствующим касательным.

Рассмотрим, например, грань ABD; пусть AK и BL — высоты этой грани, DE — касательная к ее описанной окружности (рис. 2). Тогда

$$\widehat{ABK}=\frac{1}{2}\breve{AD}=\widehat{ADE}$$

(первое равенство следует из теоремы об измерении угла, вписанного в окружность, второе — из теоремы об угле между касательной и хордой). Итак, углы DBA, DLK и ADE равны по величине, следовательно, прямые KL и DE параллельны.

Их параллельность вытекает также из следующей полезной теоремы: в любом треугольнике ADB радиус DO описанной окружности и высота DH образуют одинаковые углы с боковыми сторонами: $\widehat{ADO}=\widehat{HDB}$ (рис. 3).

Второе решение. Пусть a, b, c — длины ребер DA, DB, DC тетраэдра. Отложим на лучах DA, DB, DC отрезки DA_1, DB_1, DC_1, равные по длине произведениям bc, ca, ab соответственно.

Докажем, что описанные в условии прямые параллельны прямым A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 (тем самым, параллельны плоскости $A_1B_1C_1$).

Рассмотрим, как и прежде, грань ABD. Треугольники KLD и B_1A_1D подобны, поскольку согласно (*)

$$\frac{|DK|}{|DL|}=\frac{|DA|}{|DB|}=\frac{a}{b}=\frac{ca}{bc}=\frac{|DB_1|}{|DA_1|},$$

следовательно, прямые KL и A_1B_1 параллельны.

Разумеется, в этом решении вместо тройки ab, bc, ca можно было бы взять любую пропорциональную ей тройку чисел,

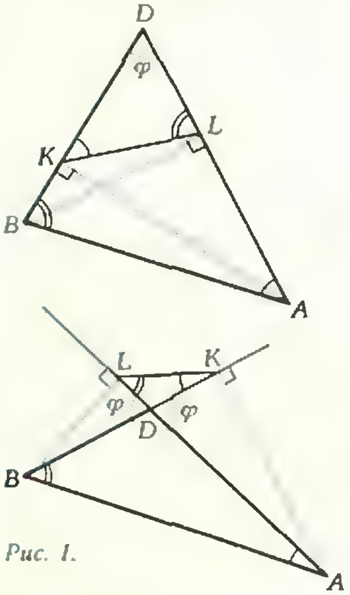


Рис. 1.

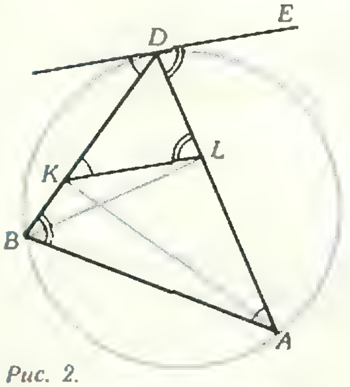


Рис. 2.

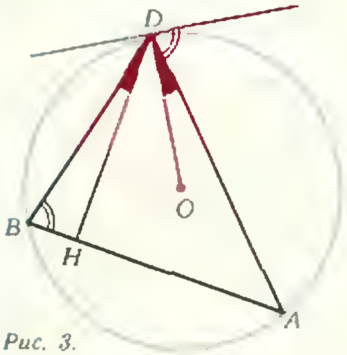


Рис. 3.

например, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$.

Третье решение — векторное. Пусть $\vec{DA}=\vec{a}$, $\vec{DB}=\vec{b}$, $\vec{DC}=\vec{c}$, тогда, как легко видеть из рисунка 1,

$$\vec{LK}=\vec{BK}-\vec{BL}=b\cos\varphi\cdot\frac{\vec{a}}{a}-a\cos\varphi\cdot\frac{\vec{b}}{b}=\left(\frac{\vec{a}}{a^2}-\frac{\vec{b}}{b^2}\right)\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

(где $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\varphi$). Аналогичная формула верна и для двух других боковых граней тетраэдра. Но три вектора

$$\frac{\vec{a}}{a^2}-\frac{\vec{b}}{b^2}\cdot\frac{\vec{b}}{b^2}-\frac{\vec{c}}{c^2}\cdot\frac{\vec{c}}{c^2}-\frac{\vec{a}}{a^2}$$

дают в сумме нуль-вектор и поэтому компланарны. Следовательно, описанные в условии прямые, будучи параллельны этим векторам, параллельны одной плоскости.

Н. Б. Васильев, В. Н. Дубровский, В. Л. Гутенмахер

◆

М869*. *Пары последовательных натуральных чисел (8, 9); (288, 289) обладают тем свойством, что каждое из этих чисел содержит любой простой множитель не менее чем во второй степени.*
а) Найдите еще одну такую пару последовательных чисел.
б) Докажите, что существует бесконечно много таких пар.

Если пара чисел m, $m+1$ обладает нужным свойством (каждое из чисел не содержит простых множителей в первой степени), то и пара чисел $4m(m+1)$, $4m(m+1)+1$ тоже им обладает: первое число, равное $2^2m(m+1)$, по предположению, а второе, — равное $4m^2+4m+1=(2m+1)^2$, — потому, что оно является квадратом. Применяя эту операцию к паре чисел (8, 9), мы получаем как раз пару $4\cdot8\cdot9=288$; $289=17^2$, указанную в условии. Из этой пары, в свою очередь, можно получить еще одну пару $4\cdot288\cdot289=331828$; $331829=577^2$. (Впрочем, читатели указали в ответе к задаче а) и меньшие числа: $675=3^3\cdot5^2$, $676=2^2\cdot13^2$; $12167=23^3$, $12168=2^3\cdot3^2\cdot13^2$ и др.)

Продолжая таким же образом, с помощью операции

$$(m;\ m+1)\to(4m(m+1);\ 4m(m+1)+1),$$

при которой оба числа пары, очевидно, возрастают, мы можем построить сколько угодно нужных пар чисел.

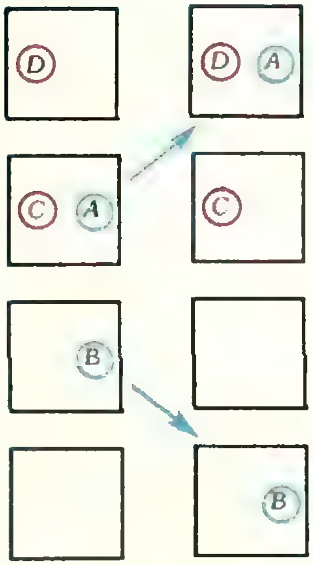
А. В. Анджанс

◆

М870. *По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некоторое конечное число пианистов. (В одной комнате может жить и несколько пианистов.) Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах — k-й и (k+1)-й, — приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в (k−1)-ю и (k+2)-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.*

Интуитивно утверждение задачи довольно понятно: с каждым переселением распределение пианистов становится все более «разреженным», но когда оно станет совсем «разреженным», переселения должны прекратиться, потому что соседствующих пианистов не останется. Попытаемся придать этим рассуждениям строгую форму.

Обозначим через $s=s(t)$ сумму всех попарных расстояний между пианистами в t-й день (под «расстоянием» между пианистами, живущими в k-й и m-й комнатах понимается модуль разности номеров комнат — $|m-k|$). Легко видеть, что *с каждым переселением величина $s(t)$ растет*. Действительно (см. рис.), расстояние между любыми двумя переселяющимися пианистами A и B в результате переселения увеличивается на 2, на столько же увеличивается сумма расстояний от A и B до любого



пианиста C, жившего вместе с одним из них, а для всякого другого пианиста D сумма расстояний до A и B не меняется. Таким образом,

$$s(t+1) \geqslant s(t)+2. \qquad (*)$$

(Вместо суммы попарных расстояний, в качестве «степени разреженности» распределения можно взять также сумму их квадратов, или сумму квадратов номеров комнат всех пианистов.)

Докажем теперь, что распределение по комнатам не может стать слишком «разреженным», то есть *существуют такие два номера m и M, $m<M$, что пианисты всегда будут оставаться в комнатах с номерами от m до M.*

Для этого заметим, что если в какой-то день в трех соседних комнатах (с номерами $k-1$, k и $k+1$) живет хотя бы один пианист, то и в дальнейшем хотя бы одна из них всегда будет заселена. (В самом деле, покинуть эти комнаты можно, лишь переселяясь из $(k+1)$-й в $(k+2)$-ю или из $(k-1)$-й в $(k-2)$-ю; но и то, и другое возможно, только если и в k-й комнате жил пианист, переселившийся соответственно, в $(k-1)$-ю или $(k+1)$-ю комнату.) Следовательно, пианист из k-й комнаты не может попасть в комнату с номером, большим $k+3N$, где N — число пианистов (после такого переселения в каждой из $N+1$ троек комнат с номерами $(k, k+1, k+2)$, ..., $(k+3N, k+3N+1, k+3N+2)$ должны были бы остаться пианисты); по той же причине невозможно переселиться из k-й комнаты дальше, чем в $(k-3N)$-ю. Итак, пианисты всегда будут оставаться в комнатах с номерами от $a-3N$ до $b+3N$, где a и b $(a \leqslant b)$ — номера крайних комнат, первоначально занятых пианистами.

Отсюда вытекает, что сумма $s(t)$ попарных расстояний между пианистами не может неограниченно возрастать, а в силу $(*)$ отсюда вытекает, что переселения через конечное число дней прекратятся.

В. Г. Ильичев

◆

Ф878. *Два гладких желоба, образующих с горизонтом одинаковые углы α, расположены в одной вертикальной плоскости (рис. 1). Из точки A одного желоба и из точки B другого желоба одновременно без начальных скоростей начинают соскальзывать два тела. Время движения до горизонтальной плоскости первого тела (из точки A) — t_1, второго — t_2. Через какое время после начала движения тел расстояние между ними было наименьшим?*

При движении тел разность высот, на которых они будут находиться в один и тот же момент времени, всегда будет одной и той же и равной (см. рисунок 1) $\Delta h = h_1 - h_2$. Следовательно, расстояние между телами будет минимальным тогда, когда они будут находиться на одной вертикали, то есть по горизонтали расстояние между телами будет равно нулю. Поскольку начальные скорости обоих тел равны нулю и углы наклона их траекторий к горизонту одинаковы, ясно, что на одной вертикали тела окажутся в тот момент, когда, пройдя одинаковые пути, тела сместятся по вертикали каждое на $\Delta h/2$. Так что время $t_{\min}$, через которое расстояние между телами будет минимальным, — это время, за которое любое тело из начальной точки сместится по высоте на $\Delta h/2$, то есть

$$\frac{g' t_{\min}^2}{2} = \frac{\Delta h}{2} \Rightarrow t_{\min} = \sqrt{\frac{\Delta h}{g'}},$$

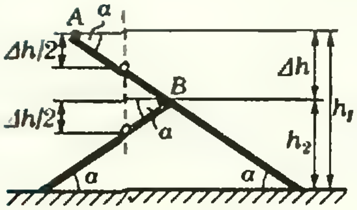


Рис. 1.

где g' — вертикальная проекция ускорения тел, которую найдем, воспользовавшись II законом Ньютона: в проекциях на вертикальную ось (см. рисунок 2)

$$mg' = mg - mg\cos^2\alpha \Rightarrow g' = g\sin^2\alpha.$$

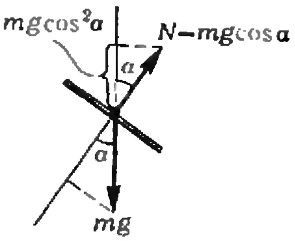


Рис. 2.

Найдем Δh:

$$h_1=\frac{g't_1^2}{2},\quad h_2=\frac{g't_2^2}{2},\quad \Delta h=h_1-h_2=\frac{g'}{2}\left(t_1^2-t_2^2\right).$$

Таким образом,

$$t_{\min}=\sqrt{\frac{t_1^2-t_2^2}{2}}.$$

Н. М. Шихалиев

◆

Ф879. *Вагон массы M, установленный на рессорах с жесткостью k, катится по горизонтальному участку пути со скоростью v_0. После прохождения прямолинейного наклонного участка пути с перепадом высот H, составляющего угол α с горизонтом (рис. 1), вагон приобретает скорость v_x. Определить значение v_x, пренебрегая трением в колесах. Считать, что период колебаний вагона на рессорах много меньше времени прохождения наклонного участка пути и много больше времени прохождения скруглений, сопрягающих наклонный и прямолинейные участки пути; рессоры «пружинят» только в направлении, перпендикулярном плоскости рельсов.*

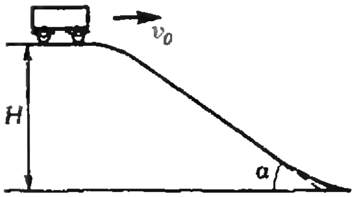


Рис. 1.

При прохождении вагоном скруглений возникают колебания. При этом часть кинетической энергии вагона переходит в энергию колебаний, которая затем, когда колебания затухают, переходит в тепло. Таким образом,

$$\frac{Mv_x^2}{2}+U=\frac{Mv_0^2}{2}+MgH, \tag{*}$$

где U — энергия колебаний. Определим U.

При прохождении первого скругления нагрузка на рессоры уменьшается, так как сила нормального давления становится равной $F_2=Mg\cos\alpha$, а не $F_1=Mg$, как было на прямолинейном участке. При прохождении второго скругления нагрузка возрастает до прежней величины. За время спуска по наклонному участку колебания, вызванные уменьшением нагрузки, успевают затухнуть, так что оба процесса надлежит рассматривать независимо.

Рассмотрим пружину, сжатую силой $F=F_1$ и находящуюся в равновесии. Длина пружины меньше длины ненагруженной пружины на $x_1=F_1/k$. При ослаблении нагрузки до величины $F_2<F_1$ происходят колебания около нового положения равновесия, соответствующего сжатию пружины на $x_2=F_2/k$. После затухания колебаний пружина устанавливается в этом равновесном положении. Полная работа сил упругости пружины, равная разности упругих энергий в первом и во втором положениях, —

$$A_{\text{упр}}=\frac{1}{2}\left(F_1x_1-F_2x_2\right)=\frac{k}{2}\left(x_1^2-x_2^2\right)=\frac{1}{2k}\left(F_1^2-F_2^2\right)$$

(на рисунке 2 этой работе соответствует площадь трапеции, заштрихованной вертикально). Если ослабление нагрузки произошло за время, гораздо меньшее периода колебаний, то можно считать, что во время изменения координаты сила нормального давления все время равна приближенно F_2, так что работа против сил нагрузки равна

$$A_{\text{нагр}}=F_2(x_1-x_2)$$

(на рисунке 2 этой величине соответствует площадь горизонтально заштрихованного прямоугольника). Разность двух вычисленных работ равна энергии колебаний, перешедшей в тепло при затухании колебаний, то есть

$$U_1=\frac{(F_1+F_2)(F_1-F_2)}{2k}-\frac{F_2(F_1-F_2)}{k}=\frac{(F_1-F_2)^2}{2k}$$

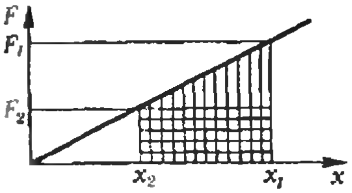


Рис. 2.

(на рисунке 2 этой энергии соответствует площадь вертикально заштрихованного треугольника).

При быстром возрастании нагрузки от F_2 до F_1 работа сил упругости за время, большее времени затухания колебаний, равна площади трапеции, заштрихованной на рисунке 3 вертикально. Силу нагрузки все это время можно считать равной приближенно F_1; работа, которая совершается против сил нагрузки, — $F_1(x_1-x_2)$ (площадь горизонтально заштрихованного прямоугольника на рисунке 3). В тепло переходит энергия, равная разности этих работ, то есть

$$U_2=\frac{1}{2}(F_1-F_2)(x_1-x_2)=\frac{(F_1-F_2)^2}{2k}$$

(площадь горизонтально заштрихованного треугольника на рисунке 3).

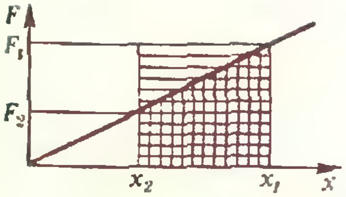


Рис. 3.

Таким образом, в результате процессов уменьшения нагрузки от F_1 до F_2 и затем возрастания ее до прежней величины F_1 в тепло переходит энергия

$$U=U_1+U_2=\frac{(F_1-F_2)^2}{k}=\frac{(Mg(1-\cos\alpha))^2}{k}.$$

Подставив это значение U в уравнение (*), найдем v_x:

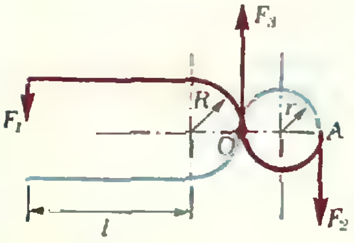
$$v_x=\sqrt{v_0^2+gH-2Mg^2(1-\cos\alpha)^2/k}.$$

Эта формула применима, пока k достаточно велико, чтобы обеспечить малость периода и времени затухания по сравнению со временем спуска.

И. П. Крылов

◆

Ф880. *Клещи состоят из двух одинаковых частей, скрепленных осью в точке O (см. рисунок). Какова сила, действующая на ось, если свободные концы клещей сжимают с силой F? Трение в оси отсутствует.*



Определим силу, действующую на ось со стороны одной из половинок клещей.

На рисунке показаны силы, действующие на красную половинку (направление силы F_3, действующей со стороны оси на эту половинку, однозначно определяется направлением силы $F_1=F$ и силы F_2, действующей на красную половинку со стороны синей). Значение силы F_3 найдем, воспользовавшись правилом моментов. Запишем уравнение моментов относительно точки A (см. рисунок):

$$2rF_3=(l+R+2r)F_1 \Rightarrow F_3=F_1\left(1+\frac{l+R}{2r}\right)=$$
$$=F\left(1+\frac{l+R}{2r}\right).$$

Согласно III закону Ньютона на ось со стороны красной половинки действует сила $\vec{F}_3'=-\vec{F}_3$, то есть

$$F_3'=F\left(1+\frac{l+R}{2r}\right)$$

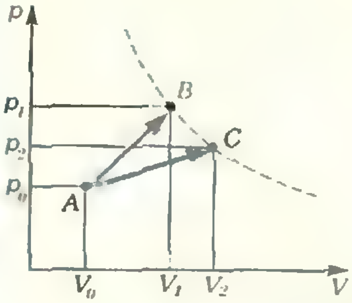
(F_3' — абсолютное значение силы $\vec{F}_3'$). Понятно, что со стороны синей половинки на ось действует такая же, по абсолютной величине, сила. Так что сила, сжимающая ось, равна

$$F_{сж}=F\left(1+\frac{l+R}{2r}\right).$$

Л. Г. Маркович

◆

Ф881. *Над газом совершают два тепловых процесса, нагревая его из одного и того же состояния до одной и той же конечной температуры. На p—V-диаграмме процессы изображаются прямыми линиями (см. рисунок). При каком из процессов газу сообщается большее количество тепла?*



Согласно первому закону термодинамики при переходе газа из состояния A (p_0, V_0) в состояние B (p_1, V_1)

$$\Delta Q_1=\Delta U_1+A_1,$$

причем

$$A_1=\frac{p_0+p_1}{2}(V_1-V_0).$$

При переходе газа из состояния A в состояние C (p_2, V_2)

$$\Delta Q_2=\Delta U_2+A_2, \quad A_2=\frac{p_0+p_2}{2}(V_2-V_0).$$

Поскольку конечная температура газа в состоянии B и в состоянии C одна и та же, $\Delta U_1=\Delta U_2$. Чтобы выяснить, в каком процессе газу сообщается большее количество теплоты, надо сравнить значения A_1 и A_2. Сделаем это:

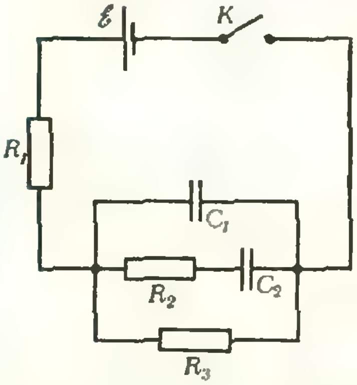
$$A_1-A_2=\frac{1}{2}\left((p_0V_1-p_0V_2)+(p_2V_0-p_1V_0)\right)<0,$$

так как $p_0V_1<p_0V_2$, $p_2V_0<p_1V_0$. Следовательно, $A_2>A_1$ и $\Delta Q_2>\Delta Q_1$, то есть в процессе $A\to C$ газу сообщается большее количество теплоты.

А. И. Буздин, С. С. Кротов

◆

Ф882. *В схеме, приведенной на рисунке, $R_1=R_2=R_3=R$, $C_1=C_2=C$. Определитр величину тока через источник с ЭДС $\mathcal{E}$: а) в первый момент времени после замыкания ключа K; б) спустя большой промежуток времени.*



В первый момент времени после включения ключа K, когда все конденсаторы еще не заряжены и напряжение на них равно нулю, ток, который потечет через резистор R_1, начнет заряжать конденсатор C_1; ни через резистор R_2, ни через резистор R_3 ток не потечет и падения напряжений на них будут равны нулю. Поэтому в первый момент времени

$$I_1=\frac{\mathcal{E}}{R_1}=\frac{\mathcal{E}}{R}$$

(мы считаем источник идеальным).

Спустя большой промежуток времени все конденсаторы зарядятся, и установившийся ток будет течь только через резисторы R_1 и R_3. Поэтому

$$I_{уст}=\frac{\mathcal{E}}{R_1+R_3}=\frac{\mathcal{E}}{2R}.$$

С. К. Строков

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М836 — М845, М847 — М850, Ф848 — Ф862, справились с задачами М836, М837, М841, М842, М849 и Ф853, Ф857, Ф859. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Х. Агаев (с. Тьюркоба Аз.ССР) 50; *М. Александров* (Москва) 43, 44, 50; *Р. Алексеев* (Ленинград) 38, 40, 43—45, 47, 48, 50; *Я. Алиев* (Баку) 43; *А. Аляев* (р.п. Пачелма Пензенской обл.) 43; *Г. Андреева* (Пермь) 43; *А. Артюх* (Чернигов) 43, 50; *А. Асрян* (с. Грибоедов Арм.ССР) 43—45, 50; *А. Астрелин* (Новосибирск) 43—45; *Р. Бабаев* (Баку) 43, 50; *Е. Баланова* (Рига) 43, 44; *А. Барабаш* (Киев) 43, 44; *Ю. Бекетов* (Ленинград) 45; *А. Белоус* (Винница) 43, 44; *В. Бережной* (Киев) 43, 44; *А. Биргер* (Иваново) 38, 39, 40; *И. Бирман* (Донецк) 44, 50; *А. Бирюков* (Саратов) 50; *И. Бордовский* (Трубчевск) 43; *Р. Боташев* (Фрунзе) 43, 44; *Н. Ботвина* (Одесса) 43; *Т. Бурмистрова* (Сердобск) 43; *И. Вайнштейн* (Первоуральск) 44; *А. Ванин* (Днепропетровск) 43, 44; *В. Василенко* (Ростов-на-Дону) 43, 50; *В. Васильев* (Воткинск) 43, 50; *С. Велесько* (Минск) 38; *Э. Велиметов* (Баку) 43, 44; *В. Веретенов* (Москва) 43, 44; *И. Верный* (Киев) 44; *Л. Вертгейм* (Новосибирск) 40, 43—45, 50; *И. Вехтер* (Кишинев) 38, 44, 50; *Р. Видгоп* (Баку) 50; *А. Вишик* (Москва) 43—45, 47, 48, 50; *И. Воронков* (Гатчина) 43; *А. Габараев* (Тбилиси) 43; *Т. Газарян* (Ереван) 50; *В. Гайдук* (Ленинград) 45; *В. Гайлович* (Москва) 43; *Д. Гамарник* (Тбилиси) 50; *Т. Гамбарян* (Баку) 43, 44; *Р. Гендлер* (Ташкент) 38, 43, 44, 48, 50; *Д. Гехтман* (Киев) 43; *П. Глазырин* (Воткинск) 50; *Д. Глек* (Воронеж) 40, 43; *М. Глушко* (Москва) 43; *И. Гольдштейн* (Москва) 43, 45; *Г. Горбатенко* (Арзамас) 43, 44, 50; *В. Гродницкий* (Днепропетровск) 43, 50; *Ю. Грабовский* (Киев) 43, 44, 50; *И. Григорьев* (Челябинск) 38; *А. Городницкий* (Севастополь) 43; *А. Даваажав* (Дундговь, МНР) 40; *А. Давтян* (п. Мецамор, Арм. ССР) 50; *Е. Дадамбаев* (Харьков) 43; *В. Демидович* (Гадяч) 43; *С. Демьянченко* (Москва) 43, 44, 50; *А. Дендерыс* (Львов) 43, 44; *В. Дзюба* (Киев) 38, 39, 43, 44, 50; *Д. Димова* (Ямбол, НРБ) 43, 50; *Б. Добровольский* (Тбилиси) 43; *Е. Доманицкая* (Ленинград) 45; *Ю. Дрозд* (Киев) 44, 48; *С. Дудко* (Донецк) 50; *А. Дынников* (Жуковский) 38, 39, 43—45, 50; *В. Елистратов* (Донецк) 43, 50; *А. Еременко* (Киев) 43; *Б. Жаргалсайхан* (Дундговь, МНР) 39; *Д. Железовский* (Саратов) 43; *В. Жманин* (Желтые Воды) 43; *В. Журавлев* (Гайворон) 50; *А. Захаров* (Гатчина) 43; *С. Зейналов* (Баку) 43; *Д. Земляной* (Севастополь) 39; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) 44; *А. Зорин* (Москва) 40; *Л. Зосин* (Киев) 43—45, 47, 48, 50; *И. Иванко* (Киев) 44; *С. Иванков* (Москва) 39, 45; *Л. Иванов* (Саратов) 38, 43, 44, 48, 50; *В. Ивлев* (Джезказган) 40; *О. Ильин* (Чебоксары) 43, 44; *А. Исабеков* (Алма-Ата) 43; *М. Йотов* (София, НРБ) 48, 50; *А. Кадыров* (Ташкент) 43; *В. и И. Каповичи* (Хабаровск) 38, 43—45, 48, 50; *С. Карташев* (Запорожье) 43; *И. Карчевский* (Алма-Ата) 43; *П. Косинский* (Алма-Ата) 43; *Д. Кашпер* (Киев) 43, 44; *Н. Кендер* (Баку) 43; *П. Кирилин* (Дубна) 43, 44, 50; *А. Кисилев* (Ленинград) 44, 50; *С. Кожемяк* (Симферополь) 43; *К. Копотун* (Киев) 43, 50; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 43; *Л. Королев* (Елабуга) 43; *Ю. Кочетков* (Винница) 43, 44, 50; *О. Крылов* (п. Синегорье Магаданской обл.) 43, 44; *Т. Куандыков* (Ленгер) 43; *В. Кузнецов* (Пенза) 38, 43; *Н. Кузьмин* (Москва) 43, 45; *И. Кулагин* (Свердловск) 43, 44; *А. Кумпан* (Донецк) 43; *Н. Курило* (с. Ольховка Харьковской обл.) 43, 50; *В. Кусков* (п. Кр. Октябрь Владимирской обл.) 43; *А. Лазарев* (Москва) 38; *С. Лаусмаа* (Кохтла-Ярве) 44; *М. Лев* (Свердловск) 38, 39, 40, 43, 44, 48, 50; *М. Ледней* (с. Лопушное Закарпатской обл.) 43, 50; *Л. Леняшин* (Ленинград) 44; *В. Литвин* (Кривой Рог) 43; *А. Лукьянов* (Севастополь) 39; *Д. Лунц* (Саратов) 43, 44; *М. Макаров* (Севастополь) 39; *А. Малеванец* (Киев) 43—45; *Т. Маливанчук* (Киев) 43, 50; *А. Мальгичев* (с. Дмитровское Ярославской обл.) 43; *М. Мансров* (Севастополь) 43—45; *Ю. Маринец* (Львов) 43, 44; *В. Маркин* (Тамбов) 43; *Г. Масловский* (Бельцы) 43; *Ю. Махлин* (Москва) 48, 50; *Н. Мельник* (Гайсин) 43; *А. Мельников* (Днепропетровск) 43, 50; *С. Минаев* (Свердловск) 43, 44, 50; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 43, 44; *В. Михайлюк* (с. Щуровцы Хмельницкой обл.) 44; *Ю. Михлин* (Москва) 43—45; *Е. Мишин* (Севастополь) 39, 43, 44, 50; *В. Мовсесян* (Ереван) 43; *А. Молотков* (Ленинград) 44, 48; *Б. Монхтор* (Улан-Батор, МНР) 43, 50; *Е. Мухин* (Кинешма) 47; *С. Мягчилов* (Одесса) 44, 45; *С. Найден* (Днепропетровск) 43, 44; *М. Неизадим* (Кокчетав) 43; *О. Никифоргин* (Ивано-Франковск) 43; *М. Ободовский* (Москва) 50; *О. Овецкая* (Донецк) 50; *И. Оконечников* (Новгород) 43, 44; *Л. Ольха* (Свердловск) 44; *Р. Оруджев* (Баку) 43; *Я. Оссовски* (Старогард Гданьски, ПНР) 38, 39, 40; *Б. Панич* (Севастополь) 45, 48, 50; *Н. Пеккер* (Новокузнецк) 43; *И. Пивкина* (Новосибирск) 48; *Н. Писаренко* (Новосибирск) 43, 45, 50; *В. Погребняк* (Винница) 43, 44, 50; *Т. Поликарпова* (Белорецк) 50; *С. Полинов* (Магнитогорск) 43, 44; *В. Поляковский* (Киев) 43, 44; *В. Порошин* (Ленинград) 44, 45; *А. Приходько* (Днепропетровск) 43, 44; *И. Прудников* (Москва) 43, 44; *Т. Радько* (Корсунь-Шевченковский) 43, 44, 50; *А. Ри* (Кара-Балта) 43; *Е. Романов* (Димитровград) 44, 50; *Д. Рубленко* (Хмельницкий) 43; *С. Русева* (Сливен, НРБ) 43, 44; *Е. Рухлин* (Винница) 43, 44; *И. Савыков* (Первоуральск) 43; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 43; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) 38, 43, 44; *И. Самовол* (Гайворон) 50; *Е. Сангир* (Улан-Батор, МНР) 43; *К. Сасонко* (Ленинград) 43, 45; *Ю. Свирид* (Минск) 43; *И. Святодух* (Красноармейск Донецкой обл.) 38; *М. Седракян* (Ереван) 38, 39, 40; *Л. Селисский* (Горький) 43; *К. Семенов* (Киев) 44; *А. Сергиенко* (Ленинград) 43; *Р. Сибилев* (Ленинград) 50; *А. Сидорович* (Москва) 44; *А. Солянин* (Верхнеднепровск) 43; *Г. Спивак* (Киев) 43, 50; *С. Старцев* (Уфа) 43, 44; *М. Стоенеску* (Брашов, СРР) 43; *А. Стоилов* (Бургас, НРБ) 38, 39, 40; *И. Стоянов* (Димитровград, НРБ) 43, 44; *В. Судаков* (Тбилиси) 45, 50; *В. Тартаковский* (Киев) 43—45, 50; *М. Тейтель* (Киев) 43—45, 47, 48, 50; *М. Теплицкий* (Тбилиси) 45; *Д. Толпин* (Электросталь) 43, 44; *Ф. Толстов* (Свердловск)

50; *Л. Тополюк* (Пенза) **43**; *А. Трухан* (Минск) **38**; *С. Тулешев* (Москва) **43**; *В. Тульчинский* (Киев) **43, 44, 50**; *А. Турова* (Москва) **43**; *Е.* и *Т. Уклистые* (Астрахань) **43, 50**; *Н. Устинов* (Калининград) **50**; *Н. Федин* (Омск) **43, 44**; *Д. Федосеев* (Первоуральск) **43, 44**; *Е. Филенко* (Родинское) **38, 50**; *А. Финельт* (Москва) **43**; *Е. Финк* (Ленинград) **38, 39, 45**; *М. Фоменко* (Алма-Ата) **43, 44**; *Б. Фридман* (Москва) **38, 39, 43—45, 48, 50**; *С. Харченко* (Донецк) **43**; *М. Хованов* (Москва) **38, 45**; *М. Холмянский* (Москва) **43, 44**; *Д. Хрусталев* (Москва) **43, 44**; *В. Хрычиков* (Севастополь) **38, 39**; *Т. Хусейнов* (Душанбе) **44**; *В. Цанко* (Харьков) **43**; *В. Цейткин* (Бердянск) **43**; *А. Череватый* (Киев) **44**; *И. Чернышевич* (Киев) **43**; *С. Чичинский* (Днепропетровск) **43**; *О. Шаров* (Киев) **44, 50**; *И. Шестакова* (Старобельск) **43**; *Г. Шуклин* (Киев) **43**; *М. Шульгина* (Фатеж) **43, 44**; *Л. Эрдёш* (Будапешт, ВНР) **38, 39, 40, 43, 44**; *А. Эфендиев* (Баку) **43**; *Е. Юдицкий* (Киев) **43, 44, 48, 50**; *С. Ягунов* (Ленинград) **44, 45**; *А. Ярин* (Севастополь) **39**.

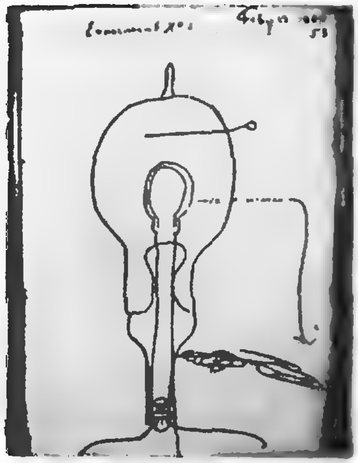
Физика

А. Абанов (Красноярск) **50—52, 54—56**; *О. Авраменко* (Херсон) **54, 56, 58, 60**; *А. Акулов* (Новосибирск) **54**; *В. Апальков* (Харьков) **49—52, 54—56, 60—62**; *В. Арефьев* (Воронеж) **56**; *Ю. Артемов* (с. Братовщина Московской обл.) **50**; *А. Артюх* (Чернигов) **50, 52**; *Г. Атабаеви* (Шаватский р-н Хорезмской обл.) **56**; *Т. Ахабаев* (Чимкент) **54—56**; *Д. Бакунин* (Томмот) **55, 56**; *А. Барибаш* (Киев) **54—56**; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **50—61**; *А. Барчунов* (Алма-Ата) **54—56**; *А. Белоус* (Винница) **55**; *П. Бенедюк* (Пятигорск) **55, 56**; *Д. Бердников* (Винница) **55, 56**; *Е. Беспалов* (Курган) **48, 50, 52, 54, 55, 58, 60**; *И. Бордовский* (Трубчевск) **56**; *Д. Борец* (Харьков) **58**; *М. Букин* (Запорожье) **60**; *Н. Бурдейная* (Винница) **55**; *В. Васильев* (Воткинск) **55, 56**; *О. Васильев* (Алма-Ата) **54, 55**; *Ю. Воронов* (Москва) **54—56**; *В. Вульф* (Рудный) **52**; *В. Вяткин* (Воткинск) **56**; *С. Габриш* (ст. Ремоты Красноярского кр.) **54—56**; *О. Гаврилов* (Киев) **54—56**; *А. Галактионов* (Пермь) **48, 54—56, 58, 61**; *В. Галухин* (Рязань) **55, 58**; *Е. Генчикмахер* (Киев) **54—56, 58, 60**; *Д. Гехтман* (Киев) **54—56**; *П. Глазырин* (Воткинск) **61**; *Р. Глухов* (Вязинки) **58**; *С. Гнездилова* (Киев) **54, 55**; *Е. Головина* (Йошкар-Ола) **56**; *Г. Горбатенко* (Арзамас) **56**; *Ю. Гордиенко* (Винница) **48, 54, 56**; *М. Готман* (Киев) **60**; *И. Григорьев* (Челябинск) **48, 50—52**; *М. Гринберг* (Красноярск) **50—52**; *Ю. Гринцевич* (п. Сосновоборск Красноярского кр.) **48, 52**; *А. Губанов* (Омск) **55**; *В. Гусев* (Красноярск) **54—56, 58, 60**; *Ю. Дейкало* (Киев) **58**; *П. Дробышев* (Киев) **54—56, 61**; *С. Дубовик* (Брест) **48**; *С. Дудко* (Донецк) **60**; *Д. Ермошин* (Москва) **50, 52, 56**; *О. Ефремов* (Воронеж) **52**; *С. Жилинскас* (Вильнюс) **54—56**; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) **54, 56**; *З. Зубалей* (Винница) **54—56**; *А. Изирс* (Апатиты) **56, 58, 60**; *М. Йотов* (София, НРБ) **48, 50—52**; *И. Калиновский* (Киев) **54—56, 58, 62**; *И. Карчевский* (Алма-Ата) **54—56**; *П. Касинский* (Алма-Ата) **54—56**; *Ф. Касымов* (Акстафа) **52**; *Д. Кашпер* (Киев) **54—56**; *М. Кельмансон* (Москва) **58**; *Р. Керимбеков* (Орджоникидзе) **56**; *А. Кириченко* (Пермь) **48, 50—60**; *А. Климачев* (Минск) **54, 55, 58**; *Г. Климович* (п. Болшево Московской обл.) **54—56, 58, 60, 62**; *В. Кобелецкий* (Киев) **54—56, 58, 60—62**; *М. Козлов* (Москва) **56, 58, 62**; *А. Кордюк* (Киев) **54, 56**; *Я. Корчевский* (Киев) **55, 56, 58**; *С. Кочеров* (Мантурово) **56**; *В. Краснов* (Чебоксары) **52, 56, 58, 60, 61**; *Д. Кузнецов* (Куйбышев) **55, 56**; *Л. Кулинский* (Киев) **54—56**; *В. Кусков* (п. Красный Октябрь Владимирской обл.) **60**; *М. Ледней* (с. Лопушное Закарпатской обл.) **55**; *Д. Ледовский* (Киев) **54, 56**; *Е. Либман* (Орел) **61**; *Н. Лимонова* (Киев) **54, 55**; *П. Линник* (ст. Анапская Красидарского кр.) **55**; *Ю. Литвиненко* (Воронеж) **55, 56**; *Ю. Лобзаков* (Киев) **54—56, 58**; *Е. Ломоносов* (Москва) **48, 54**; *К. Лопин* (Фрунзе) **54**; *В. Лошманов* (Заволжье) **58, 60**; *Д. Лунц* (Саратов) **54—56, 58, 61**; *П. Лушников* (Москва) **54, 58, 60**; *О. Мазяр* (Львов) **58**; *К. Макарчук* (Киев) **54, 55**; *Т. Маливанчук* (Киев) **54—56, 62**; *О. Маров* (Канев) **62**; *М. Марциновский* (Киев) **54—56, 58**; *А. Мельников* (Днепропетровск) **56**; *В. Меньков* (Мончегорск) **58, 60**; *С. Минаев* (Свердловск) **54, 55**; *А. Михеев* (Кимры) **48, 50, 52, 55, 56, 58**; *К. Мосейчев* (Зеленоград) **48, 50, 55**; *О. Мурин* (Ульяновск) **56**; *Х. Муртазаев* (Андижан) **56**; *С. Мягчилов* (Одесса) **58**; *М. Найфонов* (Апатиты) **56, 60**; *С. Никоненко* (Киев) **54—56, 62**; *А. Онуфриев* (Москва) **54**; *О. Панин* (Пенза) **56**; *А. Панычев* (Магадан) **54, 58, 60, 62**; *Е. Пархименко* (Киев) **48, 50—52, 55, 56**; *И. Перелыгин* (Харьков) **58**; *С. Пилипюк* (Челябинск) **54—56**; *И. Пильников* (Тамбов) **50, 52, 54—56, 61**; *М. Половинник* (Киев) **48, 51, 52, 54—56**; *А. Пономарев* (Москва) **54, 56, 58**; *А. Попов* (Фролово) **52**; *Я. Пугай* (Алма-Ата) **54**; *С. Рахамов* (Казань) **58, 60**; *А. Ржевский* (Новосибирск) **55, 60**; *Р. Ривкин* (Минск) **54**; *М. Рудык* (Винница) **50, 52, 55, 56, 58, 61**; *Д. Русинов* (Ленинград) **48, 52, 54, 56, 58, 60, 61**; *Ю. Рыбалочка* (Киев) **54, 56, 58, 60**; *Л. Рывчин* (Киев) **54—56**; *Ф. Сабуров* (Челябинск) **52, 56**; *М. Савченко* (Белгород) **52, 60**; *И. Савыков* (Первоуральск) **50—52, 54—56**; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) **48, 51, 52, 54—56, 61, 62**; *М. Самсонов* (Ленинград) **50, 52**; *С. Сахарук* (Брест) **52, 56**; *Л. Селисский* (Горький) **56**; *М. Скоробогатов* (Киев) **54, 55**; *И. Смовжу* (Херсон) **56**; *С. Собесский* (Красноармейск Кокчетавской обл.) **55**; *А. Сомов* (Киев) **54, 55**; *Г. Спивак* (Киев) **54—56, 58, 60**; *С. Степанянц* (Ереван) **58, 60**; *И. Стрешинский* (Киев) **54—56**; *И. Струговщиков* (Киев) **54, 55**; *Р. Суник* (Киев) **54, 55**; *А. Сурков* (Ленинград) **52**; *В. Тартаковский* (Киев) **52, 54—56, 60, 61**; *И. Терез* (Симферополь) **50, 54, 56, 58, 62**; *С. Точилкин* (Белорецк) **48, 52**; *С. Тужанский* (Винница) **50, 52, 55, 56, 58, 61**; *В. Тульчинский* (Киев) **54, 55**; *А. Умнов* (Миасс) **54**; *Н. Федин* (Омск) **50, 52, 54, 56**; *Л. Федичкин* (Москва) **54, 55, 58**; *Л. Фельдман* (Саратов) **50—52, 54—56, 58, 60, 62**; *С. Феранчук* (Минск) **48, 52, 54—56, 58, 60, 62**; *В. Фурман* (Ташкент) **58, 60**; *С. Хомечко* (Брест) **56**; *Д. Хрусталев* (Москва) **54, 56**; *О. Чемерченко* (Купянск) **56**; *И. Чеповецкий* (Киев) **55**; *А. Черепнин* (Винница) **52, 56**; *С. Черных* (Харьков) **55, 56**; *О. Черп* (Минск) **50**; *Д. Шаповалов* (Джезказган) **50, 52**; *Г. Швец* (Киев) **54, 56, 58, 61**; *И. Шевченко* (Макеевка) **54, 58**; *Г. Шуклин* (Киев) **54, 55**; *А. Щеголев* (п. Черноголовка Московской обл.) **55, 58, 60**; *И. Эльберт* (Киев) **52**; *О. Юдин* (п. Сиверский Ленинградской обл.) **54—56**; *Е. Юдицкий* (Киев) **54—56, 58**; *Е. Юрковицкий* (Одесса) **50, 55, 56**; *О. Яковлев* (Иркутск) **54, 55**.

Эффект Эдисона

Более тысячи различных технических устройств запатентовал за свою долгую жизнь Томас Алва Эдисон (1847—1931), блестящий изобретатель и ловкий делец, неутомимый труженик и азартный честолюбец, человек, до глубокой старости сохранивший озорные замашки марктвеновского Тома Сойера. Эдисон внес огромный вклад в развитие телеграфного дела, телефонии, техники электрического освещения; он изобрел первый звукозаписывающий аппарат — фонограф, новый тип аккумулятора, плавкий предохранитель, электромагнитный тормоз и т. п.

Есть на счету знаменитого изобретателя и физическое открытие, одно, но очень важное. Это — открытие явления термоэлектронной эмиссии, получившего в дальнейшем название «эффекта Эдисона». Этот эффект он впервые наблюдал в 1883 году, но сообщение в печати опубликовал только в следующем, 1884 году.



Фотокопия страницы из лабораторного журнала с эскизом-заданием Эдисона для эксперимента, в котором и было обнаружено явление термоэлектронной эмиссии. По этому эскизу следовало изготовить лампу с небольшим подковообразным угольным телом накала. Над ним нужно было пропустить проволоку, внешний конец которой мог присоединяться к положительному полюсу источника тока.

Подобно множеству других научных открытий, термоэлектронная эмиссия была обнаружена совершенно случайно. В конце 1879 года Эдисон в основном закончил работу по созданию электрической лампы накаливания и теперь упорно работал над проблемой удлинения срока ее службы. Лампа эта по существу мало чем отличалась от современной — только вместо вольфрамовой спиральки использовалась нить из обугленного бамбукового волокна. Первые такие лампы могли непрерывно гореть около 40 часов — «долговечность», которая сначала привела Эдисона и его помощников в неописуемый восторг. Однако уже скоро стало ясно, что для массового применения «лампы-двухдневки» не годятся.

В поисках причины быстрого перегорания угольной нити Эдисон обратил внимание на то, что внутренняя поверхность лампового баллона покрывается темным налетом из углеродистых частиц, видимо, вылетающих из раскаленной нити. Надеясь как-то подавить это нежелательное явление, Эдисон поместил в лампу вблизи нити дополнительный электрод, электрический потенциал которого можно было изменять. При этом он с удивлением обнаружил, что, когда потенциал этого электрода выше потенциала нити (положителен по отношению к потенциалу нити), между ним и нитью — через вакуумный промежуток! — протекает электрический ток. При всей своей технической находчивости никакой практической пользы из своего открытия Эдисон извлечь не смог, и оно было надолго забыто.

Эффект Эдисона удалось объяснить только после открытия электрона (1897 г.). Объяснение дал английский физик Дж. А. Флеминг (1849—1945), в 1882—85 годах работавший у Эдисона, который сам рассказал ему об открытом эффекте. Флеминг понял, что электрический ток в баллоне лампы создают электроны, испускаемые раскаленной нитью и притягиваемые положительно заряженным дополнительным электродом.

Первая пустотная русская радиолампа, изготовленная в мастерской Тверской радиостанции в 1916 году под руководством одного из пионеров радиотехники М. А. Бонч-Бруевича. Лампа хранится в Москве, в Политехническом музее.

Продолжая размышлять над явлением термоэлектронной эмиссии, в 1904 году Флеминг запатентовал первую в истории техники радиолампу. Это был вакуумный диод, целиком базирующийся на односторонней проводимости, связанный с эффектом Эдисона, и позволяющий выпрямлять переменный ток. Флеминг задумал свою лампу как детектор для радиоволн.

В 1906 году американский инженер Л. де Форест (1873—1961) изобрел трехэлектродную лампу — триод, исторически первый электронный усилительный прибор. Открытие эффективного способа усиления слабых электрических сигналов ознаменовало рождение новой области техники и науки — электроники. До появления транзисторов (50-е годы XX века) в ней безраздельно господствовали радиолампы, работа которых основана на эффекте Эдисона, эффекте, которому знаменитый изобретатель в свое время не придал особого значения.

Сейчас термоэлектронная эмиссия используется в сотнях миллионов источников света, в первую очередь — в люминесцентных лампах.

Б. Е. Явелов

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

тепловой балаланс

Гидропаника кисинуса

(заметки экзаменатора)

Прошла пора вступительных экзаменов в вузы. Сколько волнений и тревог вызывали они. Волновались мамы и папы поступавших, волновались их тети и дяди. Волновались на экзаменах, разумеется, и сами поступавшие. Волновались и ... от волнения иногда говорили такое, что потом, вспоминая, сами же улыбались. Но это — потом, после экзаменов. А во время экзаменов удивлялись, почему экзаменаторы хмурят брови, слушая их ответы, а иногда даже ставят отметки, увидев которые, приходится хмурить брови уже самим отвечавшим.

Всякие ответы можно услышать на экзаменах, тем более вступительных.

...Когда у абитуриентки спросили на экзамене: «Как Вас зовут?»,— она быстро ответила: «Можно, я подумаю?» — «Что же тут думать? Скажите Ваше имя»,— повторил вопрос экзаменатор, на что после некоторого раздумья последовал ответ: «Вы знаете, мы это, кажется, не проходили».

На экзамене по физике после предложения экзаменатора перейти к ответу на следующий вопрос, паренек бойко сказал: «К вопросу о вопросе следующего вопроса». В ответ на просьбу отвечать конкретнее, сказал: «Хорошо. Рассмотрим для примера, например, такой пример».

А другой поступавший на вопрос: «В каких единицах измеряются электрический ток и напряжение?» — быстро, не задумываясь, ответил: «В амперметрах и вольтметрах».

Объясняя электрическую схему на экзамене, говорили: «истошник тока», а решая задачу, рассказывали о тепловом «балалансе».

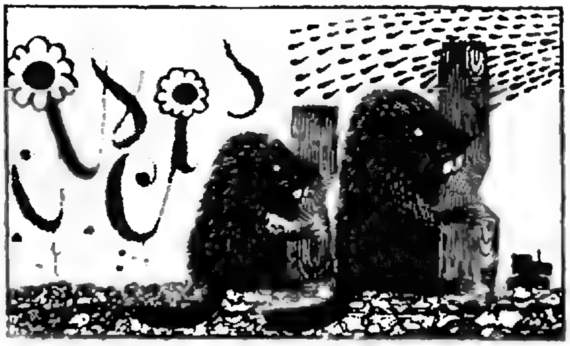
На экзамене по истории, волнуясь, говорили: «Кабель о рангах», «Намоклов меч», «Глупец первой гильдии», рассказывали о походах ...Александра Смоктуновского...

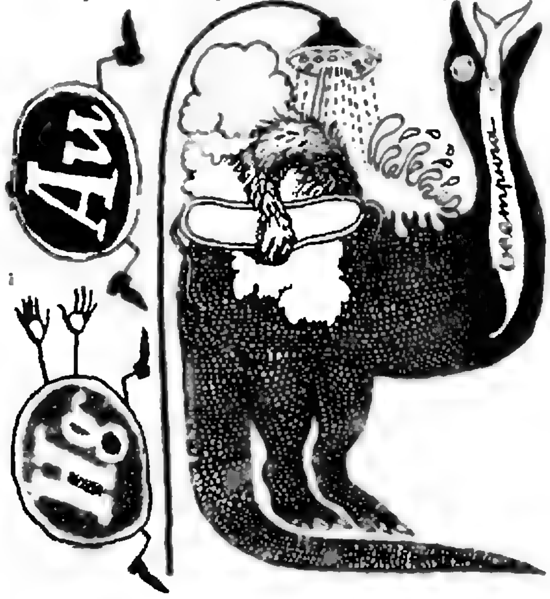
И на экзамене по литературе волновались, когда говорили о «квассике русской литературы Щедрикове-Салтыне или о романе «Отцы и дети» Базарова. Рассказывая о «Слове о полку Игореве», абитуриентка читала наизусть: «Банан бо вещий...». А в сказке появлялся «Шалфей бессмертный».

Бывший химик на экзамене по литературе «процитировал» (по памяти): «Хидраргиум воскликнул: Аурум, где ты?».

На экзамене по биологии абитуриенты, волнуясь, говорили: «Искупаемый проглодит длиннозавр», рыбы в их ответах превращались из палтуса и севрюги в «плинтус» и «осетрюгу».

Один паренек, поступавший в сельскохозяйственный институт, рассказывая на экзамене о свойствах живых организмов, разделял их на наследственные и ...«подследственные». А увидя недоуменный взгляд экзаменатора, быстро «поправил» свой ответ, сказав: «То есть, свойства бывают подследственные и влагоприобретенные»...





На экзамене по химии один абитуриент сказал, что до поступления в вуз он был... «аргентум по снабжению», а рассказывая о газах, углекислый газ называл... «угловатым».

На вступительных экзаменах некоторые так волнуются, что вместо «гидропоника» говорят: «гидропаника», вместо «косинус» — «кисинус», годовой план у них превращается в «годовалый», а стимулятор роста — в «симулятор» роста. «Симулятор роста позволяет при помощи гидропаники досрочно выполнить годовалый план по сбору бобровых культур на орошаемых полях»,— бойко отрапортовал на экзамене абитуриент.

Во время ответов на вступительных экзаменах даже рождались новые науки — «Мокробиология», «Болтаника» и другие.

Да, всякие ответы можно услышать на экзаменах, ведь любые экзамены — это пора волнений, а вступительные — тем более. Поэтому к экзаменам надо отнестись серьезно, без волнений. Впредь — никакой *гидропаники!* Смелее вперед на штурм кисинуса!

Ф. М. Цеховольский

Сведем неравенство к известному

П. П. ГОРНУША

Многие задачи на доказательства неравенств, предлагаемые на вступительных экзаменах, удается решить, сводя их к вспомогательным неравенствам (очевидным или ранее известным) с помощью тождественных преобразований. Такие задачи мы рассмотрим здесь*). Вспомогательные неравенства выделены цветом, но не для того, чтобы их заучивать. Ими (и похожими неравенствами) нужно уметь пользоваться, уметь выводить по мере надобности.

Каждый школьник знает, что квадрат числа (или сумма квадратов чисел) — число неотрицательное:

$$\boxed{a^2\geqslant 0,\ a^2+b^2\geqslant 0,\ a^2+b^2+c^2\geqslant 0,\ldots} \quad (1)$$

Это простое обстоятельство является ключом к решению очень многих задач. Начнем с совсем простой.

Задача 1 (КПИ, 1981). *Докажите, что при любых действительных x, y, z, t справедливо неравенство*

$$4x^2+3y^2+4z^2+5t^2+4ax+3ay+4az+$$
$$+5at+4a^2\geqslant 0.$$

Решение. Перегруппируем члены левой части неравенства так, чтобы получить сумму квадратов:

$$(4x^2+4ax+a^2)+(3y^2+3ay+3a^2/4)+$$
$$+(4z^2+4az+a^2)+(5t^2+5at+$$
$$+5a^2/4)\geqslant 0,$$
$$(2x+a)^2+3(y+a/2)^2+(2z+a)^2+$$
$$+5(t+a/2)^2\geqslant 0.$$

Последнее неравенство очевидно (это разновидность (1)), а так как оно равносильно данному — задача решена.

Неравенство (1) выступает во многих разных обличиях; например $(x+y+$ $+z)^2\geqslant 0$, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$, $(t-1)^2\geqslant 0$. Предпоследнее неравенство можно переписать в виде $a+b>2\sqrt{ab}$ (при $a>0$, $b>0$, $a\neq b$) или

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{ab}}>\frac{2}{a+b}.} \quad (2)$$

Важно суметь **увидеть** это простое неравенство, когда оно появляется в «замаскированной» форме, как например, в следующей задаче.

Задача 2 (ЛГУ, 1978). *Определить знак разности*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1\cdot 1978}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1977}}+\ldots+\right.$$
$$+\frac{1}{\sqrt{k\cdot(1978-k+1)}}+\ldots+$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{1978\cdot 1}}\right)-2\cdot\frac{1978}{1979}.$$

Решение. Воспользовавшись неравенством (2) 1978 раз, можно написать:

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 1978}}>\frac{2}{1+1978}=\frac{2}{1979};$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1977}}>\frac{2}{2+1977}=\frac{2}{1979};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1978\cdot 1}}>\frac{2}{1978+1}=\frac{2}{1979}.$$

Складывая эти неравенства, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 1978}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1977}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{\sqrt{1978\cdot 1}}>2\cdot\frac{1978}{1979}.$$

Значит, данная разность — положительная.

А вот другая вариация на тему $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства выражение $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, получим

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\leqslant(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=$$
$$=2(a+b),$$

---

*) Задачи предлагались в разные годы в Киевском, Ленинградском и Московском государственных университетах (КГУ, ЛГУ и МГУ); в Московских институтах электронного машиностроения и автотехническом (МИЭМ, МАТИ) и в Киевском политехническом институте (КПИ); год, когда задача предлагалась, мы указываем рядом с аббревиатурой вуза.

откуда, после извлечения корня (при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$), найдем

$$\boxed{\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2(a+b)}.} \qquad (3)$$

Заметим, что равенство здесь достигается только при $a=b$. Неравенство (3) «срабатывает», например, в такой задаче.

Задача 3 (ЛГУ, 1982). *Укажите x, при которых функция*

$$f(x)=5\left(\sqrt{8+\sqrt{4+\sqrt{2+\sqrt{1+x}}}}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{8+\sqrt{4+\sqrt{2+\sqrt{1-x}}}}\right)$$

принимает наибольшее значение. Укажите, между какими последовательными целыми числами находится это наибольшее значение $f(x)$.

Решение. Применим неравенство (3) четыре раза

$$f(x)\leqslant 5\sqrt{2(16+\sqrt{4+\sqrt{2+\sqrt{1+x}}}+\sqrt{4+\sqrt{2+\sqrt{1-x}}})}\leqslant$$
$$\leqslant 5\sqrt{2(16+\sqrt{2(8+\sqrt{2+\sqrt{1+x}}+\sqrt{2+\sqrt{1-x}})})}\leqslant$$
$$\leqslant 5\sqrt{2(16+\sqrt{2(8+\sqrt{2(4+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})})})}\leqslant$$
$$\leqslant 5\sqrt{2(16+\sqrt{2(8+\sqrt{2(4+\sqrt{2\cdot 2})})})}=$$
$$10\sqrt{8+\sqrt{4+\sqrt{3}}}.$$

Заметим, что при $1+x=1-x$ (то есть при $x=0$) здесь на каждом шаге получается **равенство**. Это значит, что наибольшее значение (равное $10\sqrt{8+\sqrt{4+\sqrt{3}}}$) достигается только при $x=0$ (продумайте это!). Простые числовые оценки показывают, что

$$3{,}2<\sqrt{8+\sqrt{4+\sqrt{3}}}<3{,}3.$$

Ответ: $x=0$; между 32 и 33.

Последний наш пример на неотрицательность квадратов чисел будет основан на следующем неравенстве:

$$\boxed{\sqrt{a^2+b^2}\geqslant|a\cos\varphi+b\sin\varphi|,} \qquad (4)$$

которое можно доказать так:

$$(a\sin\varphi-b\cos\varphi)^2\geqslant 0\ \Rightarrow$$
$$a^2\sin^2\varphi-2ab\sin\varphi\cos\varphi+b^2\cos^2\varphi\geqslant 0\Rightarrow$$
$$a^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+b^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\geqslant$$
$$\geqslant a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi+2ab\sin\varphi\cos\varphi\Rightarrow$$
$$a^2+b^2\geqslant(a\cos\varphi+b\sin\varphi)^2 \qquad (4)$$

Задача 4 (МГУ, 1981). *Покажите, что функция*

$$y=\sin^2x-14\sin x\cos x-5\cos^2x+$$
$$+3\sqrt[3]{33}$$

всегда положительна.

Решение. Нам нужно доказать неравенство

$$3\sqrt[3]{33}>5\cos^2x+14\sin x\cos x-\sin^2x.$$

Перегруппируем члены правой части так, чтобы перейти к синусу и косинусу двойного угла:

$$3\sqrt[3]{33}>3\cos^2x-3\sin^2x+2\cos^2x+$$
$$+2\sin^2x+7\sin 2x,$$
$$3\sqrt[3]{33}>3\cos 2x+7\sin 2x+2.$$

В силу неравенства (4),

$$3\cos 2x+7\sin 2x\leqslant\sqrt{9+49}=\sqrt{58},$$

поэтому нам остается доказать числовое неравенство

$$3\sqrt[3]{33}>\sqrt{58}+2,$$

которое легко проверяется (возведите обе части в куб).

Список полезных неравенств, вытекающих из положительности квадрата числа, не исчерпывается, конечно, неравенствами (2) — (4). Тригонометрические задачи часто сводятся к какому-нибудь известному тригонометрическому неравенству: одному из проявлений монотонности тригонометрических функций на определенных участках (например, убывания косинуса от 0 до π) или простейшему свойству синуса и косинуса

$$\boxed{|\sin\alpha|\leqslant 1,\ |\cos\alpha|\leqslant 1.} \qquad (5)$$

Задача 5 (МГУ, 1980). *Докажите, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство*

$$4(p-3)^4+2+[2-4(p-3)^4]\cos t\geqslant 0$$

и найдите все пары чисел $(p,\ t)$, для которых это неравенство превращается в равенство.

Решение. Данное неравенство равносильно такому

$$4(p-3)^4(1-\cos t)+2(1+\cos t)\geqslant 0.$$

Каждая из скобок $(1-\cos t)$ и $(1+\cos t)$ неотрицательна (см. (5)), так же как и $(p-3)^4=((p-3)^2)^2$ (опять (1)!), поэтому последнее неравенство — всегда верно, а значит, данное — тоже.

Равенство достигается только в случае выполнения системы уравнений

$$\begin{cases}(p-3)^4(1-\cos t)=0,\\ 1+\cos t=0,\end{cases}$$

решение которой сразу находится.

Ответ: $p=3$; $t=\pi+2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Монотонное убывание косинуса от 0 до π многократно обыгрывается в следующей задаче (каждый раз, когда мы им пользуемся, мы выделяем цветом соответствующее неравенство).

Задача 6 (МИЭМ, 1980). *При $n=1, 2, 3$, сравните числа*

$$\sin^n 1^\circ+\sin^n 4^\circ \text{ и } \sin^n 2^\circ+\sin^n 3^\circ.$$

Решение. 1) $n=1$. Преобразуем сумму синусов в произведение:

$$\sin 1^\circ+\sin 4^\circ=2\sin 2,5^\circ \cos 1,5^\circ,$$
$$\sin 2^\circ+\sin 3^\circ=2\sin 2,5^\circ \cos 0,5^\circ.$$

Теперь видно, что второе число больше первого, ибо $\sin 2,5^\circ>0$ и

$$\cos 0,5^\circ>\cos 1,5^\circ.$$

2) $n=2$. Выразим квадрат синуса через косинус двойного угла

$$\sin^2 1^\circ+\sin^2 4^\circ=\frac{1-\cos 2^\circ}{2}+\frac{1-\cos 8^\circ}{2},$$
$$\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ=\frac{1-\cos 4^\circ}{2}+\frac{1-\cos 6^\circ}{2}.$$

Покажем, что теперь уже первое число больше. Для этого достаточно установить неравенство

$$\cos 4^\circ+\cos 6^\circ>\cos 2^\circ+\cos 8^\circ,$$

а оно равносильно неравенству

$$2\cos 5^\circ \cos 1^\circ>2\cos 5^\circ \cos 3^\circ,$$

которое сразу следует из того, что $\cos 5^\circ>0$ и

$$\cos 1^\circ>\cos 3^\circ.$$

3) $n=3$. Покажем, что здесь снова первое число больше. Воспользуемся формулой

$$\sin^3 \alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}, \qquad (6)$$

которая легко проверяется (раскройте $\sin 3\alpha$ как $\sin(2\alpha+\alpha)$, затем примените формулы для $\cos 2\alpha$ и $\sin 2\alpha$). Тогда задача сводится к доказательству (равносильных) неравенств

$$\sin 9^\circ-\sin 3^\circ+\sin 6^\circ-\sin 12^\circ> \\ >3\sin 3^\circ-3\sin 1^\circ+3\sin 2^\circ-3\sin 4^\circ;$$
$$2\cos 6^\circ \sin 3^\circ-2\cos 9^\circ \sin 3^\circ> \\ >6\cos 2^\circ \sin 1^\circ-6\cos 3^\circ \sin 1^\circ;$$
$$\sin 3^\circ \sin 7,5^\circ \sin 1,5^\circ> \\ >3\sin 1^\circ \sin 2,5^\circ \sin 0,5^\circ.$$

Преобразуя синусы утроенных углов в левой части по формуле (6) и пользуясь положительностью $\sin 1^\circ$, $\sin 2,5^\circ$, $\sin 0,5^\circ$, мы видим, что достаточно доказать неравенство

$$(3-4\sin^2 1^\circ)(3-4\sin^2 2,5^\circ)\times \\ \times(3-4\sin^2 0,5^\circ)>3,$$

которое преобразуется к равносильному виду

$$(1+2\cos 2^\circ)(1+2\cos 5^\circ)\times \\ \times(1+2\cos 1^\circ)>3,$$

а это заведомо верно — левая часть даже больше 8, ибо

$$\cos 1^\circ>\cos 2^\circ>\cos 5^\circ>\frac{1}{2}.$$

Возможно, разобранные примеры вам показались простыми. Это не мудрено — ведь перед каждой задачей мы *заранее заготовили* то неравенство, которое решающим образом сработало в ее решении. Искусство и трудность решения подобных задач состоит как раз в том, чтобы увидеть нужное неравенство в процессе разбора задачи. Поэтому мы предлагаем несколько задач для самостоятельного решения (к наиболее трудным, отмеченных звездочкой, в конце журнала даны указания). Но прежде, чем приступить к их решению, мы советуем вам снова просмотреть разобранные примеры, чтобы понять, как по их виду можно было догадаться до хода решения.

Задачи

7 (КПИ, 1981). Найдите наименьшее значение выражения

$$x^2+4y^2+3z^2+t^2-2x-12y-6z-2t$$

при условии, что x, y, z и t принимают любые действительные значения.

8 (КПИ, 1981). Найдите наибольшее значение функции

$$y=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{4\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

9 (МИЭМ, 1980). При $n=1, 2, 3$ сравните числа

$$\cos^n 1^\circ+\cos^n 4^\circ \text{ и } \cos^n 2^\circ+\cos^n 3^\circ.$$

10 (МГУ, 1980). Докажите, что для любых действительных p и q справедливо неравенство

$$2(2p-1)^4+1+(1-2(2p-1)^4)\sin 2t\geqslant 0,$$

и найдите все пары чисел (p, t), для которых это неравенство превращается в равенство.

11* (КПИ, 1976). Докажите, что многочлен

$$a^4-5a^3-6a^2-a+9$$

не может иметь отрицательных корней.

12* (МИЭМ, 1982). Какому из промежутков [2; 3], [3,1; 3,3], [3,6; 4,5] принадлежит число

$$a=\log_6 7\sqrt[3]{6}-\log_7 \frac{1}{8\sqrt[3]{49}}+\log_{к}\frac{9}{8}?$$

13 (МИЭМ, 1979). Расположите в порядке возрастания числа

а) 0; $\sqrt{0,8}$; $1,2$; $\frac{11}{30}$; $0,91846$; $\ln\frac{7}{5}$;

б) 1; $0,37$; $\frac{65}{63}$; $\frac{61}{59}$; $\operatorname{tg} 33^\circ$; $\operatorname{tg}(-314^\circ)$.

Первая математическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
М. Л. АЛЕКСАНДРОВА

В связи с 50-летием первой математической олимпиады, состоявшейся в Ленинграде весной 1934 года, мы публикуем воспоминания ее участницы и победительницы М. Л. Георг (ныне Александровой).

Первая математическая олимпиада состоялась весной 1934 года. Она — незабываемое, яркое событие в жизни ее участников. Думаю, что все мы (из оставшихся в живых) совершенно ясно помним некоторые ее моменты, а также свое увлеченное, вдохновенное и счастливое состояние в дни олимпиады. И хотя за достоверность и точность того, что я сообщаю, отвечать за давностью происходившего я не могу, но кажется мне, что все, что я помню, именно так и происходило.

Организовал олимпиаду (а может быть и придумал) Борис Николаевич Делоне, профессор, член-корреспондент Академии наук СССР, талантливый математик широкого профиля, имевший выдающиеся работы по теории чисел, геометрии, алгебре, кристаллографии и др. Стремительный в движениях, с темными, умными, лукаво улыбающимися глазами, он, задавая вопросы, как бы дразнил ум и способности слушателя или собеседника. Встречи с ним во время олимпиады произвели на меня ошеломляющее впечатление. С ним вместе олимпиадой занимались профессора Г. М. Фихтенгольц, В. А. Тартаковский, О. К. Житомирский, В. А. Кречмар.

Ввиду того, что полных средних школ (имевших 8 и 9 классы) в 1934 г. в городе было немного, значительная часть молодых людей заканчивала свое среднее образование в рабфаках, существовавших тогда при некоторых вузах и втузах. Поэтому олимпиаду решили провести как среди школьников, так и среди рабфаковцев.

В школы и рабфаки были разосланы листки с задачами повышенной трудности, рассчитанными не столько на знания, сколько на сообразительность. Среди этих задач, например, были «задачи на построение», которые надо было решать с помощью циркуля и линейки. Мои товарищи и я о них раньше никогда не слыхали, и они так захватили меня, что уже ни о чем другом я думать не могла. Решение этих задач и было первым туром олимпиады.

К марту (февралю? апрелю?) в школах и рабфаках были составлены списки учеников, допущенных ко второму туру олимпиады. Всех нас

Здание, в котором проходила первая математическая олимпиада.

собрали в двух аудиториях университета — Большой физической (школьники) и Большой химической (рабфаковцы). Всем были розданы листы бумаги с тремя задачами на каждом. Были ли они одинаковы для всех или имелись какие-то варианты — не знаю. Кажется, задачи были одинаковые. Каждый, решив задачу, надписывал свою фамилию на листке и уходил, положив решенные задачи на стол внизу аудитории. В этом туре в общей сложности участвовало около 600 человек. На третий тур из их числа было приглашено примерно 100 человек.

На оставшееся до третьего тура время (примерно месяц) нам были розданы новые сборники интересных задач, изданные литографическим способом. Они были значительно труднее предыдущих, и мы, забыв все на свете, занимались их решением. В этом же месяце нас пригласили в университет прослушать лекции по математике. Я. С. Уфлянд помнит лекцию Г. М. Фихтенгольца, я помню лекцию по алгебре В. А. Кречмара и две лекции по геометрии Б. Н. Делоне. На одной из них, пользуясь эпидиаскопом (или кинопроектором?), Б. Н. Делоне демонстрировал на экране трехмерные проекции четырехмерного куба. К. В. Таганцев вспоминает, что Делоне пришел на эту лекцию с рюкзаком, из которого вытащил трехмерные проекции каких-то четырехмерных фигур (может быть куба?). В своих лекциях, прочитанных с невиданным еще нами блеском, Делоне как бы приоткрыл дверь в мир таинств и красот математики.

Третий тур олимпиады происходил в Главном здании университета, в нескольких аудиториях одновременно. Участники этого тура отыскивали свои фамилии и соответствующие номера аудиторий в списках, которые висели на двери главного входа в университет. В каждой аудитории находились два профессора. В той, в которую попала я, был сам Делоне и профессор В. А. Кречмар. На тот случай, если я не справлюсь и нужно будет удирать, я села на парту поближе к двери.

Каждый из нас получил лист бумаги, вверху которого стояла его фамилия, и две задачи — одна геометрическая, другая алгебраическая (так было у меня; у других, я думаю, могли быть и задачи по тригонометрии). По мере того, как мы расправлялись со своими задачами, происходило собеседование профессоров с нами. Надо сказать, что поскольку никаких олимпиад еще не бывало и понятия «победитель олимпиады» еще не существовало, то я и другие об этом вовсе не думали. Просто очень было интересно пройти через это испытание своих способностей.

Победителями олимпиады стали одиннадцать человек. Десять человек, помимо победителей, были премированы. Чудом сохранившаяся вырезка из газеты «Вечерний Ленинград» той поры сообщает, что победителями были: Ананов (23 школа Центрального района), Богомолов и Валландер (2 школа Нарвского района), Георг и Кондрашев (рабфак Университета), Кизевальтер (рабфак Гидротехнического института), Касаткин (рабфак Электротехнического института), Минцберг (15 школа Смоленского района), Оловянишников (завод «Красный химик»), Санов (7 школа Володарского района) и Таганцев (Гидротехнический институт). Из премированных я вспоминаю лишь Либермана, Уфлянда и Смирнова.

Через несколько дней победители и премированные были приглашены в зал Ученого совета университета, где первым были вручены подарки — портфели с металлической планкой, на которой было выгравировано: «Победителю первой математической олимпиады», а также несколько книг — учебников по различным разделам высшей математики, также с соответствующими надписями. Премированные получили такие же книги. Победители были сфотографированы, и их портреты повесили в Институте математики ленинградского университета.

Большая часть победителей и премированных поступила на математико-механический факультет университета, другие — на физический, химический, геологический. В группе «чистой математики» подобрался очень сильный состав студентов. В ней долго царил «дух олимпиады» — в перерывах между лекциями и занятиями мы толпились у доски и обсуждали решения трудных задач. В такой обстановке все быстро росли. Некоторые из нас в студенческие годы получили свои первые научные результаты.

Вне зависимости от того, каких научных или административных званий победители и призеры первой олимпиады достигли на своем трудовом пути, я хорошо знаю, что они все работали и еще работают в избранной ими области с неизменным энтузиазмом.

Мне хочется вспомнить о тех, чью жизнь оборвала война. Сергей Оловянишников пришел на олимпиаду и в университет прямо с производства, помимо школы и рабфака. Уже в студенческие годы проявился его истинный математический талант. Существует в геометрии «теорема Оловянишникова», вошедшая в ряд фундаментальных результатов геометрии. После окончания университета в 1941 году он сразу отправился на фронт. Я была свидетелем того, как, находясь после ранения в батальоне для выздоравливающих, Сергей показывал результаты новой работы А. Д. Александрову*). Работа осталась неоконченной. Вскоре после выздоровления, вернувшись в действующую армию, Сергей Оловянишников погиб на берегах Невы.

Другой участник олимпиады, Иосиф Либерман (он был в числе премированных) в июне 1941 года закончил второй курс аспирантуры. Летом 1941 года в форме морского офицера защитил кандидатскую диссертацию, а осенью погиб, защищая город Таллин.

Погиб на войне и призер олимпиады Саша Смирнов, окончивший математико-механический факультет по специальности «теория упругости».

Мне представляется любопытным, что четверо из отмеченных на олимпиаде наградами за год до нее вместе окончили одно ФЗУ (по современным меркам ПТУ) при Заводе точного машиностроения (ныне Завод полиграфических машин). Это: Александрова, Кизевальтер, Кондрашев и Уфлянд.

---

*) Известный советский геометр, ныне академик.

Избранные задачи 50-й ленинградской городской олимпиады

Задачи юбилейной ленинградской олимпиады включены в «Задачник «Кванта» предыдущего и этого номеров (**М876**—**М882** и **М883** б)). Ниже мы публикуем еще несколько интересных задач этой олимпиады. Указания к решению некоторых из них помещены в конце номера (с. 62). Задачи на олимпиаду предложили *С. А. Генкин* (№№ 2, 13), *А. Г. Гольдберг* (№ 5), *Ю. И. Ионин* (№№ 3, 4, 15), *А. С. Меркурьев* (№№ 7, 10, 12, 14, 16), *С. Е. Рукшин* (№№ 8, 9), *Г. Перельман* (№ 11), *Д. В. Фомин* (№ 1), *С. В. Фомин* (№ 17).

1. Круг разделен на 6 секторов, в которых расставлены цифры 1, 0, 1, 0, 0, 0 (в указанном порядке). Разрешается одновременно увеличивать на 1 два стоящих рядом числа. Докажите, что с помощью таких операций нельзя добиться равенства всех шести чисел. (5 кл.)

2. На прямой отмечено 45 точек, лежащих вне отрезка AB. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки A не равна сумме расстояний от этих точек до точки B. (5—7 кл.)

3. Найдите наименьшее целое число, которое можно тремя разными способами представить в виде $13x+73y$, где x и y — натуральные числа.

4. Докажите, что набор чисел (2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15) не может быть множеством длин сторон и диагоналей пятиугольника. (7 кл.)

5. Найдите числа

$$(1+x^2)^{-1}+(1+y^2)^{-1} \text{ и } 2(1+xy)^{-1},$$

если известно, что они равны и $x\neq y$. (7 кл.)

6. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ выполняются соотношения: $AE=AD$, $AB=AC$, $\angle CAD=\angle AEB+\angle ABE$. Докажите, что сторона CD вдвое больше медианы AM треугольника ABE. (7 кл.)

7. Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ таковы, что $a_1+a_2+\ldots+a_k=b_1+b_2+\ldots+b_n$. Докажите, что в прямоугольной таблице $k\times n$ клеток можно расставить неотрицательные числа, среди которых по крайней мере $(k-1)(n-1)$ нулей, так, что суммы чисел в строках равны $a_1, \ldots, a_k$, а в столбцах — $b_1, \ldots, b_n$. (8—9 кл.)

8. На сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ даны точки E и H. Докажите, что если треугольники ABH и CDE равновелики и $AE:BE=DH:CH$, то $BC\parallel AD$. (8—9 кл.)

9. Двое играют в такую игру. Первый игрок пишет какую-нибудь цифру; второй игрок приписывает к ней слева или справа еще одну цифру; первый игрок приписывает к образовавшемуся числу слева или справа еще одну цифру и т. д. Докажите, что первый игрок может играть так, чтобы каждое число, получающееся после хода второго игрока, не было квадратом целого числа. (8—9 кл.)

10. На координатной плоскости даны 4 точки с целыми координатами. Разрешается заменять любую из этих точек на точку, симметричную ей относительно любой другой из этих точек. Можно ли за несколько таких операций перейти от четверки вершин единичного квадрата (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1) к точкам с координатами (0; 0), (1; 1), (3; 0), (2; −1)? (8—10 кл.)

11. Даны числа: 1 и девять нулей. Разрешается выбрать два числа и заменить каждое их средним арифметическим. Какое наименьшее число может оказаться на месте единицы после серии таких операций? (8—10 кл.)

12. Докажите, что существует такое множество A, состоящее из натуральных чисел, что любое натуральное число, не принадлежащее множеству A, является средним арифметическим двух различных элементов множества A, а никакое число из множества A этим свойством не обладает. (8—10 кл.)

13. Фишка может находиться в одной из 13×13 точек (x, y), где x и y — целые числа, $0\leqslant x\leqslant 12$, $0\leqslant y\leqslant 12$. Фишка может пойти из точки (x_1, y_1) в точку (x_2, y_2), если каждое из чисел $|x_1-x_2|$, $|x_1-y_2|$, $|y_1-x_2|$, $|y_1-y_2|$ не меньше 2 и не больше 9. Докажите, что она не может обойти все 169 точек, побывав в каждой из них ровно один раз. (8—9 кл.)

14. Разность шестизначных чисел $\overline{abcdef}$ и $\overline{fdebca}$ делится на 271. Докажите, что $b=d$ и $c=e$. (8—10 кл.)

15. В вершинах 50-угольной призмы расставлены числа 1, 2, ..., 100. Докажите, что найдутся два числа, стоящие в концах одного ребра, отличающиеся не более, чем на 48. (10 кл.)

16. Целое число a таково, что число $3a$ представимо в виде x^2+2y^2, где x и y — целые числа. Докажите, что и число a представимо в таком виде. (10 кг.)

17. После нескольких операций дифференцирования и умножения на $x+1$, выполненных в любом порядке, многочлен x^8+x^7 превратился в $ax+b$. Докажите, что разность целых чисел $a-b$ делится на 49.

Публикацию подготовили *Ю. И. Ионин*, *С. В. Фомин*

Ленинградская городская олимпиада по физике

Городскую физическую олимпиаду для учащихся 8—10 классов организуют физический факультет Ленинградского государственного университета им. А. А. Жданова и Дворец пионеров и школьников им. А. А. Жданова. Олимпиада проходит в три тура — школьный (около 30 тысяч участников), районный (около 5 тысяч участников) и городской (600 участников). Задачи районного и городского туров — единые для всех участников (городской тур проводится в два этапа — теоретический и экспериментальный). Жюри состоит из ученых и лучших студентов физфака ЛГУ.

Итоги олимпиады подводятся в командном и личном зачете. Из победителей в личном зачете формируется команда г. Ленинграда для участия во Всесоюзной олимпиаде школьников.

Ниже приводятся некоторые задачи, предлагавшиеся в 1983 и 1984 годах на Ленинградских олимпиадах по физике.

Районный тур

8 класс

1. Трубу, сечение которой представляет собой правильный шестиугольник со стороной l, перекатывают так, что угловая скорость относительно оси поворота постоянна и равна ω. Нарисуйте траекторию движения центра трубы и найдите среднюю скорость его поступательного движения. Проскальзывания нет.

2. На дно пустого сосуда с высотой H помещены два вертикальных цилиндра (рис. 1). Плотность материала обоих цилиндров $\varrho = 0{,}5$ г/см^3, площади их оснований $S_1 = 10$ см^2 и $S_2 = 5$ см^2, высоты $h_1 = h_2 = 1$ см. Что произойдет с цилиндрами, если сосуд до краев заполнить водой? Атмосферное давление $p_a = 1$ атм.

3. Оцените, какую скорость могут сообщить партнеры теннисному шарику при игре в настольный теннис, если каждый сделает по три удара, а максимальная скорость ракетки v_0. Сколько времени для этого потребуется, если длина стола L?

9 класс

1. Вы стоите, не касаясь земли, на качелях, которые покоятся (рис. 2). Можно ли их раскачать? Если да, то объясните, как это можно сделать и какая сила сообщит вам вместе с качелями импульс в горизонтальном направлении.

2. Две тепловые машины работают по циклам $ABCDA$ и $ABC'D'A$ соответственно (рис. 3). КПД какой из машин больше? В обоих случаях рабочим телом служит один моль идеального одноатомного газа.

3. Уединенный проводник ограниченных размеров имеет заряд $q>0$. Докажите, что плотность заряда на нем всюду неотрицательна.

10 класс

1. Плоское зеркало находится на расстоянии $2F$ от собирающей линзы с фокусным расстоянием F (рис. 4). Постройте изображение отрезка AB, находящегося на расстоянии $L=F$ от линзы.

2. Шарик, закрепленный на пружине, совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости с амплитудой x_m. На каком расстоянии от положения равновесия нужно поставить стенку, упруго отражающую шарик, чтобы период колебаний уменьшился на одну треть?

3. В LC-контуре возбуждены гармонические колебания с амплитудой U_m. В момент, когда конденсатор полностью заряжен, его пластины быстро сдвигают, увеличивая емкость вдвое. Отразится ли это на колебаниях и каким образом?

Городской тур

8 класс

1. Ведущие колеса правой и левой гусениц танка вращаются в одном направлении с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 соответственно ($\omega_2 > \omega_1$). Найдите радиус окружности, по которой движется танк, и угловую скорость его движения. Ширина танка l, радиус ведущих колес r. Середины гусениц не проскальзывают относительно земли.

2. Две частицы движутся по одной и той же прямой. Графики скоростей этих частиц приведены на рисунке 5. В момент времени $t=0$ обе частицы находились в одной точке. Найдите минимальное расстояние между частицами при временах $t \geqslant T$.

3. На наклонной плоскости с углом α стоят друг на друге два одинаковых однородных кубика. Коэффициент трения между ними μ, а между нижним кубиком и плоскостью трение очень большое. Угол α медленно увеличивают. Опишите, что произойдет с кубиками (по возможности, количественно).

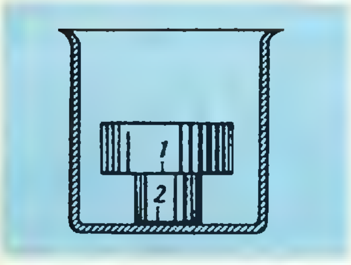


Рис. 1.

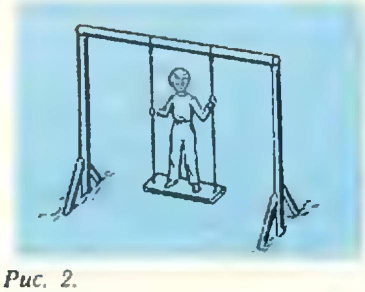


Рис. 2.

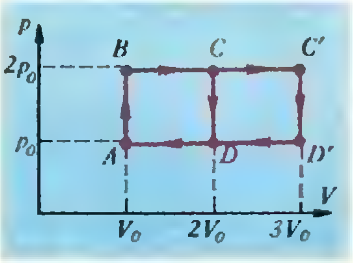


Рис. 3.

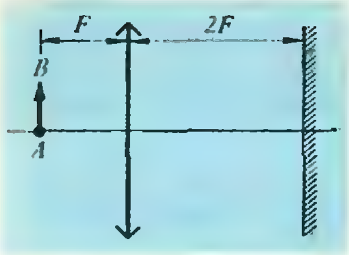


Рис. 4.

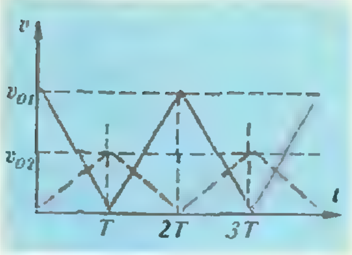


Рис. 5.

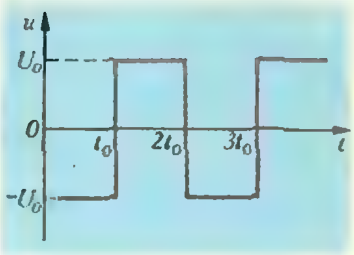


Рис. 6.

9 класс

1. Резервуар массой M и длиной L на колесах пренебрежимо малой массы может двигаться без трения по горизонтальной плоскости. Он разделен посередине вертикальной невесомой перегородкой, слева от которой находится идеальный газ, справа — вакуум. Масса газа m, температура T. В начальный момент времени резервуар покоится, а в перегородке открывают отверстие. Определите установившуюся температуру газа. Найдите перемещение резервуара в горизонтальном направлении. Резервуар теплоизолирован.

2. Между пластинами плоского конденсатора находятся заряженные пылинки. В среднем отношение заряда к массе пылинок $q/m=\alpha$. Расстояние между пластинами d. Конденсатор подключают к источнику периодически меняющегося напряжения $u(t)$ (рис. 6). Оцените время, за которое практически все пылинки осядут на стенки, если U_0 достаточно велико, а t_0 достаточно мало.

3. Из четырех одинаковых пластин площадью S каждая, которые нельзя придвигать друг к другу на расстояние меньше d ($d \ll \sqrt{S}$), нужно сделать конденсатор максимально возможной емкости. Как для этого нужно расположить пластины?

10 класс

1. См. задачу 2 для 8 класса.

2. Маленький кубик массой m лежит на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения кубика о нее μ. Кубик соединен с вертикальной стенкой горизонтальной пружиной с жесткостью k. Кубик отводят от положения, при котором пружина не деформирована, на расстояние A, меньшее длины нерастянутой пружины, и отпускают. Найдите путь, проходимый кубиком до остановки.

3. Имеются две невесомые пружины с жесткостями k_1 и k_2. Их длины в недеформированном состоянии различаются на величину l. Сначала пружины соединили последовательно, потом вставили одну пружину в другую и соединили оба конца (так что они стали одинаковой длины). Найдите период продольных колебаний каждой системы, если один конец системы пружин закреплен, а к другому прикреплен груз массой m, который может двигаться без трения по горизонтальному столу (пружины при этом тоже расположены горизонтально).

Публикацию подготовили *А. Г. Изергин, Ю. П. Малышев*

Советуем прочесть

Ученые — представители точных наук всего мира отмечали недавно 275-летие со дня рождения и 200-летие со дня смерти гения XVIII века, члена Петербургской Академии наук Леонарда Эйлера. 31 год его научной деятельности протекал в Петербурге (1727—1741 и 1766—1783), 25 лет — в Берлине (1741—1766). В пятом номере на четвертой странице обложки мы поместили информацию о некоторых мероприятиях в память Эйлера.

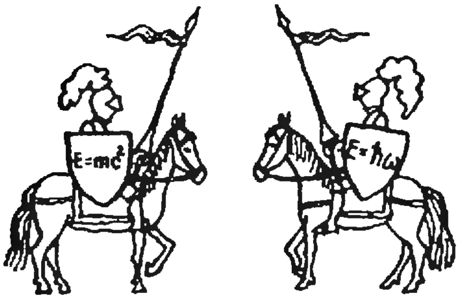
Изданы и две небольшие книжки об Эйлере. Профессор А. П. Юшкевич кратко изложил основные события из жизни Эйлера и его важнейшие достижения в различных областях математики.

Первая часть книжки А. Яковлева представляет собой значительно более подробное беллетризованное жизнеописание ученого; во второй части рассказывается о некоторых математических проблемах и задачах, которыми занимался Эйлер и которые доступны пониманию учащихся IX—X классов.

Наши читатели могут выбрать любую из этих книжек — в соответствии со своей подготовкой и интересами.

1. А. П. Юшкевич. *Леонард Эйлер.* М.: Знание, 1982.
2. А. Я. Яковлев. *Леонард Эйлер.* М.: Просвещение, 1983 (Серия «Люди науки» — пособие для учащихся).

VI Московский турнир юных физиков



Если два человека одинакового возраста придерживаются противоположных взглядов и у одного из них имеются горячие сторонники, то имеются они и у другого.

Льюис Кэррол

VI Московский турнир был проведен физическим факультетом МГУ с декабря 1983 г. по март 1984 г. Оргкомитет Турнира возглавлял вице-президент АН СССР, академик Е. П. Велихов, жюри — профессор физического факультета МГУ В. Л. Бонч-Бруевич. В этом соревновании старшеклассников приняли участие 41 школа Москвы и Московской области.

Как обычно, Турнир проводился в три этапа.

I тур — заочный коллективный конкурс. Школам для коллективного решения предлагались 17 задач сроком на два месяца. По результатам этого конкурса ко II туру были допущены команды 13-ти школ.

II тур — отборочные физбои, которые определили финалистов Турнира. Отборочные физбои проводились на физическом факультете и в московских школах по задачам заочного конкурса.

III тур — финал Турнира был проведен на физическом факультете МГУ. В его программу входили: физбой финалистов Турнира, конкурс домашних заданий, конкурс капитанов, конкурс болельщиков, награждение победителей Турнира.

Первое место и переходящий приз Турнира присуждены команде школы № 179 г. Москвы, второе место — командам школ № 2 и № 57 г. Москвы, третье место — командам школ ФМШ № 542 при МИФИ, № 444 г. Москвы, ЭСШ № 82 пос. Черноголовка и ФМШ № 18 при МГУ. За победу в отдельных конкурсах Турнира грамоты и подарки были вручены 17-ти школьникам. Физический факультет МГУ наградил школы, команды которых показали высокие результаты, физическими приборами.

VII Турнир юных физиков для учащихся 8—10 классов школ Москвы и Московской области начнется в сентябре 1984 г. Ваши вопросы по организации таких соревнований, отзывы и предложения, а также заявки на участие в ТЮФ-VII присылайте по адресу: 119899, Москва, ГСП, МГУ, физический факультет, Совет по работе со школьниками, Оргкомитет ТЮФ.

Задания Турнира

Эти задания вы можете использовать при организации в школе викторин, вечеров науки, физбоев, в работе физических кружков.

Задания заочного коллективного конкурса

Большинство заданий сформулировано на основе конкретных физических явлений и рассчитано на проведение серьезных теоретических и экспериментальных исследований, выходящих за рамки «школьного» подхода. Условия задач, как правило, сформулированы максимально кратко и допускают различные трактовки и степени упрощения.

1. **«Придумай сам».** Самостоятельно сформулируйте задачу-проблему и решите ее.

2. **«Расширяющаяся Вселенная».** Длинная полоска резины одним концом прикреплена к неподвижной планке (координаты концов планки — (0; 0) и (0; 1)), а другим — к планке, движущейся с постоянной скоростью u вдоль оси Ox (начальные координаты концов планки — (L; 0) и (L; 1). За какое минимальное время муравей перебежит из начала координат в точку на резине с начальными координатами (x_0; y_0)? Ширина резиновой полоски постоянна, скорость муравья относительно резины v_1.

3. **«Встреча».** Три муравья одновременно начинают двигаться из трех различных точек с различными постоянными скоростями так, что скорость первого муравья всегда направлена ко второму, второго — к третьему и третьего — к первому. При каких соотношениях скоростей произойдет их одновременная встреча? В какой точке это произойдет? Считать известными начальные координаты и скорости муравьев.

4. **«Клей».** Наполовину заполненная бутылочка с клеем (свежим, канцелярским) скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости. Экспериментатор может придать бутылочке практически любую начальную скорость. Какой будет установившаяся скорость качения бутылочки по очень длинной наклонной плоскости в зависимости от начальной скорости и угла наклона плоскости?

5. **«Гипосульфит».** Фотолюбители хорошо знают, что при растворении гипосульфита (тиосульфата натрия) вода сильно охлаждается. Исследовать это явление. В частности, определить ΔU [Дж/кг].

6. **«Связь».** Любознательные физики решили связаться с «жителями» α-Центавра посредством электронного пучка. Возможно ли это и каков тогда должен быть пучок?

7. **«Машина катастроф».** «Катастрофами называются скачкообразные изменения, возникающие в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий. Применение теории катастроф к конкретным задачам в разных областях науки вызвало много споров...» (Арнольд В. И. *Теория катастроф.* М.: Знание, 1981; МГУ, 1983).

Наглядное представление о применении выводов теории катастроф можно получить с помощью

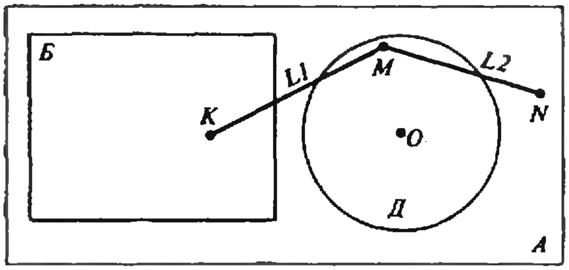


Рис. 1.

«машины катастроф» Зимана (рис. 1). Ее легко изготовить: диск *Д* из плотного картона крепится к доске *А* так, что он может свободно вращаться на оси *O*. На краю диска имеется штырь *M*, к которому прикрепляется середина легко растяжимой резиновой ленты $L1 - L2$. Один конец ленты прикреплен к доске в некоторой точке *N*, а к другому, свободному концу прикрепляют карандаш *K*. При медленном перемещении карандаша по листу бумаги *Б* диск поворачивается и при пересечении карандашом некоторых точек, лежащих на так называемой «кривой катастроф», может скачком перейти в новое положение.

Исследуйте «кривую катастроф» машины Зимана. Постройте свою «машину катастроф» и исследуйте ее.

8. «Река». Оцените скорость течения реки, если перепад высот составляет 1 м/1 км на протяжении 100 км. Какова скорость плота в такой реке?

9. «Электромотор». Экспериментально исследуйте и объясните семейство вольтамперных характеристик $I(U)$ электромотора, применяемого в детских игрушках, при различных механических нагрузках.

10. «Трос». Исследовательское судно «Витязь» отправляется в плавание для изучения дна океана. Предстоит опустить на дно специальное устройство ($m=6000$ кг, $V=1$ м^3) на стальном тросе. На какую глубину можно опустить это устройство и каким должен быть трос?

11. «Батарейка». Исследуйте зависимость ЭДС и внутреннего сопротивления батарейки для карманного фонарика от температуры в интервале 10 °С — 90 °С.

12. «Трансформатор». При размыкании первичной цепи ключом *K* во вторичной цепи возникает импульс тока (рис. 2).

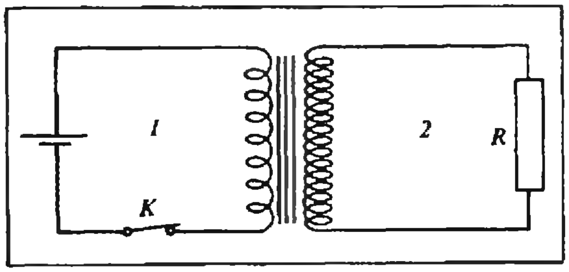


Рис. 2.

Объяснить его происхождение и измерить амплитуду импульса для конкретной схемы. Трансформатор повышающий (любой, какой можно достать), источник тока — батарейка, $R=10$ кОм.

13. «Затухание». Экспериментально вывести закон затухания колебаний математического маятника в воздухе. Эксперименты желательно провести с тяжелым шариком $m=100$ г, подвешенным на нити $l=1$ м. Начальное отклонение $\alpha=20°$.

14. «Плотность вероятности». На *X*-пластины осциллографа подается гармонический сигнал $x=x_0 \sin\omega t$. Вследствие этого на экране наблюдается горизонтальная полоска, освещенность которой больше на краях, чем в центре. Вывести закон изменения освещенности полоски вдоль ее длины.

15. «Шарик и поршень». Маленький, абсолютно упругий шарик находится между абсолютно упругими стенкой и поршнем (рис. 3). Поршень совершает гармонические колебания по закону $x=x_0(1-\cos\omega t)$. Минимальное расстояние между поршнем и стенкой равно *L*, причем $L \gg x_0$.

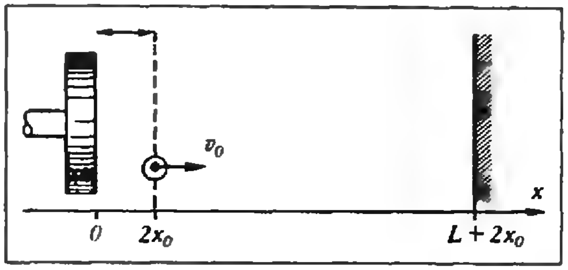


Рис. 3.

В начальный момент $t=0$ шарик находится в точке $x=2x_0$ и имеет скорость $v_0>0$, направленную к стенке. Какая скорость будет у шарика после достаточно большого числа соударений? Для простоты расчетов и сравнимости результатов считать, что после каждого соударения шарика с поршнем поршень мгновенно возвращается в положение $x=0$ и покоится до тех пор, пока шарик не удалится от начала координат на расстояние $x=2x_0$. Затем поршень продолжает гармонические колебания до следующего соударения с шариком и т. д. Пусть все величины безразмерные и $x_0=0{,}0025$; $L=0{,}5$; $\omega=\pi$; $v_0=0{,}04-1{,}00$.

16. «Планета». Некая планета вращается по круговой орбите с периодом τ вокруг звезды типа Солнца. Вследствие вращения планеты вокруг собственной оси с частотой ν температура поверхности планеты неодинакова на дневной и ночной сторонах. Известно, что коэффициент отражения поверхности планеты зависит от температуры: $\Delta\varepsilon=\alpha\Delta T$. Следовательно, электромагнитное излучение больше отражается от вечернего края планеты, чем от утреннего, и это должно изменять скорость вращения планеты вокруг своей оси. Рассчитать изменение частоты вращения планеты за год $\Delta\nu$ [с/год]. Считать известными параметры излучения и параметры планеты. Произвести численные оценки для Земли.

17. «Картошка». Полярность немаркированного источника постоянного напряжения можно определить с помощью ... сырой картошки. Попробуйте!

Домашние задания финалистам Турнира

1. «Мертвая вода». «Мы направились к краю льда, чтобы пристать, но «Фрам» оказался на «мертвой воде» и почти не трогался с места, хотя машина и работала изо всех сил. Мы продвигались так медленно, что я предпочел выехать вперед на лодке, чтобы настрелять тюленей». (Фр. Нансен. *Среди льдов и во мраке полярной ночи.*)

Что такое «мертвая вода», почему она существенно замедляет продвижение корабля?

2. «Качение шарика». Шарик скатывается по двум параллельным наклонным рельсам. Рассчитать и измерить зависимость ускорения и шарика от ширины x щели между рельсами: $\alpha = f(x)$. Пусть $x=0,1D$ — $0,7D$ и $\operatorname{tg}\alpha=0,01$—$0,6$, где D — диаметр шарика. Для экспериментов был выдан биллиардный шарик ($D=5$ см).

3. «Конденсатор». Предложить способ и измерить емкость электролитического конденсатора. Для экспериментов был выдан конденсатор ЭГЦ 500 мкФ 30 В.

4. «Страусиное яйцо». Оцените, во сколько раз страусиное яйцо варится дольше куриного.

5. «Представление». Разыграть с участием членов команды и болельщиков представление на физическую тему. Длительность представления — 5 мин. Жанр произвольный.

Конкурс главных задач

На решение этих задач с представлением письменных отчетов командам отводилось два часа.

1. «Резонатор Гельмгольца». Рассчитать и измерить резонансную частоту звуковых колебаний в сферической колбе с узким горлышком. Объем колбы 0,5 л, площадь сечения горлышка 4 см^2, высота горлышка 2 см, скорость звука 330 м/с.

2. «Искра». При размыкании цепи постоянного тока, содержащей большую индуктивность, между контактами размыкающего ключа возникает искровой разряд. Если параллельно ключу подсоединить конденсатор, то искровой разряд значительно ослабнет. Исследовать и объяснить явление гашения искры при подключении конденсатора.

3. «Эффект Доплера». Источник и приемник звуковых колебаний (репродуктор и микрофон) укреплены на концах планки, которая подвешена к маятнику и может совершать колебания (образуется фигура в виде перевернутой буквы Т). Сигнал, поступающий на репродуктор от звукового генератора, подается на X-пластины осциллографа. На Y-пластины осциллографа подается усиленный сигнал от микрофона. Таким образом, на экране осциллографа методом эллипса можно наблюдать разность фаз между сигналом звукового генератора и усиленным сигналом микрофона. Предварительно, при покоящемся маятнике, небольшим изменением частоты генератора на экране осциллографа получают изображение наклонной прямой. Затем при свободно колеблющемся маятнике на экране осциллографа наблюдают периодическое превращение прямой в эллипс (если планка находится в плоскости качаний).

Объяснить эффект возникновения дополнительной разности фаз в данном эксперименте. Произвести численные оценки. В представленной установке длина маятника 1,6 м, длина планки 70 см, частота звукового генератора 10 кГц, начальное отклонение маятника 30°.

Конкурс капитанов и болельщиков

Капитаны выполняли эти задания с двумя помощниками. Болельщики работали индивидуально или группами и присылали ответы в пользу одной из команд — финалистов. Время на выполнение каждого задания — 5 минут.

1. «Фокус холода». Два сферических отражателя направлены навстречу друг другу. В фокус первого отражателя помещен термостолбик. Если в фокус второго отражателя поместить горячий объект (зажженную спичку или руку экспериментатора), то термостолбик зафиксирует повышение температуры. Что будет, если в фокус второго отражателя поместить кювету с жидким азотом?

2. «Взвешивание слона». «Слон» подвешен так, как показано на рисунке 4. Определить массу «слона», если известна масса гири. Углы, которые составляют нити с вертикалью, можно измерить.

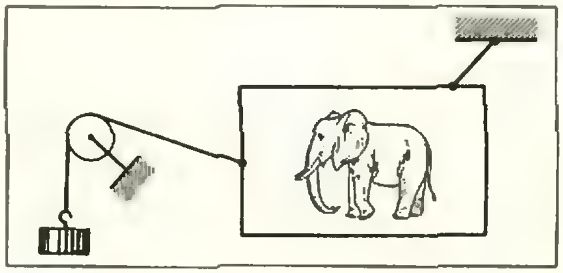


Рис. 4.

3. «Машина катастроф Зимана». Объяснить качественно, как изменится кривая катастроф машины Зимана, если укоротить резинку l_1 (описание машины Зимана см. в заданиях заочного конкурса).

4. «Машина». Что будет, если отпустить тормоза (рис. 5)?

5. «Сифон». Будет ли действовать сифон, если его поместить под колокол вакуумного насоса и откачать воздух (рис. 6)?

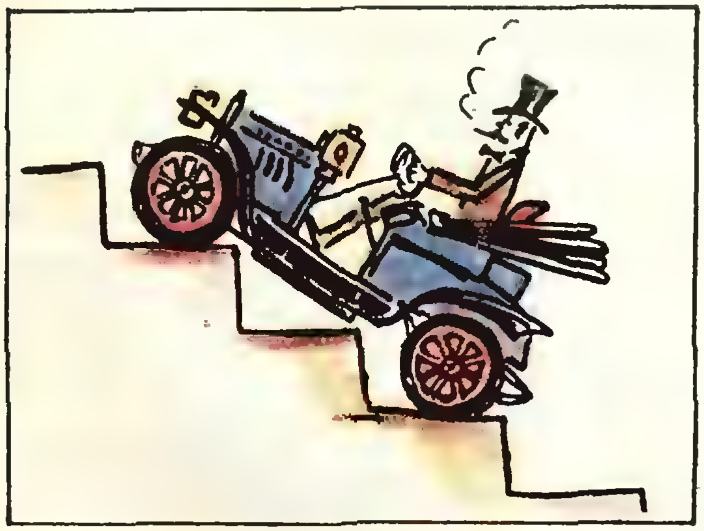


Рис. 5.

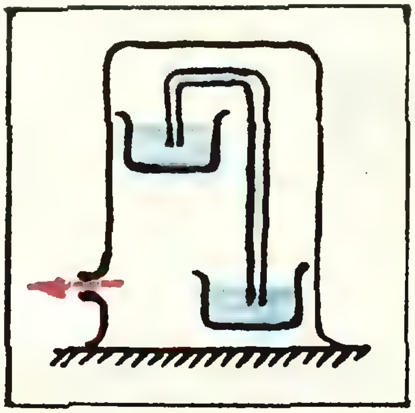


Рис. 6.

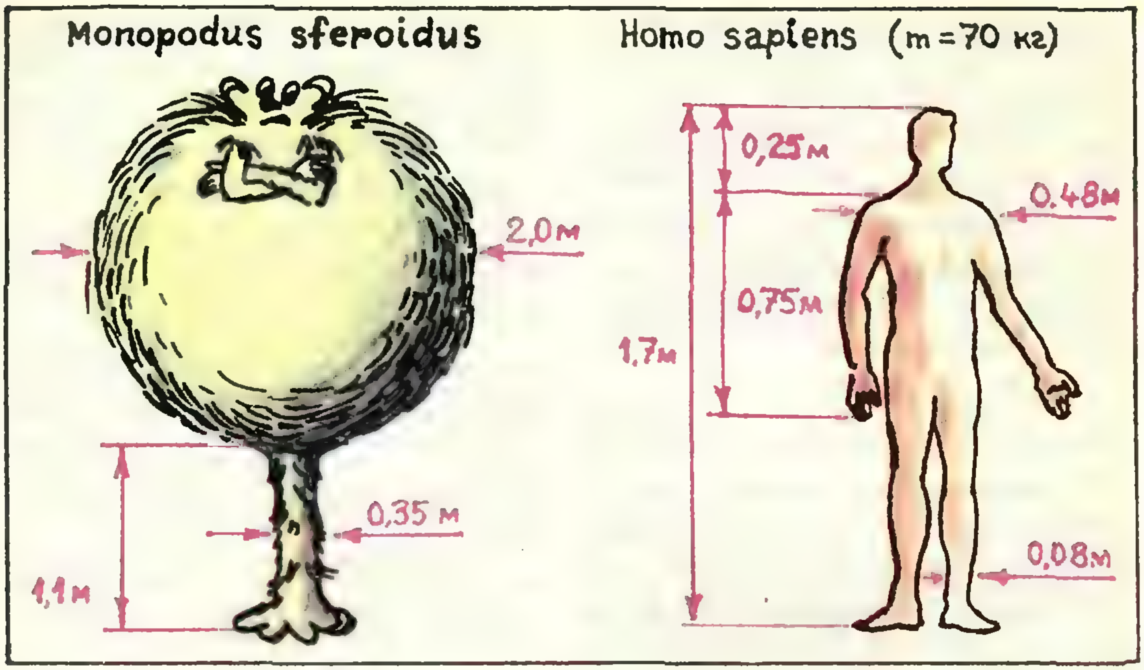


Рис. 7.

6. **«Световые пятна».** Фонарь, состоящий из кожуха и обычной лампы (220 В, 150 Вт), закрыт спереди светонепроницаемой черной бумагой. Длина спирали лампочки 3 см, расстояние от спирали до черной бумаги 5 см. На большом расстоянии от фонаря (5 м) находится экран. Что будет на экране, если в черной бумаге проколоть отверстия диаметром 1 мм? 2 мм? 3 мм? Что будет, если проколоть много отверстий?

7. **«Орловский рысак».** В течение двух минут человек может двигаться со скоростью: бегом — *28 км/ч, на коньках — 47 км/ч. Орловский* рысак в течение двух минут развивает скорость 48 км/ч. Какую скорость мог бы развить орловский рысак на коньках? Для справки дана таблица мировых рекордов (первое число — время, второе — скорость в км/ч):

Бег 800 м	муж. жен.	1.43,5 1.53,5	27,83 25,37
Коньки 1500 м	муж. жен.	1.54,26 2.01,04	47,26 43,53
Бег 1600 м	орловский рысак	1.59,75	48,10

8. **«Одноног».** Некая зоологическая экспедиция обнаружила в джунглях реки Амазонки новый вид млекопитающего животного — Monopodus sferoidus (рис. 7, в просторечии — *одноног*).

Оцените массу и полный рост однонога. При решении задачи используйте средние антропометрические данные для человека.

Зам. председателя оргкомитета турнира
Е. Н. Юносов

Ответы, указания, решения

Простой прием в непростых задачах

1. $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2-\sqrt{15}$, $6 \leqslant x < +\infty$.
2. $x=3$.
4. $x \in [6{,}25; +\infty[$.
5. $y_{\max} = -\frac{3}{4}$; $y_{\min} = -3$.

Кто же прав?

Характеристическим условием возрастания (убывания) на промежутке дифференцируемой функции является неравенство $f'(x) \geqslant 0$, а не $f'(x) > 0$ (для убывания $f'(x) \leqslant 0$, а не $f'(x) < 0$), лишь бы только критические точки функции не заполняли какого-либо промежутка. Если бы Федя и Вася вместо строгих неравенств $2x+a>0$ и $2x+a<0$ написали нестрогие $2x+a \geqslant 0$ и $2x+a \leqslant 0$, то у них *получилось бы, что* $a=-2$, *то есть парабола,* нарисованная Дусей.

О таком характеристическом условии монотонности функции в учебнике не сказано, но оно совершенно очевидно.

Вместе с тем, задачу можно решить и оставаясь в рамках того, что написано в учебнике. Система неравенств, которую решал Федя, на самом деле выполняется при условии $a \geqslant -2$. Система неравенств, которую решал Вася, на самом деле выполняется при условии $a \leqslant -2$. Вместе они выполняются как раз при $a=-2$.

И наконец, такое соображение. Согласно замечанию в учебнике, если функция непрерывна на конце промежутка, то его — конец промежутка — можно подключить к соответствующему открытому промежутку при исследовании функции на монотонность. Но тогда наша парабола возрастает при $x \geqslant 1$ и убывает при $x \leqslant 1$, откуда следует, что при $x=1$ имеется ее минимум. Отсюда находим (как?), что $a=-2$.

Избранные школьные задачи

1. Ответ: $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, 7, $4\frac{1}{2}$ и $3\frac{1}{2}$ фунта.

Указание. Сумма результатов всех взвешиваний — 61 фунт — равна сумме удвоенных весов первого, второго, четвертого и пятого мешков с утроенным весом третьего мешка. Поэтому утроенный вес третьего мешка равен $61-2(12+8)=21$. Дальнейшее ясно.

2. Решение. $3(a^2+b^2+c^2)=(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2+(a+b+c)^2$.

3. Указание. Пусть DE — искомый отрезок (рис. 1). Отложим на BC отрезок $|CF|=|CD|$. Тогда $|FB|=|EB|$. Треугольники CDF и BEF равнобедренные, а так как $(DE)\parallel(BC)$, отрезки DF и EF — биссектрисы углов CDE и DEB соответственно. Поэтому точка F одинаково удалена от AC, DE и AB, то есть AF — биссектриса угла A.

4. Ответ: 0 при $\alpha+\beta+\gamma \leqslant 2$, $\alpha+\beta+\gamma-2$ при $\alpha+\beta+\gamma>2$. Указание. Пусть N — число учеников в классе. Тогда αN, βN и γN — число участников хорового, драматического и фото-кружков. Если $\alpha+\beta \leqslant 1$, то учеников, посещающих все три кружка, может и не быть. Если $\alpha+\beta>1$, то наименьшее число учеников, участвующих в каждом из первых двух кружков, равно $(\alpha+\beta-1)N$. Пусть $\delta=\alpha+\beta-1$. Аналогичное рассуждение показывает, что при $\delta+\gamma \leqslant 1$ учеников, посещающих все три кружка, может и не быть, а при $\delta+\gamma>1$ наименьшее их число равно $(\delta+\gamma-1)N$, то есть $(\alpha+\beta+\gamma-2)N$.

5. Ответ: $1-\alpha-\beta$. Указание. Из равенств $\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}=\frac{|OD|}{|AD|}$; $\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}=\frac{|OE|}{|BE|}$; $\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{|OF|}{|FC|}$ следует, что $\frac{|OD|}{|AD|}+\frac{|OE|}{|BE|}+\frac{|OF|}{|FC|}=1$.

6. Ответ: Всего 10 видов треугольников с углами: **1.** 120°, 30°, 30°; **2.** 120°, 40°, 20°; **3.** 120°, 45°, 15°; **4.** 120°, 36°, 24°; **5.** $120^\circ, \frac{360^\circ}{7}, \frac{60^\circ}{7}$; **6.** 90°, 45°, 45°; **7.** 90°, 30°, 60°; **8.** 90°, 72°, 18°; **9.** 72°, 72°, 36°; **10.** 60°, 60°, 60°. Указание. Задача сводится к решению в натуральных числах уравнения $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$. Далее, пусть $k \leqslant l \leqslant m$. Тогда $3 \leqslant k \leqslant 6$. (Если $k \geqslant 7$, то $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}<\frac{3}{7}<\frac{1}{2}$.) Остается перебрать случаи $k=3$, $k=4$, $k=5$ и $k=6$.

7. Указание. На перпендикуляре к (AP) (рис. 2) в точке A по обе стороны от A отложим равные отрезки GA и AH, и через точки G и H проведем прямые, параллельные AP. Эти прямые пересекут стороны угла в точках G' и H'. Пусть K — любая из точек пересечения AP с окружностью, построенной на $G'H'$ как на диаметре. Осталось провести через точку P прямые, параллельные $G'K$ и $H'K$, пересекающие соответствующие стороны угла в точках E и F.

8. Ответ: $a=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2}$; $b=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^2+m_c^2)-m_b^2}$;

$$c=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^2+m_b^2)-m_c^2},$$

$$\cos\widehat{A}=\frac{2(m_a^2-m_b^2-m_c^2)}{9bc} \text{ и т. д.}$$

Указание. Продолжив медиану AM (рис. 3) на расстояние $|MO'|=|OM|$, получим из параллелограмма $BOCO'$ $a^2+\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2=2\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2+2\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2$.

9. Ответ: $x<0$; $x \geqslant 4$. Указание. Вычитая из первого уравнения второе, без труда получим, что $y=z$, $y \neq 0$ $y \neq 1$, $x=\frac{y^2}{y-1}$. Остается выяснить, при каких x имеет ненулевые корни уравнение $y^2-xy+x=0$.

10. Ответ: а) $S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$; б) $S_n=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

в) $S_n=\frac{n(n+1)(n+4)(n+5)}{4}$.

Указания. а) Пусть $a_k=k(k+1)$. Заметим, что $k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=3k(k+1)=3a_k$.

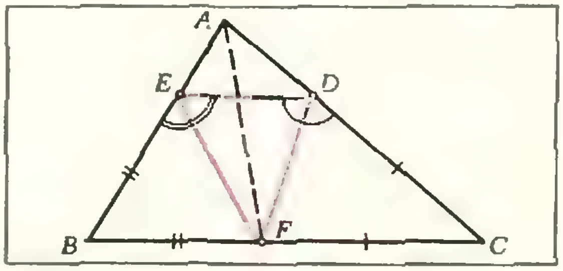


Рис. 1.

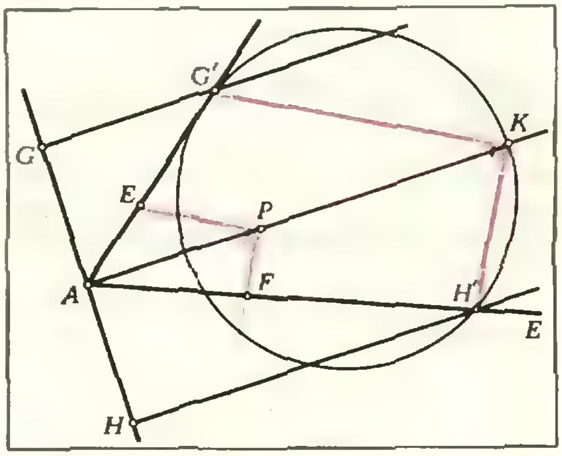


Рис. 2.

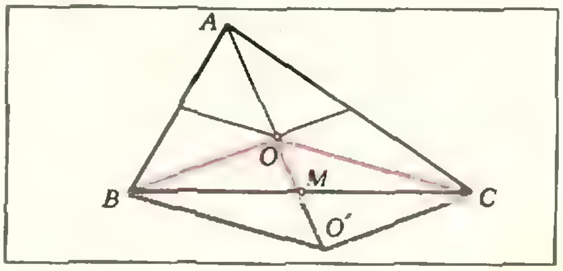


Рис. 3.

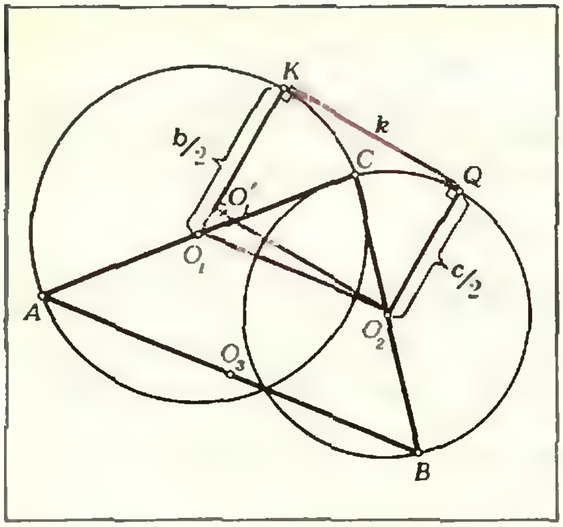


Рис. 4.

Запишем n равенств

$$a_1=\frac{1\cdot2\cdot3}{3}-0,\ a_2=\frac{2\cdot3\cdot4}{3}-\frac{1\cdot2\cdot3}{3},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_k=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}-\frac{(k-1)k(k+1)}{3},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Сложив эти равенства, получим

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

б) Решается аналогично с использованием равенства $k(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}-$ $-\frac{(k-1)\cdot k(k+1)(k+2)}{4}$.

в) Воспользуйтесь равенством $n(n+2)(n+4)=$ $=n(n+1)(n+2)+3n(n+1)+3n$ и результатами пунктов а) и б).

11. Ответ: $\frac{ml}{k}+\frac{km}{l}+\frac{kl}{m}$. Решение. Пусть $2a$, $2b$, $2c$ длины сторон треугольника ABC. Тогда из прямоугольного треугольника $O_2O_1O_1'$ получим (рис. 4)

$$k=\sqrt{c^2-(a-b)^2}=\sqrt{(b+c-a)(a+c-b)}.$$

Аналогично,

$$l=\sqrt{(b+c-a)(b+a-c)},$$
$$m=\sqrt{(a+b-c)(a-b-c)}.$$

Если $a+b-c=x$, $a+c-b=y$, $b+c-a=z$, то $k=\sqrt{yz}$, $l=\sqrt{xz}$, $m=\sqrt{xy}$. Откуда

$$x=\frac{ml}{k},\ y=\frac{km}{l},\ z=\frac{kl}{m}$$

Итак

$$a+b-c=\frac{ml}{k},$$
$$a+c-b=\frac{km}{l},$$
$$-a+c+b=\frac{kl}{m}.$$

Складывая полученные равенства, находим, что

$$a+b+c=\frac{ml}{k}+\frac{km}{l}+\frac{kl}{m}.$$

12. Ответ: 2.

13. Указание. Точка P должна быть одинаково удалена от противоположных сторон шестиугольника. Поэтому, если P не лежит внутри треугольника FDE, образованного средними линиями треугольника ABC, данная задача решений не имеет. Если P внутренняя точка треугольника FDE, то проводя $(HG)\parallel(AC)$, $(KL)\parallel(AB)$ и $(MN)\parallel(BC)$ так, чтобы прямые AC и HG, KL и AB, MN и BC были одинаково удалены от точки P, получим требуемый шестиугольник $HGKLMN$.

14. Ответ: а) Каждый из путешественников встретит 19 поездов; б) первый путешественник, едущий восточным поездом, встретит 12 поездов; второй — 8. Указание. Примем за единицу $\frac{1}{360}$ часть всего маршрута. Поезда восточного направления следуют со скоростью 2 единицы в минуту, западного — 3 единицы в минуту. При отправлении поезда восточного направления идущий ему навстречу поезд находится в 45 единицах от станции. Встреча этих двух поездов происходит на расстоянии 18 единиц от станции. Отсюда без труда получается, что восточный поезд встретит 19 западных поездов. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

15. Указание. Ни одно из чисел a, a^2, ..., a^b не делится на b. Следовательно, какие-то два из них — a^k и a^l дают при делении на b одинаковые остатки. Число a^k-a^l делится на b.

Сведем неравенство к известному

11. *Представьте многочлен в виде* $(a^2-3)^2-$ $-(5a^3+a)$.

12. Воспользуйтесь неравенством $\log_n(n+1)>$ $>\log_{n+1}(n+2)$ при $n\geqslant2$ (его можно доказать, например, полагая $t=\log_n(n+1)>1$ и учитывая неравенство $t+\frac{1}{t}>2$). Ответ: $a\in[3,1;\ 3,3]$.

Избранные задачи 50-й ленинградской городской олимпиады по математике

1. Рассмотрите величину $a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6$, где a_1, ..., a_i — расставленные в секторах числа.

5. Искомое число равно 1. Указание: в данном равенстве перенесите правую часть налево и разложите полученное выражение на множители.

7. Надо на отрезке CD длины $s=a_1+a_2+\ldots$ $\ldots+a_k=b_1+b_2+\ldots+b_n$ выбрать точки $A_1=C$, A_2, A_3, ..., $A_{k+1}=D$ и $B_1=C$, B_2, B_3, ..., $B_{n+1}=D$ такие, что $A_iA_{i+1}=a_i$ и $B_jB_{j+1}=b_j$ для $i=1, 2, \ldots, k$, $j=1, 2, \ldots, n$ и поставить в клетку таблицы, находящуюся в i-й строке и j-м столбце, число, равное длине пересечения отрезков A_iA_{i+1} и B_jB_{j+1}.

9. Используйте то, что точный квадрат не может кончаться на 7 и 3, а если у квадрата предпоследняя цифра — 7 или 3, то он оканчивается на 6.

10. Нельзя. Указание: *разность* координат любой точки итоговой четверки (0; 0), (1, 1), (3; 0), (2; —1) делится нацело на 3; это свойство сохраняется при рассматриваемых преобразованиях, но не выполняется для исходной четверки вершин единичного квадрата.

11. 2^{-9}. Указание: заметьте, что наименьший ненулевой элемент имеющейся на каждом этапе совокупности чисел можно уменьшить, лишь использовав усреднение с нулем. При этом количество нулей уменьшится на 1, а наименьший ненулевой элемент — не более чем в два раза.

12. Рассмотрите множество натуральных чисел, в троичной записи которых встречаются только цифры 0 и 1. (См. также решение задачи М839 в «Кванте» № 3 за этот год.)

13. Рассмотрите множество из 88 точек, одна из координат которых равна 0,1, 11 или 12.

14. Воспользуйтесь тем, что 271 — простой делитель 99999.

16. Используйте тождество

$$\frac{x^2+2y^2}{3}=\left(\frac{x\pm 2y}{3}\right)^2+2\left(\frac{x\mp y}{3}\right)^2.$$

17. Сделайте замену переменной $y=x+1$ и проследите за изменениями двух старших коэффициентов.

Ленинградская городская олимпиада по физике

Районный тур

8 класс

1. Траектория центра трубы представляет собой последовательность дуг окружностей с радиусом l, стягивающих угол $\alpha=\pi/3$. Центр трубы перемещается в горизонтальном направлении со средней скоростью $v=3\omega l/\pi$.

2. а) Если соприкасающиеся поверхности обоих цилиндров и дна сосуда «пришлифованы» друг к другу, так что между ними вода попасть не может, то цилиндры останутся на месте.

б) Если «пришлифованы» только дно сосуда и нижнее основание нижнего цилиндра, то верхний цилиндр всплывет, а нижний останется на месте.

в) В остальных случаях оба цилиндра всплывут.

3. Максимальная скорость шарика $v\sim 12v_0$; для этого потребуется время $t\sim(137/120)(L/v_0)$.

9 класс

1. Раскачать качели, конечно, можно. Сила, которая сообщит качелям импульс в горизонтальном направлении, это, в конечном итоге, горизонтальная составляющая силы реакции со стороны земли.

2. Отношение КПД циклов $ABCDA$ и $ABC'D'A$ равно $\eta_1/\eta_2=23/26<1$; следовательно, КПД второй машины больше.

3. Пусть есть область с отрицательной поверхностной плотностью заряда. Тогда в этой области силовые линии электрического поля должны входить в проводник. Начинаться на проводнике эти линии не могут (потенциал его поверхности постоянен); следовательно, они должны начинаться на бесконечности. Но поскольку проводник в целом имеет положительный заряд, будут силовые линии, уходящие с его поверхности на бесконечность. Унося пробный заряд по такой линии достаточно далеко от проводника и возвращая его потом на поверхность проводника по силовой линии, входящей в проводник в области с отрицательной поверхностной плотностью, мы совершили бы отличную от нуля работу, так как двигали бы заряд все время вдоль силовой линии. Но это противоречит тому, что потенциал всех точек проводника один и тот же. Значит, плотность заряда на проводнике всюду неотрицательна.

10 класс

1. Изображение A' точки A совпадает с самой точкой, изображение B' точки B расположено на прямой AB по другую сторону оптической оси, причем $|AB|=|AB'|$.

2. Стенку нужно установить на расстоянии, равном $x_m/2$.

3. В контуре возникнут колебания с новой амплитудой, равной $U_m/2$, и с новой круговой частотой, равной $1/\sqrt{2LC}$.

Городской тур

8 класс

1. Угловая скорость танка $\omega=(\omega_2-\omega_1)r/l$; радиус окружности, по которой движется центр танка, $R=\dfrac{l}{2}\left(\dfrac{\omega_2+\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\right)$.

2. Минимальное расстояние между частицами при $t\geqslant T$ равно $\dfrac{T}{2}\left(\dfrac{v_{01}^2-2v_{02}^2}{v_{01}+v_{02}}\right)$, если $v_{01}>\sqrt{2}v_{02}$, и равно нулю, если $v_{01}\leqslant\sqrt{2}v_{02}$.

3. При $\mu<1/2$ верхний кубик съедет, как только наступит равенство $\operatorname{tg}\alpha=\mu$. При $\mu>1/2$ оба кубика опрокинутся, затем верхний кубик начнет съезжать.

9 класс

1. Внутренняя энергия газа, и следовательно, и его температура T не меняются. Резервуар переместится в горизонтальном направлении на расстояние $x=mL/(4(m+M))$.

2. $T\approx\dfrac{2d^2}{\alpha U_0 t_0}$.

3. Пластины надо разместить параллельно друг другу одна над другой так, чтобы расстояние между соседними пластинами было равно d, и соединить первую пластину с третьей, а вторую — с четвертой. Емкость такого конденсатора $C=3\varepsilon_0\varepsilon S/d$.

10 класс

2. Пусть начальное отклонение A кубика таково, что $(2n-1)b<A<(2n+1)b$, где n — некоторое целое число, и $b=\mu mg/k$ (поскольку $A\leqslant l_0$, должно выполняться условие $n\leqslant\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{l_0}{b}-1\right)\right]$, где l_0 — длина нерастянутой пружины, $[x]$ означает целую часть числа x). Тогда $s=2n(A-nb)$.

3. Период колебаний системы с последовательно соединенными пружинами $T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{k_1k_2}m}$, а системы с «параллельно» соединенными — $T_2=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 8)

1. Луна находится ближе к Земле, чем звезды, поэтому нельзя увидеть звезду на диске Луны.

2. Пусть $BN=\dfrac{AC}{2}$ и $\angle A=75^\circ$ (рис. 5). Покажем, что $AC=BC$. Если $BC>AC$, то $\angle B<75^\circ$ и $\angle C>30^\circ$, но тогда $BN>\dfrac{BC}{2}$ и $\dfrac{1}{2}AC>\dfrac{1}{2}BC$, следовательно, $BC<AC$, что противоречит предположению.

Если же мы предположим, что $BC<AC$, то

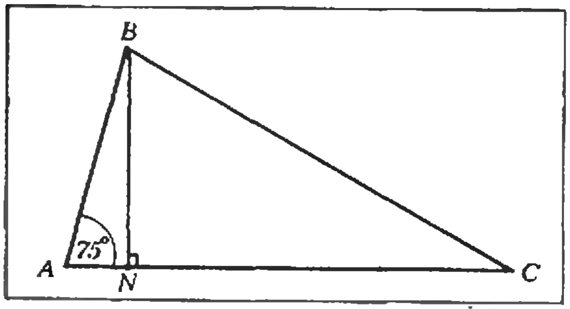


Рис. 5.

$\angle B>75^\circ$, $\angle C<30^\circ$ и $BN<\frac{1}{2}BC$, откуда $AC<BC$. Опять противоречие с предположением. Следовательно, $BC=AC$.

3. Так как число $234x2y0$ должно нацело разделиться на 3600, то $y=0$, и из делимости на 3600 следует делимость на 9, откуда $2+3+4+x+2$ должно делиться на 9, откуда $x=7$. Кляксы нужно заменить на 7 и 0.

4. За два первых дня Слава прочел $1/2+1/6=2/3$ книги, в третий день он прочел еще 1/3, тем самым закончил чтение книги.

5. $25^2=625$ (решение единственное).

Шахматная страничка
(см. «Квант» №№ 5, 6)

Задание 9 (Н. Григорьев, 1920 г.). Поспешное 1. d4 ведет к ничьей — 1... Крe4 2. Крc3 Крf5 3. Крd3 Крf4 и т. д. Белые выигрывают, пользуясь «методом треугольника». **1. Крc2 Крf4** (1... Крe3 2. Крc3 и 3. Крd 4) 2. Крb 2 Крf3 **3. Крb3! Крf4 4. Крc2 Крf3 5. Крd2.** Пройдя по треугольнику c2—b2—b3, белый король добился своей цели. На доске исходная позиция, но с ходом черных. Победа достигается следующим образом: **5... Крf4 6. Крc2 Крe5 7. Крe3 Крd5 8. d4 Крc4 9. Крe4 Кр:b4 10. d5 Крc5 11. Крe5 b4 12. d6 Крc6 13. Крe6 b3 14. d7 b2 15. d8Ф b1Ф 16. Фc8+ Крb6 17. Фb8+** и 18. Ф:b1. В случае 4... Крe5 решает 5. Крd1! Крd5 6. Крe2 Крd4 7. Крd2! Крe5 8. Крe3 и т. д.

Задание 10 (Р. Рети, 1923 г.). Возможны два первых хода, но ни один из них обычно не приходит в голову. **1. Лd2(d3)!** А почему не 1. Лd1? Ладья спустится на первую горизонталь только после того, как пешка придет в движение — **1... d4 2. Лd1! Крd5 3. Крd7! Крc4 4. Крe6 d3 5. Крe5** или 3... Крe4 4. Крc6 d3 5. Крc5, и черные беззащитны. Оказывается при 1. Лd1? d4 2. Крd7 Крd5! белые попадают в цугцванг и после 3. Лd2 Крe4 4. Крc6 Крe3 вынуждены смириться с ничьей.

Задание 11 (Л. Лошинский, 1933 г.). **1. Крa5!** Далее все строится на различных связках. 1...Ф:e5+ 2. Кb5×, 1...Ф:f2 2. Кf5×, 1...Л:d4 2.Кd3×, 1...Фe4 2. Кe2×. Других защит от 2. Кe2× у черных нет.

Задание 12 (Л. Лошинский, 1954 г.). Задача завоевала высшее отличие на конкурсе миниатюр. **1. Фe5!** e1К 2. Фe3+ Крf1 3. Сe2×, 1...g1К 2. Фg3+ Крf1 3. Сg2×, 1...Крf1 (g1) 2. Ф:e2 (+) и 3. Ф:g2×, 1...e1Ф 2. Фg3+ и 3. Ф:g2×.
Не проходит 1. Фg5 из-за ответа 1...Крe1 и 1. Фf4 из-за 1...Крf1!

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант.

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров,
Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:
А. А. Астрецов, М. Б. Дубах, В. М. Ильин, Н. С. Кузьмина,
Ю. П. Мартыненко, Н. Е. Смирнова, А. А. Шабанов,
Е. С. Шабельник, В. Б. Юдин

Фото представили:
А. С. Кондратьев, Б. Л. Раскин, В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 19.7.84.
Подписано к печати 15.8.84.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Усл. кр.-отт. 23,80.
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,25. Т-17462.
Цена 40 коп. Заказ 1880. Тираж 172 924 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ПОСЛЕДНЯЯ ТРЕНИРОВКА

К поединку за шахматную корону претендент проходит серьезные матчевые испытания, и как правило оказывается в лучшей форме, чем чемпион мира. Поэтому и чемпион перед матчем с претендентом старается тоже выступать в турнирах высокого ранга. В этом году, когда еще шло сражение в Вильнюсе, А. Карпов отправился на международное состязание в Осло, а оттуда на супертурнир в Лондон. Это была его последняя большая практическая тренировка перед матчем с Г. Каспаровым (если не считать еще участия в матче сборной СССР со сборной мира, в котором А. Карпов выиграл у У. Андерссона).

По всей видимости, проблему предматчевой подготовки чемпион мира решил успешно — в обоих турнирах он завоевал первый приз, продемонстрировав интересную, творческую игру.

А. Карпов — В. Горт
(Осло, 1984 г.)
Скандинавская защита

1.e4 Кc6 2.Кf3 d5 3.ed Ф:d5 4.Кc3 Фa5 5.Сb5 a6. Ведет к существенному ослаблению ферзевого фланга. А когда черным удастся поправить свои дела на этом участке доски, появятся другие, еще более уязвимые слабости. **6.С:c6+ bc 7.Фe2!** Препятствуя связке — 7...Сg4 8.Фe4! и готовясь поддержать коня, который намерен водрузиться на e5. **7...Кf6 8.Кe5 e6 9.0—0 Сd6 10.d4 0—0 11.Лd1 c5 12.Кc4 Фb4 13.a3 Фb8 14. Сg5 Кd5 15.Кe4 cd 16.Кe:d6 cd 17.Л:d4 Лa7 18.Фd3 f6 19. Сd2 Лe7 20.Лe1 Сb7 21.Кa5 f5 22.c4 Кf6 23.Сb4! Кe4 24.С:d6 К:d6 25.Л:d6 f4 26.f3 Сa8 27.b4 e5 28.c5 e4 29.fe f3 30.gf Фc8 31.Лd1 Фh3 32.Лd8! Лf7 33.Л:f8+ Л:f8 34.Фc4+ Крh8 35.Фf7! Лg8 36.c6 Фh6 37.c7.** Черные просрочили время, но могли прекратить свои мучения и раньше.

Я. Тимман — А. Карпов
(Лондон, 1984 г.)
Шотландская партия

1. e4 e5 2.Кf3 Кc6 3.d4 ed 4.К:d4 Кf6 5.К:c6 bc 6.e5 Фe7. Старинная позиция, маневр Ласкера 6...Кd5 менее удачен. **7.Фe2 Кd5 8.c4 Сa6 9.Фe4.** Обычное продолжение здесь Кd2. Но, может быть, белых уже устраивает ничья? Ведь на 9...Кf6 ферзю лучше вернуться на место и после 10. Фe2 Кd5 позиция повторяется. Впрочем, белые могут теперь избрать 11.Кd2. Однако Карпов решил не проверять, согласен ли Тимман на мир, и показал, что сам настроен агрессивно.

9...Кb6 10.Кd2 0—0—0 11.c5. Белые вскрывают игру, полагая, что неприятельский король будет чувствовать себя неуютно. Однако вскоре обнаруживается, что их собственный король еще более неустроен. **11...С:f1 12.cb Сa6 13.ba Крb7.** Допускать a8Ф× не стоит. **14.Кb3 f6 15.f4 fe 16.fe Лe8! 17.Сf4 Фh4+!** После 17...Фb4+ 18.Ф:b4 С:b4+ у черных благодаря двум слонам заметный перевес в эндшпиле, но они полагают, что партию можно завершить в более ранней стадии. **18.g3 Фh5.** Белый король попал под перекрестный огонь, рокировка невозможна. **19.Лc1 Крa8!** Король скрывается в углу, но, как ни странно, этот же ход в дальнейшем позволит черным провести решающую матовую атаку. **20.h4 d5! 21.Фe3.** После 21.Фc2 Л:e5+ 22.С:e5 Ф:e5+ 23.Крf2 Сd6 белым несдобровать. **21...g5! 22.С:g5 Сb4+ 23.Крf2 Лhf8+ 24.Крg2.** Проигрывает и 24.Сf4 Л:e5! 25.Фd4 Л:f4+ 26.gf Лe2+ 27.Крg3 Фg6+ и 28...Фg2×.

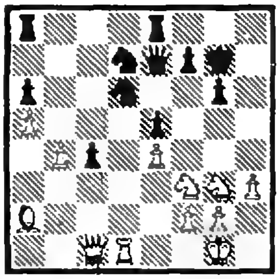
24...Л:e5! Когда черные пожертвовали ладью, голландский гроссмейстер, кажется, был несколько удивлен. Он считал, что худшее для него уже позади. **25.Ф:e5 Фf3+ 26.Крh2 Фf2+. Белые сдались.** В случае 27.Крh3 сказывалась хитрость черного короля, проявленная на 19-м ходу — 27...Сc8+ (поле b7 не занято) 28.g4 Лf3+

А. Карпов — В. Корчной
(Лондон, 1984 г.)
Защита Грюнфельда

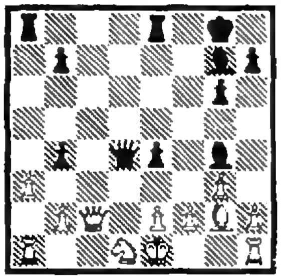
1.Кf3 Кf6 2.c4 g6 3.Кc3 d5 4.d4 Сg7 5.Сg5 Кe4 6.cd К:g5 7.К:g5 e6 8.Кf3 ed. Известная теоретическая позиция. У черных преимущество двух слонов, действие которых, однако, сильно ограничено. В то же время белые прочно владеют центром и намерены захватить инициативу на ферзевом фланге. **9.e3 0—0 10.b4 Сe6 11.Сe2 Кd7 12.0—0 f5.** Черные стремятся к активности на противоположном участке доски, но в конечном счете из их затей ничего не выйдет. **13.Лe1 g5 14.Лc1 Крh8 15.Сd3 c6 16.b5 g4.** После 17.bc gf (17...bc 18.Кd2 c5 19.Сb5) 18.cd fg 19.f4 оба черных слона расположены довольно неуклюже, однако, Карпов решил, что поле f4 лучше оставить для коня. **17.Кd2 c5 18.dc К:c5 19.Кb3 К:b3 20.ab!** Самое убедительное, после вынужденного d5 — d4 белый слон займет поле c4 **20...Лc8 21.Кe2 Л:c1 22.Ф:c1 Фb6 23.Кf4 Сg8 24.g3.**

Итак, контуры финальной части партии определились. После размена пешек «d» и «e» и белопольных слонов преимущество коня над оставшимся слоном будет бесспорным. **24...d4 25.Сc4 Лc8 26.Фb1 de 27.Л:e3 Фc5 28.Фe1! Сd4 29.Лe2 С:c4 30.bc Лg8.** После 30...Ф:c4 31.Лe8+ Л:e8 32.Ф:e8+ Фg8 33.Фd7 черные беззащитны. **31.Фc1! Лc8 32.Фc2 Сg7 33.Фd3 Фd4 34.Ф:f5 Ф:c4 35.Лe7 Лd8 36.Крg2 Фb3 37.Ф:g4 Лg8 38.Кg6+! Черные сдались.** (38...hg 39.Фh4+ Сh6 40.Ф:h6×).

Конкурсные задания



17. Белые начинают и выигрывают.



18. Черные начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 ноября 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 17, 18»).

Лампы-детекторы и лампы-усилители, генераторные лампы и электроннолучевые трубки — все эти приборы основаны на явлении термоэлектронной эмиссии, открытом в конце XIX века Томасом Эдисоном. О том, как было сделано это открытие, рассказывается в номере в заметке «Эффект Эдисона».

Цена 40 коп.

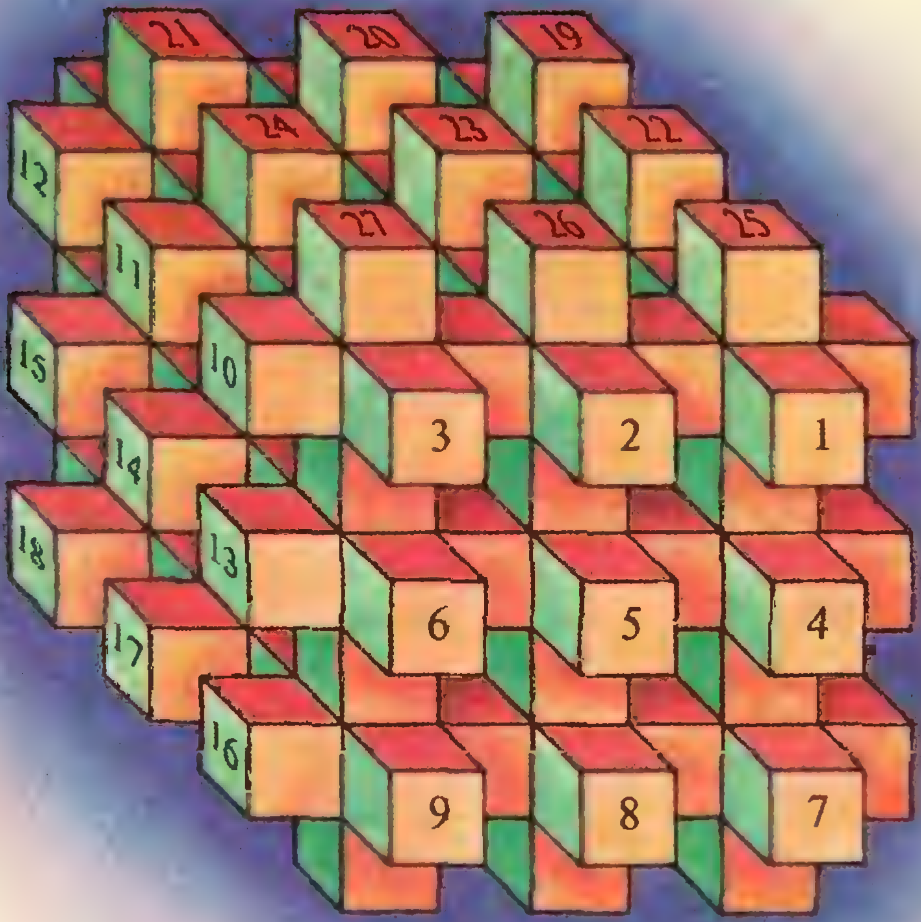
Индекс 70465

КУБИЧЕСКИЙ КРОССВОРД

Буквы отгаданного слова размещаются в кубических ячейках кроссворда начиная с той, на грани которой написан соответствующий номер (в направлении, перпендикулярном к этой грани).

1. *Химический элемент III группы.* 2. *Элементарная частица.* 3. *Советский физик.* 4. *$10^{\text{[illegible]}}$.* 5. *Внесистемная единица количества теплоты.* 6. *Советский физик.* 7. *Советский физик.* 8. *Процесс интенсивного испарения жидкости.* 9. *10^{9}.* 10. *Итальянский ученый XVI—XVII вв.* 11. *Инструмент для проведения линий на плоскости.* 12. *Геометрическое понятие, характеризующее одинаковость формы.* 13. *Геометрическое понятие, означающее наличие общей касательной.* 14. *Оптический прибор.* 15. *Многочлен.* 16. *Итальянский математик XVII в.* 17. *Раздел математики.* 18. *Выдающийся деятель в какой-либо отрасли знания.* 19. *Древнегреческий геометр III—II вв. до н. э.* 20. *Фотографическое изображение.* 21. *Химический элемент VII группы.* 22. *Величины, выраженные числом.* 23. *Явление.* 24. *Немецкий математик XIX века.* 25. *Замечательный отрезок в треугольнике.* 26. *Женщина-математик IV—V вв.* 27. *Химический элемент V группы.*

А. В. Жуков



НОМЕР
10

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант 10 1984

Основан в 1970 году

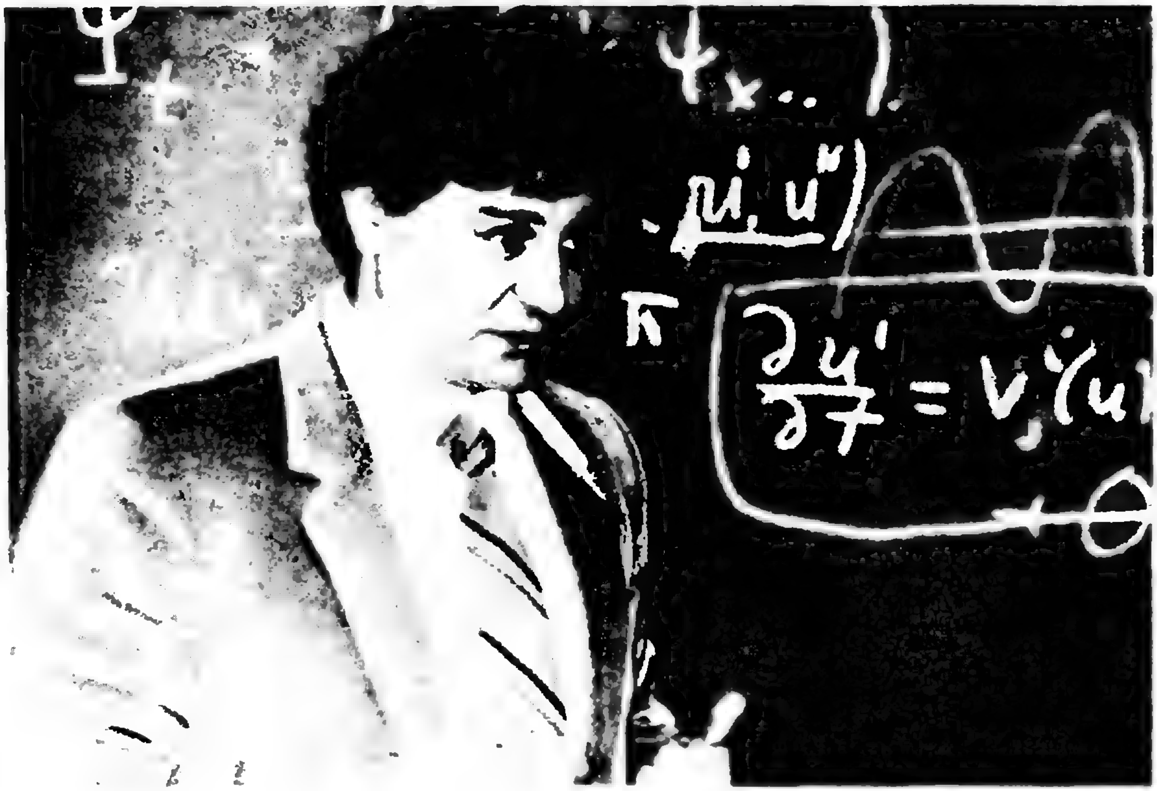
Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	Беседа с академиком С. П. Новиковым	A talk with academician S.P. Novikov
7	*И. К. Кикоин.* Как вводятся физические величины	*I. K. Kikoin.* How physical quantities are introduced
14	*Б. К. Приходько.* Решение уравнений на микрокалькуляторе	*B. K. Prikhodko.* Solving equations on microcomputers
	Новости науки	**Science News**
6	Кольца вокруг Солнца	Rings around the sun
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
18	*А. А. Дозоров.* Принцип относительности	*A. A. Dozorov.* The relativity priciple
	Математический кружок	**Mathematics circle**
20	*В. Г. Болтянский.* Экспонента	*V. G. Boltianski.* The exponential function
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
25	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
30	Математика 8, 9, 10	Mathematics 8, 9, 10
33	Избрвнные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
35	Задачи	Problems
36	*Б. А. Розенфельд.* Откуда произошли названия звезд и созвездий	*B. A. Rozenfeld.* Where do the names of stars and constellations come from
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
40	Задачи М886 — М890; Ф898 — Ф902	Problems M886 — M890; P898 — P902
43	Решения задач М871 — М875; Ф883 — Ф886	Solutions M871 — M875; P883 — P886
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
53	*В. А. Данилин.* Передача электроэнергии на расстояние	*V. A. Danilin.* Long-distance transmission of electric energy
	Олимпиады	**Olympiads**
56	X Всероссийская олимпиада школьников	10 th All-Russian school olympiad
60	Задачи Московской городской математической олимпиады школьников	Problems of the Moscow school mathematics olympiad
61	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь *(13, 34)*	**Miscellaneous** *(13, 34)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	ЭВМ против гроссмейстера *(3-я с. обложки)*	Computer vs. grandmaster *(3 rd cover page)*

Фотография, воспроизведенная на первой странице обложки, — хорошая иллюстрация к вопросу о передаче электрической энергии по проводам (см. заметку «Постоянный и переменный электрический ток» на с. 28 и статью «Передача электроэнергии на расстояние»).

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1984



Беседа с академиком С. П. Новиковым

Из богатого талантами поколения математиков, вошедших в науку в конце 50-х годов и в начале 60-х годов, научные успехи Сергея Петровича Новикова относятся, пожалуй, к числу наиболее впечатляющих. Начав с одной из самых трудных и абстрактных областей математики — современной алгебраической топологии, С. П. Новиков защитил кандидатскую диссертацию в 25 лет, докторскую в 27, был избран членом-корреспондентом Академии наук в 28 лет и академиком в 43 года. В 1967 году Сергей Петрович получил Ленинскую премию, а в 1970 году на Всемирном конгрессе математиков С. П. Новиков стал первым советским лауреатом премии Филдса, присуждаемой раз в четыре года ведущим математикам мира (в возрасте до 40 лет). Сейчас Сергей Петрович совмещает работу в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау (его работы связаны с математической физикой, в частности, с теорией солитонов) и в Математическом институте им. В. А. Стеклова с заведыванием кафедрой высшей геометрии и топологии в Московском университете.

Сергей Петрович, член редколлегии журнала «Квант», ответил на вопросы нашего корреспондента А. Б. Сосинского у себя дома. Беседа проходила в уютном рабочем кабинете, целиком уставленном книгами (не только по математике!), живо и непринужденно. Мы воспроизводим здесь (практически без редакционных изменений) магнитофонную запись этой беседы, лишь добавив в виде сносок несколько пояснений к ответам Сергея Петровича.

— Сергей Петрович, когда вы всерьез заинтересовались математикой? Что больше повлияло на этот выбор: школа, олимпиады, семья?

— Как вы знаете, я происхожу из математической семьи*). Влияние семьи я бы, конечно, поставил на первое место. Нельзя сказать, чтобы я серьезно начал увлекаться математикой в школе; но во всяком случае я много

---

1) Отец Сергея Петровича, академик П. С. Новиков (1901—1975),— выдающийся специалист по теории функций и множеств, алгебре и математической логике; мать, Л. В. Келдыш (1904—1975),— доктор физико-математических наук, известный специалист по теории множеств и геометрической топологии.

о ней знал — профессию математика я себе представлял. Это, наверное, было решающим в моем выборе. А увлекаться математикой по-настоящему я начал на первом курсе университета. Хочу заметить, что наша школа — средняя школа № 330 г. Москвы — в те годы была первоклассной, дававшей хорошее общее образование (включая даже латынь, которую я, правда, забыл).

— Участвовали ли вы в олимпиадах?

— В олимпиадах я поучаствовал в младших классах — в классах 5-м, 6-м, их тогда в Москве устраивал Институт усовершенствования учителей. Участвовал и в олимпиаде, организованной в Московском университете, но, получив в 7-м классе вторую премию (в 1952 году), я потерял к этому интерес. Хотя в дальнейшем я ходил на кружки и олимпиады, но активности не проявлял и блистательных результатов не показывал.

— Сергей Петрович, были ли вы прилежным учеником?

— Учился я прилично: без троек. Но круглым отличником никогда не был.

— Как вы выбрали, в университете, свою будущую научную специальность внутри самой математики?

— В наше время на мехмате*) была очень разумная система предоставления тем курсовых работ уже на втором курсе. Тогда к моменту распределения по кафедрам (в начале третьего курса) студенты были хоть минимально научно подготовленными. Все мы слушали спецкурсы и участвовали в работе спецсеминаров, даже «полутворческих», уже на первом курсе. Существовавшее тогда математическое образование хорошо подготавливало к выбору научной специальности. При этом важную роль, у меня например, сыграло желание заняться каким-то совсем другим кругом проблем, не теми, которыми в основном занималось старшее поколение. Мне хотелось заняться не теорией множеств и теорией функций действительного переменного, не общей алгеброй и математической логикой, но какими-то современными, совсем другими областями. Вот так я выбрал себе алгебраическую топологию. Немалую роль сыграло то, что блестящий профессор, вскоре лауреат Ленинской премии, Михаил Михайлович Постников, работавший в этой области, мой будущий научный руководитель, читал нам замечательные лекции на первом курсе. Среди наших лекторов первого курса отмечу еще широко известных ученых Бориса Николаевича Делоне и Александра Яковлевича Хинчина, членов-корреспондентов АН СССР. И хотя это обстоятельство сейчас недооценивают, замечу, что тот состав преподавателей, ведущих упражнения (семинарские занятия) на первом курсе, который был у нас, сам за себя говорит. У нас вели упражнения Андрей Петрович Ершов, известный ныне специалист по программированию, Евгений Фролович Мищенко, теперь известный специалист по теории управления, оба они стали членами-корреспондентами АН СССР, Владимир Андреевич Успенский, сейчас профессор МГУ, хороший специалист по математической логике. Они много рассказывали нам о науке. Вот это и определило подход к выбору специальности, именно, я бы сказал, подход. Нас учили, как нужно выбирать себе область исследований, и что в первую очередь надо выбирать себе современного и талантливого ученого в руководители.

— Были ли у вас трудности на пути становления ученым?

— Административных трудностей у меня не было — жизнь сама в административном плане шла навстречу. А научные трудности были. Они были связаны с тем, что исследования в алгебраической топологии у нас в тот период сильно ослабли. Несмотря на то, что в мировой науке современная топология приобретала все большее и большее влияние на математику, у нас в Москве во второй половине 50-х годов почти не было исследований в этой области. Это и было главным барьером, и нам приходилось самостоятельно, в определенном смысле, начинать «влезать» в современную науку.

— Когда вы говорите: «нам», кого вы имеете в виду?

— Я имею в виду небольшой круг своих однокурсников, которые избрали себе не традиционные области исследования, а именно современную топологию.

— Многие читатели «Кванта» знают и даже романтизируют профессию физика-теоретика. А чем занимаетесь вы,

---

*) Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, где С. П. Новиков был студентом в 1955—1960 гг.

Сергей Петрович, зачем нужны «математики-исследователи»? Если вопрос поставить совсем грубо, за что (кроме преподавания) вам деньги платят?

— Это очень интересный вопрос. Можно сказать так: чисто теоретический математик, работающий внутри математики и никогда не выходивший к каким бы то ни было приложениям, ответа на этот вопрос не знает (насколько я представляю себе своих коллег). Это и было, в известном смысле, причиной того, почему я обратился к кругу физиков-теоретиков, изучал эту область и много лет с ними работал. Но на основании длительного опыта работы вместе с физиками, я могу сказать, что идеи чистой математики — это, безусловно, исключительно важная компонента прогресса научной культуры. Без фундаментальных математических исследований человечество обойтись не может.

Сам я много лет работал как консультант-математик среди физиков-теоретиков, обсуждая вместе с ними многочисленные математические вопросы. Нужно сказать, что физики-теоретики высоко квалифицированы математически, обсуждать с ними приходится только те вопросы, которые касаются неизвестных им, более новых разделов математики. Что касается математики, которой эти специалисты пользуются ежедневно, то здесь они в помощи не нуждаются, зная ее не хуже самих математиков. Кроме того, я потратил много усилий на выделение для себя чисто математических задач, которые могли бы быть полезны для теоретической физики.

Ну и, конечно, много внимания нами уделялось извлечению такого рода математических задач, которые полезны для развития самой математики. Работа с физиками — это комплекс сложный, многосторонний, и я думаю, что это один из наиболее эффективных видов работы для математиков.

— Что вы можете сказать о математиках старшего поколения?

— Мы ценим выдающиеся достижения математиков старшего поколения. Нет ни малейшего сомнения, что в научной культуре, которая возникла в 20-е, 30-е годы у нас в Москве, математика сыграла исключительно важную роль. Математическая школа в нашей стране в этот период росла очень бурно, и ее достижения общеизвестны*). Математиков моего поколения, выросших на рубеже 50-х — 60-х годов, безусловно, можно считать ответвлением того древа, могучего древа, которое образовалось в Московской и вообще Советской математической школе за 20-е, 30-е, 40-е годы. Но математики нового поколения, во всяком случае их значительная часть, подвергли свою математическую идеологию существенной перестройке. Идеи, связанные с теорией функций действительного переменного, теорией множеств, общей алгеброй, математической логикой, уже сейчас представляются в значительной степени разобранными. Это естественно. Уважение к заслугам прошлого поколения вместе с ясным сознанием того, что нам надо переориентироваться на более современный круг идей, совершенно других, более близких к естественным наукам,— это, пожалуй, является главным в моем отношении к старшему поколению.

— Какие качества вы хотели бы видеть у своих учеников?

— В первую очередь я хотел бы у них видеть научную самостоятельность — чтобы они могли ставить перед собой научные проблемы, а не только получать их из рук старших.

Во-вторых, я бы считал крайне важным также умение найти разумное сочетание между математикой и естественными и прикладными науками — не забывать ни самой теоретической математики, ни ее приложений.

И третье, я считаю, что математики более молодого поколения должны преодолеть начавшееся еще в 20-х годах расхождение между математикой и математическим аппаратом физики. Пока еще в образовании это не преодолено; математики еще часто не знают математического аппарата физики, во всяком случае большинство, те, которые не посвятили этому десятилетия личной работы. Так что третье я бы сформулировал так: молодым математикам нужно научиться понимать ту реальную математику, которая эффективно используется в других науках.

Разумеется, я хотел бы видеть своих учеников честными, порядочными людьми, принципиально относящимися к научным и общественным вопросам.

---

*) См., например, статью П. С. Александрова в «Кванте», 1977, № 10, с. 13.

— Часто приходится слышать, что в науке, в том числе математике, сегодня преобладает узкая специализация. В то же время, о таких математиках XX века, как Пуанкаре, Гильберт*), Бурбаки, говорят как об «универсалах». Какова сейчас в этом отношении ситуация в математике?

— В вашем вопросе есть какая-то странная ошибка. Математика по фамилии Бурбаки**) никогда не существовало, а составлявшие его талантливые ученые, и даже наиболее крупные среди них, не были универсалами наподобие Пуанкаре и Гильберта. Лично мне особенно симпатична фигура Пуанкаре, наиболее близкого к естественным наукам.

Мне кажется, что узость специализации многих математиков связана с чрезмерно абстрактным и переусложненным языком. Я бы сказал, что эта узость происходит также из-за ослабления связи теоретической математики с приложениями, которое имело место на определенном этапе. Мы лишились четкого критерия того, что нужно знать обязательно. Каждый знает только то, что он хочет, или то, что ему приказал выучить научный руководитель. Пока естественно-научный характер математического образования не будет восстановлен, этот универсализм возродить не удается.

— Математикам не дают Нобелевские премии. Справедливо ли это?

— Я не верю в известные анекдоты, которые математики на этот счет рассказывают. По завещанию Нобеля, премии не дают также ни физикам-теоретикам, ни биологам. Формулировка его завещания совершенно ясная. Премии, учрежденные А. Нобелем, изобретателем динамита, присуждаются за работы типа изобретений, непосредственно полезных человечеству. Биологи получают Нобелевскую премию за исследования, относящиеся, по существу, к медицине, на самом деле нет Нобелевской премии по биологии. Когда физики-теоретики получают Нобелевскую премию, это некоторое смещение, которого они добивались десятилетиями. Завещание состоит в том, что премии получают за изобретения, но не за научные открытия. Если Нобелевскую премию завещатель не дал биологии и теоретической физике, почему она должна была достаться математике? Я рекомендовал бы математикам не обижаться на то, что инженер А. Нобель не помянул математику в своем завещании. Она от этого не становится хуже.

— Есть ли у вас серьезные увлечения, кроме науки? Хобби, спорт, досуг?

— Спорт для нас, ученых, существует, как мы считаем, для поддержания здоровья и вряд ли я смогу сказать вам что-то новое об этом.

А если говорить об интеллектуальных увлечениях, я с какого-то времени полюбил исторические книги, но в первую очередь не книги, написанные историками, а книги — подлинники, написанные самими действующими людьми, древними и современными (к сожалению, только по-русски или по-английски). Потому, что мне было любопытно понять, как они жили и действовали, чем они от нас отличались, чем были на нас похожи.

Для меня чтение исторических книг — просто любимое чтение; я не советовал бы, однако, никому из математиков путать увлечения такого рода с деятельностью настоящих профессионалов.

— Что вы можете посоветовать тем нашим читателям, которые всерьез интересуются физикой и математикой?

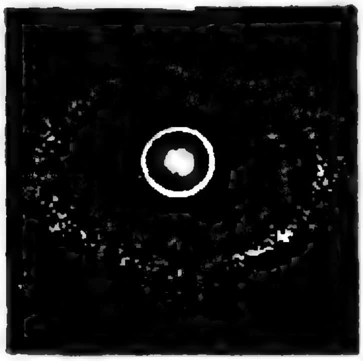
— Перед человеком, который хочет стать ученым, стоят две задачи. Первая из них — научиться творчески работать и совершать хотя бы небольшие научные открытия в определенной специальной области, на грамотном научном уровне. Вторая — не утонуть в узкой области, с которой (возможно, случайно) начал. Эти две задачи нужно решать гармонично. Одна из них требует воспитания и тренировки творческих навыков, другая — затраты громадного труда на приобретение образования, хотя этот труд может показаться на первый взгляд бесполезным, исходя из сиюминутных интересов. Сочетание этих двух компонентов творческого процесса есть то, что необходимо ученому на длительный период.

---

*) Анри Пуанкаре (1854—1912), французский математик, физик; Давид Гильберт (1862—1943), немецкий математик.

**) Никола Бурбаки — коллективный псевдоним группы математиков (в основном французских), имевших целью объединить все изложение математики на теоретико-множественной основе.

Кольца вокруг Солнца



Когда в 1610 году Галилей впервые направил на небо телескоп, он, в частности, обнаружил несколько странный вид планеты Сатурн. Она казалась состоящей из трех звезд, как бы касающихся друг друга, причем средняя звезда выглядела примерно в три раза больше боковых («высочайшую[*] планету тройною наблюдал»). Через пятьдесят с небольшим лет Гюйгенс с помощью более сильного телескопа объяснил необычный вид Сатурна тем, что он, единственный на небе, носит красивое украшение — кольца (при меньшем увеличении кольца представлялись боковыми звездами). Первое теоретическое исследование колец Сатурна принадлежит Максвеллу. В 1859 году он закончил работу об устойчивости колец, в которой доказал, что кольца не являются сплошными, а состоят из множества отдельных частиц. Это была первая работа Максвелла, удостоенная премии Лондонского королевского общества.

Лишь совсем недавно Сатурн потерял свою монополию на кольца. В 1977 году были открыты кольца Урана (обнаруженные по затмению блеска звезд, оказавшихся для земного наблюдателя позади колец), а в 1979 году из космоса были сфотографированы кольца Юпитера (невидимые с Земли.[*]) Теперь кольца у планет Солнечной системы перестали быть коллекционной редкостью, и их существование стало почти обычным. Правда надо признать, что законы движения мелких частиц и крупных обломков, из которых состоят кольца, таят в себе много загадок.

Пожалуй, самое неожиданное в этом ряду событие произошло в прошлом, 1983 году, когда было доказано существование колец и у главы планетной системы — самого Солнца. Такая гипотеза была высказана еще давно, в 1927 году, но лишь в 1967 году кольца были впервые замечены.

Во время солнечного затмения в июне 1983 года группа японских и индонезийских ученых зарегистрировала инфракрасное излучение от пылевого диска вокруг Солнца. Согласно расчетам, радиус диска в 4 раза больше радиуса Солнца (около 3 млн км), его масса около миллиона тонн, а температура примерно 1300 К. Астрономы предполагают даже, что излучает не диск, а целая яйцеподобная оболочка, окружающая Солнце, и что она образовалась из частиц, захваченных Солнцем из космоса за последние 10 миллионов лет и раскаленных до состояния свечения солнечным теплом.

Все это, конечно, только первые данные, но они очень интересны и еще раз подтверждают мысль о том, что небесные объекты живут своей космической жизнью, только события у них протекают, с нашей точки зрения, чрезвычайно медленно.

Я. С.

---

[*] Во времена Галилея Сатурн считался самой удаленной от Солнца планетой (Уран, Нептун и Плутон были открыты позже).

[*] Существование этих колец было предсказано еще в 60-е годы советским астрономом С. К. Всехсвятским.

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

Продолжается подписка на журнал «Квант» на 1985 год.

Журнал рассчитан на учеников 6—10 классов. Он полезен учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия, и всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и о проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых и рассказы самих ученых о том, как «делается наука».

Цена номера 40 коп. Стоимость годовой подписки 4 руб. 80 коп. Индекс журнала в каталоге «Союзпечати» 70465.

Как вводятся физические величины

Академик И. К. КИКОИН

82
50
120
149
150

Физика отличается от других естественных наук тем, что объективные закономерности, устанавливаемые при изучении физических явлений природы, выражаются количественно (математически). Для этого физики вводят величины, характеризующие изучаемое явление или процесс. Экспериментально устанавливаются математические соотношения между величинами в виде соответствующих уравнений или формул, которые называются физическими законами природы.

Как же вводятся физические величины? Для каждой физической величины должен быть указан способ ее измерения. Точнее, нельзя вводить физическую величину, не указав, по крайней мере, принципиальный способ ее измерения. Поясним это некоторыми примерами. Начнем с величин, используемых в механике.

1. Скорость

Понятие скорости введено с незапамятных времен. И можно себе представить, как это было сделано. Возможно, какой-то человек, располагающий прибором для измерения времени — это могли быть, например, солнечные часы — наблюдал за движением караванов в пустыне. Он определил, какой путь проходит караван за определенный промежуток времени. Может быть, он сделал это, сосчитав число шагов верблюда. Шаг верблюда — это мера измерения длины. Сопоставив числа, выражающие промежуток времени и пройденный путь, он установил любопытное соотношение между ними. Оказалось, что отношение путей, пройденных караваном за любые промежутки времени, равно отношению этих промежутков времени. На современном языке это означает следующее: если обозначить путь, пройденный караваном за промежуток времени t_1, через s_1, а путь, пройденный караваном за промежуток времени t_2, через s_2, то $\frac{s_1}{s_2}=\frac{t_1}{t_2}$. Очень любопытный факт! Наблюдатель, вероятно, рассказал об

869.723
Возможно, в незапамятные времена скорость измеряли так...

этом многим из своих знакомых, и, возможно, нашелся человек, который сообразил, что указанное соотношение особого смысла не имеет, потому что оба отношения, и справа и слева, — числа отвлеченные, и ничего нет удивительного в том, что 2=2 или 3=3 и т. д. Он предложил переписать это соотношение в виде

$$\frac{s_1}{t_1}=\frac{s_2}{t_2}$$

и назвал эти отношения скоростью передвижения каравана. Эта величина оказалась полезной, потому что, пользуясь ею, можно предсказать, на каком расстоянии от начального пункта движения окажется караван через любой промежуток времени. Действительно, обозначив $\frac{s}{t}=v$, сразу можно найти, что $s=vt$. Таким образом, была введена величина, которая называется скоростью. Не следует думать, что уравнение $s=vt$ есть некий закон природы. Это уравнение следует из *определения* того, что такое скорость. Можно было бы с таким же успехом назвать скоростью, например, отношение $\frac{s^2}{t^2}=u$. И тогда тоже можно было бы определить величину s из уравнения $s=t\sqrt{u}$. Но условились, *именно условились*, называть скоростью отношение $\frac{s}{t}$.

2. Ускорение

Бывают и такие движения, при которых отношение пройденных путей за любые промежутки времени равно отношению квадратов этих промежутков времени. На современном языке это записывается следующим равенством:

$$\frac{s_1}{s_2}=\frac{t_1^2}{t_2^2}, \qquad (1)$$

где s_1 и s_2 — расстояния, пройденные движущимся телом за промежутки времени t_1 и t_2 соответственно. Таково, например, движение тел, свободно падающих в вакууме, или движение тел вниз по наклонной плоскости без трения.

Такие движения изучал знаменитый итальянский физик Галилей. Он записал уравнение (1) в виде $\frac{2s_1}{t_1^2}=\frac{2s_2}{t_2^2}$ *) и назвал эти отношения и вообще отношение $\frac{2s}{t^2}$ *ускорением* движущегося тела (материальной точки). Понятие ускорения связано, очевидно, с тем, что сама скорость движущегося тела может меняться со временем. Если скорость пропорциональна времени, то есть $v=v_0+at$, то $a=\frac{v-v_0}{t}$, где $(v-v_0)$ — изменение скорости за промежуток времени t.

Таким образом, была введена новая физическая величина — ускорение. Известная формула $s=\frac{at^2}{2}$ (предполагается, что начальная скорость тела равна нулю) также не выражает никакого закона природы, а есть следствие принятого определения ускорения.

В дальнейшем было введено уточнение: для правильного описания различного рода движений необходимо принять во внимание, что перемещение s, скорость v и ускорение a — величины векторные.

---

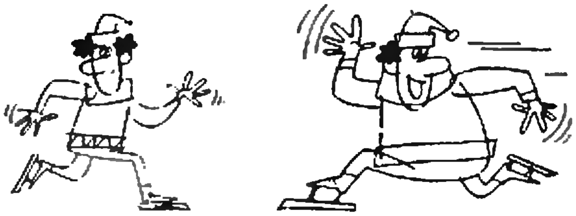
*) Коэффициент 2 вводится из чисто математических соображений.

Галилей назвал это отношение ускорением
"a
?
ГАЛИЛЕО ГАЛИЛЕЙ
$\frac{2s}{t^2}=$

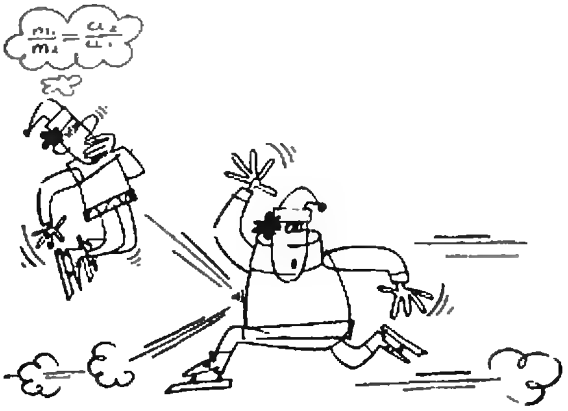
3. Масса

Из ряда опытов, проведенных в самых разных условиях, можно сделать вывод, что тело, бесконечно удаленное от всех других тел, не может двигаться с ускорением, если рассматривать движение относительно некоторых вполне определенных систем отсчета, которые называются инерциальными системами отсчета. Такое тело находится либо в состоянии покоя, либо движется равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета. Если же тело движется с ускорением, то всегда можно указать другое тело или другие тела, влияние которых вызывает ускоренное движение данного тела. В таких случаях говорят, что тела взаимодействуют друг с другом. Рассмотрим простейший случай — когда взаимодействуют два тела. Опыт показывает, что в этом случае оба тела получают ускорения, направления которых взаимно противоположны. Что касается модулей ускорений обоих тел, то они могут быть различны. Но отношение модулей ускорений обоих тел остается постоянным, независимо от того, в каких условиях происходит взаимодействие. Так, оно не зависит от взаимного расположения этих тел в пространстве, не зависит от времени, не зависит от скоростей обоих тел, не зависит от окружающей среды и т. д. Это отношение зависит только от свойств самих взаимодействующих тел.

В физике изучают только такие свойства тел, которые могут быть выражены числом, и для изучения тех или иных свойств в физике вводятся физические величины, характеризующие эти свойства. Когда речь идет об ускорении тела, вызванном влиянием на него другого тела, то это ускорение может быть бóльшим или меньшим. Чем больше ускорение тела, тем, очевидно, больше изменение его скорости за данный промежуток времени. И наоборот, если ускорение тела мало, то это значит, что за тот же промежуток времени его скорость изменяется мало. Скорость не может меняться мгновенно — для всякого изменения скорости тела требуется некоторый промежуток времени.



ЧЕМ БОЛЬШЕ масса — ТЕМ МЕНЬШЕ УСКОРЕНИЕ



Ускорения двух взаимодействующих тел вызваны их взаимодействием. Очевидно, что промежуток времени, в течение которого изменяются скорости двух взаимодействующих друг с другом тел, один и тот же для обоих тел — это время их взаимодействия. Ясно, что тому телу, у которого ускорение меньше, следует приписать большую *инертность* — его движение более похоже на движение по инерции. Ведь если бы ускорение тела равнялось нулю, то это означало бы, что тело движется по инерции (с постоянной по величине и направлению скоростью). А это противоречило бы предположению о взаимодействии тел. Из двух взаимодействующих тел более инертно то тело, у которого ускорение меньше, и наоборот. Следовательно, инертность есть свойство тел, которое нужно характеризовать некоторой величиной. Такой величиной служит масса тела.

Свойства тел, от которых зависит отношение их ускорений при взаимодействии друг с другом, мы назовем *массами* этих тел. Массу тела принято обозначать буквой m. Таким образом, мы ввели новую величину — массу. Но мы еще не указали способа измерения массы тела. Попытаемся это сделать.

Припишем одному из двух тел массу m_1, другому — массу m_2, а ускорения этих тел при взаимодействии обозначим через $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Мы знаем из опыта, что отношение модулей ускорений всегда постоянно. Условимся, что отношение $\frac{a_2}{a_1}$ равно отношению $\frac{m_1}{m_2}$, то есть

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{a_2}{a_1}. \qquad (2)$$

Это означает, что тело большей массы получает меньшее ускорение и наоборот. Ускорения измерять мы умеем, поэтому можно определить из (2) отношение масс обоих тел. Именно *отношение* масс! Но как найти значение массы каждого из тел? Вспомним, как поступают при измерении любой физической величины. Как, например, измеряется длина тела? Для этого, как известно, выбирается эталон, длина которого принимается за единицу (в СИ — 1 метр). Тогда число, выражающее длину любого тела, определяется отношением этой длины к 1 м. Так же мы поступим и в случае измерения массы. Выберем тело, которое будет служить эталоном, то есть масса которого будет принята за единицу (в СИ — 1 килограмм). Обозначим массу эталона $m_э$. Теперь уже нетрудно определить массу m любого тела. Для этого нужно привести это тело во взаимодействие с эталоном и измерить ускорения обоих тел.

Обозначим ускорение эталона через $a_э$, ускорение тела, масса которого измеряется, через a. Тогда в соответствии с формулой (2) пишем $\frac{m}{m_э}=\frac{a_э}{a}$. Отсюда

$$m=\frac{a_э}{a}m_э, \qquad (3)$$

то есть ***масса тела равна массе эталона, умноженной на отношение ускорения эталона к ускорению тела.***

Можно было бы, конечно, написать, что отношение масс двух тел равно квадрату обратного отношения их ускорений, корню квадратному из этого отношения или другой функции от этого отношения. Но оказалось целесообразным дать такое определение массы, которое отвечает соотношению (2). Причина этому следующая. Пользуясь соотношением (2), мы показали, как можно измерить массу любого тела, используя эталон массы. Тогда, измерив по формуле (3) массу нескольких тел, можно на опыте показать, что масса нескольких тел, сложенных вместе, равна сумме масс всех слагаемых тел. Если бы мы определили массу тела, например, так, что отношение масс равнялось бы квадрату обратного отношения их ускорений, то масса нескольких тел не равнялась бы сумме масс этих тел — как говорят, масса не обладала бы свойством аддитивности. Так что определение массы, отвечающее соотношению (2), вполне обосновано.

4. Сила

Выше было указано, что ускорение любого тела возникает при взаимодействии этого тела с другими телами. Таким образом, причиной ускорения, которое получает данное тело, служит влияние на него других тел. Нужно найти физическую величину, которая служила бы мерой этого влияния. Эту физическую величину назвали *силой*. Поэтому вместо того, чтобы говорить, что тело приобретает ускорение под влиянием других тел, говорят кратко — на тело действует сила. Как выразить силу числом? Ответ на этот вопрос дал великий английский физик Ньютон. Он сформулировал один из важнейших законов механики, который получил название второго закона Ньютона.

Если обозначить силу через $\vec{F}$, то второй закон Ньютона выражается уравнением

$$\vec{F}=m\vec{a}, \qquad (4)$$

где $\vec{a}$ — ускорение тела, а m — его масса. Не нужно думать, будто из уравнения (4) следует, что сила $\vec{F}$, действующая на тело, зависит от его массы или ускорения. Значение силы не зависит от свойств тела или от характера его движения. Оно определяется характером взаимодействия данного тела с другими телами.

К счастью, в природе имеется не так много различных типов взаимодействия. При изучении же законов механики мы сталкиваемся всего с двумя типами сил — это сила всемирного тяготения (гравитационная сила) и электростатическая сила.*)

Сила всемирного тяготения определяется формулой

---

*) Существуют также магнитные силы, которые своим происхождением обязаны движению электрических зарядов. Однако обычно они малы по сравнению с электростатическими силами.

Под действием силы тело приобретает ускорение.
F=ma

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(закон всемирного тяготения Ньютона). В частности, в условиях Земли сила всемирного тяготения проявляется в виде силы тяжести, действующей на любое тело и направленной к центру Земли.

Электростатическая сила определяется формулой

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

(закон Кулона). В механике электрические силы, характеризующие взаимодействие между заряженными частицами, из которых состоят тела, проявляются в виде сил упругости и сил трения. Сила упругости возникает при деформации тела, то есть при изменении взаимного расположения частей тела, например, при растяжении или сжатии пружины. Сила трения возникает, как известно, при движении соприкасающихся тел относительно друг друга.

Таким образом, в механике обычно изучаются три вида сил: сила всемирного тяготения, сила упругости и сила трения.

Если любая из этих сил, приложенная к телу массы m, вызывает его ускорение, равное $\vec{a}$, то значение этой силы всегда равно $m\vec{a}$. Другими словами, если телу массы m нужно сообщить ускорение, равное $\vec{a}$, то к этому телу нужно приложить силу $\vec{F}$, равную $\vec{F} = m\vec{a}$ (ясно, что направление прилагаемой силы $\vec{F}$ должно совпадать с направлением ускорения $\vec{a}$, которое нужно сообщить телу). При этом сила $\vec{F}$ может быть силой тяжести (силой всемирного тяготения), силой упругости, силой трения или, наконец, геометрической суммой этих сил. В этом и заключается смысл второго закона Ньютона.

Попытаемся выяснить, что послужило основанием для формулировки второго закона Ньютона. Представим себе две материальные точки A и B, взаимодействующие друг с другом, то есть сообщающие друг другу ускорения. Опыт показывает, что направления этих ускорений взаимно противоположны.

Очевидно, обе взаимодействующие материальные точки «равноправны» в том смысле, что можно взаимно поменять их обозначения. Другими словами, ни одна из взаимодействующих точек не имеет никаких преимуществ перед другой. Отсюда следует, что должна существовать физическая величина, одинаковая для обеих взаимодействующих материальных точек. Нетрудно найти такую величину. Из соотношения (2) следует:

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{a_B}{a_A},$$

где m_A и m_B — массы взаимодействующих материальных точек, a_A и a_B — модули их ускорений. Следовательно,

$$m_A a_A = m_B a_B. \qquad (5)$$

Вот мы и нашли величину, которая одинакова для обоих взаимодействующих тел. Эта величина характеризует взаимное влияние материальных точек друг на друга, вызывающее их ускорения. Существование такой величины и послужило основанием для формулировки второго закона Ньютона.

Учитывая, что ускорение — величина векторная, перепишем соотношение (5) в виде

$$m_A\vec{a}_A = -m_B\vec{a}_B.$$

Обозначив $m_A\vec{a}_A = \vec{F}_A$ и $m_B\vec{a}_B = \vec{F}_B$, получим

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B.$$

Векторные величины $\vec{F}_A$ и $\vec{F}_B$ Ньютон назвал *силами*. Как видно, *сила, с которой материальная точка A действует на материальную точку B, равна по модулю, но противоположна по направлению силе, с которой материальная точка B действует на материальную точку A.* Это утверждение выражает третий закон Ньютона. Иногда кратко этот закон формулируют так: действие равно противодействию.

Из всего сказанного о физической величине, называемой силой, следует, что единственный результат действия силы на тело (материальную точку) — это ускорение, приобретаемое телом под действием этой силы.

5. Импульс

Мы уже знаем, что при взаимодействии двух тел оба тела получают ускорения, которые зависят от их масс. Но можно найти величину, которая будет одинакова для обоих взаимодействующих тел и не будет зависеть от масс этих тел.

Эту величину мы найдем, переписав второй закон Ньютона — $\vec{F}=m\vec{a}$ — в несколько измененном виде. Вспомним, что ускорение тела можно записать как $\vec{a}=\frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t}$. Тогда $\vec{F}=m\frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t}$, откуда

$$\vec{F}t=m\vec{v}-m\vec{v}_0.$$

Величина $m\vec{v}$ получила название импульса тела, а величина $\vec{F}t$ — импульса силы.

садиться на качели
можно
по-разному
Ft = mv

Теперь мы можем сказать, что при взаимодействии двух тел изменяется импульс каждого из них. Но в соответствии с третьим законом Ньютона импульсы сил, с которыми тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Поэтому и изменения импульсов обоих тел также равны по модулю и взаимно противоположны по направлению. Значит, *геометрическая сумма импульсов взаимодействующих тел остается постоянной при любом взаимодействии этих тел.* Это утверждение называют законом сохранения импульса. Можно показать, что закон сохранения импульса справедлив не только для двух, но и для любого числа взаимодействующих друг с другом тел. Это — один из важнейших законов природы.

6. Работа и энергия

Импульс силы мы определили как произведение силы $\vec{F}$ на время ее действия t. По аналогии можно ввести величину, равную произведению силы, действующей на тело, на перемещение тела. Эту величину называют *работой* силы. В том случае, когда направления векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{s}$ совпадают, работа силы равна Fs. В общем же случае, когда направление силы и направление перемещения тела составляют угол α друг с другом, выражение для работы имеет вид

$$A=Fs\cos\alpha.$$

В отличие от импульса тела, который есть величина векторная, работа — величина скалярная.

Можно доказать, что работа сил, действующих на тело, всегда равна

$$A=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}. \qquad (6)$$

Величину $\frac{mv^2}{2}$ называют *кинетической энергией* движущегося тела. Равенство (6) выражает так называемую теорему о кинетической энергии: *изменение кинетической энергии тела равно работе действующих на тело сил.* Напомним,

Ох, не легкая это работа...
A=F·S
ДЕТСКИЙ МИР

что взаимодействие тел можно характеризовать не только силой, но и *потенциальной энергией*. Для потенциальной энергии справедлива следующая теорема: *изменение потенциальной энергии взаимодействующих тел, взятое с обратным знаком, равно работе сил взаимодействия.*

Таким образом, мы ввели три важные физические величины — работу *сил*, кинетическую энергию *тела* и потенциальную энергию *взаимодействия* тел. Нетрудно показать, что для системы тел, взаимодействующих друг с другом силами тяготения и упругости, справедлив закон сохранения полной энергии: *сумма потенциальной и кинетической энергий взаимодействующих друг с другом тел остается неизменной.* Закон сохранения энергии и закон сохранения импульса представляют собой наиболее общие законы природы.

Мы привели ряд примеров того, как вводятся физические величины. Из этих примеров видно, насколько важно правильно выбрать физические величины, характеризующие то или иное явление. Мы ограничились только величинами, характеризующими механическое движение.

Рациональное введение физических величин позволило открыть и сформулировать ряд важных законов классической механики (ньютоновской механики). Эти законы нашли широчайшее применение во многих областях техники. По тем же принципам вводятся физические величины и в других разделах физики.

Задача для исследования

ВЫБРАТЬ ВЕРШИНЫ ВЫПУКЛОГО k-УГОЛЬНИКА

Условимся называть систему точек на плоскости точками общего положения, если никакие три из этих точек не принадлежат одной прямой. Ясно, что 4 точки общего положения на плоскости могут не являться вершинами выпуклого 4-угольника; однако, как нетрудно доказать, если на плоскости имеются 5 точек, то некоторые 4 из них наверняка являются вершинами выпуклого 4-угольника. 6, 7 или 8 точек общего положения можно расположить на плоскости так, что никакие 5 из них не будут являться вершинами выпуклого 5-угольника; однако среди любых 9 точек общего положения наверняка найдутся 5 таких, что они являются вершинами выпуклого 5-угольника. Доказательство этого утверждения несложно, но довольно громоздко. Ему посвящена заметка Г. А. Тонояна («Квант», 1975, № 11, с. 26).

Знаменитому венгерскому математику Палу Эрдёшу, члену Венгерской Академии наук и многих других академий и научных обществ разных стран принадлежит задача об определении наименьшего числа $N=N(k)$ такого, что из N точек общего положения на плоскости наверняка можно выбрать k точек, являющиеся вершинами выпуклого k-угольника. С помощью довольно громоздкого перебора возможных вариантов расположения точек на плоскости Эрдёш доказал, что $N(6)=17$: на плоскости можно указать такие 16 точек общего положения, что никакие 6 из них не являются вершинами выпуклого 6-угольника; однако если число точек общего положения равно 17, то среди них 6 вершин выпуклого 6-угольника обязательно найдутся. Таким образом,

$$N(3)=3,\ N(4)=5,\ N(5)=9,\ N(6)=17.$$

Так как

$$3=2^1+1,\ 5=2^2+1,\ 9=2^3+1,\ 17=2^4+1,$$

то Эрдёш предположил, что наименьшее число точек общего положения на плоскости, из числа которых можно выбрать k точек, являющихся вершинами выпуклого k-угольника, задается формулой: $N(k)=2^{k-2}+1$.

Эта гипотеза Эрдёша выглядит привлекательно: формулировка ее совсем проста. Однако, увы! — на сегодняшний день не видно никаких подходов к решению задачи об определении числа $N(k)$, то есть к доказательству (а, может быть, и напротив — к опровержению) гипотезы Эрдёша (самому же Эрдёшу принадлежит лишь оценка числа $N(k)$, к сожалению, довольно далекая от гипотетического результата). Было бы интересно получить хорошие оценки $N(k)$ сверху и снизу.

И. Я.

Решение уравнений на микрокалькуляторе

Б. К. ПРИХОДЬКО

— Хорошая машинка, — сказал один из моих учеников, закончив вычисления. — Жаль только, что корни кубические извлекать не умеет.

— Почему же не умеет? — возразил я. — На этой машинке можно извлекать корни даже более высоких степеней. Надо лишь подобрать соответствующий алгоритм, то есть указать, какие математические операции следует для этого выполнять (и в каком порядке).

О построении алгоритмов для решения некоторых алгебраических уравнений на микрокалькуляторе типа «Электроника БЗ-14М» и пойдет речь далее. Желательно читать эту статью, держа в руках калькулятор подобного типа.

Метод итераций

Пусть дано уравнение

$$f(x)=0. \qquad (1)$$

Если это уравнение имеет действительный корень $x=\xi$, то его часто удается найти (с любой точностью) *методом последовательных приближений,* или, как иначе говорят, *методом итераций.*

Рассмотрим кратко сущность этого метода.*) Уравнение (1) заменяют равносильным уравнением вида

$$x=\varphi(x), \qquad (2)$$

где функция φ определена и дифференцируема на отрезке, содержащем искомый корень ξ. Далее, выбирают *начальное приближение* $x_0\approx\xi$ и находят *первое приближение* x_1 как значение функции φ при $x=x_0$, то есть $x_1=\varphi(x_0)$. Затем вычисляют значение φ при $x=x_1$ и получают *второе приближение* $x_2=\varphi(x_1)$ и т. д. Приближение x_{n+1} находят по рекуррентной формуле

$$x_{n+1}=\varphi(x_n),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \dots \qquad (3)$$

Если бесконечная последовательность x_n имеет предел $\bar{\xi}$, то, переходя к пределу в уравнении (3), получим $\bar{\xi}=\varphi(\bar{\xi})$. Значит, $\bar{\xi}$ — корень уравнения (2), а следовательно, и уравнения (1). Геометрическую суть метода иллюстрирует рисунок 1.

На практике вычисления останавливают, когда будет обнаружено, что в границах заданной точности выполняется равенство

$$x_{n+1}=x_n. \qquad (4)$$

---

*) Подробно этот метод описан в статье В. Г. Болтянского в «Кванте», 1983, № 3, с. 16.

Однако будьте осторожны! Выполнение равенства (4) не гарантирует совпадение x_n с корнем ξ с заданной точностью на рассматриваемом отрезке. На рисунке 2 показано, какая неприятность может произойти: последовательность (x_n) сходится к точке η, для которой значение $\varphi(\eta)$ очень близко (в пределах заданной точности) к η, но не совпадает с η, в то время как настоящий корень ξ уравнения расположен в другом месте.

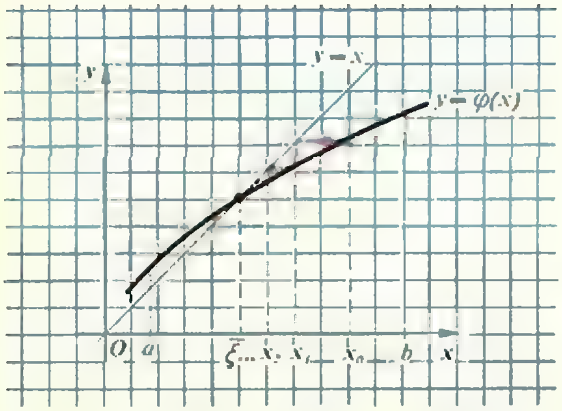


Рис. 1.

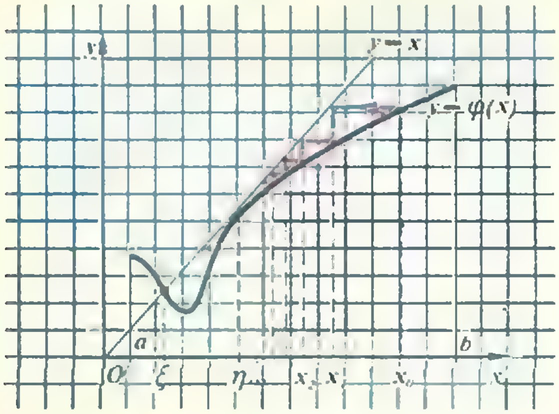


Рис. 2.

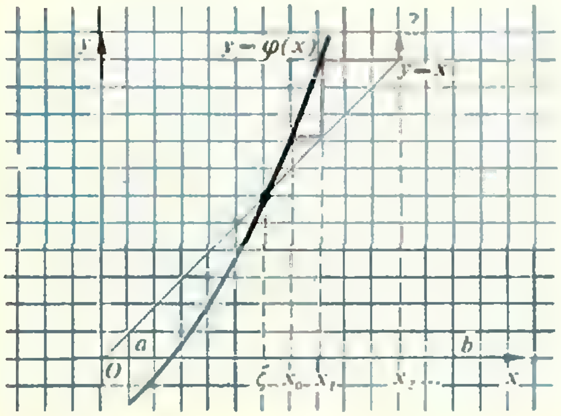


Рис. 3.

Выбор функции φ

Для составления уравнения (2) функцию φ можно выбирать различными способами*), однако не каждый выбор подходит для вычисления корня методом итераций. Мы будем предполагать, что уравнение (1) имеет корень ξ на заданном отрезке $[a, b]$ и что мы это уравнение заменили на равносильное ему уравнение (2). Тогда *итерационный процесс* $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ *сходится при любом начальном приближении* $x_0 \in [a, b]$ *к корню уравнения* (1), *если выполнено следующее условие:*

$$|\varphi'(x)| \leqslant q < 1 \quad \text{при любом} \quad x \in [a, b], \tag{5}$$

где q *— фиксированное число.*

Мы не будем доказывать это утверждение (см. задачу 10 цитированной выше статьи В. Г. Болтянского), но будем постоянно им пользоваться.

Заметим, что, если условие (5) не выполнено, процесс итераций (3) может быть расходящимся (см. рис. 3).

Доказано, что чем меньше число q, тем быстрее сходится итерационный процесс (3) и тем меньше потребуется последовательных приближений для получения окончательного результата. Поэтому, выбирая функцию φ, необходимо стремиться к тому, чтобы число q было по возможности малым. Если же удастся подобрать функцию φ так, чтобы выполнялось равенство $\varphi'(\xi)=0$, то итерационный процесс (3) будет сходиться очень быстро.

Но это еще не все. Надо непременно учитывать удобство вычислений на данном калькуляторе. С целью сокращения затрат времени на вычислительную работу, функцию φ следует выбирать так, чтобы процесс вычисления корня по формуле (3) получался цепочным. Под *цепочным* вычислительным процессом понимают такой процесс, который может быть реализован на данном калькуляторе без записи промежуточных результатов.

В дальнейшем будем конструировать только цепочные вычислительные процессы.

Извлечение корней

Чтобы извлечь кубический корень из положительного числа a, поступим следующим образом. Обе части уравнения

---

*) Например, положив $\varphi(x)=f(x)+x$.

$$x^3=a$$

умножим на x и извлечем корень четвертой степени. Получим

$$x=\sqrt[4]{ax}.$$

Положим $\varphi(x)=\sqrt[4]{ax}$. Тогда формула (3) принимает вид

$$x_{n+1}=\sqrt[4]{ax_n},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (6)$$

Так как

$$\varphi'(x)=\frac{a}{4\sqrt[4]{a^3x^3}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{\frac{x^3}{a}}},$$

получаем

$$\varphi'(\sqrt[3]{a})=\frac{1}{4}<1.$$

При $x>\sqrt[3]{a}$ функция $\varphi'(x)$ убывает. Следовательно, на бесконечном промежутке $[\sqrt[3]{a},\infty[$ выполняется условие (5), и сходимость итерационного процесса (6) обеспечена.

Из формулы (6) вытекает, что извлечение кубического корня сводится к умножению полученного результата на константу a и последующему двукратному извлечению квадратного корня, а следовательно, представляет собою цепочный вычислительный процесс. Условимся для упрощения записи алгоритмов клавишу очистки индикаторного регистра обозначать значком $\boxed{C}$, а цифровые и операционные клавиши — соответствующими цифрами и знаками математических операций без рамок. Символ ind(A) будет означать, что на индикаторе высвечивается число A. Тогда алгоритм извлечения кубического корня на «Электронике БЗ-14М» запишется так:

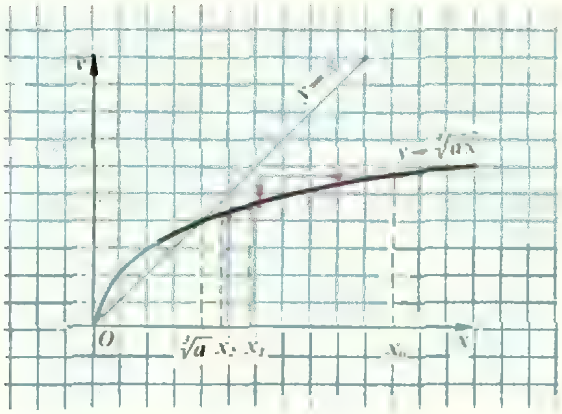


Рис. 4.

$$\boxed{C}\ \underbrace{x_0\times a=\sqrt{\ }\ \sqrt{\ }}_{1\text{-й шаг}}\ \underbrace{\times a=\sqrt{\ }\ \sqrt{\ }}_{2\text{-й шаг}}\ \underbrace{\times a=\sqrt{\ }\ \sqrt{\ }}_{3\text{-й шаг}}\ldots$$

$$\ldots\text{ind}(\sqrt[3]{a}),$$

где x_0 — начальное приближение. Графически итерационный процесс показан на рисунке 4.

Если требуется вычислить корень пятой степени, обе части уравнения $x^5=a$ разделим на x, а затем извлечем корень четвертой степени, после чего получим рекуррентную зависимость

$$x_{n+1}=\sqrt[4]{\frac{a}{x_n}},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Принимая $x_0=1$, запишем алгоритм извлечения корня пятой степени на «Электронике БЗ-14М»:

$$\boxed{C}\ a\sqrt{\ }\ \sqrt{\ }\ \tfrac{1}{x}\times a=\sqrt{\ }\ \sqrt{\ }\ \tfrac{1}{x}\times a=\sqrt{\ }\ \sqrt{\ }\ldots$$

$$\ldots\ \text{ind}(\sqrt[5]{a}).$$

Графически итерационный процесс показан на рисунке 5.

Очевидно, таким же путем можно извлекать корни степеней $2^k(2^m-1)$, $2^k(2^m+1)$, где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$

Остается сказать несколько слов о выборе начального приближения. При извлечении корней во всех рассмотренных случаях за начальное приближение можно брать $x_0=1$ или вообще любое число $x_0\in[1,\ a]$. Сходимость итерационного процесса (3) от этого не нарушится.

Решение уравнений

Прием, которым мы воспользовались при извлечении корня пятой степени

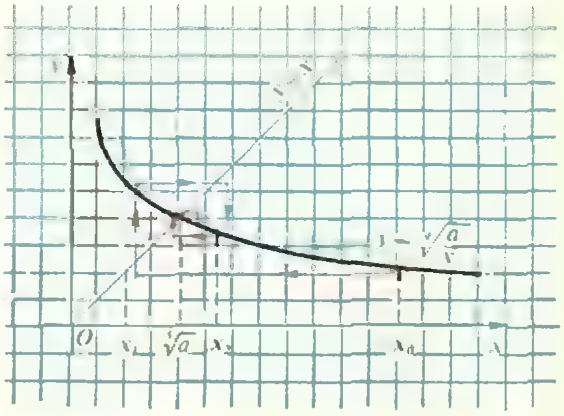


Рис. 5.

(деление обеих частей равенства на неизвестную x с последующим решением уравнения в квадратных радикалах), можно применить для вычисления положительных корней некоторых алгебраических уравнений высших степеней.

Как это делается, покажем на примере. Пусть требуется вычислить положительный корень уравнения

$$x^5-10x^3+21x-3=0. \qquad (7)$$

Разделив левую часть уравнения на x и обозначив $g(x)=21-3/x$, получим биквадратное уравнение $x^4-10x^2+g(x)=0$, решая которое, найдем $x=\sqrt{5\pm\sqrt{\frac{3}{x}+4}}$.

Выберем рабочую формулу:

$$x_{n+1}=\sqrt{5+\sqrt{\frac{3}{x_n}+4}}, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Вычисления ведем на «Электронике БЗ-14М». Начиная с $x_0=1$, получим следующий ряд последовательных приближений:

$x_0=1$,	$x_3=2{,}694692$,
$x_1=2{,}765095$,	$x_4=2{,}694672$,
$x_2=2{,}693507$,	$x_5=2{,}694672$.

Сравнивая приближения x_4 и x_5, видим, что равенство (4) выполняется с точностью до 10^{-6}. Следовательно, искомым значением корня будет $x=2{,}694672$ с той же точностью. Впрочем, это еще надо проверить!

Аналогичным способом можно находить корни других алгебраических уравнений. Некоторые из них мы здесь запишем в общем виде:

1) $x^{2^m+1}-ax\pm d=0$,

2) $x^{2^m+1}-2ax^{2^m}\pm bx\pm d=0$,

3) $x^{2^{m+1}+1}-2ax^{2^m+1}\pm bx\pm d=0$,

$$a>0,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Описанный способ решения уравнений удобен в том отношении, что, как и в случае извлечения корней, за начальное приближение можно брать $x_0=1$.

Упражнения

1. Докажите, что решение уравнения (7) нами найдено верно.

2. Последовательность (x_n) задана рекуррентно: $x_{n+1}=\sqrt[4]{ax_n}$, $x_0=1$. Найдите формулу для x_n и докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt[3]{a}$.

3. Докажите, что $\sqrt[3]{a}=\sqrt[2^2]{a}\cdot\sqrt[2^4]{a}\cdot\sqrt[2^6]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^{2n}]{a}\cdot\ldots$ при $a>0$.

4. Придумайте итерационный процесс для извлечения кубического корня, который бы:

а) сходился быстрее, чем (6),

б) сходился медленнее, чем (6),

в) был расходящимся.

5. Найдите рекуррентные формулы для извлечения корней а) 11-й степени; б) 13-й степени.

6. Напишите алгоритм извлечения корня 6-й степени на «Электронике БЗ-14М».

7. По заданному алгоритму найдите x:

$\boxed{c}\ x_0 \times a \sqrt{\ } = \sqrt{\ }\sqrt{\ }\sqrt{\ } \times a \sqrt{\ } = \sqrt{\ }\sqrt{\ }\sqrt{\ } \ldots \operatorname{ind}(x)$.

8. С точностью до 10^{-6} найдите корни из следующих чисел: а) $\sqrt[5]{10}$, б) $\sqrt[3]{756}$, в) $\sqrt[6]{23}$, г) $\sqrt[7]{653}$, д) $\sqrt[11]{7895}$, е) $\sqrt[13]{1256}$, ж) $\sqrt[17]{3224}$.

9. С точностью до 10^{-6} вычислите содержащиеся в промежутке $[1,\ \infty[$ корни следующих уравнений: а) $5x^2-296x+453=0$, б) $x^3-71x-11=0$, в) $x^3-220x+17=0$, г) $x^4-6x-109=0$, д) $x^4+3x-15=0$, е) $x^5-4x-2=0$, ж) $x^4-24x^2+92x-5=0$, з) $x^4-12x^2+5x-25=0$, и) $x^4-18x^2+7x+13=0$, к) $x^5-102x^3+487x+50=0$.

Поправки

(см. «Квант» № 7)

На с. 17 в условиях задач 7 и 8 после знака ⇔ должна стоять буква n.

На с. 38 в первом абзаце следует читать: и относительно $O{:}\ I_O=(a+b+c)R^2=2pR^2$.

На с. 39 неправильно указаны инициалы одного из авторов задач — следует читать *А. В. Бияко.*

На с. 44 во второй колонке дробь $1/n$ нужно заменить на $1/(2n)$, величину S_{n-1} — на $S_{n-1}/2$, а координату $x_1=1$ — на $x_1=1/2$. На рисунках 1 и 2 кирпичи должны лежать так, чтобы расстояния между краями соседних кирпичей, считая сверху, составляли последовательность $1/2,\ 1/4,\ 1/6,\ \ldots,\ 1/(2(n-1))$ (для стопки из n кирпичей), соответствующие изменения нужно внести и в первую колонку. В третьей колонке $1/(2p)$ надо заменить на $(1/2)^p$.

На с. 48 формула в задаче 10 должна выглядеть так:

$$4|MN|^2=|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2-|AC|^2-|BD|^2.$$

(см. «Квант» № 8)

В решении задачи Ф874 (с. 52) допущена неточность: при повороте автомобиля ускорение ему сообщает сила трения, действующая и на передние, и на задние колеса и равная μmg $\left(\text{а не } \mu\frac{mg}{2}\right)$. Поэтому $v_{\text{к}}=\sqrt{\mu gR}$, $v\leqslant v_{\text{к}}\approx 60$ км/ч.

Принцип относительности

Кандидат физико-математических наук
А. А. ДОЗОРОВ

В пригородной электричке, глядя в окно на только что тронувшийся поезд, пятилетний мальчик спросил:

— Мама, это кто поехал, мы или тот поезд?

— Поезд,— ответила мама.

— А почему мне кажется, что это мы поехали?

Мама как-то ответила, не обратив внимания на то, что ее сын сформулировал один из фундаментальнейших вопросов физики.

Одним из первых аналогичный вопрос сформулировал и дал на него ответ великий итальянский ученый Галилео Галилей. Случилось это в 1636 году, то есть примерно 350 лет тому назад. Вот рассуждения Галилея по поводу так называемого принципа относительности, изложенные им в книге «Диалог о двух главнейших системах мира — птолемеевой и коперниковой»:

«Уединитесь с кем-либо из друзей в просторное помещение под палубой какого-нибудь корабля, запаситесь мухами, бабочками и другими подобными мелкими летающими насекомыми; пусть будет у вас там также большой сосуд с водой и плавающими в нем маленькими рыбками; подвесьте, далее, наверху ведерко, из которого вода будет падать капля за каплей в другой сосуд с узким горлышком, подставленный внизу. Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте прилежно, как мелкие летающие животные с одной и той же скоростью движутся во все стороны помещения; рыбы, как вы увидите, будут плавать безразлично во всех направлениях; все падающие капли попадут в подставленный сосуд, и вам, бросая какой-нибудь предмет, не придется бросать его с большей силой в одну сторону, чем в другую, если расстояния будут одни и те же; и если вы будете прыгать сразу двумя ногами, то сделаете прыжок на одинаковое расстояние в любом направлении. Прилежно наблюдайте все это, хотя у вас не возникает никакого сомнения в том, что пока корабль стоит неподвижно, все должно происходить именно так. Заставьте теперь корабль двигаться с любой скоростью, и тогда (если только движение будет равномерным и без качки в ту и другую сторону) во всех названных явлениях вы не обнаружите ни малейшего изменения и ни по одному из них не сможете установить, движется ли корабль или стоит неподвижно... И причина согласованности всех этих явлений заключается в том, что движение корабля общее всем находящимся на нем предметам, так же, как и воздуху».

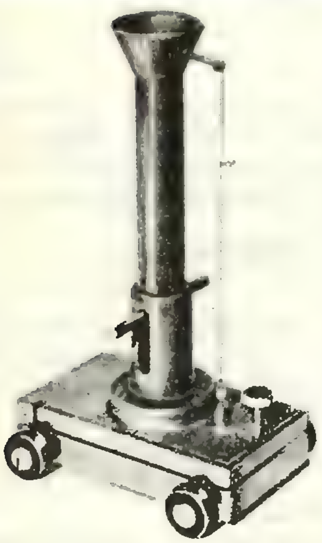
Исаак Ньютон в книге «Математические начала натуральной философии», вышедшей в 1687 году, так сформулировал принцип относительности: «Относительные движения друг по отношению к другу тел, заключенных в какомлибо пространстве, одинаковы, покоится ли это пространство или движется равномерно и прямолинейно без вращения».

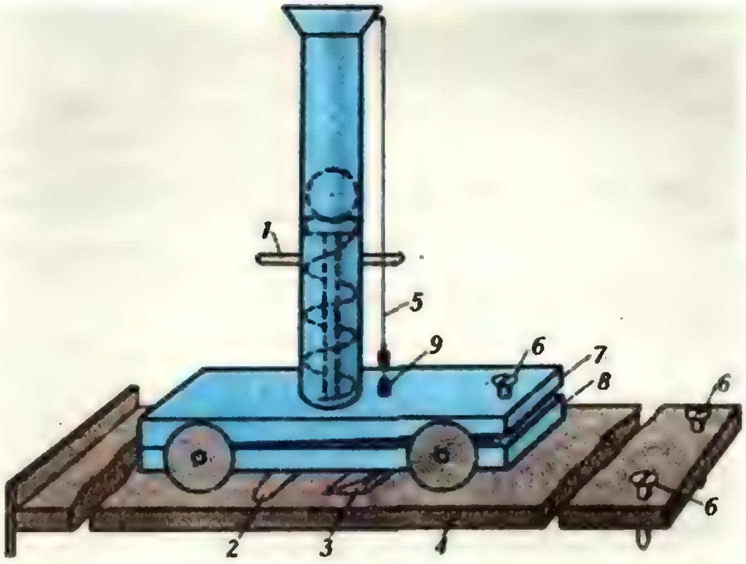
В современной формулировке принцип относительности Галилея обычно звучит так: законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Этот принцип очень долго не подвергался какому-либо пересмотру. Лишь в 1905 году в своих знаменитых работах по специальной теории относительности Альберт Эйнштейн обобщил механический принцип относительности, распространив его на все физические явления: «Законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к которой из двух координатных систем, движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга, отнесены эти изменения состояния».

Таким образом, никакие опыты, проводимые в какой-либо инерциальной системе, не позволяют сказать, движется ли данная система прямолинейно и равномерно или покоится.

Представьте себе, что неподвижная пушка стреляет точно вверх. Снаряд, естественно, должен возвратиться точно





в дуло этой пушки.*) В этом еще нет никакого фокуса, секрет заключен лишь в тренировке артиллеристов. Если же теперь заставить пушку двигаться равномерно и прямолинейно и стрелять с ходу без изменения наводки орудия, то, согласно принципу относительности, снаряд снова должен возвратиться в дуло пушки. Это уже гораздо интереснее.

При некотором усердии вы можете самостоятельно изготовить соответствующую установку, схематически изображенную на рисунке, и продемонстрировать ее работу на уроке физики. Самое сложное — это пушка. Пружина пушки при помощи ручек *1* сжимается и фиксируется в этом положении спусковым устройством *2*. Снаряд (металлический шарик) укладывается на чашечку, скрепленную с пружиной. При стрельбе с ходу спусковое устройство срабатывает при наезде на клин *3*, укрепленный на доске *4*, по которой запускается пушка. Настройка орудия (прицеливание) осуществляется при помощи отвеса *5* и трех винтов *6* (для большей точности наводки платформу лучше изготовить из двух пластин *7* и *8*). При точной наводке отвес должен совместиться с меткой *9*.

Порядок подготовки и проведения опыта следующий. При помощи двух винтов *6* дорога-доска *4* устанавливается на столе так, чтобы пушка скатывалась по ней примерно с постоянной скоростью (так что движущуюся систему можно считать инерциальной). Подложив под колеса пушки, например, линейку, при помощи трех винтов *6* производят наводку пушки. Затем пушка заряжается, и выстрел производится с места (для этого другой линейкой заставляют сработать спусковое устройство *2*). Шарик вылетает и вновь возвращается в дуло пушки. Потом линейка-стопор убирается, пушка набирает скорость, примерно посередине дороги наезжает спусковым устройством на клин *3*, шарик вылетает вверх, одновременно двигаясь вдоль дороги с той же скоростью что и пушка, и под аплодисменты зрителей вновь попадает в дуло орудия. Опыт действительно достаточно эффектен.

В заключение — несколько практических советов. Пушку лучше делать массивной, чтобы при наезде на клин и при выстреле наводка не сбивалась. Достаточный диаметр дула — около 3 см. Для ощутимого воздействия на воображение зрителей шарик должен вылетать примерно на 1,5—2 м, за это время платформа с пушкой должна пройти приблизительно 0,5 м. Доску-дорогу нужно делать жесткой, чтобы она не прогибалась под тяжестью орудия, а два винта *6*, укрепленные на доске, лучше заострить, тогда сама доска-дорога будет устойчивой. Для того чтобы опыт можно было повторить несколько раз, в конце дороги пушку надо или плавно останавливать рукой или сделать на конце дороги мягкий барьер.

---

*) Здесь предполагается, что Земля — инерциальная система отсчета, хотя на самом деле любая реальная система отсчета может считаться инерциальной лишь с тем или иным приближением.

Экспонента

Член-корреспондент АПН СССР
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

В любом школьном учебнике изложение темы о показательной функции и числе e содержит недоказанные утверждения, кратко изложенные места. Объясняется это сложностью темы. Здесь мы расскажем о другом подходе к этим понятиям, поясняющем их смысл и связь с дифференциальными уравнениями. При таком способе изложения также имеются недоказанные утверждения (общая теорема существования и единственности для дифференциальных уравнений и свойство непрерывной функции принимать промежуточные значения). Однако эти недоказанные утверждения имеют простой наглядный смысл и принципиальное значение для всей математики.

1. Задача о падении тела в сопротивляющейся среде

На опускающегося парашютиста действуют сила тяжести и сила сопротивления воздуха (остальными воздействиями можно в безветренный день пренебречь). Силу сопротивления воздуха можно считать пропорциональной скорости v, то есть равной по величине qv (коэффициент q зависит, в основном, от диаметра и формы парашюта). Таким образом,

$$ma = mg - qv,$$

где $a = v'$ — величина ускорения (знак минус перед qv связан с тем, что сила сопротивления воздуха действует противоположно направлению падения; рис. 1). Разделив на m, получаем

$$v' = -\frac{q}{m}v + g. \qquad (1)$$

Соотношение (1) представляет собой *линейное дифференциальное уравнение:* производная неизвестной функции $v = v(t)$ (которую требуется определить из этого уравнения) выражается в виде многочлена первой степени от этой неизвестной функции. Обозначая неизвестную функцию через $y = y(x)$, а коэффициенты через a и b, запишем дифференциальное уравнение в виде

$$y' = ay + b. \qquad (2)$$

Таким дифференциальным уравнением описывается не только падение тела в сопротивляющейся среде, но и многие другие физические процессы.

2. Теорема существования и единственности

Теорема 1. *Каковы бы ни были действительные числа x_0, y_0, существует и притом только одна функция $y = y(x)$, являющаяся решением уравнения (2) и удовлетворяющая соотношению $y(x_0) = y_0$. Это решение определено на всей числовой прямой.*

Соотношение $y(x_0) = y_0$ называется *начальным условием*. Таким образом, теорема 1 означает, что уравнение (2) при любом заданном начальном условии имеет решение (и притом единственное).

Приведем геометрическое пояснение этой теоремы, причем рассмотрим частный случай, когда $a = 1$, $b = 2$, то есть возьмем уравнение

$$y' = y + 2. \qquad (3)$$

В точках, где $y = 0$ (на оси x), мы имеем, согласно (3), $y' = 2$, то есть график искомой функции $y(x)$ должен иметь в этих точках угловой коэффициент касательной, равный 2. Наметим короткими черточками, проведенными в точках оси абсцисс, направление касательной (рис. 2). Далее, при $y = 1$ имеем, согласно (3), $y' = 3$, то есть в точках прямой $y = 1$ график искомой функции должен иметь угловой коэффициент касательной, равный 3; наметим в точках прямой $y = 1$ короткими черточками направление касательной. Мы можем затем наметить черточки и на других прямых, параллельных оси абсцисс (рис. 2). Теперь становится понятным поведение «силовых линий» этого «поля направлений». В каждой своей точке «силовая линия» касается соответствующей черточки, то есть ее касательная имеет угловой коэффициент y', который, в силу построения черточек, равен $y + 2$. Это означает, что «силовая линия» является графиком функции, удовлетворяющей уравнению (3). Из чертежа понятно, что через каждую точку $(x_0; y_0)$ проходит «силовая линия» и притом только одна. Это и дает наглядное подтверждение справедливости теоремы 1. Ее доказательство (в нужном нам частном случае) намечено в конце статьи (см. задачи 12—15).

3. Экспонента

Функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $y'=y$ и начальному условию $y(0)=1$, называется *экспонентой* и обозначается символом exp.

Заметим, что уравнение $y'=y$ является частным случаем уравнения (2); поэтому его решение с начальным условием $y(0)=1$, в силу теоремы 1, существует и определено однозначно, причем областью определения этого решения (то есть экспоненты) является вся числовая прямая.

Непосредственно из определения следует, что экспонента — дифференцируемая функция и ее производная совпадает с этой же функцией (поскольку она является решением уравнения $y'=y$):

$$(\exp x)'=\exp x. \qquad (4)$$

Теорема 2. *Значения функции* exp *положительны, то есть* $\exp x>0$, *для любого действительного* x.

Доказательство. Допустим, что $\exp x_0=0$ при некотором x_0. Тогда функция $y=\exp x$ удовлетворяет уравнению $y'=y$ и условию $y(x_0)=0$. Функция $y\equiv 0$ также удовлетворяет уравнению $y'=y$ и условию $y(x_0)=0$. При этом функции $y=\exp x$ и $y\equiv 0$ различны (например, $\exp 0=1$, то есть $\exp 0\neq 0$). Но тогда получается, что уравнение $y'=y$ имеет при начальном условии $y(x_0)=0$ два различных решения, что противоречит теореме 1. Итак, равенство $\exp x=0$ не может иметь места ни при каком x.

Допустим теперь, что при некотором x_1 имеем $\exp x_1<0$. Функция exp дифференцируема и потому непрерывна; следовательно, между двумя точками, в которых она принимает значения разных знаков ($\exp x_1<0$, $\exp 0=1$), эта функция должна обращаться в нуль (рис. 3). Но это, как мы видели, невозможно.

Итак, экспонента не может принимать ни нулевого значения, ни отрицательных значений; значит, $\exp x>0$ при любом $x\in R$.

Следствие. *Экспонента — возрастающая функция.*

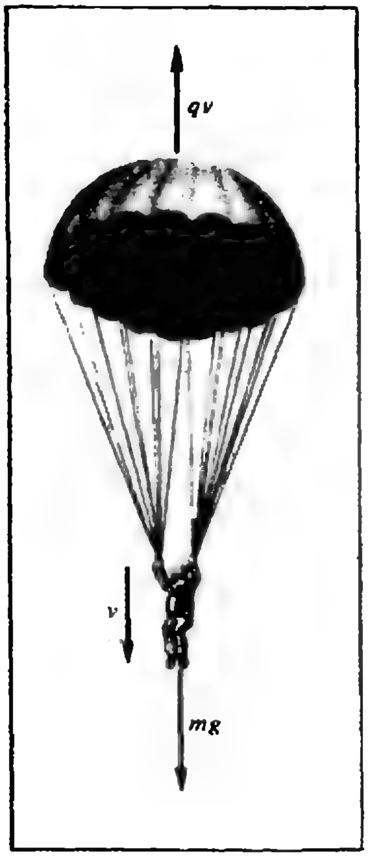


Рис. 1.

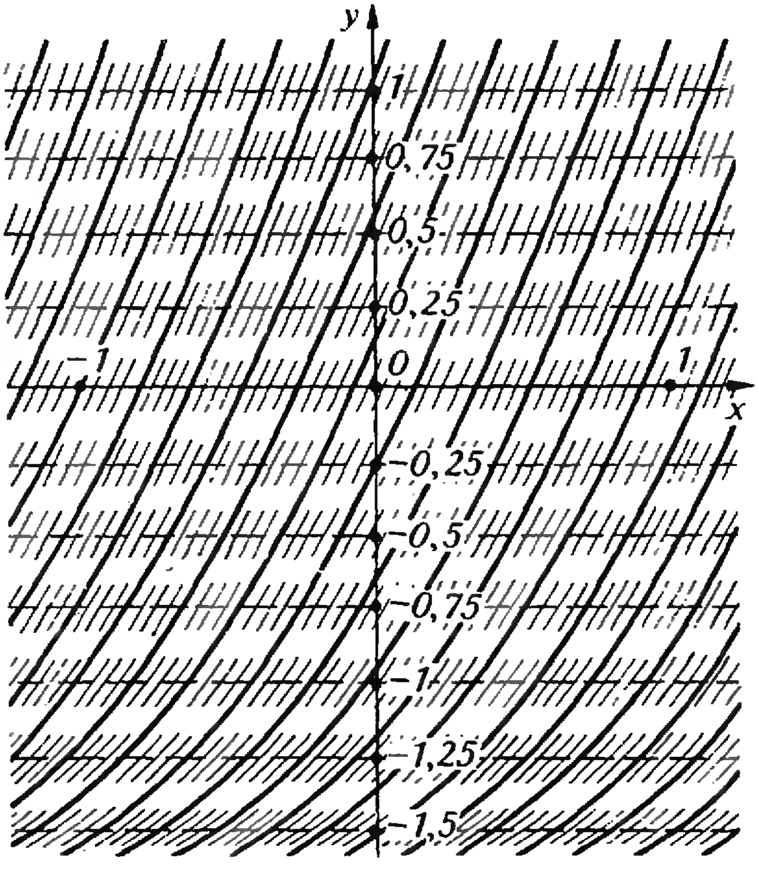


Рис. 2.

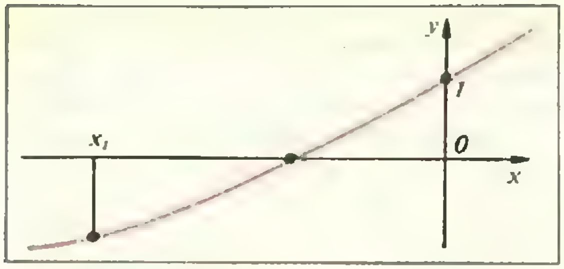


Рис. 3.

Действительно, производная функции exp (то есть сама эта функция) принимает, по теореме 2, лишь положительные значения, и потому функция exp — возрастающая.

Теорема 3. *Для любых $p, q \in R$ имеем*

$$\boxed{\exp(p+q) = \exp p \cdot \exp q.} \qquad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $y = \exp(p+x)$. Имеем

$$y' = (\exp(p+x))' = \exp(p+x) = y$$

(см. (4)), то есть эта функция удовлетворяет уравнению $y' = y$. При этом $y(0) = \exp p$.

Рассмотрим теперь функцию $y = \exp p \cdot \exp x$. Имеем

$$y' = \exp p \cdot (\exp x)' = \exp p \cdot \exp x = y,$$

то есть эта функция также удовлетворяет уравнению $y' = y$. При этом $y(0) = \exp p$. По теореме 1, рассматриваемые функции совпадают:

$$\exp(p+x) = \exp p \cdot \exp x\,.$$

В частности, при $x = q$ получаем (5).

4. Число *e*

Значение функции exp при $x = 1$ обозначается буквой e, то есть $e = \exp 1$. Чтобы найти приближенное значение числа e, можно поступить следующим образом. Разделим отрезок $[0; 1]$ на n равных частей (каждая из них имеет длину $\Delta x = 1/n$). Через точку A_0 $(0; 1)$ проведем «черточку», соответствующую уравнению $y' = y$; она имеет угловой коэффициент $k_1 = y$, то есть $k_1 = 1$. Эту «черточку» будем рассматривать над отрезком $[0; 1/n]$. Правый ее конец A_1 имеет координаты $x = 1/n$, $y = 1 + k_1\Delta x = 1 + 1 \cdot 1/n = 1 + 1/n$ (рис. 4).

Через A_1 проведем новую «черточку», также соответствующую уравнению $y' = y$; ее угловой коэффициент равен y (ординате точки A_1), то есть равен $k_2 = 1 + 1/n$. Эту «черточку» будем рассматривать над $[1/n; 2/n]$. Правый ее конец A_2 имеет координаты

$$x = \frac{2}{n},\ y = \left(1 + \frac{1}{n}\right) + k_2\Delta x =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

Через A_2 снова проведем «черточку», соответствующую уравнению $y' = y$. Ее угловой коэффициент k_3 равен ординате точки A_2, то есть $k_3 = (1 + 1/n)^2$, а правый конец A_3 имеет координаты $x = 3/n$, $y = (1 + 1/n)^2 + k_3\Delta x = (1 + 1/n)^3$.

Продолжая, мы получим ломаную $A_0A_1A_2 \ldots A_n$ — *ломаную Эйлера* для уравнения $y' = y$ (на рис. 4 для удобства взяты разные масштабы на осях); точка A_n имеет координаты $x = 1$, $y = (1 + 1/n)^n$. Эта ломаная дает приближенное представление о решении уравнения $y' = y$, проходящем через точку A_0, то есть о функции $y = \exp x$ (красный график на рисунке 4); в частности, точка A_n близко расположена к точке графика $y = \exp x$, имеющей абсциссу $x = 1$, то есть к точке $(1; e)$. Иначе говоря, $(1 + 1/n)^n \approx e$. Чем больше n, тем более точным является это приближенное равенство, и потому

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (6)$$

Например, взяв $n = 1\,000\,000$, то есть выполнив действие $1{,}000001^{1000000}$ (это нетрудно сделать с помощью микрокалькулятора), находим $e = 2{,}7182818\ldots$

5. Обозначение e^x

Лемма. *Для любого рационального x справедливо равенство*

$$\exp x = e^x. \qquad (7)$$

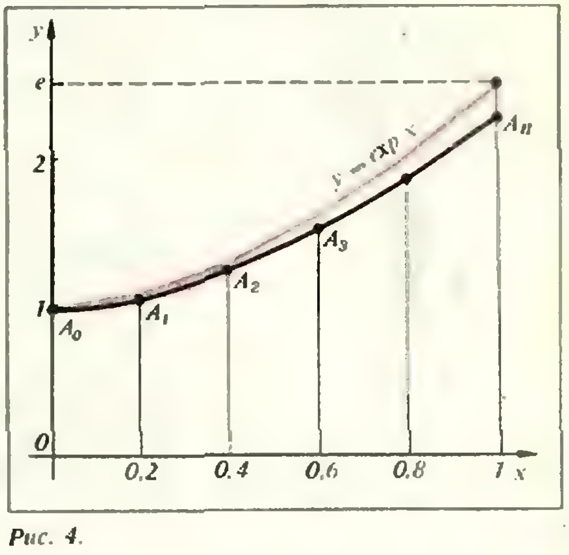


Рис. 4.

Доказательство. Последовательно применяя формулу (5), находим

$$\exp 2x = \exp(x+x) = \exp x \cdot \exp x = (\exp x)^2,$$

$$\exp 3x = \exp(2x+x) = \exp 2x \cdot \exp x = (\exp x)^2 \cdot \exp x = (\exp x)^3$$

и т. д. Итак, для натурального n имеем $\exp nx = (\exp x)^n$, откуда $\exp x = (\exp nx)^{1/n}$. Полагая здесь $x=m/n$ (где m — натуральное), получаем

$$\exp \frac{m}{n} = (\exp m)^{1/n} = (\exp m \cdot 1)^{1/n} = ((\exp 1)^m)^{1/n} = (\exp 1)^{m/n} = e^{m/n}.$$

Это означает, что для положительного рационального числа $x=m/n$ доказываемая лемма справедлива. Легко проверить, что она остается справедливой и для отрицательных рациональных чисел (а также для $x=0$).

Условимся считать по определению, что соотношение (7) справедливо для любого действительного числа x. Иначе говоря, мы условливаемся считать e^x просто другой формой записи для $\exp x$ (причем для рациональных x эта форма записи согласуется в силу доказанной леммы с понятием степени с рациональным показателем). При использовании этого обозначения формула (5) приобретает привычный вид $e^{p+q}=e^p e^q$. Заметим, что в математической литературе используются обе формы записи экспоненты: $y=e^x$ и $y=\exp x$.

6. Решение дифференциальных уравнений

При записи решений дифференциальных уравнений чаще применяют обозначение e^x, а не $\exp x$. Этой традиции мы и будем придерживаться.

Теорема 4. *При $a \neq 0$ решение дифференциального уравнения* (2) *с начальным условием $y(0)=y_0$ имеет вид*

$$y = -\frac{b}{a} + ce^{ax}, \qquad (8)$$

где $c=b/a+y_0$.

Доказательство. Так как (согласно теореме 1) искомое решение единственно, то достаточно лишь проверить, что функция (8) (при указанном значении c) удовлетворяет уравнению (2) и требуемому начальному условию. Имеем

$$y' = (ce^{ax})' = c(e^{ax})' = cae^{ax} = a(ce^{ax}) = a\left(y+\frac{b}{a}\right) = ay+b,$$

то есть функция (8), действительно, удовлетворяет уравнению (2) (при любом значении постоянной c). Далее,

$$y(0) = -\frac{b}{a} + ce^0 = -\frac{b}{a} + c = -\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a} + y_0\right) = y_0,$$

значит, при указанном значении c функция y удовлетворяет и требуемому начальному условию.

Доказанную теорему обычно применяют следующим образом. Слагаемое $y=-b/a$ легко запомнить: оно получается, если y' приравнять нулю; далее, коэффициент a при неизвестной функции в (2) становится коэффициентом при аргументе в показателе экспоненты. Что же касается константы c, то ее значение (указанное в теореме 4) обычно не запоминают, а в каждом конкретном примере находят c с помощью начальных условий.

Пример 1. Масса $m(t)$ радиоактивного вещества, имеющегося в куске породы в момент t, с течением времени убывает, то есть производная $m'(t)$ (скорость распада) отрицательна. При небольших количествах радиоактивного вещества скорость распада пропорциональна массе радиоактивного вещества:

$$m' = -km$$

(где коэффициент $k>0$ зависит от вида радиоактивного вещества). Найти закон изменения массы $m(t)$ с течением времени, если в начальный момент $t=0$ масса имевшегося радиоактивного вещества была равна m_0.

Решение. По теореме 4 имеем $m(t)=ce^{-kt}$. Подставляя $t=0$, получаем $m_0=ce^0$, откуда $c=m_0$. Окончательно имеем $m(t)=m_0e^{-kt}$.

Пример 2. Через какой промежуток времени T количество радиоактивного вещества уменьшится ровно вдвое?

Решение. Надо найти T из уравнения $m_0/2=m_0e^{-kT}$, то есть $e^{-kT}=1/2$, или $e^{kT}=2$. Это соотношение равносильно следующему: $\ln 2=kT$, откуда $T=(\ln 2)/k \approx 0{,}7/k$.

Значение $T=(\ln 2)/k$ называется *периодом полураспада*. Он зависит от k (то есть от вида радиоактивного вещества); например, для радия $T \approx 1600$ лет.

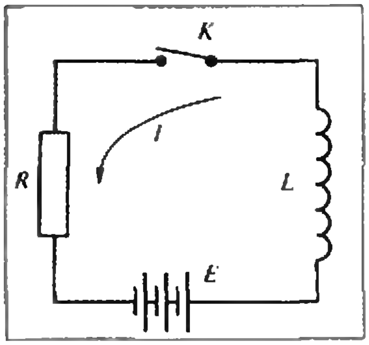


Рис. 5.

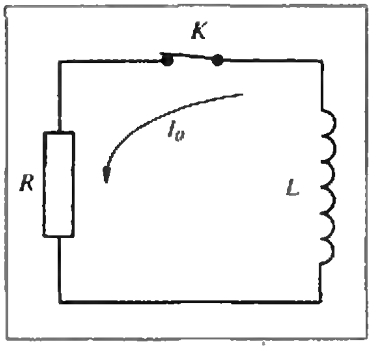


Рис. 6.

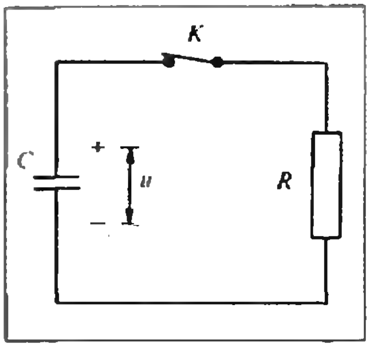


Рис. 7

Пример 3. Найти закон падения тела в сопротивляющейся среде, зная, что при $t=0$ скорость падения была равна v_0.

Решение. Из уравнения (1) находим по теореме 4:

$$v(t)=\frac{mg}{q}+ce^{-\frac{q}{m}t}.$$

Подставляя $t=0$, получаем $v_0=mg/q+ce^0$, откуда $c=v_0-mg/q$. Таким образом, окончательно имеем

$$v(t)=\frac{mg}{q}+\left(v_0-\frac{mg}{q}\right)e^{-\frac{q}{m}t}.$$

Так как $e^{-\frac{q}{m}t}\to 0$ при $t\to\infty$, то $v(t)\to mg/q$, стало быть скорость падения постепенно устанавливается. Например, парашютист, падающий в затяжном прыжке с большой скоростью, после раскрытия парашюта быстро приобретает примерно постоянную скорость mg/q (зависящую от массы парашютиста и параметров парашюта). Это позволяет рассчитать парашют так, чтобы приземление было безопасным.

Задачи

1. Докажите, что для любого $x\neq 0$ справедливо неравенство $\exp x>x+1$.

2. Используя неравенство $\exp\frac{1}{n}>1+\frac{1}{n}$ (см. задачу 1), докажите, что $e>(1+1/n)^n$.

3. Используя неравенство $\exp\left(-\frac{1}{n+1}\right)>1-\frac{1}{n+1}$ (см. задачу 1), докажите, что $e>(1+1/n)^n$, то есть $e<(1+1/n)^{n+1}$.

4. С помощью неравенств, полученных в задачах 2 и 3, докажите справедливость равенства (6).

5. Докажите, что решение уравнения (2) с начальным условием $y(x_0)=y_0$ имеет вид (8), где $c=(b/a+y_0)e^{-ax_0}$.

6. В момент $t=t_0$ масса имевшегося в куске породы радиоактивного вещества была равна m_0, и в момент $t=t_1$ она оказалась равной m_1. Определите период полураспада.

7. При распаде одного грамма радиоактивного вещества образуется d граммов продукта распада. Период полураспада T этого радиоактивного вещества известен. Определите возраст куска породы, если в нем имеется p граммов рассматриваемого радиоактивного вещества и q граммов продукта его распада.

8. В результате теплообмена со средой нагретое тело постепенно охлаждается, то есть его температура $t(\tau)$ уменьшается со временем τ. Согласно закону охлаждения Ньютона, скорость охлаждения пропорциональна разности температур тела и среды: $t'(\tau)=-k(t(\tau)-t_{\text{ср}})$. Считая температуру среды $t_{\text{ср}}$ постоянной, выведите формулу закона охлаждения.

9. Сила тока $I(t)$, протекающего в RL-цепи (рис. 5), изменяется по правилу $LI'+RI=E$, где L — индуктивность катушки, R — сопротивление резистора. Определите закон $I(t)$ изменения тока, если в момент замыкания цепи ($t=0$) ток был нулевым.

10. В RL-контуре (рис. 6) в момент $t=0$ протекал ток I_0. Определите значение протекающего в цепи тока при $t>0$.

11. Напряжение $u(t)$ (разность потенциалов на обкладках конденсатора) изменяется в RC-цепи (рис. 7) по правилу $Cu'+u/R=0$. Определите характер изменения напряжения, если в момент $t=0$ напряжение было равно u_0.

12. Рассмотрев ломаную Эйлера для уравнения $y'=y$ с начальным условием $y(0)=1$, покажите, что при фиксированном $x>0$ последовательность $(1+x/n)^n$ возрастает и ограничена.

13. Пользуясь теоремой Вейерштрасса об ограниченной возрастающей последовательности и задачей 12, установите существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x/n)^n$ при фиксированном $x\geqslant 0$, а затем и при $x<0$.

14*. Докажите существование экспоненты. Указание. Положив $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1+x/n)^n$ (см. задачу 13), вычислите производную $y'(x)$ и установите, что $y'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1+x/n)^n$; выведите отсюда, что $y(x)$ является решением уравнения $y'=y$ с начальным условием $y(0)=1$. (При вычислении $y'(x)$ воспользуйтесь формулой бинома Ньютона.)

15*. Докажите единственность экспоненты. Указание. Предположите противное (существование двух разных экспонент) и рассмотрите их разность.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Об одном стихотворении А. С. Пушкина» предназначена восьмиклассникам, «Масса и количество вещества, или Об одной «ошибке» Ньютона» — девятиклассникам, «Постоянный и переменный электрический ток» — десятиклассникам. Материалы подготовил И. К. Белкин.

Об одном стихотворении А. С. Пушкина

Среди поэтических сокровищ, оставленных нашим великим национальным поэтом А. С. Пушкиным, есть стихотворение, прямо относящееся к физике, точнее — к механике. Называется это стихотворение «Движение». Оно небольшое по объему — в нем всего 8 строк, но очень богатое по содержанию.

В первых четырех строках читаем:

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.

Здесь поэт рассказывает о легендарном споре двух древнегреческих философов. «Мудрец брадатый» — это Зенон Элейский; его противник в споре — Диоген Синопский. Первый утверждал, что движение невозможно; второй стал молча «пред ним ходить», как бы наглядно показывая несуразность такого утверждения.

Но дальше А. С. Пушкин пишет:

Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами солнце ходит,
Однако ж прав упрямый Галилей.

Этими словами поэт показывает, что доказательство Диогена вовсе не такое безупречное, как казалось тем, кто хвалил «ответ замысловатый». В самом деле, ведь солнце ежедневно делает то же, что делал Диоген, маршируя перед Зеноном: оно «пред нами ходит». В действительности же, как вслед за Коперником утверждал «упрямый Галилей», Солнце покоится, а движется (вращается вокруг своей оси) Земля. Но никакого другого доказательства Диоген дать не мог, поэтому он и «смолчал».

Сейчас неправоту утверждения Зенона можно доказать, не прибегая к методу Диогена. Попробуем это сделать. Прежде всего, постараемся представить себе, как Зенон пришел к выводу, очевидно несуразному, что «движенья нет».

Зенон, по-видимому, рассуждал следующим образом. Тело, двигаясь по некоторой траектории, в любой *момент времени* может быть *где-то* застигнуто. Можно считать, что в этом месте и в это мгновенье тело покоится, то есть что его скорость равна нулю. Следовательно, движение есть лишь название, данное множеству следующих одно за другим состояний покоя. В каждом таком состоянии покоя перемещение тела, естественно, равно нулю. Складывая это непрерывное множество нулей, Зенон, конечно, получал в итоге нуль: «движенья нет»!

Так вот, ошибка Зенона как раз и состоит в том, что скорость тела в каждой точке траектории он считал равной нулю. На самом деле в каждый момент времени движущееся тело обладает скоростью — так называемой мгновенной скоростью v («Физика 8», § 11). А раз оно обладает скоростью, то за любой сколь угодно малый промежуток времени Δt тело совершает малое перемещение $\Delta s = v\Delta t$. Число таких малых перемещений, в пределе — бесконечно малых, за все время движения t бесконечно велико. Но сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых равна не нулю, а вполне определенной величине: $s=vt$ (если скорость v одинакова во всех точках). Складывать нужно не нули, как это делал Зенон, а малые перемещения $v\Delta t$. На это впервые указал, спустя почти 2000 лет после легендарного спора, основоположник классической механики Исаак Ньютон, создавший кроме того еще и замечательный математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

В заключение сделаем не очень существенное для темы нашей заметки замечание. В действительности очный спор Зенона с Диогеном состояться не мог: Диоген (около 400—325 до н. э.) родился через 30 лет после смерти Зенона (490—430)!

Масса и количество вещества, или Об одной «ошибке» Ньютона

В 1971 году XIV Генеральная конференция по мерам и весам сочла нужным увеличить число основных единиц Международной системы (СИ) еще на одну — на *моль*, единицу количества вещества. Их, основных единиц, стало теперь семь (килограмм, метр, секунда, кельвин, ампер, кандела, моль).

Что это за величина — количество вещества и почему физика в ней нуждается?

Обычно, в житейской практике, если нужно узнать, сколько вещества содержится в том или ином предмете, например — сколько железа содержится в железном бруске, спешат к весам. После взвешивания определяют, скажем, что в бруске содержится 5 килограммов, и считают, что ответ на поставленный вопрос вроде бы получен. Но ответ ли это на самом деле? А если взять брусок из алюминия, который после взвешивания тоже окажется пятикилограммовым (по объему он будет почти втрое больше железного!), то можно ли утверждать, что в алюминиевом бруске столько же алюминия, сколько железа в железном?

Вдумаемся в ответ, полученый после взвешивания: «в бруске содержится 5 килограммов железа». Килограмм — это единица массы, а масса тела — это величина, от которой зависит ускорение, получаемое телом под действием той или иной силы. Так, зная массу и измерив ускорение тела, можно узнать, какая сила действовала на тело. Если же сила известна заранее, ускорение можно не измерять, а вычислить. Но большей частью в обыденной жизни масса интересует нас вовсе не потому, что по ней можно определить силу или ускорение. Хозяйка, зная, что масса купленного ею куска сыра равна 0,5 кг, едва ли имеет в виду воспользоваться этим знанием для того, чтобы определять какие-либо силы или ускорения. Для нее масса характеризует лишь количество данного вещества.

Почему же для многих понятия «масса» и «количество вещества» кажутся синонимами?

Оказывается, «виноват» в этом создатель науки о движении И. Ньютон, который под массой понимал именно количество вещества. В главном своем труде «Математические начала натуральной философии» (или, проще, «Математические основы естествознания») Ньютон так определяет эту величину: «Количество материи (вещества — *И.Б.*) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему ее». Как известно, данное определение Ньютона в течение столетий (книга Ньютона увидела свет в 1687 году) вызывало споры. В самом деле, плотностью мы называем величину, равную массе единицы объема вещества: $\varrho=m/V$. В таком случае определение Ньютона лишено всякого смысла: $m=mV/V=m$ — «масса есть масса». Но действительно ли Ньютон, много лет готовивший книгу и тщательно обдумывавший каждую фразу в ней, допустил ошибку? По-видимому, нет.

Дело в том, что во времена Ньютона слово «плотность» не могло означать то же, что оно означает теперь. Ведь понятие массы было введено в физику именно Ньютоном. До Ньютона не было понятия массы, не могло поэтому быть и понятия плотности как массы единицы объема. С чем же связывалось слово «плотность» в те времена?

Ньютон считал, что все тела состоят из совершенно одинаковых частиц, но в различных веществах по-разному движущихся (об этом мы узнаем из другой книги Ньютона — «Оптика»). Различие в движениях частиц и определяет различие всех свойств веществ и тел. Слово же «плотность» тогда имело буквальный смысл — оно показывало, насколько плотно друг к другу прилегают частицы, то есть насколько плотно они «упакованы». В той же «Оптике» Ньютон упоминает, например, что вода в 19 раз легче, а следовательно, в 19 раз разреженнее золота, что в воде много больше пустот между частицами, чем в золоте. При таком понимании плотность просто означает число частиц в единице объема, а умноженная на объем тела она дает общее число частиц в теле. Эту-то величину Ньютон и называет количеством материи (вещества). Поскольку частицы во всех веществах и телах одни и те же и массы всех частиц в любом веществе одинаковы, масса тела определяется только числом частиц в нем, то есть количеством вещества в теле. Если массы двух тел одинаковы, то и количества вещества в них тоже одинаковы.

В наше время величина «количество вещества» имеет в сущности тот же смысл, что и у Ньютона. Это число частиц, содержащихся в теле; тех частиц, из которых тело состоит. Для бруска железа — это число атомов железа, для воды в сосуде — число молекул воды. Естественной единицей измерения количества вещества была бы 1 частица. Но тогда число, выражающее эту величину, было бы невообразимо большим. Условились за единицу количества вещества принять такое его количество, в котором содержится столько частиц (атомов, молекул), сколько атомов содержится в 0,012 кг изотопа углерода с атомной массой 12, то есть $6{,}02 \cdot 10^{23}$ частиц (число Авогадро N_A). Называется эта единица моль.

Хотя в моле любого вещества содержится одно и то же число частиц, масса моля разных веществ различна. Масса M моля (молярная масса) равна $10^{-3} \cdot M_r$ кг, где M_r — относительная молекулярная масса («Физика 9», § 2). Моль железа, например, имеет массу 0,056 кг, моль алюминия — 0,027 кг и т. д. Таким образом, 5 кг железа — это приблизительно 90 молей железа, а 5 кг алюминия — около 185 молей. Массы одинаковы, а количества вещества различны.

Хозяйку, купившую в магазине полкилограмма сыра, интересует, конечно, не масса этого куска, а количество сыра в нем. Однако острой необходимости в замене килограммов молями все же нет, потому что масса и количество вещества (для данного вещества) пропорциональны друг другу, так что в 0,5 кг сыра вдвое меньше, чем в 1 кг. А измерять число килограммов куда проще, чем число молей.

В физике, однако, масса и количество вещества далеко не всегда взаимозаменяемы. Приведем один только пример.

И опыт и теория показывают, что произведение давления p идеального газа на его объем V пропорционально температуре T газа и его массе m:

$$pV \sim mT.$$

Коэффициент пропорциональности в этом соотношении для различных газов различен. Но если pV пропорционально m, то оно пропорционально и числу частиц в веществе:

$$pV \sim NT.$$

В этом соотношении коэффициент пропорциональности оказывается одинаковым для всех газов:

$$pV = kNT, \qquad (1)$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Количество вещества ν (в молях) связано с числом частиц N простым соотношением: $\nu = N/N_A$. Поэтому можно написать

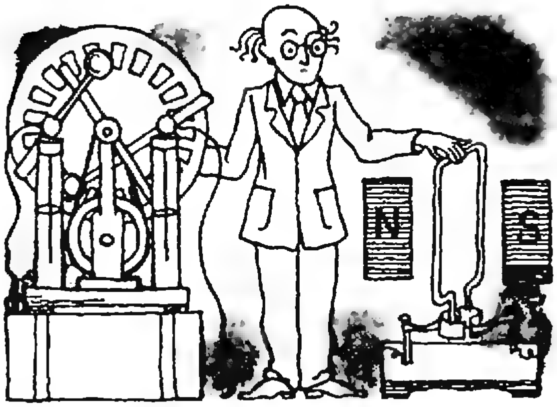
$$pV \sim \nu T.$$

Коэффициент пропорциональности будет теперь другим, но тоже одинаковым для всех газов:

$$pV = R\nu T. \qquad (2)$$

Здесь $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная. Это уравнение, равно как и уравнение (1), представляет собой уравнение состояния идеального газа.

Постоянный и переменный электрический ток



Долгое время единственным источником электрического тока служил гальванический элемент, появившийся в самом начале XIX века. В цепи, присоединенной к такому источнику, течет постоянный электрический ток.

Успехи в изучении электромагнетизма привели к изобретению генератора переменного тока, и с тех пор именно переменный ток стал основой современной электроэнергетики.

Почему? Чем переменный ток «лучше» постоянного?

Переменный ток, как и постоянный,— это упорядоченное движение заряженных частиц, в частности в металлах — электронов. Но в цепи переменного тока электроны по многу раз изменяют направление своего упорядоченного движения. Малая масса электронов позволяет им «успевать» изменять направление движения не только 100 раз в секунду, как это происходит в промышленной сети, но и десятки миллионов раз в секунду, как, например, в антеннах радиостанций.

Чтобы в электрической цепи протекал переменный ток, цепь должна быть присоединена к источнику переменной ЭДС. Она выступает здесь в роли периодической вынуждающей силы, и ток в цепи совершает вынужденные колебания, разумеется, с частотой вынуждающей силы. Если ЭДС в источнике изменяется со временем по закону $e=\mathcal{E}_m\cos\omega t$ и источник включен в цепь с активным сопротивлением R, то и ток в цепи изменяется по косинусоидальному закону («Физика 10», § 17):

$$i=\frac{e}{R}=\frac{\mathcal{E}_m}{R}\cos\omega t=I_m\cos\omega t.$$

Здесь $\mathcal{E}_m$ и I_m — амплитуды (максимальные значения) ЭДС и силы тока. Но свойства функции косинуса таковы, что в среднем за период колебаний сила тока равна нулю. Это, однако, не значит, что такой ток бесполезен и ни в чем себя не проявляет. Потому что хотя в среднем сила тока и равна нулю, не равен нулю квадрат силы тока. А мощность тока определяется именно квадратом силы тока. В любой момент времени мощность переменного тока в цепи с активным сопротивлением выражается равенством

$$p=i^2R=I_m^2R\cos^2\omega t.$$

Среднее значение квадрата косинуса за период равно не нулю, а 1/2, так что среднее значение мощности

$$\bar{p}=\overline{i^2}R=\frac{1}{2}I_m^2R=\left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2R.$$

Величина $I=I_m/\sqrt{2}$ называется *действующим* значением силы тока. В нашем случае мощность можно также выразить через напряжение на сопротивлении:

$$p=\frac{u^2}{R},\ \bar{p}=\frac{\overline{u^2}}{R}=\frac{1}{2}\frac{U_m^2}{R}=\frac{U^2}{R},$$

где $U=U_m/\sqrt{2}$ — действующее значение напряжения.

В этом состоит одно из отрицательных свойств переменного тока. Ведь провода, по которым протекает ток, необходимо рассчитывать на максимальное значение силы тока, а практически используется немногим более 2/3 этого значения. Есть и другие отрицательные следствия. Явление электромагнитной индукции приводит, например, к тому, что переменный ток в проводах распределяется не равномерно по всему сечению, а главным образом вблизи поверхности. (Это явление называется скин-эффектом, о нем в «Физике 10» не рассказывается. Характерно, что глубина проникновения переменного тока зависит от многих факторов, в том числе — и от частоты колебаний. Так, при частоте 50 Гц в медном проводнике эта глубина составляет ≈9 мм. С увеличением частоты глубина проникновения тока уменьшается.) Благодаря тому, что используется не все сечения проводов, их сопротивление реально возрастает. Далее, переменный ток, как и ток постоянный, окружен магнитным полем, но полем переменным. А такое поле, согласно закону электромагнитной индукции, вызывает в соседних проводах и в других проводящих материалах электрические токи, что приводит к бесполезной потере энергии.

Все эти недостатки полностью отсутствуют у постоянного тока. Почему же все-таки переменный ток практически безраздельно господствует в технике и в быту?

Прежде всего, сам принцип действия электрических генераторов таков, что в них возникает именно переменная ЭДС («Физика 10», § 23). Но не в этом главное. С помощью нехитрого устройства можно тот же генератор сделать источником и постоянного тока. Главная причина «популярности» переменного тока связана с тем, что электрическую энергию приходится передавать из мест, где она производится (электростанции), к местам ее потребления и часто на большие расстояния. При этом часть передаваемой энергии неизбежно теряется в виде тепла в проводах, по которым она передается в линиях электропередачи (ЛЭП). Чтобы эти потери были не слишком высокими, нужно, оказывается, использовать для передачи *высокое напряжение*.

Необходимость высокого напряжения видна из следующего простого расчета. Допустим, что электрическая мощность $P=66$ кВт передается от электростанции в город под напряжением 220 В (именно такое напряжение обычно используется потребителями). Пусть сопротивление ЛЭП равно 0,4 Ом. Тогда сила тока в ЛЭП составит $I=66\,000$ Вт/220 В$=300$ А, а выделившееся в линии количество теплоты — $Q=I^2R=(300\ \text{А})^2 0{,}4\ \text{Ом}=36\,000$ Вт. Больше половины передаваемой мощности (54,5 %) будет потеряно в виде тепла в ЛЭП! А теперь представим себе, что та же мощность по той же ЛЭП передается при напряжении 22 000 В. Теперь ток в цепи будет равен $I=66\,000$ Вт/22 000 В$=3$ А, а выделившееся количество теплоты — $Q=(3\ \text{А})^2 0{,}4\ \text{Ом}=3{,}6$ Вт. Потеряно будет всего около 0,005 %! Вот почему электрическая энергия по ЛЭП всегда передается при очень высоком напряжении — 110, 220, 330, 400, 500 и даже 750 киловольт.

Но на клеммах генераторов электростанций напряжение значительно меньше — всего несколько тысяч вольт. Значит, в начале линии электропередачи это напряжение нужно повысить, а перед распределением энергии среди потребителей — понизить так, чтобы потребитель получил ее при напряжении 220 вольт. Такое повышение и понижение напряжения оказывается возможным только для переменного тока. Делается это с помощью устройств, действующих на основе явления электромагнитной индукции, — трансформаторов («Физика 10», § 24). Существование трансформаторов — пожалуй, единственная причина повсеместного применения переменного тока в технике.

Однако те недостатки переменного тока, которые были изложены выше, заставляют думать о том, нельзя ли все-таки для передачи электрической энергии использовать постоянный ток, конечно, тоже высокого напряжения? Это сделать непросто. Действительно, сначала нужно переменное напряжение, после его повышения, преобразовать в постоянное (для этого служат выпрямители), а затем на другом конце ЛЭП — превратить переданное постоянное напряжение в переменное (это можно сделать с помощью устройств, называемых инверторами), чтобы напряжение можно было понизить до значения, нужного потребителю. Одна такая ЛЭП постоянного тока на напряжении 400 кВ в СССР уже работает.

Сказанное в этой заметке нельзя понимать так, что постоянный ток — это «хороший» ток, а переменный — «плохой». И тот и другой — это явления природы, и их нельзя оценивать словами «лучше», «хуже». Сказанное лишь означает, что для передачи энергии на большие расстояния предпочтительнее постоянный ток. И если пока все же преобладает применение для этой цели переменного тока, то это объясняется тем, что преобразование переменного тока в постоянный и обратно до сих пор еще представляет собой трудную задачу, которая, впрочем, успешно решается. Для техники в равной мере нужны и полезны оба тока. В некоторых случаях незаменим постоянный ток, например там, где используется электролиз. Но без переменных токов не было бы радиосвязи, телевидения и т. д. Перефразируя известное детское стихотворение, можно сказать: токи всякие нужны!

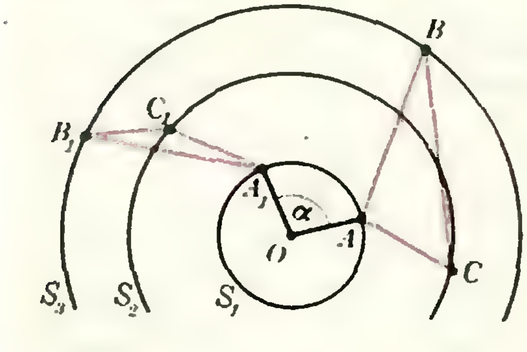
Математика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Где ошибка?» предназначена восьмиклассникам, «Еще один прием самоконтроля» — девятиклассникам и «Надо ли делать проверку?» — десятиклассникам. Это деление в какой-то мере условно, так как каждая из этих заметок может быть полезной не только учащимся указанных классов.

Где ошибка?

Как известно, поворот является одним из движений плоскости. При движении любая фигура отображается на равную ей фигуру. Сейчас мы «покажем», используя свойства движений, что при повороте треугольник переходит в неравный ему треугольник.

При повороте вершины треугольника скользят по трем концентрическим окружностям, общий центр которых совпадает с центром поворота, а расстояния между его вершинами сохраняются. Для того чтобы получить образ треугольника ABC при повороте на угол α вокруг точки O, построим концентрические окружности с центром в точке O, на которых лежат точки A, B и C. Затем на окружности, содержащей точку A, построим точку A_1 так, чтобы угол AOA_1 был равен α. Наконец, на окружностях, содержащих точки B и C, построим соответственно точки B_1 и C_1, такие, что $A_1B_1=AB$ и $A_1C_1=AC$ (см. рис.). На рисунке хорошо видно, что полученный нами треугольник $A_1B_1C_1$ не равен треугольнику ABC (например, $B_1C_1\neq BC$).



Где же ошибка?

Н. И. Бовсуновский

Еще один прием самоконтроля

Материал данной заметки дополняет статью В. Матизена (см. «Квант» № 10, 1980 г.).

Из собственного опыта знаю, что можно хорошо запомнить одну формулу и забыть ей подобную. Предположим, например, вы твердо помните, что $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ (1), но забыли, чему равен $\cos(x+y)$. В этом случае вам поможет следующий прием. Можно считать, что в равенстве (1) x — переменная величина, а y — фиксированное число. Дифференцируя это равенство (по x), получим $(\sin(x+y))'_x=(\sin x)'_x\cos y+(\cos x)'_x\times$ $\times\sin y$, откуда

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$$

Итак, забытая формула восстановлена.

Аналогично, из формулы

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left(\sin(x+y)+\sin(x-y)\right) \qquad (2)$$

легко получить формулы: а) $\cos x\cos y=$ $=\frac{1}{2}\left(\cos(x+y)+\cos(x-y)\right)$ (достаточно продифференцировать равенство (2) по x, считая y постоянным); б) $\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+$ $+y)\right)$ (достаточно продифференцировать (2) по y, считая x постоянным: $-\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left(\cos(x+y)-\cos(x-y)\right)$ и сменить знак у обеих частей полученного равенства).

Приведем другой пример. Учащемуся предложили вывести формулу, выражающую $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$. Он представил 3α в виде $\alpha+2\alpha$ и воспользовался формулой синуса суммы:

$$\sin(\alpha+2\alpha)=\sin\alpha\cos 2\alpha+\cos\alpha\sin 2\alpha=$$
$$=\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos^2\alpha=$$
$$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$$

В результате им была получена правильная формула:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha. \qquad (3)$$

После этого ему предложили получить аналогичную формулу для $\cos 3\alpha$. Без особого энтузиазма он повторил преобразования:

$$\cos 3\alpha=\cos(\alpha+2\alpha)=\ldots$$
$$\ldots=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

После этого его спросили, нет ли другого способа для получения этой формулы. Немного подумав, он записал $\cos 3\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2 3\alpha} = \ldots$, но быстро понял, что ничего хорошего на этом пути не получится.

А ведь в данном случае опять помогает дифференцирование. Продифференцировав обе части равенства (3) по α, получаем

$$3\cos 3\alpha = 3\cos\alpha - 12\sin^2\alpha\cos\alpha = 3\cos\alpha - 12(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha,$$

откуда $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Упражнения

1. Зная, что $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$, получите формулу, выражающую $\cos 5x$ через $\cos x$.

2. При помощи дифференцирования получите из «простого» тождества $2\sin 2\alpha\sin\alpha + \cos 3\alpha = \cos\alpha$ другое, «более сложное» тождество.

3. Известна формула $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, где угол φ определяется из условия $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Получите из этой формулы формулу для $a\cos x - b\sin x$.

В. Е. Ольхов

Надо ли делать проверку?

Школьники часто задают вопрос: «Мы нашли корни уравнения, надо ли делать проверку?» Проверять корни на всякий случай, «для надежности» (подставляя их в данное уравнение), конечно, полезно, во всяком случае, когда это не приводит к более трудоемким выкладкам, чем само решение. Но здесь не это имеется в виду — речь идет о проверке, связанной с возможностью «приобрести посторонние корни». Школьники знают, что не сделав такую проверку, они могут иногда получить неверный ответ («лишний корень»). Более того, даже если ответ оказался верным, учитель или экзаменатор иногда объявляет решение неполным, если проверка отсутствует. Но когда? В каких случаях **надо** делать проверку? Постараемся ответить на этот вопрос.

1. В тех случаях, когда корни были найдены по простейшим «готовым» формулам (таким, как формулы для решения линейных и квадратных уравнений или уравнений вида $\cos x = a$, $\log_2 x = a$, $b^x = a$ и т. п.), проверку можно не делать.

Например, как правило, нет смысла проверять корни, полученные по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (1)$$

для квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. (Впрочем, если корни получаются целыми или рациональными, проверка делается быстро и вреда в ней нет.)

Тем не менее при использовании таких формул следует помнить об условиях, при которых их можно применять. Так, формулу (1) можно использовать при условиях $a\neq 0$, $b^2-4ac\geqslant 0$. К сожалению, нередки случаи, когда школьники говорят, что при $a=0$ уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней, так как знаменатель в правой части формулы (1) обращается в нуль. При этом забывают о том, что при $a=0$ это уравнение не будет квадратным и имеет корень $x = -\frac{c}{b}$, если, конечно, $b\neq 0$.

Грубейшей ошибкой считается ответ $x = \pm\arccos 2 + 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ для уравнения $\cos x = 2$, поскольку формулой $x = \pm\arccos a + 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ для корней уравнения $\cos x = a$ можно пользоваться только при $|a|\leqslant 1$.

2. Чаще же при решении уравнений приходится проводить много преобразований; при этом данное уравнение заменяется каждый раз на какое-то новое, а у нового уравнения, естественно, могут быть и другие корни. Если в ходе преобразования уравнение заменить новым уравнением, имеющим все корни предыдущего и только их (то есть преобразовывать уравнение так, чтобы не произошло потери или приобретения корней), то такие уравнения называются ***равносильными***.

Хорошо известно, что

1) при переносе членов уравнения из одной части в другую,

2) при прибавлении к обеим частям уравнения одного и того же числа,

3) при умножении обеих частей уравнения на одно и то же не равное нулю число

исходное и преобразованное уравнения равносильны. Равносильны они также в том случае, если преобразования состоят в применении тождеств, верных на множестве всех действительных чисел, например тождеств сокращенного умножения, формул синуса и косинуса суммы и т. п.

При применении всех этих преобразований каждый раз получаются равносильные уравнения. Поэтому после нахождения корней их проверка не является обязательным этапом решения задачи.

Решим, например, таким образом уравнение

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x-1=0. \qquad (2)$$

Разделив обе части уравнения на 2, получим уравнение

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}=0, \qquad (3)$$

равносильное уравнению (2). Так как $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, то уравнение (3) перепишется в виде

$$\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}=0.$$

Применяя «справа налево» формулу косинуса суммы двух углов, получаем уравнение

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}=0, \qquad (4)$$

равносильное уравнению (3).

Прибавляя к обеим частям уравнения $\frac{1}{2}$, получаем уравнение

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}, \qquad (5)$$

равносильное уравнению (4).

Решение простейшего уравнения (5) запишется так:

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z},$$

$$x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in\mathbf{Z},$$

откуда

$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z},$$

$$x=-\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Так как все проведенные преобразования были равносильными, то *проверка найденных корней не обязательна.*

3. Однако не всякое уравнение удается решить путем только равносильных преобразований. Гораздо чаще приходится применять неравносильные преобразования. При применении таких преобразований, вообще говоря, можно *потерять* некоторые корни исходного уравнения или *приобрести* посторонние корни, то есть корни, не являющиеся корнями исходного уравнения. Чаще всего такие преобразования основаны на использовании формул, верных не при всех действительных x. При этом, в частности, «меняется» область определения уравнения.

Если, например, формулы

$$\log_3 x^2=2\log_3 x, \qquad (6)$$

$$\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \qquad (7)$$

применить «слева направо» (то есть заменить левую часть формулы правой), то возможна потеря корней исходного уравнения; поэтому такие преобразования без дополнительных рассуждений недопустимы.

Например, уравнение

$$\log_3 x^2=2 \qquad (8)$$

имеет два корня: $x_1=3$, $x_2=-3$. Однако если мы применим формулу (6) «слева направо», то получим уравнение

$$2\log_3 x=2,$$

имеющее только один корень: $x_1=3$. Следовательно, в результате применения формулы (6) «слева направо» произошла потеря корня уравнения (8). Отметим, что при применении формулы (6) возможна потеря всех отрицательных корней. С формулой (7) дело обстоит проще. Ею можно пользоваться, только дополнительно следует проверить, являются ли корнями числа вида $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, при которых не определен $\operatorname{tg} x$.

4. Если же применять формулу (6) «справа налево», то потери корней не произойдет, но может произойти приобретение посторонних корней, а поэтому *обязательно надо проверить корни* и те из них, которые окажутся посторонними, отбросить.

Посторонние корни могут появиться также при возведении обеих частей уравнения в степень, при потенцировании обеих частей уравнения и при ряде других преобразований. Поэтому, если применялось какое-то из этих преобразований, то *обязательно надо сделать проверку* найденных корней и отбросить посторонние корни.

Пример. *Решим уравнение*

$$x-3=\sqrt{x-1}. \qquad (9)$$

Возведя обе части этого уравнения в квадрат и перенося все члены полученного уравнения в левую часть, приходим к уравнению

$$x^2-7x+10=0,$$

имеющему корни $x_1=2$ и $x_2=5$. При возведении в квадрат могли появиться корни, посторонние для исходного уравнения, поэтому найденные корни обязательно надо проверить. Подставляя в уравнение (9) первый корень $x_1=2$, получаем неверное числовое равенство $-1=1$, значит, $x_1=2$ есть посторонний корень для исходного уравнения (9). Подставляя в уравнение (9) второй корень $x_2=5$, получаем верное числовое равенство. И, следовательно, $x_2=5$ есть корень исходного уравнения.

Итак, уравнение (9) имеет единственный корень $x=5$.

Вот еще пример. *Решим уравнение*

$$\log_7(x^2-4)=\log_7(4x-7). \qquad (10)$$

Потенцируя, мы приходим к уравнению

$$x^2-4=4x-7,$$

корни которого $x_1=1$ и $x_2=3$. При потенцировании могли появиться корни, посторонние для исходного уравнения, поэтому найденные корни надо проверить. Число $x_1=1$ не удовлетворяет уравнению (10), так как не имеют смысла логарифмы от отрицательных чисел, поэтому $x_1=1$ не является корнем этого уравнения. Число же $x_2=3$ обращает исходное уравнение в верное числовое равенство.

Итак, уравнение (10) имеет единственный корень $x=3$.

Выводы

1) Если при решении уравнения делались только преобразования, приводящие к равносильным уравнениям, то *проверка найденных корней не обязательна.*

2) Если проводились преобразования, при которых возможно появление посторонних корней, то *обязательно надо сделать проверку найденных значений* и отбросить посторонние корни.

3) Следует избегать преобразований, при которых могут произойти потери корней. На начальных порах ими *не следует пользоваться вовсе.* О тех случаях, когда они все же применяются (и о соответствующих приемах контроля), «Квант» расскажет в другой раз.

Более подробно обо всем сказанном здесь можно прочитать в книге М. К. Потапова, В. В. Александрова, П. И. Пасиченко «Алгебра и анализ элементарных функций» (М.: Наука, 1981).

В заключение предлагается решить, с учетом сказанного выше, следующие уравнения:

1. $3^{\log_3(x^2-4x+3)}=x-1$;
2. $\log_2(x+2)^2=6$;
3. $\sqrt{x^2+x-5}=\sqrt{x-1}$;
4. $\dfrac{2(x-7)}{x^2-6x-7}=1$;
5. $\sqrt{x-2}(x^2+3)=4x\sqrt{x-2}$;
6. $3^{x^2-x}=3^{1+(\sqrt{x})^2}$.

М. Г. Скворцова

Избранные школьные задачи

Здесь мы приводим ряд задач, предлагавшихся на районных олимпиадах в Новосибирской области. Среди них есть совсем несложные, есть задачи и потруднее, но все они близки к школьной программе. В скобках после номера задачи указано, в каких классах она предлагалась.

Восьмой класс

1 (7—8). Два велосипедиста, Вася и Петя, одновременно выехали из пункта *А* в пункт *Б*. Вася весь путь проехал с постоянной скоростью, а Петя, проехав сначала 1 час со скоростью 12 км/ч, оставшийся путь ехал со скоростью 14 км/ч и прибыл в *Б* на 5 минут раньше Васи. Если бы Петя все время ехал со скоростью 12 км/ч, то он бы прибыл в *Б* на 6 минут позже Васи. Найдите расстояние от *А* до *Б*.

2 (7—8). Возраст человека в 1959 г. оказался равен сумме цифр года его рождения. Найдите год рождения этого человека, если известно, что он родился в XX веке.

3 (7—8). В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O. В точке T она касается стороны BC. Известно, что $\angle BOT:\angle COT=3:4$. Найдите длину стороны BC, если радиус вписанной окружности равен 3, а величина угла A — 30°.

4 (7—8). Докажите, что если положительные числа x и y удовлетворяют неравенствам $x+y>2{,}6$ и $x^2+y^2<4$, то $xy>1$.

5 (7—9). Можно ли разрезать квадрат на 1980 квадратов меньшего размера? А на 1981? (Полученные квадраты могут быть не одинаковыми.)

Девятый класс

6 (7—9). Тебе и мне вместе 35 лет. Сейчас мне вдвое больше лет, чем было тебе тогда, когда мне было столько лет, сколько тебе сейчас. Сколько мне лет и сколько тебе?

7 (8—10). В трапеции сумма углов при основании равна 90°. Докажите, что длина отрезка,

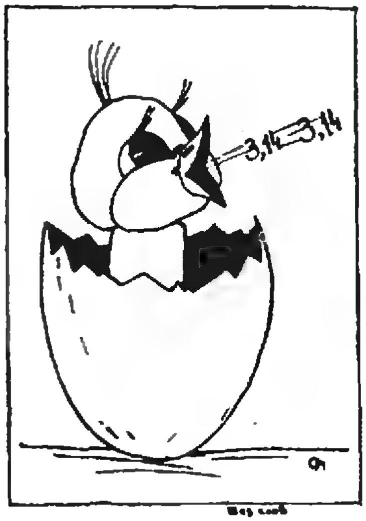
(Окончание см. на с. 55)

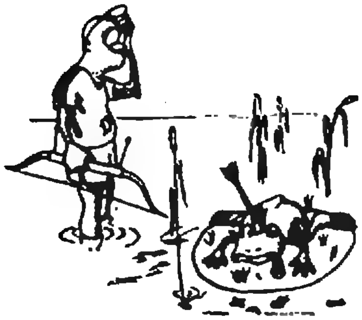
КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

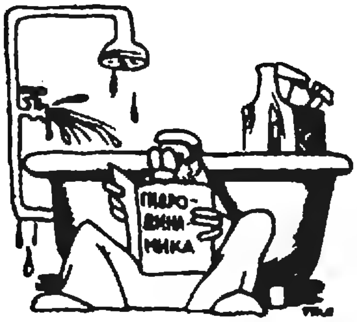
«За науку» в гостях у «Кванта»

Более 25 лет издается газета «За науку» Московского физико-технического института. Сегодня мы публикуем подборку юмористических материалов из этой газеты.

Улыбки художников







ОДНАЖДЫ НА ЛЕКЦИИ

Соотношение неопределенностей $\Delta E\cdot\Delta t > \hbar$ понимают лишь немногие физики. Я не буду углубляться в эту тему, иначе число таких людей в десятки раз увеличится.

Если домашние спросят вас, что такое элементарные частицы, скажите, что это просто энергия. Они ничего не поймут, но будут думать о вас хорошо.

Каждое из колец Френеля ведет себя точно так же, как и в прошлом семестре.

Что больше — дельта большое или дельта маленькое?

Если мы не сделаем этого ограничения, то произойдет нечто ужасное: синус станет больше единицы.

Действие рассмотренного устройства просто и понятно. Именно поэтому на практике его не используют. Применяется другой несложный прибор, на изучение которого мы и потратим оставшиеся два месяца.

Объясняю второму и седьмому факультетам: атом водорода состоит из одного электрона и одного протона. Четвертый факультет это должен знать.

Дайте-ка, я покрупнее нарисую бесконечно малые треугольники.

НОВОСТИ

В бутерброде столовой № 4 обнаружен 126-й элемент таблицы Менделеева. Виновные еще не найдены.

Студент пятого курса Марк Новодачный придумал 317-е доказательство того факта, что химия — не наука. Всем сомневающимся он просто демонстрирует два журнала: «Наука и жизнь» и «Химия и жизнь».

Объявления

Всем студентам сдать для анкет голограммы 3×4×6.

Вниманию женщин! Долгопрудненская парикмахерская делает не только химию, но также и физику и дифференциальные уравнения.

КРУПИЦЫ

Голография — баня для аристократов.

О'Генри — нулевая индуктивность.

Меломан — испачкавшийся лектор.

Затор — газета топологов.

Баран — пивная для сотрудников АН СССР.

Экспресс — бывший штамповщик.

Застолье (франц.) — расстояние до дальней деревни.

Возгонка (спорт.) — соревнование извозчиков.

Паровоз — свадебная карета.

Монополь — француз.

Диполь — два француза.

Биполь — еще два француза.

(Шахматные)

Турнуть — сделать ход ладьей.

Слоняться — ходить по диагонали.

Вездеход — ферзь.

Подоконник — фигура, стоящая под ударом кавалерии.

Патология — исследование ничейных окончаний.

Спешиться — сдвоить пешки.

Матожидание — предчувствие близкого проигрыша.

(По заказу автошколы)

Карман — автолюбитель.

Кардан — классность японского автомобилиста.

Картуз — заправила автомобильного бизнеса.

Карнавал — конвейер в Тольятти.

Квант для младших школьников

Задачи

1. «Алло, Катя! Нам поставили телефон! Сообщаю номер. Он, как и у тебя, пятизначный. Первая цифра — простое число, следующие две цифры — двузначное простое число, а последние две цифры получаются из предыдущей пары перестановкой и образуют точный квадрат. Так какой у меня номер телефона?»

2. Возможен ли треугольник со сторонами $a=7$ см и $b=2$ см, если известно, что высота, опущенная на третью сторону этого треугольника, является средним геометрическим двух других высот?

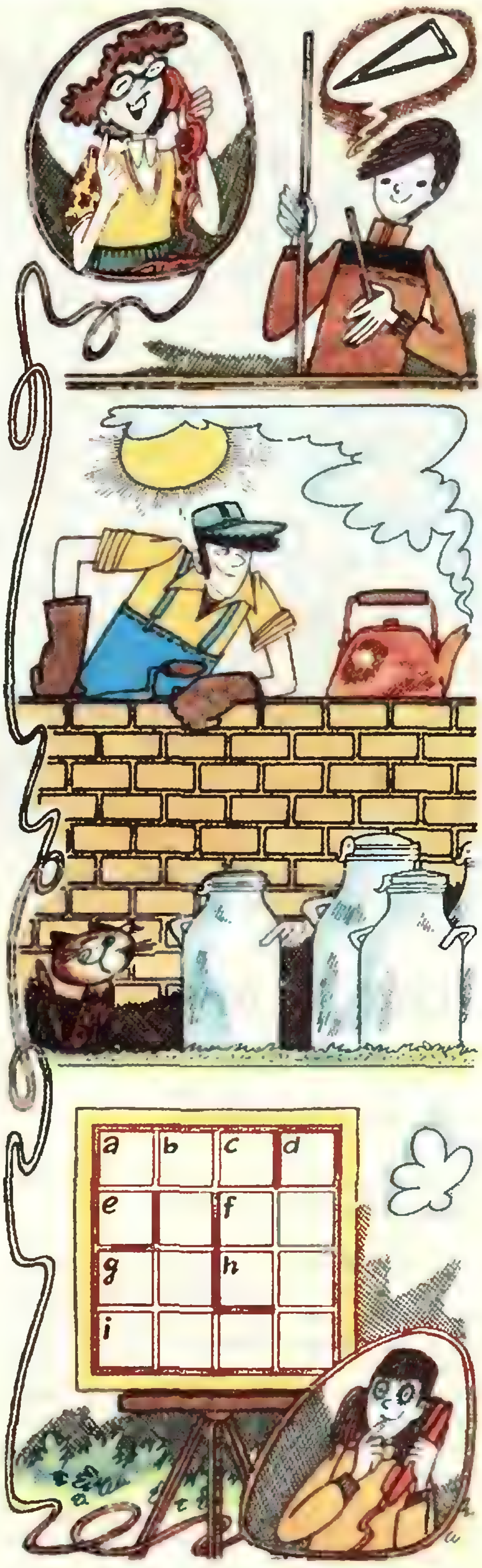
3. Предложите конструкцию прибора, основанного на принципе сообщающихся сосудов, предназначенного для проверки горизонтальности кладки кирпичных стен.

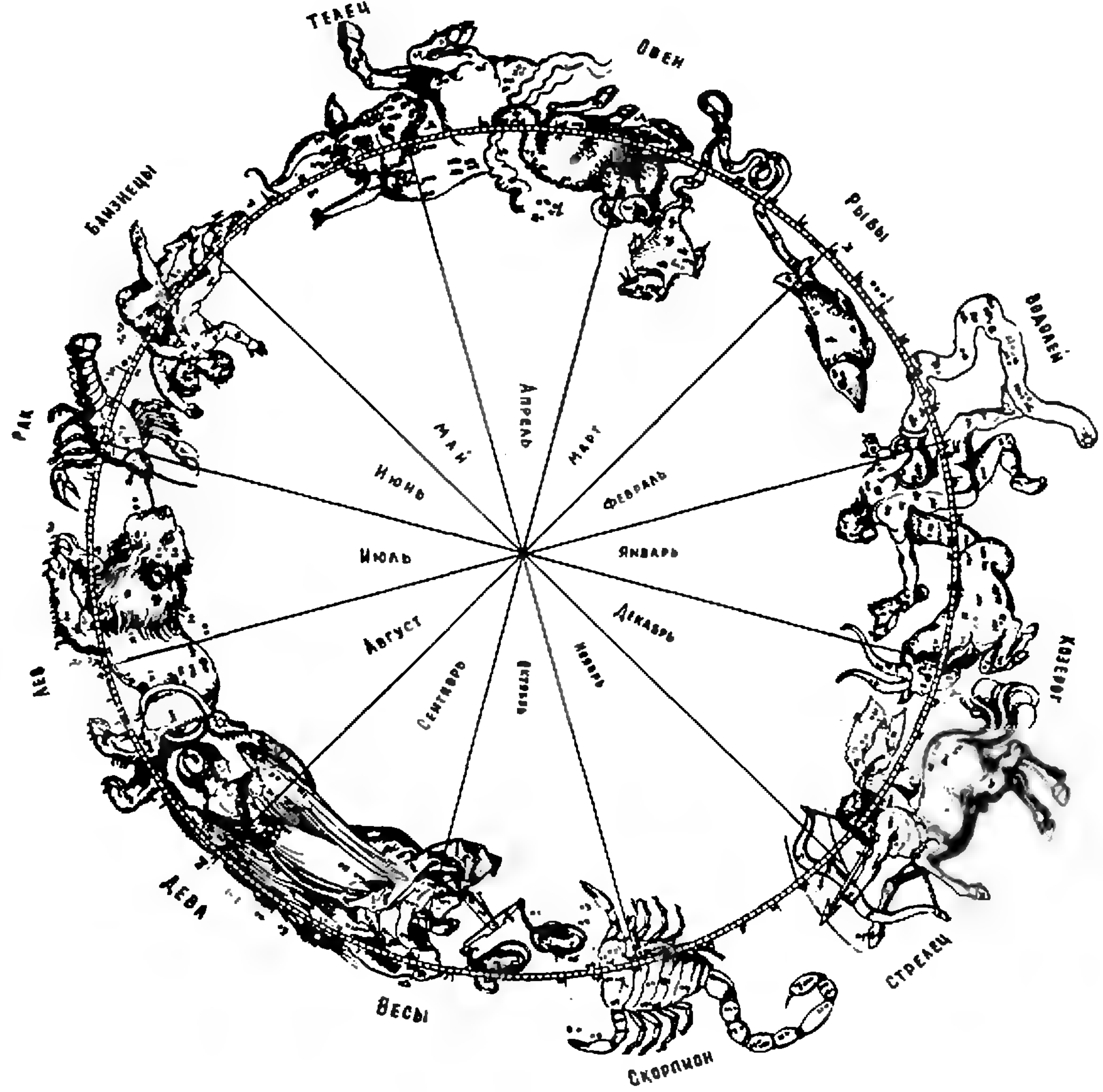
4. В магазин привезли 223 литра масла в бидонах по 10 и 17 литров. Сколько было бидонов?

5. Решите кросснамбер, то есть заполните клетки квадрата цифрами, как клетки кроссворда, в соответствии с указаниями.

По горизонтали:
$a=(a$ по вертикали$)^2$,
$h=(f$ по вертикали$)\times 2$,
$i=(c$ по вертикали$)+(g$ по вертикали$)$.
По вертикали:
$b=(g$ по горизонтали$)^2$,
$d=(a$ по горизонтали$)\times(e$ по горизонтали$)$.

Задачи предложили М. А. Раллова, С. Р. Сефибеков, В. Д. Вьюн, Н. К. Антонович, А. П. Савин




Телец
Овен
Рыбы
Водолей
Козерог
Стрелец
Скорпион
Весы
Дева
Лев
Рак
Близнецы
Апрель
Март
Февраль
Январь
Декабрь
Ноябрь
Октябрь
Сентябрь
Август
Июль
Июнь
Май

Зодиакальные созвездия. Изображения даны по звездному атласу известного польского астронома XVII века Гевелия.

Откуда произошли названия звезд и созвездий

Доктор физико-математических наук
Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

Если вы посмотрите на звездное небо, то при некотором воображении в россыпи более или менее ярких звезд увидите различные фигуры. Эти фигуры можно составлять различными способами. Уже в древней Греции было выделено 48 таких фигур, заполнивших почти все звездное небо, они получили название «созвездий». Некоторые звезды не входили в созвездия, а характеризовались тем, около какого созвездия они расположены.

Еще древние вавилоняне, астрономические знания которых оказали сильное влияние на греков, выделили 12 созвездий Зодиака, то есть 12 созвездий, расположенных вдоль большого круга небесной сферы, по которому совершает свое видимое годичное движение Солнце (этот круг называется эклиптикой, от греческого слова *эклейпсис* — «затмение», так как затмения происходят, когда Луна попадает на этот круг). Число созвездий Зодиака равно числу месяцев, и Солнце проходит каждое из них за месяц.

Первоначально вступление Солнца в созвездие Овна приурочивалось ко дню весеннего равноденствия, но за две

Впервые эта статья была опубликована в 1970 году в «Кванте» № 10. Перепечатывается с небольшими изменениями.

тысячи лет этот день несколько «сдвинулся» по отношению к созвездиям Зодиака. Заметим, что «овен» и «телец» — устаревшие названия барана и быка (ср. «овца» и «теленок»). Под Стрельцом, то есть стрелком, понимали кентавра, вооруженного луком со стрелами; под Козерогом — козла с рыбьим хвостом; Рыб представляли в виде двух рыб, соединенных тесьмой. Название Зодиак (от греческого слова *зодион* — «животное») объясняется тем, что большинство созвездий Зодиака имеют вид животных.

Севернее Зодиака греки располагали 21 созвездие, а южнее — 15 созвездий (созвездия южного полушария греки знали хуже, так как в древности путешественники редко доходили даже до экватора).

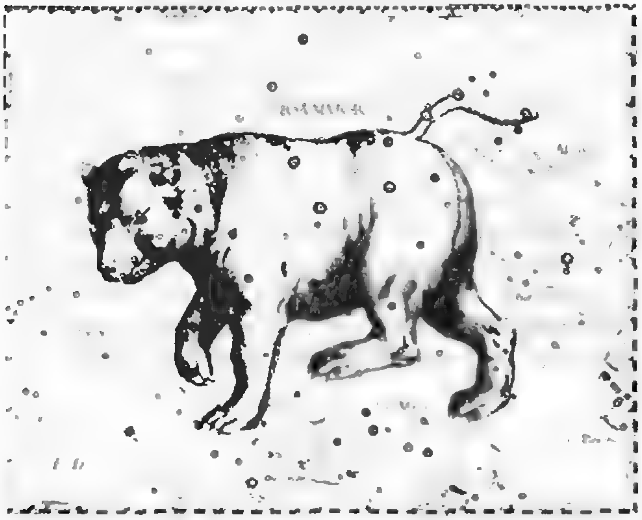
Названия созвездий объясняются теми фигурами, которые получались при соединении звезд, образующих созвездие, линиями. Разные народы по-разному «рисовали» эти фигуры. Например, в ковше Большой Медведицы греки видели медведя, а арабы — погребальную процессию — гроб, перед которым идут плакальщицы, возглавляемые «предводителем плакальщиц». Некоторые созвездия связаны между собой: Волопаса, то есть пастуха, греки рассматривали как сторожа медведиц. Шесть созвездий — северные созвездия Цефея, Кассиопеи, Андромеды, Персея, Пегаса и Кита — также связаны общей легендой об эфиопском царе Кефее (Цефей — латинская форма этого имени), его жене Кассиопее и дочери Андромеде. Согласно этой легенде Кассиопея оскорбила морских нимф нереид и в наказание за это морской бог Посейдон послал морское чудовище Кита (представлявшегося зверем с лапами и страшной пастью) опустошать берега Эфиопии. Для спасения страны Кефей должен был принести в жертву свою дочь, имя которой означает «не видевшая мужа». Девушка уже была прикована к скале, когда появился на крылатом коне Пегасе Персей — герой, убивший ужасную Медузу Горгону, обращавшую в камень всех, кто встречался с ней взглядом (сам Персей в борьбе с Медузой Горгоной смотрел не на нее, а на ее отражение в своем щите). Персей отрубил голову Горгоны и явился к Андромеде с этой головой. Показав ее Киту, он превратил его в камень, освободил Андромеду и женился на ней.

Созвездие Геркулеса получило свое название только в новое время, греки называли его «Коленопреклоненный». Созвездие Эридана также получило свое название в новое время, греки называли его «Река». Эридан — древнее название реки По, а также одно из имен мифического сына Солнца Фаэтона, согласно легенде упавшего на землю и утонувшего в По.

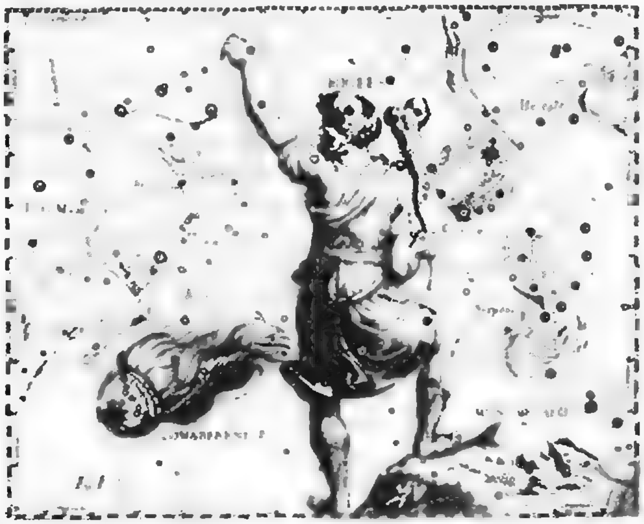
Созвездие Корабля Арго впоследствии было разделено на Корму, Паруса, Компас и Киль, а из мелких звезд, не входящих в известные раньше созвездия, были образованы новые созвездия: Малый Лев, Гончие Псы, Щит (первоначально Щит Собесского), Лисичка, Ящерица, Рысь, Единорог и Секстант.

Еще более любопытны названия звезд. Пожалуй, только название Полярной звезды — звезды α созвездия Малой Медведицы (яркие звезды созвездий принято обозначать греческими буквами α, β, γ, ..., примерно в порядке их убывающего блеска) и звезд, носящих собственные имена людей, понятны без обращения к словарю. Полярная звезда получила свое название потому,

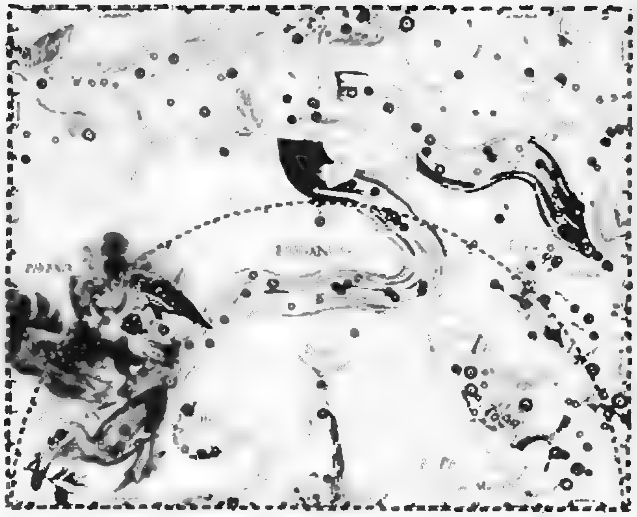
Созвездие Большой Медведицы.



Созвездие Волопаса.



Созвездие Андромеды.



Созвездие Эридана.

что она находится вблизи Северного полюса мира, вокруг которого происходит видимое суточное вращение звездного неба. Собственные имена имеют звезды α и β созвездия Близнецов — Кастор и Поллукс; они названы так по именам двух мифических близнецов — сыновей Зевса и Леды, и α Гончих Псов — Сердце Карла, названная Э. Галлеем в 1725 году в честь английского короля Карла II.

Очень немногие звезды имеют греческие и латинские названия, большинство этих названий арабского происхождения. Это объясняется тем, что в средние века центр передовой науки находился на Ближнем и Среднем Востоке, где языком науки был арабский язык (как до этого в эллинистических странах — греческий, а позже в Европе — латинский). Важный вклад в науку того времени внесли ученые Средней Азии и Азербайджана: ал-Хорезми, ал-Бируни, ал-Фергани, Ибн Сина (Авиценна), Омар Хайям, Насир ад-Дин ат-Туси, Улугбек и ученые его школы в Самарканде; много важных открытий было сделано также учеными Ирана, Ирака, Сирии, Египта, Северо-Западной Африки и мусульманской Испании. Труды этих ученых попадали в Западную Европу через Испанию и Италию, а потом через Константинополь, и переводились на латинский язык. Со многими трудами античной науки европейцы познакомились сначала по их арабским переводам и только потом — с их греческими оригиналами.

Большинство арабских названий возникло следующим образом. В знаменитом труде александрийского астронома Клавдия Птолемея (II век н. э.), обычно называемом нами «Алмагест», имелся каталог 1022 звезд, положения которых были измерены астрономами того времени. Европейцы познакомились с «Алмагестом» по его арабскому переводу, чем и объясняется его название: одно из греческих названий этого сочинения «Мегисте синтаксис» — «Величайшая система» — арабы переделали в ал-Маджисти, откуда и получилось наше название. Каждую звезду Птолемей характеризовал небольшим описанием, указывающим место этой звезды в созвездии. Именно от этих описаний в арабском переводе и произошли наши названия. Некоторые названия, впрочем, восходят не к Птолемею, а к староарабским названиям звезд. Таблица названий некоторых звезд приведена на с. 39.

Заметим, что название Антареса объясняется тем, что эта звезда, как и Марс, красного цвета и является как бы заместителем Марса (наши названия планет — имена римских богов, соответствующих греческим богам Гермесу, Афродите, Аресу, Зевсу и Хроносу, именами которых называли планеты греки).

От названия звезды Регул происходит слово «регулировать», так как этой звездой пользовались при регулировании полевых работ в Древнем Египте.

Названия Мира и Проксима были даны учеными сравнительно недавно: название Мира было дано этой звезде за ее удивительные свойства (эта звезда является долгопериодичной переменной звездой), название Проксима было дано учеными после того, как было обнаружено, что эта звезда расположена ближе всех звезд к Солнечной системе.

Созвездие	Буквенное обозначение	Название	С какого языка	От какого слова произошло	Значение этого слова
1. Малая Медведица	α	Полярная	лат.	поларис	относящийся к полюсу
2. Большая Медведица	α	Дубхе	араб.	дубб	медведь
3. »	β	Мерак	»	марак	брюхо
4. »	γ	Фекда	»	фахд	бедро
5. »	δ	Мегрец	»	маграз	начало хвоста
6. »	η	Алькаид Бенеташ	»	ал-каид банат на'ш	предводитель плакальщиц
7. Дракон	α	Тубан	»	ту'бан	дракон
8. Цефей	α	Альдерамин	»	ал-дира' ал-ямин	правая рука
9. Волопас	α	Арктур	греч.	арктурос	страж медведей
10. Северная Корона	α	Альфакка	араб.	ал-факка	чаша нищих
11. Геркулес	α	Рас Альгете	»	ра'с ал-джати	голова коленопреклоненного
12. Лира	α	Вега	»	ваки'	падающий (Орел)
13. Лебедь	α	Денеб	»	данаб	хвост
14. »	δ	Гиенах	»	джанах	крыло
15. Кассиопея	α	Шедар	»	садр	грудь
16. »	β	Каф	»	каф	ладонь
17. »	δ	Рукба	»	рукба	колено
18. Персей	α	Мирфак	»	мирфак	локоть
19. »	β	Альголь	»	ал-гул	чудовище (Горгона)
20. Возничий	α	Капелла	лат.	капелла	козочка
21. »	β	Менкалинан	араб.	манкаб ли-л-анви	плечо возничего
22. Змееносец	α	Рас Альхаге	»	ра'с ал-хавва	голова заклинателя
23. »	β	Цельбальрай	»	калб ал-рай	собака пастуха
24. Змея	α	Унук-Эльхайя	»	'унк ал-хийя	шея змеи
25. Орел	α	Альтаир	»	ал-таир	летящий (Орел)
26. Пегас	α	Маркаб	»	маркаб	седло
27. Андромеда	α	Альферац	»	сирра ал-фарас	пуп коня (звезда относилась к Пегасу)
28. »	β	Мирак	»	марак	брюхо (одной из Рыб)
29. »	γ	Аламак	»	ал-маук	сандалия
30. Овен	α	Хамал	»	хамал	баран (Овен)
31. »	β	Шератан	»	шаратан	два знака (общее название α и β Овна)
32. »	δ	Ботейн	»	бутейн	брюшко
33. Телец	η и др.	Плеяды	греч.	плейадес	дочери Плейоны
34. »	α	Альдебаран	араб.	ал-дебаран	идущий вслед (за Плеядами)
35. »	γ, δ	Гиады	греч.	гюадес	дождливые
36. Лев	α	Регул	лат.	регулус	царек
37. »	β	Денебола	араб.	данаб ал-асад	хвост льва
38. Дева	α	Спика	лат.	спика	колос (в руке у Девы)
29. Скорпион	α	Антарес	греч.	анта Арес	вместо Марса
40. »	β	Акраб	араб.	акраб	скорпион
41. Стрелец	α	Альрами	»	ал-рами	стрелок
42. Водолей	α	Садалмелек	»	са'д ал-мулк	счастье государства
43. Кит	β	Денеб Кейтос	»	данаб кайтос	хвост кита
44. »	o	Мира	лат.	мира	удивительная
45. Орион	α	Бетельгейзе	араб.	ибт ал-джауза	подмышка великана
46. »	β	Ригель	»	риджл	нога
47. »	γ	Беллатрикс	лат.	беллатрикс	воительница (покровительница воинов)
48. »	δ	Минтака	араб.	минтака	пояс
49. Эридан	α	Ахернар	»	ахир нахр	конец реки (Эридана)
50. Заяц	α	Арнеб	»	арнаб	заяц

Названия № 31, 32, 34 и 42 первоначально относились к группам звезд, так называемым стоянкам Луны, — на фоне этих звезд Луна находится в один из 28 дней лунного месяца. К группам звезд относятся № 33 и 35.

Более подробно о названиях звезд см. книгу Ю. А. Карпенко «Названия звездного неба» (М.: Наука, 1981).

задачник Кванта

Задачи

М886—М890, Ф898—Ф902

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 декабря 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10—84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М886, М887» или «Ф898». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи М887—М890 предлагались на X Всероссийской олимпиаде школьников по математике. Задачи Ф898—Ф902 — на XVIII Всесоюзной олимпиаде школьников по физике.

М886. Можно ли в $4n-4$ клеток, расположенных по периметру квадрата $n\times n$ клеток, расставить $4n-4$ последовательных целых чисел (не обязательно положительных) так, чтобы суммы чисел в вершинах каждого прямоугольника, стороны которого параллельны диагоналям квадрата, а также суммы чисел в концах каждой диагонали равнялись одному и тому же числу s? Решите задачу для n, равного: а) 3, б) 4, в) 5, г) 1985. Если можно, найдите допустимые значения s.

В. Г. Болтянский

М887. Две касательные к окружности, CA и CB, пересекаются в точке C (A и B — точки касания, рис. 1). Вторая окружность проходит через точку C, касается прямой AB в точке B и пересекает первую окружность в точке M. Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

И. Ф. Шарыгин

М888. Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют равенству $ab=cd$. Докажите, что число $a^{1984}+b^{1984}+c^{1984}+d^{1984}$ составное.

А. В. Анджанс

М889. Существуют ли на плоскости такие три точки A, B, C, что для любой точки плоскости P хотя бы один из отрезков PA, PB и PC имеет иррациональную длину?

А. М. Слинько

М890. На территории страны, имеющей форму квадрата со стороной 1000 км, находится 51 город. Страна располагает средствами для прокладки 11 000 км шоссейных дорог. Сможет ли она соединить сетью шоссейных дорог все свои города?

Л. Д. Курляндчик

Ф898. Однородная палочка длины l связана невесомой нитью длины l с неподвижной точкой A (рис. 2). Нижний конец палочки может скользить без трения по горизонтальному столу. Расстояние от точки A до стола равно H ($l<H<2l$). Палочка начинает двигаться без начальной скорости из положения, изображенного на рисунке. Найти максимальную скорость центра палочки при последующем движении.

С. С. Кротов

Ф899. На дне большого закрытого сосуда, заполненного водой, лежит перевернутая чашка массы m. Чашка имеет форму цилиндра радиуса R и высоты R

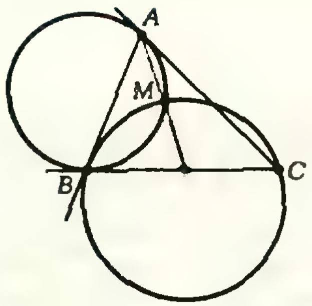


Рис. 1.

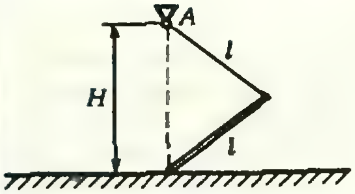


Рис. 2.

с полусферической полостью, радиус которой также равен R (рис. 3). Полость заполнена ртутью. Воду из сосуда начинают медленно откачивать.

1) Определите, при какой высоте h столба воды в сосуде чашка оторвется от его дна и ртуть начнет вытекать из-под ее краев.

2) Найдите высоту ртути в полости, когда из сосуда откачают всю воду.

Давлением паров воды пренебречь. Плотность воды ϱ и плотность ртути ϱ_1 считать известными.

Примечание: объем шарового сегмента высоты H и радиуса R (рис. 4) равен $\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)$.

М. Г. Абрамян

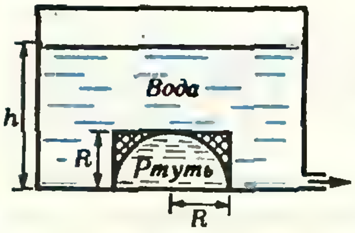


Рис. 3.

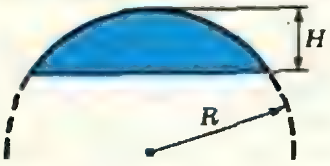


Рис. 4.

Ф900. Часть графика, изображающего процесс, происходивший с идеальным одноатомным газом, утеряна (рис. 5). Масштабы по обеим осям известны (они указаны на рисунке 5). В течение всего процесса перехода из состояния *1* в состояние *2* газ отдал столько же тепла, сколько получил. Найти работу, совершенную газом в этом процессе. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К).

В. Т. Карапетян

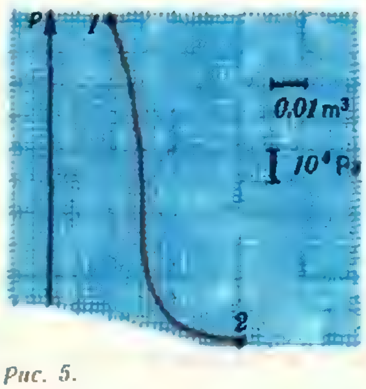


Рис. 5.

Ф901. Три одинаковых конденсатора, каждый емкости C, соединили последовательно и подключили к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$. После того, как они полностью зарядились, их отключили от батареи. Затем к ним одновременно подключили два резистора с сопротивлением R каждый так, как показано на рисунке 6. Какое количество тепла выделится на каждом из резисторов? Чему равны токи через резисторы в момент времени, когда напряжение на среднем конденсаторе в 10 раз меньше ЭДС батареи?

А. Р. Зильберман

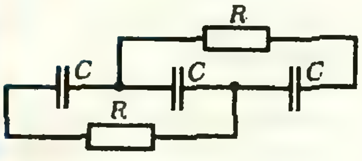


Рис. 6.

Ф902. Два плоских слоя толщины d каждый равномерно заряжены по объему с плотностями зарядов $-\varrho$ и $+\varrho$. Частица с отрицательным зарядом $-e$ и массой m подлетает к положительно заряженному слою со скоростью v, направленной под углом α к поверхности слоя (рис. 7).

1) При каком значении скорости частица не сможет проникнуть в отрицательно заряженный слой?

2) Через сколько времени и на каком расстоянии от точки A частица в этом случае покинет положительно заряженный слой?

А. И. Буздин

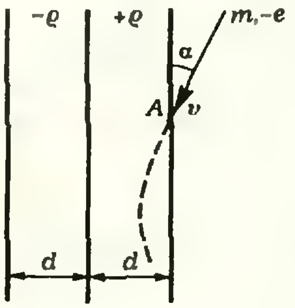


Рис. 7.

Problems

M886—M890; P898—P902

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than December 31st, 1984 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

Problems M887—M890 are taken from the 10th All-Russian mathematics olympiad; P898—P902 — from the 18th All-Union physics olympiad.

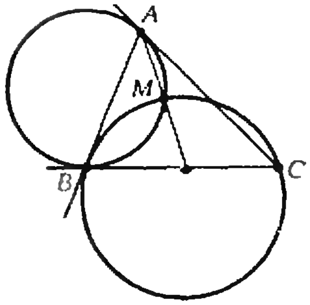


Fig. 1.

M886. Is it possible to place $4n-4$ successive integers (not necessarily positive) in the $4n-4$ little squares along the perimeter of an $n\times n$ square so that the sum of integers placed at the vertices of each rectangle whose sides are parallel to the diagonals of the square, as well as the sum of integers at the extremities of the two diagonals, is equal to the same number s? Solve the problem for n equal to a) 3, b) 4, c) 5, d) 1985. If possible, find the admissible values of s.

V. G. Boltyanski

M887. The tangents CA and CB to a circle intersect at the point C, A and B being the tangency points (see Fig. 1). A second circle passes through C, is tangent to AB at the point B and intersects the first circle at M. Prove that AM divides the segment BC into congruent parts.

I. F. Sharygin

M888. The positive integers a, b, c and d satisfy the relation $ab=cd$. Prove that the number $a^{1984}+b^{1984}+c^{1984}+d^{1984}$ is composite.

A. V. Andjans

M889. Is it possible to find three points A, B, C on the plane such that for any point P in the plane at least one of the segments PA, PB, PC is of irrational length?

A. M. Slinko

M890. There are 51 cities in a country which has the shape of a square of side 1000 km. The country has the ressourses necessary to construct 11 000 km. of roads. Can it construct a network of roads joining all its cities?

L. D. Kurliandchik

P898. A uniform rod of length l is tied to a fixed point A by a weigthless string of length l (Fig. 2). The lower extremity of the rod slides without friction on a horizontal table. The distance from A to the table is H ($l<H<2l$). The rod begins to slide with zero initial velocity from the position shown on Fig. 1. Find the maximal velocity of the rod's centre in its subsequent motion.

S. S. Krotov

P899. A cup of mass m is placed upside down on the bottom of a closed receptacle filled with water. The cup has the shape of a cylinder of radius R and altitude R with a hemispherical cavity whose radius is also R (Fig. 3). The cavity is filled with mercury. The water is then slowly pumped out from the receptacle.

1) Determine for what height h of water in the receptacle the cup will come off the bottom and the mercury will start flowing out from under it.

2) Find the height of mercury in the cavity when the

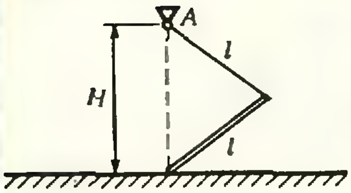


Fig. 2.

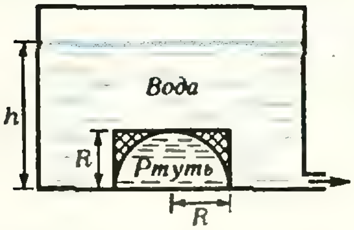


Fig. 3.

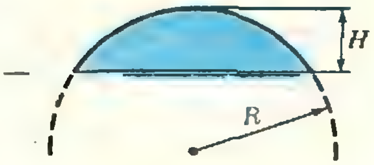


Fig. 4.

water is entirely pumped out.

The pressure of water vapors may be neglected. The densities ϱ of water and ϱ_1 of mercury are assumed known. Remark: the volume of a spherical cap of altitude H and radius R is given by the formula $\pi H^2(R-H/3)$, see Fig. 4.

M. G. Abramian

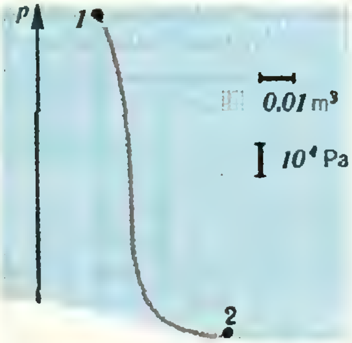


Fig. 5.

P900. Part of the graph representing a process involving a monoatomic gas is lost (Fig. 5). The units on both axes are known (they are shown on the figure). *During the entire process from state 1 to state 2* the gas loses as much heat as it aquires. Find the work carried out by the gas durnig the process. The universal gas constant is $R=8.3$J/(mole·K).

V. T. Karapetian

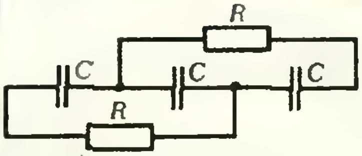


Fig. 6.

P901. Three identical capacitors, each of capacity C, were connected consecutively to a battery of EMF $\mathscr{E}$. After they were completely charged, they were disconnected from the battery. Then two resistors were similtaneously connected to them as shown on Fig. 6. How much heat will be generated at each of the resistors? What are the currents flowing through the resistors when the tension on the middle capacitor is 10 times less than that of the battery?

A. R. Zilberman

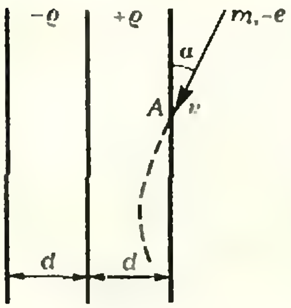


Fig. 7.

P902. Two flat layers of thickness d each are uniformly charged with volume density $-\varrho$ and $+\varrho$. A particle of negative charge e and mass m reaches the positively charged layer with velocity v at an angle α to the layer's surface (Fig. 7).

1) For what values of the velocity will the particle be unable to reach the negatively charged layer?
2) How much time later and at what distance from the point A will the particle leave the positively charged layer in this case?

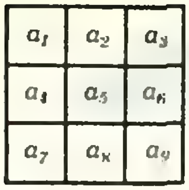
A. I. Buzdin

Решения задач

M871—M875; Ф883—Ф886

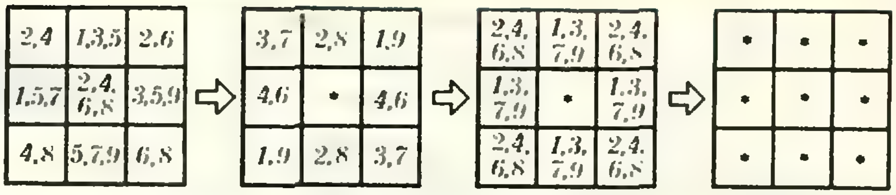
M871. *В клетки таблицы размера 3×3 записывают числа 1 или −1. Затем число в каждой клетке заменяется на произведение чисел, стоящих во всех соседних клетках (соседними считаются клетки, имеющие общую сто-*

Проследим за тем, как меняются числа в таблице. Пусть первоначально в ней были записаны числа a_1, a_2, ..., a_9 $(a_i=\pm 1)$, как показано на рисунке 1. Выпишем таблицы, получающиеся из нее в результате указанных в условии задачи операций, учитывая,



a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Рис. 1



2,4	1,3,5	2,6
1,5,7	2,4, 6,8	3,5,9
4,8	5,7,9	6,8

3,7	2,8	1,9
4,6	*	4,6
1,9	2,8	3,7

2,4, 6,8	1,3, 7,9	2,4, 6,8
1,3, 7,9	*	1,3, 7,9
2,4, 6,8	1,3, 7,9	2,4, 6,8

*	*	*
*	*	*
*	*	*

Рис. 2.

рону). Докажите, что после нескольких повторений этой операции во всех клетках будут стоять единицы.

что $a_i^2=1$. Эти таблицы показаны на рисунке 2, где для краткости в клетках таблиц приводятся только индексы сомножителей, например, произведение $a_1a_3a_5$ обозначается 1, 3, 5. Звездочка * означает число 1. Как видим, всегда после четырех операций во всех клетках будут стоять единицы.

И. К. Жук, И. В. Воронович

◆

М872. *На плоскости расположены три окружности C_1, C_2, C_3 радиусов r_1, r_2, r_3 — каждая вне двух других, причем $r_1>r_2$ и $r_1>r_3$. Из точки пересечения внешних касательных к окружностям C_1 и C_2 проведены касательные к окружности C_3, а из точки пересечения внешних касательных к C_1 и C_3 — касательные к C_2. Докажите, что последние две пары касательных образуют четырехугольник, в который можно вписать окружность, и найдите ее радиус.*

Ответ: $r=r_1r_2r_3/(r_1r_3+r_1r_2-r_2r_3)$.

Обозначим центры данных окружностей через O_1, O_2, O_3, точки пересечения касательных — A и B (рис. 1).

Решение задачи основано на следующем очевидном, но часто используемом соображении: *точка пересечения внешних касательных к двум окружностям служит центром гомотетии этих окружностей* (то же верно и для точки пересечения внутренних касательных). Из него сразу вытекает, что четвертая окружность должна быть гомотетична C_2 с центром A и C_3 с центром B, поэтому ее центр O должен лежать на пересечении отрезков AO_2 и BO_3. Теперь надо доказать существование такого числа r, что окружность C с центром O радиуса r будет гомотетична C_2 с центром A (то есть $r:r_2=|AO|:|AO_2|$) и, одновременно, гомотетична C_3 с центром B (то есть $r:r_3=|BO|:|BO_3|$), и найти это число.

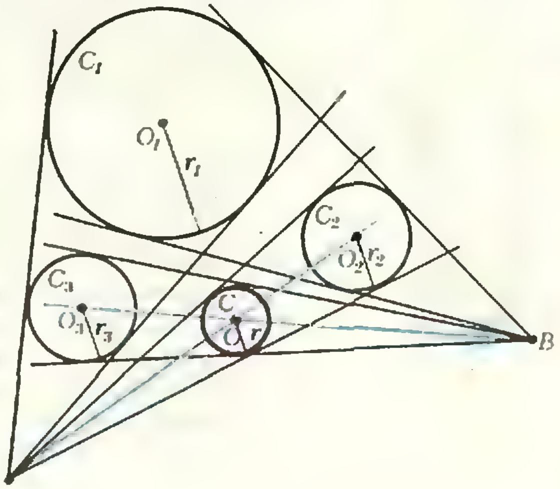


Рис. 1.

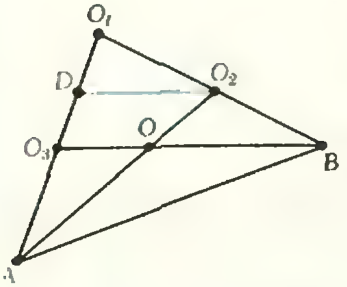


Рис. 2.

Вычислим отношение $|AO|:|AO_2|$. Для этого проведем отрезок O_2D, параллельный BO_3 (рис. 2), тогда, пользуясь гомотетичностью треугольников AOO_3 и AO_2D, O_1BO_3 и O_1O_2D, получим

$$\frac{|AO_2|}{|AO|}=\frac{|AD|}{|AO_3|}=1+\frac{|O_2D|}{|AO_3|}=1+\frac{|O_3D|}{|O_3O_1|}\cdot\frac{|O_3O_1|}{|AO_3|}=$$

$$=1+\frac{|BO_2|}{|BO_1|}\cdot\left(\frac{|AO_1|}{|AO_3|}-1\right).$$

Но $|BO_2|:|BO_1|=r_2:r_1$ (окружности C_2 и C_1 гомотетичны с центром B и коэффициентом $r_2:r_1$), и, аналогично, $|AO_1|:|AO_3|=r_1:r_3$, таким образом,

$$\frac{|AO_2|}{|AO|}=1+\frac{r_2}{r_1}\left(\frac{r_1}{r_3}-1\right)=\frac{r_1r_3+r_1r_2-r_2r_3}{r_1r_3}.$$

Из равенства $r:r_2=|AO|:|AO_2|$ теперь находим, что

$$r=\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_3+r_1r_2-r_2r_3}. \qquad (1)$$

Ту же самую величину мы получим и при втором способе нахождения r — из соотношения $r:r_3=|BO|:|BO_3|$ — потому что все изменения сведутся к замене r_2 на r_3 и обратно, а такая замена не влияет на значение правой части (1). Тем самым утверждение задачи доказано.

Отметим, что доказать существование окружности, вписанной в четырехугольник, образованный касательными, то есть равенство

$$r_2\cdot\frac{|AO|}{|AO_2|}=r_3\cdot\frac{|BO|}{|BO_3|}, \qquad (2)$$

можно короче, причем разными путями. Приведем, например, доказательство «методом площадей». Перепишем (2) в виде

$$\frac{r_2}{r_1}\cdot\frac{|AO|}{|AO_2|}=\frac{r_3}{r_1}\cdot\frac{|BO|}{|BO_2|}. \qquad (3)$$

Поскольку $r_2:r_1=|BO_2|:|BO_1|=S_{ABO_2}:S_{ABO_1}$, $|AO|:|AO_2|=$ $=S_{ABO}:S_{ABO_2}$, $r_3:r_1=S_{ABO_3}:S_{ABO_1}$ и $|BO|:|BO_2|=S_{ABO}:S_{ABO_3}$ (где S_{ABO}, S_{ABO_1} и т. д. — площади соответствующих треугольников), обе части равенства (3) равны $S_{ABO}:S_{ABO_1}$.

Задача легко решается также с помощью понятия центра масс, о котором подробно рассказывалось в статье В. Г. Болтянского и М. Б. Балка в «Кванте» № 4 за этот год. Предлагаем читателям самостоятельно найти это решение.

Л. П. Купцов.
В. Н. Дубровский

М873. *Учитель написал на доске квадратный трехчлен* $x^2+10x+20$. *Затем каждый ученик по очереди увеличивал или уменьшал на единицу по своему выбору один из младших коэффициентов (коэффициент при* x *или свободный член), но не оба сразу. В результате получился трехчлен* $x^2+20x+10$. *Верно ли, что в некоторый момент на доске был написан квадратный трехчлен с целыми корнями?*

◆

Ответ: верно.

Заметим, что при каждом изменении трехчлена его значение в точке $x=-1$ изменяется на 1 (в ту или другую сторону). Значение первого трехчлена $f(x)=x^2+10x+20$ в этой точке равно $f(-1)=11$, а последнего, $g(x)=x^2+20x+10$, — $g(-1)=-9$. Поэтому в какой-то промежуточный момент на доске был написан трехчлен $h(x)=x^2+px+q$, для которого $h(-1)=0$. Оба его корня — целые (один равен -1, другой, по теореме Виета, равен $-q$).

А. А. Берзиньш

М874*. *При каких целых* m *и* n *выполняется равенство*
а) $(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n$?
б) $(a+b\sqrt{d})^m=(b+a\sqrt{d})^n$, *где* a *и* b $(a\neq b)$ — *взаимно простые натуральные числа, а* $d>1$ — *натуральное число, среди делителей которого нет квадратов простых чисел?*

◆

Ответ: только для $m=n=0$.

Мы должны доказать, что исходное равенство

$$(a+b\sqrt{d})^m=(b+a\sqrt{d})^n \qquad (1)$$

не может выполняться при положительных целых m и n. (В круглых скобках стоят числа, большие 1, поэтому m и n — одного знака; если m и n отрицательны, то, перейдя к обратным числам, мы получим равенство, аналогичное (1) с показателями $|m|$ и $|n|$.) Заметим, что в условиях задачи число $\sqrt{d}$ (в частности, $\sqrt{2}$) — иррациональное. Раскроем в данном равенстве скобки и представим его в виде

$$x+y\sqrt{d}=z+t\sqrt{d}, \qquad (2)$$

где x, y, z, t — натуральные числа. Равенство (2) может выполняться только, если $x=z$ и $y=t$ (иначе

$\sqrt{d}$ — рациональное число), поэтому вместе с данным равенством (1) должно выполняться и равенство для «сопряженных» чисел (полученных подстановкой $-\sqrt{d}$ вместо $\sqrt{d}$):

$$(a-b\sqrt{d})^m=(b-a\sqrt{d})^n, \qquad (3)$$

эквивалентное равенству $x-y\sqrt{d}=z-t\sqrt{d}$.

Это соображение сразу дает решение задачи а): поскольку $|5-3\sqrt{2}|<1$, а $|3-5\sqrt{2}|>1$, равенство

$$(5-3\sqrt{2})^m=(3-5\sqrt{2})^n$$

не может выполняться при $m>1$, $n>1$: слева стоит число, по модулю меньшее 1, а справа — большее 1.

Приведем теперь две решения задачи б).

Первое основано на соображениях делимости. Заметим сначала, что в равенстве (1) показатели m и n можно считать взаимно простыми (если они имеют наибольший общий делитель $q>1$, то, извлекая корень степени q, мы получим аналогичное равенство со взаимно простыми m и n). Значит, одно из этих чисел, скажем, n — нечетно. Тогда после раскрытия скобок в (1) все члены, не содержащие $\sqrt{d}$, кроме a^m, будут иметь множитель b. Приравнивая их суммы в левой и правой частях ($x=z$), получим, что a^m делится на b. А поскольку a и b взаимно просты, это возможно лишь при $b=1$. Подставляя в (3) $b=1$ и учитывая, что $1-a\sqrt{d}<0$, видим, что обе части (3) отрицательны, следовательно, число m также нечетно. Отсюда точно так же выводится, что $b^n=1$ делится на a, так что и $a=1$, в противоречии с условием $a\neq b$.

Второе решение б) ближе к решению задачи а) — в нем используются лишь переход к сопряженным числам (3) и оценки и не используется условие взаимной простоты натуральных чисел a и b.

Пусть $a>b$, тогда $1<a+b\sqrt{d}<b+a\sqrt{d}$ и поэтому из (1) следует (при $m>1$, $n>1$), что $m>n$. С другой стороны, должно выполняться равенство

$$\left(\frac{a-b\sqrt{d}}{a+b\sqrt{d}}\right)^m=\left(\frac{b-a\sqrt{d}}{b+a\sqrt{d}}\right)^n. \qquad (4)$$

Сравним величины

$$\mu=\left|\frac{a-b\sqrt{d}}{a+b\sqrt{d}}\right| \text{ и } \nu=\left|\frac{a\sqrt{d}-b}{b+a\sqrt{d}}\right| \qquad (5)$$

(во второй знак модуля можно и не писать, поскольку $a\sqrt{d}>b$). Заметим, что если $p>q>0$, то величина

$$\frac{p-q}{p+q}=\frac{1-q/p}{1+q/p}=\frac{2}{1+q/p}-1$$

тем больше (ближе к 1), чем меньше отношение q/p. Поскольку, очевидно,

$$\frac{b}{a\sqrt{d}}<\frac{b}{a}<\frac{b\sqrt{d}}{a} \text{ и } \frac{b}{a\sqrt{d}}<\frac{a}{b\sqrt{d}},$$

в любом из двух случаев $a>b\sqrt{d}$ и $a<b\sqrt{d}$ будет $\mu<\nu$ и тем более $\mu^m<\nu^n$, ибо $0<\mu<\nu<1$, а $m>n$. Это противоречит равенству $\mu^m=\nu^n$, вытекающему из (4).

Ю. В. Михеев, Н. Б. Васильев

◆

М875. *По кругу выписано $n\geqslant 3$ натуральных чисел, причем отношение суммы двух соседей любого из этих чисел к нему самому является натуральным числом. Докажите, что сумма всех таких отношений а) не меньше $2n$, б)* не больше $3n$.*

Обозначим через $a_1, \ldots, a_n$ данные числа, а через

$$S_n=\frac{a_n+a_2}{a_1}+\frac{a_1+a_3}{a_2}+\ldots+\frac{a_{n-1}+a_1}{a_n} \qquad (*)$$

— рассматриваемую в задаче сумму.

а) Поскольку для любых положительных x и y справедливо неравенство $x/y+y/x\geqslant 2$, сумму S_n

можно оценить так:

$$S_n=\left(\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}\right)+\left(\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}\right)+\ldots+\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)\geqslant$$

$$\geqslant 2+2+\ldots+2=2n$$

(это неравенство справедливо для **любых** положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$).

б) Неравенство $S_n \leqslant 3n$ докажем индукцией по n.

При $n=3$ рассмотрим два случая: 1) все числа равны, 2) среди чисел a_1, a_2, a_3 есть различные. В первом случае все слагаемые в (*) равны 2 и $S_3=6<3\cdot3$. Во втором случае все наибольшее из чисел a_1, a_2, a_3 (пусть им будет a_1) строго больше полусуммы двух других ($a_1>(a_2+a_3)/2$). Тогда число $(a_2+a_3)/a_1$ меньше 2, а так как это число — натуральное, $a_1=a_2+a_3$. Следовательно,

$$S_3=\frac{a_2+a_3}{a_1}+\frac{a_3+a_1}{a_2}+\frac{a_1+a_2}{a_3}=3+\frac{2a_3}{a_2}+\frac{2a_2}{a_3},$$

причем числа $k=2a_3/a_2=(a_1+a_3)/a_2-1$ и $l=2a_2/a_3$ — натуральные. Учитывая, что $kl=4$, получаем такие варианты: $k=1$, $l=4$ — тогда $a_2=2a_3$ и $S_3=8<9$, или $k=2$, $l=2$ — тогда $a_3=a_2$, $S_3=7<9$ или $k=4$, $l=1$ и снова $S_3=8<9$.

Предположим теперь, что наше неравенство справедливо для $n-1$ чисел и докажем, что $S_n<3n$. Если все числа a_i равны, то $S_n=2n<3n$. В противном случае возьмем наибольшее из чисел $a_1, \ldots, a_n$ (если имеется несколько наибольших чисел, выберем то из них, которое строго больше хотя бы одного из своих соседей). Пусть это будет число a_n, тогда $a_n>(a_{n-1}+a_1)/2$. Как и выше, отсюда следует, что $a_n=a_{n-1}+a_1$, то есть

$$\frac{a_{n-2}+a_n}{a_{n-1}}=1+\frac{a_{n-2}+a_1}{a_{n-1}},\quad \frac{a_n+a_2}{a_1}=1+\frac{a_{n-1}+a_2}{a_1},$$

причем $(a_{n-2}+a_1)/a_{n-1}$ и $(a_{n-1}+a_2)/a_1$ — натуральные числа. Таким образом, набор $a_1, \ldots, a_{n-1}$ удовлетворяет условию задачи и для него рассматриваемая сумма $S_{n-1}<3(n-1)$. Следовательно, $S_n=S_{n-1}+3<3n$.

Из сказанного видно, что при добавлении к набору $a_1, \ldots, a_n$ числа $a_{n+1}=a_1+a_n$ (между a_1 и a_n) сумма S_n увеличивается на 3. Отсюда по индукции легко выводится, что сумма S_n может принимать **любое** целое значение S из промежутка $2n\leqslant S<3n$.

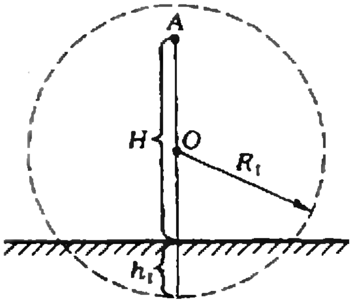
О. Р. Мусин

◆

Ф883. *При разрыве неподвижного зенитного снаряда он разлетается на очень большое число осколков, летящих равномерно во все стороны со скоростью v_0. Такой снаряд, летящий вниз со скоростью u, разрывается на высоте H над землей. Когда осколки будут падать на землю наиболее часто?*

После разрыва снаряда множество разлетающихся во все стороны осколков образуют расширяющуюся равномерно со скоростью v_0 сферу, центр которой движется вниз с ускорением g и с начальной скоростью u. Таким образом, ко времени t от момента разрыва центр сферы сместится от точки A, лежащей на высоте H над землей (в этой точке произошел разрыв) на расстояние $AO=ut+gt^2/2$ (см. рисунок), а радиус сферы будет равен $R_t=v_0t$. Пусть к этому времени центр сферы находится над землей на высоте $(R_t-h_t)<R$. Значит, те осколки, которые должны

были бы лежать на поверхности сферического сегмента с высотой h_t (см. рисунок) упали на землю. Найдем массу $m(t)$ этих осколков.



Пусть m_0 — масса всех осколков (масса снаряда); тогда

$$m(t)=m_0\frac{S(h_t)}{S(R_t)}=m_0\frac{2\pi R_t h_t}{4\pi R_t^2}=m_0\frac{h_t}{R_t},$$

где $S(h_t)$ — площадь сферического сегмента с высотой h_t, $S(R_t)$ — площадь всей сферы к моменту времени t. Подставляя $R_t=v_0t$ и $h_t=ut+gt^2/2+$ $+v_0t-H$ (см. рисунок), получаем

$$m(t)=m_0\left(\frac{u+v_0}{2v_0}+\frac{gt}{4v_0}-\frac{H}{2v_0t}\right). \qquad (1)$$

Полученная формула верна для промежутка времени $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, где t_1 — время, прошедшее после взрыва до начала падения осколков на землю, t_2 — время, прошедшее до падения на землю последнего осколка. Найдем значения t_1 и t_2.

Первым упадет на землю осколок, скорость которого в точке A равна $|\vec{u}+\vec{v}_0|=u+v_0$; следовательно,

$$(u+v_0)t_1+\frac{gt_1^2}{2}=H,$$

откуда

$$t_1=\frac{\sqrt{2gH+(u+v_0)^2}-(u+v_0)}{g}. \qquad (2)$$

Время t_2 находим из условия

$$(u-v_0)t_2+\frac{gt_2^2}{2}=H,$$

откуда

$$t_2=\frac{\sqrt{2gH+(u-v_0)^2}-(u-v_0)}{g}.$$

Вернемся к формуле (1). Понятно, что частота падения осколков на землю в данный момент времени — это значение производной $m'(t)$:

$$m'(t)=\frac{m_0g}{4v_0}+\frac{m_0H}{2v_0t^2}.$$

Очевидно, что значение $m'(t)$ тем больше, чем меньше t. Следовательно, с наибольшей частотой осколки будут падать на землю через время t_1 (см. (2)) после разрыва снаряда.

И. И. Солодовников

◆

Ф884. Задача Н. Е. Жуковского. *Жук ползет по жесткой (непрогибающейся) соломинке, опирающейся на гладкий пол и гладкую вертикальную стенку (рис. 1). Соломинка однородная, длина ее l, масса m; масса жука M ($M>m$). Соломинка образует угол α с горизонтом. Начальная скорость жука в точке B была равна v_0. Как должен двигаться жук, чтобы соломинка оставалась*

Пусть в некоторый момент времени ускорение, с которым жук ползет вниз вдоль соломинки, равно $\vec{a}$. На жука действуют сила тяжести $M\vec{g}$ и сила $\vec{f}$ реакции со стороны соломинки. Найдем, как направлена сила $\vec{f}$.

Запишем уравнение движения жука:

$$M\vec{g}+\vec{f}=M\vec{a},$$

или, в проекциях на оси X и Y (см. рис. 1):

$$Ma=Mg\sin\alpha+f_x,\quad f_y-Mg\cos\alpha=0.$$

неподвижной? Как зависит ускорение жука от пройденного им вдоль соломинки расстояния? За какое время жук доползет до нижней точки? Сможет ли жук подняться по соломинке из точки A в точку B?

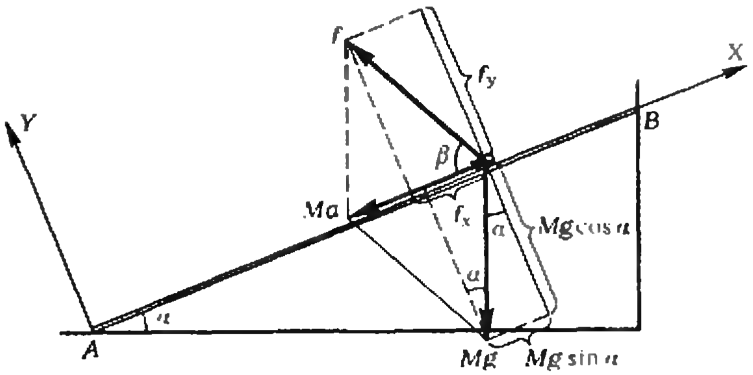


Рис. 1.

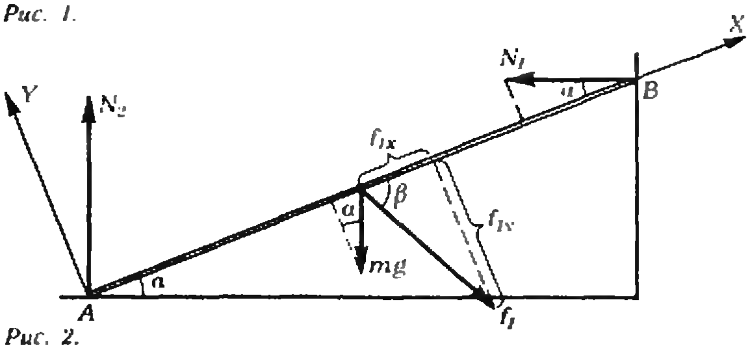


Рис. 2.

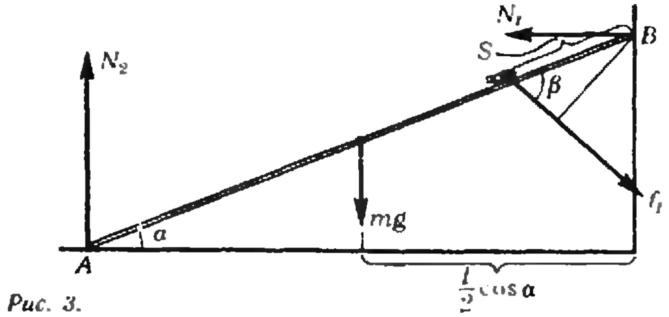


Рис. 3.

Отсюда $f_x = M(a - g\sin\alpha)$, $f_y = Mg\cos\alpha$, и (см. рис. 1)

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f_y}{f_x} = \frac{g\cos\alpha}{a - g\sin\alpha}.$$

Теперь рассмотрим силы, действующие на соломинку (рис. 2). Это сила тяжести $m\vec{g}$, сила $\vec{N}_1$ реакции со стороны гладкой стенки, сила $\vec{N}_2$ реакции со стороны гладкого пола и сила $\vec{f}_1$, с которой жук действует на соломинку; согласно III закону Ньютона, $\vec{f}_1 = -\vec{f}$. Чтобы соломинка оставалась неподвижной, должны выполняться два условия: геометрическая сумма действующих на нее сил должна быть равна нулю и алгебраическая сумма моментов этих сил относительно любой точки должна быть равна нулю. Запишем первое условие (см. рис. 2):

в проекциях на ось X —

$$N_2\sin\alpha + f_{1x} - N_1\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0,$$

или

$$N_2\sin\alpha + M(a - g\sin\alpha) - N_1\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0; \tag{1}$$

в проекциях на ось Y —

$$N_2\cos\alpha+N_1\sin\alpha-mg\cos\alpha-f_{1y}=0,$$

или

$$N_2\cos\alpha+N_1\sin\alpha-mg\cos\alpha-Mg\cos\alpha=0. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) найдем N_1 и N_2:

$$N_1=Ma\cos\alpha,\quad N_2=(M+m)g-Ma\sin\alpha.$$

Запишем второе условие, рассматривая моменты сил относительно точки B (рис. 3):

$$N_2 l\cos\alpha-mg\frac{l}{2}\cos\alpha-f_1 x\sin\beta=0,$$

где x — координата жука к данному моменту. Учитывая, что $f_1\sin\beta=f_{1y}=Mg\cos\alpha$, и подставляя найденные значения N_1 и N_2, получаем

$$Mgl-Mal\sin\alpha+mg\frac{l}{2}-Mgx=0.$$

Перепишем это уравнение в таком виде:

$$x-l\frac{2M+m}{2M}=-a\frac{l\sin\alpha}{g} \qquad (3)$$

и введем обозначения $x-l\dfrac{2M+m}{2M}=z$, $\dfrac{g}{l\sin\alpha}=\omega^2$.

Учитывая, что $a=x''=\left(z+l\dfrac{2M+m}{2M}\right)''=z''$, уравнение (3) можно записать так:

$$z''=-\omega^2 z.$$

Полученное нами уравнение — уравнение гармонических колебаний. В общем случае решение такого уравнения записывается в виде

$$z(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t, \qquad (4)$$

а постоянные A и B находятся из начальных условий. В нашем случае начальные условия (при $t=0$) таковы:

$$x(t_0)=z(t_0)+l\frac{2M+m}{2M}=0 \;\Rightarrow\; z(t_0)=-l\frac{2M+m}{2M},$$

$$x'(t_0)=v_0 \Rightarrow z'(t_0)=v_0.$$

Подставляя в уравнение (4) $t=0$ и $z(t_0)$, получаем

$$B=-l\frac{2M+m}{2M}.$$

Продифференцировав уравнение (4) и подставив $t=0$ и $z'(t_0)$, получим:

$$A=\frac{v_0}{\omega}.$$

Таким образом,

$$z(t)=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t-l\frac{2M+m}{2M}\cos\omega t,$$

и, следовательно,

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t+l\frac{2M+m}{2M}(1-\cos\omega t). \qquad (5)$$

Итак, закон движения жука при условии, что соломинка неподвижна, дает формула (5). Ускорение, с которым движется жук в произвольный момент времени, определяется формулой (3) —

$$a(t)=\frac{g}{\sin\alpha}\left(\frac{2M+m}{2M}\right)-\frac{g}{l\sin\alpha}x(t) \qquad (6)$$

— и зависит от x линейно.

Время τ, за которое жук доползет от точки B до точки A, определяется условием $x(\tau)=l$, то есть

$$l=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega\tau+l\,\frac{2M+m}{2M}\,(1-\cos\omega\tau). \qquad (7)$$

Если масса соломинки пренебрежимо мала по сравнению с массой жука ($m \gg M$), то

$$x(t)=l-l\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad (5')$$

$$a(t)=\frac{g}{\sin\alpha}\left(1-\frac{1}{l}x(t)\right), \qquad (6')$$

и время τ определяется условием

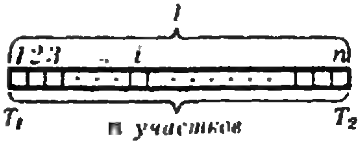
$$\frac{v_0}{\omega}\sin\omega\tau=l\cos\omega\tau \Rightarrow \operatorname{tg}\omega\tau=\frac{\omega l}{v_0}. \qquad (7')$$

Подняться по соломинке из точки A в точку B так, чтобы соломинка оставалась неподвижной, жук может только в том случае, если в каждой точке (в том числе и в точке A) ускорение жука будет таким же, как в рассмотренном нами случае движения сверху вниз. Покажите это сами.

Ю. М. Брук

◆

◆**885.** *Концы однородного стержня постоянного сечения поддерживаются при температурах T_1 и T_2 ($T_2>T_1$). Температурный коэффициент линейного расширения материала стержня равен α. Чему равна длина стержня, если при $t=0$ °C она была l_0?*



Поскольку температуры на концах стержня поддерживаются постоянными, а стержень однородный и имеет постоянное сечение, через любое поперечное сечение стержня за данный промежуток времени проходит одно и то же количество теплоты, то есть поток тепла через стержень постоянен. Поток тепла пропорционален разности температур, приходящейся на единицу длины стержня. Следовательно, температура вдоль стержня возрастает от «холодного» конца к «горячему» по линейному закону. Разделим мысленно стержень на участки малой длины δ такой, что в пределах каждого участка температуру можно считать постоянной. Пусть n — число участков; тогда $\delta=l/n$, где l — искомая длина стержня. Рассмотрим i-й участок (см. рисунок). Температура стержня на этом участке —

$$T_i=T_1+\frac{T_2-T_1}{n}\,i, \text{ или } t_i=t_1+\frac{t_2-t_1}{n}\,i.$$

При $t=0$ °C длина этого участка была

$$\delta_{i0}=\frac{\delta_i}{1+\alpha t_i}.$$

Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_{i0}$ — это длина l_0 стержня при $t=0$ °C, то есть

$$l_0=\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{1+\alpha t_i}=\delta_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\alpha t_i}=\frac{l}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\alpha t_i}.$$

Поскольку нас интересует линейное расширение стержня, можно считать, что

$$\frac{1}{1+\alpha t_i}=\frac{1-\alpha t_i}{1-\alpha^2 t_i^2}\approx 1-\alpha t_i.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\alpha t_i}\approx\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha t_i)=n-\alpha\sum_{i=1}^{n}\left(t_1+\frac{t_2-t_1}{n}i\right)=$$

$$=n-\alpha\left(nt_1+\frac{t_2-t_1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)\approx n\left(1-\alpha\frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

(мы учли, что $n\gg 1$). Таким образом,

$$l_0=\frac{l}{n}n\left(1-\alpha\frac{t_1+t_2}{2}\right),$$

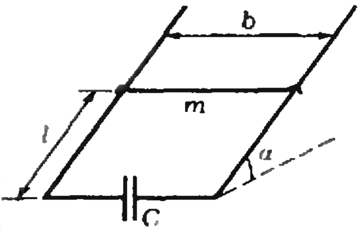
откуда

$$l=\frac{l_0}{1-\alpha\frac{t_1+t_2}{2}}\approx l_0\left(1+\alpha\frac{t_1+t_2}{2}\right).$$

Л. Г. Маркович

◆

Ф886. *По двум параллельным металлическим направляющим, наклоненным под углом α к горизонту и расположенным на расстоянии b друг от друга, может скользить без трения металлическая перемычка массы m. Направляющие замкнуты снизу на незаряженный конденсатор емкости C, и вся конструкция находится в магнитном поле, индукция которого $\vec{B}$ направлена вертикально (см. рисунок). В начальный момент перемычку удерживают на расстоянии l от основания «горки». За какое время перемычка достигнет основания «горки» после того, как ее отпустят? Какую скорость она будет иметь у основания? Сопротивлением проводников пренебречь.*



При движении перемычки меняется магнитный поток, пронизывающий контур, «замыкаемый» перемычкой. В результате в контуре возникает ЭДС индукции.

В течение малого промежутка времени Δt, когда мгновенную скорость v перемычки можно считать неизменной, мгновенное значение ЭДС индукции равно

$$\mathscr{E}_i=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=vbB\cos\alpha.$$

Ток, текущий через перемычку в это время, равен $i=\Delta q/\Delta t$, где Δq — заряд, накопившийся на конденсаторе за время Δt, то есть

$$\Delta q=C\cdot\Delta\mathscr{E}_i=CbB(\cos\alpha)\cdot\Delta v$$

(поскольку сопротивление подводящих проводов отсутствует, мгновенное значение напряжения на конденсаторе равно $\mathscr{E}_i$). Итак,

$$i=CbB\cos\alpha\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t}=CbBa\cos\alpha,$$

где a — ускорение, с которым движется перемычка.

На перемычку действуют сила тяжести и сила Ампера. Запишем уравнение движения перемычки:

$$ma=mg\sin\alpha-ibB\cos\alpha=mg\sin\alpha-Cb^2B^2a\cos^2\alpha.$$

Отсюда найдем a:

$$a=\frac{mg\sin\alpha}{m+Cb^2B^2\cos^2\alpha}.$$

Время, за которое перемычка спустится к основанию горки, определим из условия $l=\frac{at^2}{2}$:

$$t=\sqrt{\frac{2l}{a}}=\sqrt{\frac{2l}{mg\sin\alpha}(m+Cb^2B^2\cos^2\alpha)}.$$

Скорость перемычки у основания —

$$v_l=at=\sqrt{\frac{2lmg\sin\alpha}{m+Cb^2B^2\cos^2\alpha}}$$

А. И. Буздин

Передача электроэнергии на расстояние

Кандидат физико-математических наук
В. А. ДАНИЛИН

В настоящее время передача электрической энергии от генератора к потребителю происходит, в основном, по проводам с помощью переменного тока. При этом обязательно возникают потери энергии, прежде всего — на нагрев проводов. Снизить потери можно за счет уменьшения силы тока в линии электропередачи, то есть за счет повышения напряжения на выходе с генератора (чтобы передаваемая мощность осталась неизменной).

Для непосредственного использования электрической энергии потребителем напряжение в конце линии, то есть на входе к потребителю, нужно понизить.

В случае переменного тока повышение и понижение напряжения осуществляется с помощью трансформаторов.

Как устроен генератор переменного тока? Каков принцип работы трансформатора? От чего зависят потери в линии электропередачи? Эти и аналогичные вопросы могут возникнуть у абитуриентов в связи с повторением темы «Производство, передача и использование электрической энергии». Некоторые из них мы обсудим на примере нескольких конкретных задач. Почти все они в свое время предлагались на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

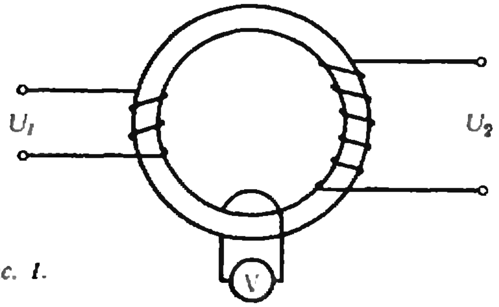


Рис. 1.

Задача 1. *Трансформатор, повышающий напряжение с $U_1=100$ В до $U_2=3300$ В, имеет замкнутый сердечник в виде кольца (рис. 1). Через кольцо пропущен провод, концы которого присоединены к вольтметру. Вольтметр показывает напряжение $U=0{,}5$ В. Сколько витков содержится в каждой обмотке трансформатора?*

В замкнутом кольцевом сердечнике, где практически сконцентрировано все магнитное поле, магнитный поток одинаков во всех его сечениях. В любом витке, надетом на сердечник, безразлично к какой обмотке он относится, мгновенное значение ЭДС индукции одно и то же, поскольку, согласно закону электромагнитной индукции, оно определяется скоростью изменения магнитного потока в сердечнике: $e=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Если обмотки трансформатора содержат n_1 и n_2 витков, то ЭДС индукции, наведенные в этих обмотках, равны соответственно $e_1=n_1e$ и $e_2=n_2e$.

Обычно активное сопротивление обмоток трансформатора мало́, и его можно не учитывать. Аналогичное можно сказать и о проводе, к которому присоединен вольтметр. Тогда в любой момент времени справедливы равенства

$$u=-e,\quad u_1=-e_1,\quad u_2=-e_2.$$

Здесь u — мгновенное значение напряжения на концах провода, u_1 — напряжение на первичной обмотке и u_2 — на разомкнутой вторичной обмотке трансформатора.

Поскольку изменения всех ЭДС происходят в одних и тех же фазах, их отношения можно заменить отношением соответствующих действующих значений, а значит, с учетом предыдущих равенств, — и отношением действующих значений напряжений:

$$\frac{e_1}{e}=\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}}=\frac{U_1}{U},\quad \frac{e_2}{e}=\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}}=\frac{U_2}{U}.$$

Отсюда найдем количество витков в каждой обмотке:

$$n_1=\frac{e_1}{e}=\frac{U_1}{U}=200,$$

$$n_2=\frac{e_2}{e}=\frac{U_2}{U}=6600.$$

Задача 2. *Электроэнергия от генератора передается потребителю по проводам. Сопротивление проводов r, сопротивление нагрузки R, напряжение на генераторе U. Определите КПД линии передачи, то есть отношение мощности, выделяемой на нагрузке, к полной мощности, отдаваемой генератором. При каком сопротивлении нагрузки полезная мощность максимальна?*

По закону Ома для полной цепи ток в линии

$$I=\frac{U}{r+R}.$$

Мощность генератора

$$P=UI=\frac{U^2}{r+R},$$

мощность, выделяемая на нагрузке,

$$P_{н}=I^2R=\frac{U^2R}{(r+R)^2}.$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta=\frac{P_{н}}{P}=\frac{U^2R(r+R)}{(r+R)^2U^2}=\frac{R}{r+R}.$$

При уменьшении R до нуля и при неограниченном возрастании R величина $P_{н}$ падает до нуля. Значит, при некотором промежуточном значении $R=R_{н}$ полезная мощность должна достигать своего максимального значения.

Исследуем функцию $P_{н}(R)$ на максимум. Для этого найдем и приравняем нулю производную от $P_{н}(R)$ по R:

$$P'_{н}(R)=U^2\frac{(r-R)}{(r+R)^3}=0.$$

Отсюда получим, что мощность, выделяющаяся в нагрузке, максимальна, если $R=r$. При этом $P_{н\,max}=U^2/(4r)$. КПД линии в этом случае $\eta=1/2$ — половина мощности генератора тратится бесполезно.

Задача 3. *Линия электропередачи может работать при двух различных напряжениях генератора U_1 и U_2 и соответствующих сопротивлениях нагрузки R_1 и R_2. Отношение потерь мощности на подводящих проводах для этих случаев равно α. Определите отношение U_2/U_1 при условии, что мощность генератора в обоих случаях одинакова.*

Пусть сопротивление подводящих проводов равно r — эта величина не изменяется. Полная мощность, отдаваемая генератором,

$$P=UI=\frac{U^2}{R+r},$$

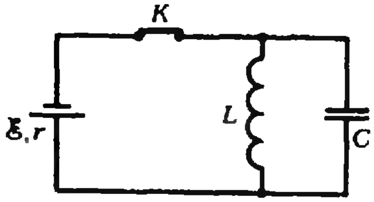


Рис. 2.

где I — ток в цепи. Мощность тепловых потерь

$$P_{п}=I^2r=\frac{U^2}{(R+r)^2}r.$$

Отношение потерь мощности при различных значениях U и R равно

$$\frac{U_1^2}{(R_1+r)^2}r:\frac{U_2^2}{(R_2+r)^2}r=\alpha.$$

По условию задачи в обоих случаях генератор отдает одну и ту же мощность:

$$\frac{U_1^2}{R_1+r}=\frac{U_2^2}{R_2+r}.$$

Из двух последних соотношений следует

$$\frac{U_1^2(R_2+r)^2}{U_2^2(R_1+r)^2}=\alpha,\quad \frac{U_1^2}{U_2^2}=\frac{R_1+r}{R_2+r}.$$

Откуда

$$\frac{U_2}{U_1}=\sqrt{\alpha}.$$

На примере этой задачи видно, как велико влияние напряжения, под которым происходит передача энергии, на величину тепловых потерь в линии электропередачи. Достаточно повысить напряжение в α раз, как потери уменьшатся в α^2 раз.

* * *

Важно уметь оценивать токи и напряжения, возникающие в линиях электропередачи при переходных процессах. Таких, например, как отключение или быстрое изменение нагрузки. Если учесть, что напряжения, под которыми работают современные линии, порядка 10^6 В, то возможные увеличения напряжения, так называемые перенапряжения, могут привести к электрическому пробою в линии. Одна из схем, иллюстрирующая переходный процесс, представлена в следующей задаче.

Задача 4. *Обмотка трансформатора, имеющая индуктивность L=0,1 Гн, и параллельно подключенный к ней конденсатор емкостью C=0,1 мкФ через ключ К подсоединены к источнику с ЭДС ℰ и внутренним сопротивлением*·

$r=100$ Ом (рис. 2). После установления стационарного режима ключ размыкают. Найдите амплитуду напряжения, возникающего на концах обмотки, по отношению к ЭДС источника.

При установившемся режиме через обмотку трансформатора течет постоянный ток

$$I=\frac{\mathcal{E}}{r},$$

напряжение на обмотке, а значит, и на конденсаторе равно нулю.

При размыкании ключа K возникает изменение магнитного потока, которое создает на концах обмотки напряжение. Его амплитуду можно найти, рассмотрев колебания в контуре, составленном из катушки индуктивности L и конденсатора емкости C. Энергия, запасенная в катушке во время протекания постоянного тока, через четверть периода колебаний перейдет в энергию заряженного конденсатора:

$$\frac{LI^2}{2}=\frac{CU_m^2}{2}.$$

Отсюда амплитуда напряжения на конденсаторе, а следовательно и на концах обмотки трансформатора, равна

$$U_m=\sqrt{\frac{L}{Cr}}\mathcal{E}=100\,\mathcal{E}.$$

Как видно, перенапряжение весьма велико. На практике оно возникает всегда, когда происходит отключение тока, идущего через катушку, при малых значениях емкости подключенного к ней конденсатора.

Упражнения

1. Вторичная обмотка трансформатора, имеющая $n=100$ витков, пронизывается магнитным потоком, изменяющимся со временем по закону $\Phi=0{,}01\cos 314t$ (в единицах СИ). Напишите формулу, выражающую зависимость ЭДС индукции во вторичной обмотке от времени, и найдите действующее значение этой ЭДС.

2. При передаче электроэнергии на большое расстояние используется повышающий трансформатор, загруженный до номинальной мощности $P=1000$ кВт. При этом разность показаний счетчиков электроэнергии, установленных на выходе с трансформаторной подстанции и в приемном пункте, увеличивается ежесуточно на $\Delta W_п=215$ кВт·ч. Во сколько раз необходимо повысить выходное напряжение, чтобы при передаче электроэнергии потери не превышали 0,1 %?

3. Определите массу меди, нужную для устройства двухпроводной линии длиной $l=5$ км. Напряжение на шинах станции $U=2400$ В, передаваемая потребителю мощность $P=60$ кВт, допустимая потеря напряжения в проводке $U_п=0{,}08U$. Плотность меди $D=8{,}9\cdot10^3$ кг/м^3, удельное сопротивление $\rho=0{,}017\cdot10^{-6}$ Ом·м.

Избранные школьные задачи

(Начало см. на с. 33)

соединяющего середины оснований, равна длине отрезка, соединяющего середины ее диагоналей.

8 (8—10). В треугольнике ABC величина угла при вершине C равна 120°. Докажите, что из отрезков длиной $a+b, b, c$ можно составить треугольник. Здесь $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$.

9 (10). Три числа являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Если ко второму числу прибавить 2, то они будут образовывать арифметическую прогрессию. Если после этого к третьему числу прибавить 2, то они будут образовывать арифметическую прогрессию. Если после этого к третьему числу прибавить 16, то они снова будут образовывать геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

10 (8—10). Периметр некоторого 1982-угольника меньше 2000. Докажите, что среди треугольников с вершинами в соседних вершинах этого 1982-угольника найдется треугольник, площадь которого меньше 1.

Десятый класс

11 (10). Решите уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=0{,}5$.

12 (10). На координатной плоскости нарисован график параболы $y=x^2$. Найдите абсциссу точки параболы, ближайшей к точке $M\ (0;\ a)$.

13 (10). Найдите многочлен (не обязательно второй степени) с целыми коэффициентами, для которого число $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ является корнем.

14 (9—10). Докажите, что для любого действительного x выполняется неравенство $\cos(\sin x)>\sin(\cos x)$.

15 (8—10). В треугольнике ABC биссектрисы BP и CT пересекаются в точке O. Известно, что точки A, P, O и T лежат на одной окружности. Найдите величину угла A.

Публикацию подготовил Е. И. Хухро

X Всероссийская олимпиада школьников

По сложившейся традиции в дни весенних школьных каникул проходит заключительный, зональный этап Всероссийской физико-математической и химической олимпиады школьников 8—10 классов. В этом году Всероссийская олимпиада отметила свой десятилетний юбилей. Она стала одним из самых массовых соревнований школьников Российской Федерации, а ее победители достойно представляли республику на Всесоюзной и Международной олимпиадах.

Как обычно, зональному этапу предшествовали районные, городские и областные (краевые) олимпиады, в результате чего каждая область (край) была представлена победителем областного (краевого) этапа по каждому классу.

В этом году заключительный этап олимпиады проводился для Северо-Западной зоны в Вологде, для Центральной зоны в Саранске, для Юго-Западной зоны в Нальчике и для зоны Сибири и Дальнего Востока в Якутске. Кроме того, в это же время заключительный этап олимпиады проходил в физико-математических школах-интернатах при Московском, Ленинградском и Новосибирском университетах.

Задание заключительного этапа по математике состояло из пяти задач, на решение которых отводилось четыре часа. Как показала проверка, наибольшие трудности у учащихся вызвали задачи по геометрии и теории чисел. Значительные трудности вызвали также задачи комбинаторного типа. Члены жюри подробно обсудили со школьниками конкурсные задачи и проанализировали допущенные ошибки.

Заключительный этап олимпиады по физике проводился в два тура — теоретический и экспериментальный, причем в экспериментальном туре принимали участие все школьники, независимо от результатов теоретического тура. Задание теоретического тура включало четыре задачи, а экспериментального — две. На решение каждого задания отводилось четыре часа. Проверка показала, что для участников олимпиады все задания оказались посильными.

Школьники, занявшие I—IV места на зональном этапе Всероссийской олимпиады, были награждены дипломами, грамотами и памятными подарками. Из числа призеров была сформирована команда РСФСР для участия во Всесоюзной олимпиаде.

Специальными грамотами были награждены также учителя, подготовившие призеров олимпиады.

Ниже приводятся задачи по математике и физике заключительного этапа и фамилии призеров X Всероссийской олимпиады школьников.

Математика

8 класс

1. Каждую грань куба разбили на четыре одинаковых квадрата и каждый получившийся квадрат покрасили одной из трех различных красок. Оказалось, что любые два квадрата, имеющие общую сторону, покрашены в разные цвета. Докажите, что всего имеется по восемь квадратов каждого цвета. Приведите пример такой раскраски.

2. Постройте плоскую замкнутую восьмизвенную ломаную, пересекающую каждое свое звено ровно один раз, причем во внутренней точке звена.

3. Окружности с центрами O_1 и O_2 одинакового радиуса касаются друг друга в точке A. Окружность с центром O_3 вдвое большего радиуса содержит внутри себя окружность с центром O_1, касаясь ее в точке B, а окружность с центром O_2 пересекает в точках P и Q. Докажите, что прямая AB проходит или через точку P, или через точку Q.

4. См. задачу 3, пункт а) для 10-го класса.

5. Натуральные числа a, b, c, d удовлетворяют равенству $ab=cd$. Докажите, что число $a^{1984}+b^{1984}+c^{1984}+d^{1984}$ является составным.

9 класс

1. Найдите все натуральные числа n такие, что сумма цифр десятичной записи числа 2^n равна 5.

2. В клетках квадратной таблицы 3×3 расставлены знаки «+» и «—», как показано на рисунке 1. Разрешается в любом столбце или в любой строке изменить сразу все знаки на противоположные. Можно ли, повторяя эту процедуру несколько раз, из данной таблицы получить таблицу, показанную на рисунке 2?

Рис. 1.

+	−	−
−	+	+
−	+	+

Рис. 2

−	−	+
+	−	−
−	−	+

3. Чему равно максимальное значение разности трехзначного числа и суммы кубов его цифр? Для какого трехзначного числа достигается этот максимум? Чему равно минимальное положительное значение этой разности?

4. Через точку C, лежащую вне окружности с центром O_1, проведены к этой окружности две касательные, касающиеся ее в точках A и B. Через точки C и B проведена окружность с центром O_2, касающаяся прямой AB в точке B и пересекающая окружность с центром O_1 в точке M. Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

5. Существуют ли на плоскости точки A, B, C такие, что для любой точки P этой плоскости длина хотя бы одного из отрезков PA, PB, PC является иррациональным числом?

10 класс

1. См. задачу 1 для 9-го класса.

2. Дана функция $f(x)$, $x\in\,]-\infty;\ +\infty[$. Известно, что функция $d(x)=f(x)+\sin f(x)$ является периодической. Докажите, что функция $f(x)$ также является периодической.

3. Циферблат часов (круг с числами 1, 2, 3, ..., 11, 12) насажен в центре на ось, укрепленную на классной доске. Циферблат может поворачиваться вокруг оси на любой угол, кратный 30°. Вначале на доске напротив каждого числа циферблата написали нуль. Затем циферблат несколько раз повернули, причем после каждого поворота к каждому из написанных на доске чисел прибавляли то число, которое оказалось напротив него на циферблате. Могут ли в итоге оказаться равными 1984:

а) все числа на доске;

б) все числа на доске, кроме одного;

в) все числа на доске, кроме двух?

4. На территории страны, имеющей форму квадрата со стороной 1000 км, находится 51 город. Страна располагает средствами для прокладки 11 000 км шоссейных дорог. Сможет ли она соединить сетью шоссейных дорог все свои города?

5. Внутри граней тетраэдра $ABCD$ взяты точки A', B', C', D' так, что точка A' находится на грани BCD, точка B' — на грани ACD, точка C' — на грани ABD, точка D' — на грани ABC, причем каждые две из точек A', B', C', D' лежат в одной плоскости с некоторыми двумя вершинами тетраэдра. Докажите, что прямые AA', BB', CC', DD' пересекаются в одной точке.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. Массивный клин с углом при основании α движется по гладкой горизонтальной поверхности (рис. 1). Сверху на клин опирается тяжелый стержень массы m, удерживаемый в вертикальном положении гладкими опорами, в которых он может совершать вертикальные перемещения без трения. Под действием стержня клин движется равномерно. Найдите коэффициент трения между клином и стержнем и силу, с которой стержень давит на клин, во время движения клина в горизонтальном направлении с постоянной скоростью. Трением клина о горизонтальную поверхность и трением стержня об опоры можно пренебречь.

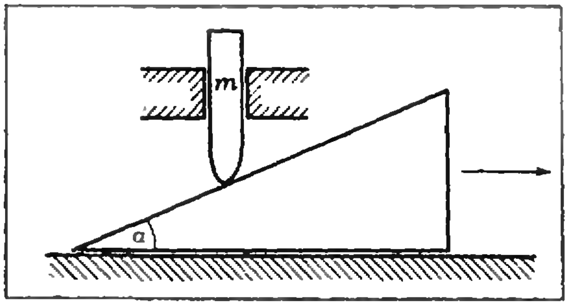


Рис. 1

2. Исследовательская ракета стартовала вертикально вверх с полюса неизвестной планеты, лишенной атмосферы. Радиосообщения с борта ракеты показали, что в течение времени τ, начиная с момента старта, все предметы на ее борту давили на свои опоры и растягивали подвесы, на которых были подвешены, с силами, в $k=1{,}8$ раза бо́льшими, чем на поверхности планеты перед стартом. Все остальное время до падения на поверхность планеты предметы в ракете находились в состоянии невесомости. Сколько времени прошло с момента старта до момента падения ракеты на поверхность планеты? Зависимостью силы тяготения планеты от высоты над ее поверхностью для данного случая можно пренебречь.

3. Проволочный резистор намотан виток к витку на цилиндрический каркас и имеет $n=10$ витков. Сопротивление резистора $R=5$ Ом. После того как в одном месте нарушилась изоляция провода, сопротивление резистора упало до $R_1=4{,}75$ Ом. Чему равно сопротивление, возникшее в месте нарушения изоляции?

4. На гладкий жесткий неподвижный стержень, образующий угол α с горизонтом, надето колечко A массы m_1, которое может скользить по стержню без трения (рис. 2). К колечку при помощи невесомой нити AB прикреплен грузик B массы m_2. Первоначально колечко удерживают рукой таким образом, что нить AB вертикальна. Чему будет равно натяжение нити в первый момент времени после того, как колечко отпустят?

9 класс

1. Однородный шкаф массы m, высоты H и ширины l стоит на опорах, расположенных на расстоянии l одна от другой. Коэффициенты трения между опорами и участками горизонтальной поверхности пола, с которыми каждая из опор соприкасается, μ_1 и μ_2, причем $\mu_2<\mu_1$. Шкаф необходимо сдвинуть с места, не опрокидывая и не переворачивая его. Какой наименьшей горизонтально направленной силой можно это сделать? Где такая сила должна быть приложена? В какую сторону направлена?

2. Некоторое количество идеального одноатомного газа в герметическом сосуде подвергают изобарному расширению, при котором его объем увеличивается в полтора раза. Затем с тем же газом проводят процесс сжатия, в результате которого и объем газа, и его давление уменьшаются в три раза, причем в ходе процесса давление остается прямо пропорциональным объему с одним и тем же коэффициентом пропорциональности. При сжатии газ передал окружающим телам количество теплоты Q_0. После сжатия газ снова изобарно расширяют, доводя его объем до первоначального (того, который имел газ перед первым изобарным расширением).

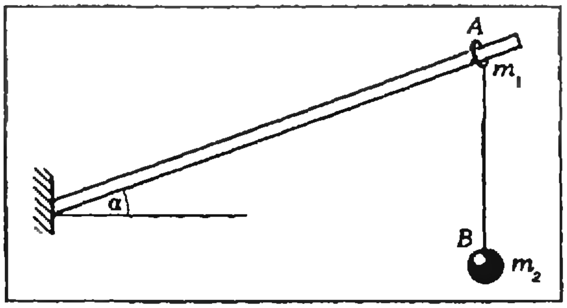


Рис. 2

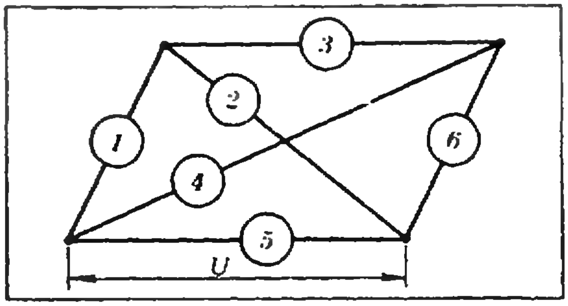


Рис. 3.

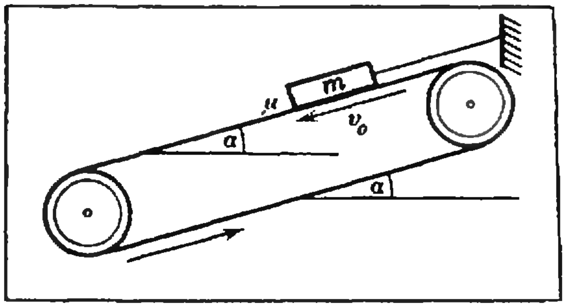


Рис. 4.

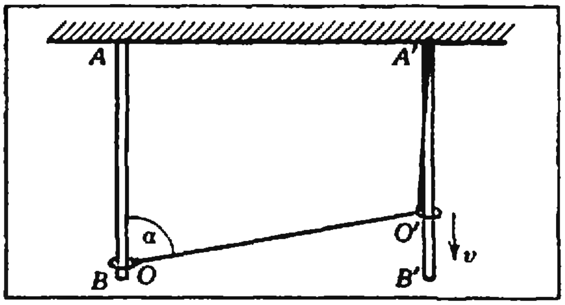


Рис. 5.

Какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы изохорно вернуть его в упомянутое первоначальное состояние?

3. Шесть одинаковых вольтметров соединены между собой, как показано на рисунке 3, и подключены к источнику постоянного напряжения. Один из вольтметров показывает при этом напряжение $U_x=10$ В. Каковы показания остальных вольтметров?

4. Два маленьких шарика разных масс m_1 и m_2 подвешены на двух параллельных невесомых и нерастяжимых нитях так, что касаются друг друга и их центры располагаются на одной высоте. Первый шарик отводят в плоскости нитей на некоторую высоту h_1 таким образом, что нить остается прямой, и отпускают без начальной скорости. Известно, что в результате столкновения шаров первый шар останавливается, а второй поднимается на высоту $h_2=0{,}25\ h_1$. Найдите относительную потерю механической энергии.

10 класс

1. На ленте транспортера, движущейся с постоянной скоростью v_0 вниз под углом α к горизонту, лежит кирпич, удерживаемый от движения вниз вместе с лентой при помощи привязанного к нему шнура, закрепленного наверху (рис. 4). Шнур перерезают. Какую работу совершит сила трения, действующая на кирпич, к тому моменту, когда кирпич приобретет скорость транспортера? Коэффициент трения μ, масса кирпича m.

2. Колечки O и O' надеты на вертикальные неподвижные стержни AB и $A'B'$ соответственно (рис. 5). Нерастяжимая нить закреплена в точке A' и на колечке O и продета сквозь колечко O'. Считая, что колечко O' движется вниз с постоянной скоростью v, определите скорость колечка O в тот момент, когда $\widehat{AOO'}=\alpha$.

3. В предварительно откачанный сосуд объема $V=10^{-3}$ м^3 ввели небольшое количество воды и измерили давление при трех значениях температуры: при $t_1=+60$°C $p_1=1{,}92\cdot10^4$ Па, при $t_2=+90$ °C $p_2=4{,}20\cdot10^4$ Па, при $t_3=+120$ °C $p_3=4{,}55\cdot10^4$ Па. Определите по этим данным массу введенной воды. Какими стали бы давления при этих температурах, если бы массу воды уменьшили на 20 %?

4. Незаряженный конденсатор с емкостью C подключают к последовательно соединенным катушке с индуктивностью L и батарее с напряжением U. Как только ток через катушку упадет до нуля, конденсатор отключают и затем подключают вновь, поменяв местами его выводы. Как только ток через катушку снова упадет до нуля, конденсатор вновь переключают и т. д. Какой максимальный заряд окажется на конденсаторе после того, как его подключали n раз? Активным сопротивлением цепи можно пренебречь.

Экспериментальный тур

8 класс

1. Определите плотность неизвестной жидкости.

Оборудование: сосуд с водой, сосуд с неизвестной жидкостью (раствором соли), две стеклянные трубки, две резиновые трубки, линейка, пластилин, стеклянный тройник, ножницы, насос Шинца.

Примечание. При определении плотности неизвестной жидкости контакта этой жидкости с водой допускать нельзя.

2. Определите коэффициент трения целлулоида о дерево.

Оборудование: целлулоидный шарик для настольного тенниса с отверстием (3—4 мм), линейка деревянная ученическая, сосуд с водой (200 мл), мелкий сухой песок.

9 класс

1. Определите удельную теплоту плавления неизвестного кристаллического вещества.

Оборудование: сосуд с горячей водой, две одинаковые пробирки, неизвестное вещество, термометр, часы с секундной стрелкой.

Плотность вещества и воды, а также удельную теплоемкость воды считать известными: $\varrho_{\text{вещ}}=1{,}7\cdot10^3$ кг/м^3, $\varrho_{\text{воды}}=10^3$ кг/м^3, $c_{\text{воды}}=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

2. Исследуйте зависимость жесткости пружины, самостоятельно изготовленной из медной проволоки, от длины получившейся пружины и ее диаметра.

Оборудование: медная проволока диаметром 1—2 мм, цилиндрические стержни различных диаметров (например, 1, 2, 3 см), линейка, набор разновесов, штатив с двумя лапками, нить.

10 класс

1. Исследуйте зависимость периода малых колебаний линейки, положенной на тело цилиндрической формы, от длины линейки и диаметра цилиндра.

Оборудование: три цилиндра различных диаметров (например, 2, 4, 8 см), три линейки разной длины (например, 25, 50, 100 см), часы с секундной стрелкой.

2. Определите область, в которой можно одновременно видеть светящуюся лампочку, находящуюся на главной оптической оси собирающей линзы, и ее изображение (наблюдение ведется одним глазом).

Оборудование: электрическая лампочка на подставке, источник тока, собирающая линза, соединительные провода, линейка.

Призеры X Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Волгунин А. (Горький, с. ш. № 36),
Парьев В. (п. Красногвардейский Белгородской обл., с. ш.),
Слепухин А. (Калуга, с. ш. № 5),
Тимкин В. (Новосибирск, с. ш. № 110);

по 9 классам —

Баткин Я. (Петрозаводск, с. ш. № 30),
Бергер А. (Иваново, с. ш. № 6),
Бурлука А. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 5),
Земцов П. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Филиппов С. (Белорецк, с. ш. № 14);

по 10 классам —

Астрелин А. (Новосибирск, с. ш. № 119),
Басманова Т. (Магнитогорск, с. ш. № 33),
Богданов А. (Рязань, с. ш. № 14),
Гочев Г. (Дубна, с. ш. № 9),
Лев М. (Свердловск, с. ш. № 130),
Николаев В. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Трусов И. (Орел, с. ш. № 1).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Вайсбурд М. (Томск, с. ш. № 6),
Кларк П. (Тула, с. ш. № 58),
Кожевников А. (Ижевск, с. ш. № 30),
Халочкин Ю. (Брянск, с. ш. № 3);
по 9 классам —
Бирюков А. (Саратов, с. ш. № 13);
Гольденберг И. (Мурманск, с. ш. № 8),
Ковшов Д. (Арзамас, с. ш. № 15),
Назин С. (Ангарск, с. ш. № 10);

по 10 классам —

Кривоносов А. (Свердловск, с. ш. № 37),
Мисник С. (Воронеж, с. ш. № 62),
Маскадынов Е. (Ангарск, с. ш. № 10),
Смирнов А. (Череповец, с. ш. № 12).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Крестьяников А. (Славгород, с. ш. № 10),
Минеев И. (Салехард, с. ш. № 2),
Онацкий А. (Ставрополь, с. ш. № 30),
Фролкин М. (Долгопрудный, с. ш. № 10);

по 9 классам —

Васильев В. (Воронеж, с. ш. № 59),
Кирищин П. (Дубна, с. ш. № 10),
Пантюхина Е. (Омск, с. ш. № 88),
Строев М. (Оренбург, с. ш. № 30),

по 10 классам —

Архипов О. (Бугульма, с. ш. № 2),
Веснин Р. (Петрозаводск, с. ш. № 18),
Курганов Д. (Туапсе, с. ш. № 6),
Румянцев И. (Ангарск, с. ш. № 10),
Струков С. (Воронеж, с. ш. № 85).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Волков О. (Горький, с. ш. № 23),
Дорофеев Д. (Липецк, с. ш. № 1),
Зыряков И. (Братск, с. ш. № 32),
Лукаш А. (п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1);

по 9 классам —

Барзыкин В. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Башкиров В. (Чебоксары, с. ш. № 27),
Бенидюк П. (Пятигорск, с. ш. № 5),
Лобода А. (Прокопьевск, с. ш. № 2);

по 10 классам —

Абрамов В. (Нальчик, с. ш. № 18),
Брезгунов А. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Гринберг М. (Красноярск, с. ш. № 42),
Курников И. (Гатчина, с. ш. № 1),
Макаров Д. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Соловьев А. (Куйбышев, с. ш. № 63).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Боюр Р. (Тольятти, с. ш. № 28),
Орлов Д. (Красноярск, с. ш. № 10),
Трусов А. (Псков, с. ш. № 8),
Чунаев А. (Волгоград, с. ш. № 92);

по 9 классам —

Маточкин С. (Йошкар-Ола, с. ш. № 2),
Михеев А. (Кимры, с. ш. № 13),
Фельдман Л. (Саратов, с. ш. № 13),
Чередниченко С. (Находка, с. ш. № 21);

по 10 классам —

Абанов А. (Красноярск, с. ш. № 170),
Берестов М. (Томск, с. ш. № 77),
Дубинин А. (Электросталь, с. ш. № 21),
Кузнищин К. (Киров, с. ш. № 16),
Соколов Е. (Дятьково, с. ш. № 2),
Ярунин Н. (Павлово, с. ш. № 1).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Комик В. (Ставрополь, с. ш. № 1),
Лебедев Д. (Гатчина, с. ш. № 3),
Раводин М. (Прокопьевск, с. ш. № 2),
Рахамов С. (Казань, с. ш. № 131);

по 9 классам —

Аюков С. (Пенза, с. ш. № 53),
Васильев А. (с. Верхневилюйск ЯАССР, с. ш. № 2),
Кириллов Е. (п. Нововоронежский Воронежской обл., с. ш. № 3),
Севастьянов А. (Северодвинск, с. ш. № 17);

по 10 классам —

Андреев А. (Боровичи, с. ш. № 10),
Беспалов Е. (Курган, с. ш. № 35),
Бияк М. (Краснодар, с. ш. № 27),
Милготик П. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Приходько В. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 14).

Задачи Московской городской математической олимпиады школьников

В 1984 году московская математическая олимпиада проводилась в 47-й раз. Ниже публикуются задачи ее заключительного тура; в скобках указаны фамилии авторов задач.

8 класс

1. Решите уравнение $\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}+x^2-4=0$.

(А. Н. Дранишников)

2. Каждые две из шести ЭВМ соединены своим проводом. Укажите, как раскрасить каждый из этих проводов в один из пяти цветов так, чтобы из каждой ЭВМ выходило пять проводов разного цвета.

(В. Б. Алексеев)

3. Докажите, что сумма расстояний от центра правильного семиугольника до всех его вершин меньше, чем сумма расстояний до них от любой другой точки.

(С. Б. Гашков, А. В. Рябинин)

4. Сумма пяти неотрицательных чисел равна единице. Докажите, что их можно расставить по кругу так, что сумма всех пяти попарных произведений соседних чисел будет не больше $\frac{1}{5}$.

(С. Б. Гашков)

5. Разрежьте квадрат на 8 остроугольных треугольников.

(М. Гарднер)

6. Является ли четным число всех 64-значных натуральных чисел, не содержащих в записи нулей и делящихся на 101?

(С. Б. Гашков)

9 класс

1. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину, а боковые грани — одинаковую площадь. Докажите, что основание этой пирамиды — равнобедренный треугольник.

(А. Н. Дранишников)

2. Каждые две из 13-ти ЭВМ соединены своим проводом. Можно ли раскрасить каждый из этих проводов в один из 12-ти цветов так, чтобы из каждой ЭВМ выходило 12 проводов разного цвета?

(В. Б. Алексеев)

3. Некоторый треугольник можно вырезать из бумажной полоски единичной ширины, а из любой полоски меньшей ширины его вырезать нельзя. Какую наименьшую площадь может иметь этот треугольник?

(С. Б. Гашков)

4. По кругу расставлено не менее четырех неотрицательных чисел, в сумме равных единице. Докажите, что сумма всех попарных произведений соседних чисел не больше $\frac{1}{4}$.

(С. Б. Гашков, А. Н. Дранишников)

5. Существуют ли три ненулевые цифры, с помощью которых можно составить бесконечное число десятичных записей квадратов различных целых чисел?

(С. Б. Гашков)

6. В прямоугольнике размера 3×4 произвольно расположены 4 точки. Докажите, что между какими-то двумя из них расстояние не больше, чем $\frac{25}{8}$.

(С. Б. Гашков)

10 класс

1. Не используя калькуляторов, таблиц и т. п., докажите неравенство $\sin 1<\log_3\sqrt{7}$.

(И. Н. Сергеев)

2. Жюри олимпиады решило по ее результатам сопоставить каждому участнику натуральное число таким образом, чтобы по этому числу можно было однозначно восстановить баллы, полученные участником за каждую задачу, и чтобы из каждых двух школьников бо́льшее число сопоставлялось тому, кто набрал бо́льшую сумму баллов. Помогите жюри решить эту задачу!

(И. Н. Сергеев)

3. Решите уравнение в целых числах $19x^3-84y^2=1984$.

(В. Б. Алексеев)

4. В некотором царстве, в некотором государстве было выпущено неограниченное количество монет достоинством в n_1, n_2, n_3, ... копеек, где $n_1<n_2<n_3<\ldots$ — бесконечная последовательность, состоящая из натуральных чисел. Докажите, что эту последовательность можно оборвать, т. е. найдется такое число N, что любую сумму, которую можно уплатить без сдачи выпущенными монетами, на самом деле можно уплатить только монетами достоинством в n_1, n_2, ..., n_N копеек.

(С. Б. Гашков, И. Н. Сергеев)

5. Квадрат разрезан на остроугольные треугольники. Докажите, что их не меньше 8.

(М. И. Гринчук)

6. Треугольное сечение куба касается вписанного в куб шара. Докажите, что площадь этого сечения меньше половины площади грани куба.

(С. Б. Гашков)

Решение уравнений на микрокалькуляторе

2. $x_n = \sqrt[2^{2n}]{a^{\frac{2^{2n}-1}{3}}}$.

4. а) $x_{n+1} = \sqrt[2^1]{a}\cdot\sqrt[2^1]{ax_n}$. б) $x_{n+1} = \sqrt{\frac{a}{x_n}}$,

в) $x_{n+1} = \frac{a}{x_n^2}$.

5. а) $x_{n+1} = \sqrt[2^1]{a}\cdot\sqrt[2^3]{\frac{a}{x_n}}$, б) $x_{n+1} = \sqrt[2^1]{a}\cdot\sqrt[2^2]{\frac{a}{x_n}}$.

6. ⊡ $x_0 \times a \sqrt{\ } = \sqrt{\ }\ \sqrt{\ } \times a \sqrt{\ } = \sqrt{\ }\ \sqrt{\ }$ … ind $(\sqrt[3]{a})$.

7. $x=\sqrt[4]{a}$.

8. а) 2,154435, б) 9,109767, в) 1,872172, г) 2,524239, д) 2,261022, е) 1,731345, ж) 1,608334.

9. а) $x_1=57{,}62784$; $x_2=1{,}572158$. б) $x=8{,}502572$. в) $x=14{,}79361$. г) $x=3{,}371635$. д) $x=1{,}765015$. е) $x=1{,}518512$. ж) $x_1=19{,}22910$; $x_2=4{,}715751$. з) $x=3{,}546518$. и) $x_1=3{,}920271$; $x_2=1{,}114004$. к) $x_1=9{,}844947$; $x_2=2{,}293349$.

Где ошибка?

Ошибка в построении образа точки C. На окружности S_2 существуют две точки, удаленные от A_1 на расстояние $|AC|$ — точки C_1 и C_2 (рис. 1), т. к. окружности S и $\mathcal{E}$ пересекаются в двух точках. Из этих двух точек нужно взять точку C_2, поскольку угол $\angle \hat{C}OC_2=\alpha$. Отметим, что если мы неверно построим также образ точки B, взяв точку B_2, то получившийся треугольник $A_1C_1B_2$ будет равен треугольнику ABC, но не будет являться его образом при повороте на угол α вокруг точки O.

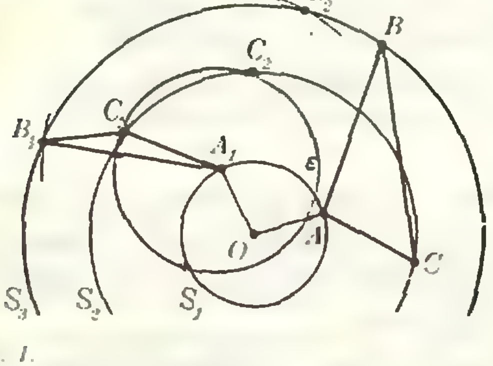


Рис. 1.

Еще прием самоконтроля

1. $\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$.
2. $2\sin 2\alpha\cos\alpha+4\cos 2\alpha\ \sin\alpha-3\sin 3\alpha=-\sin\alpha$.
3. $a\cos x-b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi)$.

Надо ли делать проверку?

1. 4. **2.** −10; 6. **3.** 2. **4.** 1. **5.** 2; 3. **6.** 1.

Избранные школьные задачи

1. Ответ. 27,4 км. Указание. Проще всего «забыть» про Васю и воспользоваться тем, что расстояние s — 12 (км) Петя, двигаясь со скоростью 14 км/ч, проедет на 11 мин быстрее, чем если бы он двигался со скоростью 12 км/ч.

2. Ответ: 1938. Указание. Запишите искомый год в виде $1900+10x+y$ и решите относительно цифр x и y уравнение $59-10x-y=1+9+x+y$.

3. Ответ. $3+3\sqrt{3}$. Указание. Так как $(OT)\perp(BC)$, а BO и CO — биссектрисы, то легко найти углы $\angle OBT=45°$ и $\angle OCT=30°$.

4. Возведите первое неравенство в квадрат и отнимите второе.

5. Ответ. Да (в обоих случаях). Разбиение показано на рисунке 2 для четных n и рисунке 3 для нечетных n, где n — число квадратов в разбиении ($n\geqslant4$).

6. Ответ. 15 и 20 лет. Указание. Задача сводится к решению системы уравнений

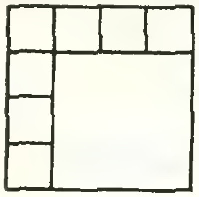


Рис. 2.

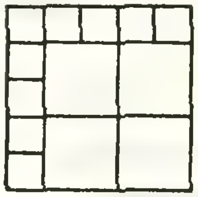


Рис. 3.

$$\begin{cases} x+y=35, \\ y=2(x-(y-x)). \end{cases}$$

7. Указание. Продолжите боковые стороны трапеции до пересечения, проведите медиану в полученном прямоугольном треугольнике и найдите длину первого отрезка l, $l=\frac{a-b}{2}$, где a и b — длины оснований трапеции, $a>b$. Этому же числу (причем в любой трапеции) равна длина второго отрезка.

8. Указание. Достаточно проверить, что больший отрезок меньше суммы двух других: $(a+b)<b+c$, т. е. что $a<c$, а это верно, т. к. в треугольнике ABC против большего угла $\hat{C}=120°$ лежит большая сторона.

9. Ответ. 1, 3, 9 или 1/9, −5/9, 25/9.

10. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{1982}$ — длины последовательных сторон 1982-угольника. Если предположить противное, то $a_1a_2\geqslant2$, $a_2a_3\geqslant2$, …, $a_{1981}a_{1982}\geqslant2$, $a_{1982}a_1\geqslant2$. Применив неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, получим 1982 неравенства: $(a_1+a_2)/2\geqslant\sqrt{a_1a_2}\geqslant\sqrt{2}$, $(a_2+a_3)/2\geqslant\sqrt{2}$ и т. д. Сложив все эти неравенства, получим: $a_1+a_2+\ldots+a_{1982}\geqslant1982\sqrt{2}>2000$, что противоречит условию.

11. Ответ. $\pi/4+\pi k/2$, $k\in\mathbb{Z}$. Указание. $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-0{,}5\sin^2 2x$.

12. Ответ. $x=0$ при $a\leqslant0{,}5$, $x=\pm\sqrt{a-0{,}5}$ при $a>0{,}5$. Указание. Достаточно найти наименьшее значение функций $f(x)=x^2+(x^2-a)^2$ ($f(x)$ — квадрат расстояния между данной точкой и точкой параболы с абсциссой x). Докажите, что это значение достигается в одной из критических точек функции $f(x)=0$ и $x=\pm\sqrt{a-0{,}5}$ при $a>0{,}5$) и сравните $f(0)$ и $f(\pm\sqrt{a-0{,}5})$.

13. Ответ. Например, $(x^2-10)^2=84$. Указание. Достаточно заметить, что число $((\sqrt{3}+\sqrt{7})^2-10)^2$ — целое.

14. Неравенство достаточно доказать для $x \in [0;\ \pi/2]$. При $x=0$ неравенство очевидно, и на промежутке $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ функция cos убывает, и $\sin x<x$. Поэтому $\cos x<\cos(\sin x)$, а $\sin(\cos x)<\cos x$.

15. Ответ. 60°. Указание. Угол TOP (в любом треугольнике) равен $90°+\hat{A}/2$. Из условия «точки A, P, O и T лежат на одной окружности» следует, что либо $\bar{A}=\widehat{TOP}$, откуда $\hat{A}=180°$ (что невозможно), либо $\hat{A}+\widehat{TOP}=180°$, откуда $\hat{A}=60°$.

Передача электроэнергии на расстояние

1. $e=n\Phi'(t)=314\ \sin 314t$ (в единицах СИ); $\mathcal{E}\approx 222$ В.

2. $\dfrac{U'}{U}=\sqrt{\dfrac{\Delta W_{\text{п}}/t}{0{,}001P}}\approx 3$ (здесь $t=1$ сутки $=24$ ч).

3. $m=\dfrac{4D\varrho l^2P}{0{,}08U^2}\approx 1970$ кг ≈ 2 т.

X Всероссийская олимпиада школьников

Математика

8 класс

1. Утверждение следует из того, что три квадрата при каждой из 8 вершин куба должны быть раскрашены по-разному. Развертка куба, раскрашенного требуемым образом, показана на рисунке 4.

2. См. рис. 5.

3. Пусть прямая AB пересекает окружности с центрами O_2 и O_3 в точках D и D', соответственно (рис. 6). Окружность O_2 симметрична окружности O_1 относительно точки A, поэтому $D=Z_A(B)$, то есть $|AD|=|AB|$. Окружность O_3 гомотетична O_1 с центром B и коэффициентом 2, поэтому $D'=H_B^2(A)$, то есть $|BD'|=2|BA|$. Следовательно, точка D совпадает с D' и принадлежит обеим окружностям O_2 и O_3.

5. Решение этой задачи — М888 — будет опубликовано в «Кванте» № 1 за 1985 г.

9 класс

1. $n=5$. Числа 2^n при $n\leqslant 5$ проверяются непосредственно. При $n\geqslant 6$, пользуясь тем, что число, образованное последними k цифрами числа 2^n (при $2^n\geqslant 10^k$), должно делится на 2^k и тем, что сумма цифр рассматриваемых чисел равна 5, последовательно устанавливаем, что последняя цифра этих чисел может равняться только 2, две последних — 12, три последних — 112. Остается заметить, что $1112=2^3\cdot 139$, $10112=2^7\cdot 79$, а числа, кончающиеся на 00112 не делятся на 32, то есть при $n\geqslant 6$ решений нет.

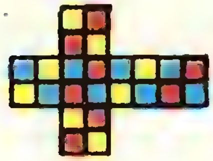


Рис. 4.

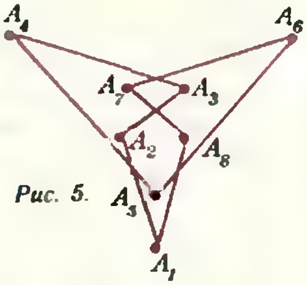


Рис. 5.

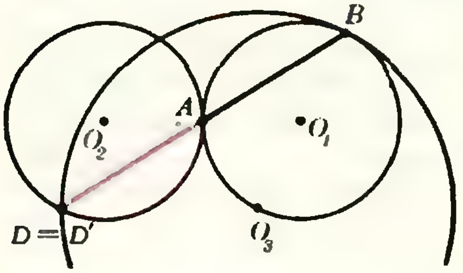


Рис. 6.

2. Нельзя. Указание. Четность числа плюсов в левом верхнем квадрате 2×2 таблицы при указанных операциях не меняется.

3. Максимальное значение рассматриваемой разности равно 396 и достигается для чисел 620 и 621, минимальное положительное — 3, оно достигается, например, для числа 437. Указание. Для числа $abc=100a+10b+c$ рассматриваемая разность равна $(100a-a^3)+(10b-b^3)+(c-c^3)$. Наибольшее значение каждого из этих трех слагаемых можно найти перебором. Для нахождения наименьшего значения разности можно заметить, что каждое слагаемое делится на 3 при любых целых a, b, c.

4. Решение этой задачи — М887 — будет опубликовано в «Кванте» № 1 за 1985 г.

5. Решение этой задачи — М889 — будет опубликовано в «Кванте» № 1 за 1985 г.

10 класс

2. Функция $h(t)=t+\sin t$ строго возрастает, поэтому из равенства $g(x+T)=g(x)$, то есть $h(f(x+T))=h(f(x))$, вытекает, что $f(x+T)=f(x)$.

3. а) Не могут. После каждого поворота сумма всех чисел (первоначально равная нулю), увеличивается на $1+2+\ldots+12=78$, а в итоге она должна стать равной $12\cdot 1984$. Но это число не делится на 78.

б) Не могут. Указание. Предположим, что после нескольких поворотов число 1984 оказалось записанным, например, против чисел 12, 1, 2, ..., 10 на циферблате в исходном положении, и пусть среди этих поворотов было x_k ($k=1, 2, \ldots, 12$) поворотов на угол $k\cdot 30°$. Тогда целые неотрицательные числа $x_1, \ldots, x_{12}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+\ldots+11x_{11}+12x_{12}=1984, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+\ldots+12x_{11}+x_{12}=1984, \\ 3x_1+4x_2+5x_3+\ldots+x_{11}+2x_{12}=1984, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 10x_1+11x_2+12x_3+\ldots+8x_{11}+9x_{12}=1984, \\ 11x_1+12x_2+x_3+\ldots+9x_{11}+10x_{12}=1984. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что $x_3=x_4=\ldots=x_{12}$, $x_1=79x_3-1984$, $x_2=1984-77x_3$. Из двух последних уравнений следуют неравенства $1984/79\leqslant x_3\leqslant 1984/77$, но целых чисел, удовлетворяющих этим неравенствам, не существует. Противоречие.

в) Могут. Для доказательства достаточно заметить, что первые 10 уравнений системы пункта б) имеют решение в целых неотрицательных числах, например, $x_1=61$, $x_2=0$, $x_3=17$, $x_4=x_5=\ldots=x_{12}=26$.

4. См. решение задачи М890 в Кванте № 1 за 1985 г.

5. Указание. Точки A' и B' могут лежать в одной плоскости только с вершинами A и B, поэтому прямые AA' и BB' пересекаются. Точно так же доказывается, что любые две из прямых AA', BB', CC' и DD' пересекаются. А поскольку они не лежат в одной плоскости, все они должны иметь общую точку.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. $\mu=\mathrm{tg}\,\alpha$; $N=mg\cos\alpha$.

2. $t=\tau(k+\sqrt{k(k-1)})=3\tau$.

3. $R_{\text{из}}=\dfrac{R(nR_1-(n-1)R)}{n^2(R-R_1)}=0{,}5$ Ом.

4. $T=\dfrac{m_1m_2g\cos^2\alpha}{m_1+m_2\sin^2\alpha}$.

9 класс

1. Искомая сила $\vec{F}_{\min}$ должна быть направлена слева направо и приложена на высоте $h=l/(2\mu_2)$. Ее модуль $F_{\min}=\mu_2mg$.

2. $Q=3/8Q_0$.

3. Вольтметр *3* всегда показывает 0. Если 10 В показывает вольтметр *5*, то остальные (*1, 2, 4, 6*) вольтметры показывают по 5 В каждый. Если же 10 В показывает один из (*1, 2, 4, 6*) вольтметров, то вольтметр *5* показывает 20 В.

4. $\Delta E/E=1-\sqrt{h_2/h_1}=1/2$; другими словами, $\Delta E/E=50\,\%$.

10 класс

1. $A=\dfrac{mv_0^2}{2}\,\dfrac{\mu}{\mu+\mathrm{tg}\,\alpha}$.

2. См. решение задачи Ф868 («Квант», 1984, № 7).

3. В состояниях *2* и *3* пар ненасыщенный, поэтому для расчета массы можно воспользоваться значениями t_2, p_2 или t_3, p_3. Например, $m=Mp_2V/(RT_2)\approx2{,}5\cdot10^{-4}$ кг. При уменьшении массы воды давления станут равными: $p_1'=p_1$, $p_2'=p_2m'/m=0{,}8p_2$, $p_3'=0{,}8p_3$ (в состоянии *1* пар в обоих случаях насыщенный).

4. $q_n=2nCU$.

Вниз по кроличьей норе
(см. «Квант» № 7)
Задачи

1. Ответ. Алиса ошиблась: такого количества цифр не может потребоваться для нумерации всех страниц книги.

Решение. Сначала заметим, что если количество страниц в книге четырехзначно, то потребуется по крайней мере $3\,900+2\cdot90+9>373$ цифр. Если число страниц двузначно, то понадобится не меньше, чем $9+2\cdot90=189<373$ цифр. Если же в книге трехзначное число страниц, то понадобится всего $9+189+3\cdot k$ цифр (k — количество страниц, нумеруемых трехзначными числами). Это число делителя на 3 и, следовательно, не равно 373 ни при каком k.

2. Если решать эту задачу, предполагая, что на циферблате стоят арабские цифры и что числа 10, 11 и 12 не могут «расколоться», то есть что каждое из них стоит на своем куске целиком, то получается такой ответ: а) может; б) может; в) не может. Для случаев а) и б) легко строятся примеры. В случае в) воспользуйтесь тем, что сумма всех чисел на циферблате равна $1+2+\ldots+12=78$ и не делится на 4.

Если же считать, что двузначные числа 10, 11 и 12 тоже могут расколоться так, что их разные цифры могут оказаться на разных кусках, получается уже другая задача: на какое вообще количество кусков можно разбить циферблат так, чтобы суммы чисел на всех кусках оказались равными.

И, наконец, если использовать римские цифры, то получится еще одна задача про расколотый циферблат.

Попробуйте решить и эти задачи. При этом следует помнить, что при переворачивании римских цифр могут получаться другие числа. Например, из IX при переворачивании получается XI.

3. Ответ. В первой банке малиновое, во второй земляничное, в третьей клубничное варенье.

4. Ответ. 25 ступеней. Указание. От первого до пятого этажа четыре пролета по 25 ступеней в каждом.

5. Ответ. Она должна спросить: «Живете ли вы в этой стране?» В стране *А* ей ответят «да», в стране З: «нет».

6. Ответ: а) через $\dfrac{12}{11}$ часа, то есть в 13 час $5\dfrac{5}{11}$ мин; б) 23; в) 43.

Указание. а), б) За 1 час минутная стрелка делает 1 оборот вокруг своей оси, часовая — $\dfrac{1}{12}$ оборота. Если стрелки совпадут через t часов, то $t-\dfrac{t}{12}=n$, где n — целое число. Таким образом, часовая и минутная стрелки совпадают в моменты времени $t=\dfrac{12}{11}n$.

в) Рассуждая, как в случаях а) и б), получим соотношения $t-\dfrac{t}{12}=\dfrac{2n+1}{4}$, где n — целое число.

7. Ответ: $2^{10}=1024$ способа. Указание. Каждая из 10 ламп может независимо от остальных находиться в двух состояниях: гореть или не гореть.

8. Ответ. Нельзя. Указание. На плане имеются три комнаты с пятью дверями в каждой. Легко понять, что из комнаты с нечетным числом дверей нельзя выйти и войти одинаковое количество раз. Поэтому прогулка должна начинаться и кончаться в одной из таких комнат. Задача-шутка. Вам никто не мешает выйти из комнаты, где находится норка, а затем вползти в нее (в комнату!).

9. Ответ. В пузырьке не яд. *Y* — лжец. Указание. *X* и *Y* не могут быть оба жителями страны *А*, так как их высказывания противоречат друг другу. Если *X* — житель страны *А*, то он говорит правду, и *Y* — лжец. Если *X* — лжец, то *Y* — тоже лжец (если бы *Y* был жителем страны *А*, то сказанное *X* было бы правдой). Поэтому в пузырьке не яд, а *Y* — житель страны З.

10. Ответ. Задача имеет два решения:

$$\begin{array}{r}+\begin{array}{r}49680\\535\end{array}\\\hline 50215\end{array}\qquad\begin{array}{r}+\begin{array}{r}49630\\585\end{array}\\\hline 50215\end{array}$$

Вопросы

1. Сестра, конечно, была старшей. А, иначе, почему бы она с интересом читала книжку, в которой не было ни картинок, ни разговоров.

2. Высота голоса любого живого существа определяется размером и натяжением голосовых связок. Считая, что слон «говорит» басом (он большой), легко понять, что кролик говорил бы очень тонким голосом (он маленький).

3. В сказке могла, а на самом деле нет (если только не воспользуется парашютом).

4. Если Алиса отпустит банку, то банка будет падать рядом с ней, постепенно отставая из-за сопротивления воздуха.

5. Прежде чем попасть в шкаф, банка имела большую скорость, поэтому очень вероятно, что она разбилась. Однако Алиса может и не узнать

об этом, потому что скорость ее падения может превзойти скорость, с которой звук от разбитой банки ее догоняет.

6. Широта и долгота — это угловые координаты, определяющие положение точки на поверхности земного шара. Если вы сейчас находитесь в точке A, которая имеет α° северной широты и β° восточной долготы, то ваш «антипод» находился бы в точке α° южной широты и $180^\circ-\beta^\circ$ западной долготы. Например, из австралийского города Перт, пройдя в сквозь Землю, вы вынырните в районе Бермудских островов.

7. Чем меньше, тем лучше.

9. Для этого, например, можно взбираться в мокрой одежде.

Море слез
(см. «Квант» № 8)

Задачи

1. 35 перчаток. 2. Алиса была в белом платье, Мейбл в синем, а Ада — в зеленом.

3. Возможны в других системах счисления. Например, $4\cdot6=13_{21}$ в системе счисления с основанием 21 $(24=1\cdot21+3)$.

4. Ответ. 16 ч $36\frac{12}{13}$ мин. Решение. Часы в момент остановки показывают без чего-то пять часов, то есть 4 ч t мин. При этом минутная стрелка прошла полкруга, то есть 180° и еще α°, а часовая не дошла α° до середины круга. За 1 минуту минутная стрелка поворачивается на 6°, а часовая на 0,5°. За t минут минутная стрелка повернется на $t\cdot6^\circ=180^\circ+\alpha$, а часовая на $60^\circ-\alpha^\circ=t\cdot0{,}5^\circ$. Отсюда $t=36\frac{12}{13}$ мин.

5. Ответ. Не догонит. Указание. Кошке до норки 7 прыжков. За 7 прыжков кошки мышка сделает 21 шаг и скроется в норке.

6. Ответ. Кошке следует расположиться в центре описанной около $\triangle ABC$ окружности, если треугольник ABC не тупоугольный, и в середине наибольшей стороны, если ABC — тупоугольный треугольник.

7. Ответ. $2401=(2+4+0+1)^4$. Указание. Число л+о+р+и — однозначное, не меньшее 5.

8. Ответ. За 27 секунд.

Вопросы

1. 4. В футе 12 дюймов. Рост Алисы после того, как она увеличилась, стал равен 9 футам. Поэтому она выросла в $\frac{9\cdot12}{10}=10{,}8\approx11$ раз. Все время, пока Алиса росла, она говорила. Оцените, сколько секунд вам понадобится, чтобы произнести все сказанное ею до удара головой о потолок. Естественно, у разных читателей получатся разные результаты. Это поможет каждому из вас оценить скорость роста Алисы.

Вес Алисы увеличился приблизительно в $11^3=1331$ раз. Если «маленькая» Алиса весила хотя бы 1 килограмм, то «выросшая» Алиса весила бы больше тонны. И наплакать лужу она может довольно большую, если она плакса, так что, уменьшившись до размеров Мыши, она смогла бы плавать в такой луже (или даже утонуть).

2. Об этом шла речь раньше. Голос Алисы, по-видимому, станет густым басом.

3. Самые нижние части закраин (реборд) колес движутся в направлении, противоположном направлению движения.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. И. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров,
Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. М. Аратовский, Т. А. Доброхотова-Майкова,
М. Б. Дубах, А. И. Климанов, В. С. Коваль, Н. С. Кузьмина,
С. Ф. Лухин, Ю. П. Мартыненко, И. Е. Смирнова,
Е. С. Щабельник

Фото представили:
Р. Е. Зыков, В. И. Ободзинский

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 20.8.84 Подписано к печати 20.9.84.
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,29 Т-18332
Тираж 172 727 экз. Цена 40 коп. Заказ 2234

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЭВМ ПРОТИВ ГРОССМЕЙСТЕРА

В «Кванте» № [illegible] за этот год рассказывалось о двух партиях А. Карпова с микрокомпьютерами. Встречаются иногда гроссмейстеры и с большими компьютерами.

Любопытная партия (один на один) была сыграна между экс-чемпионкой мира среди машин программой «Белл» и экс-чемпионом мира в игре по переписке, специалистом в области машинных шахмат Г. Берлинером.

«Белл» — Берлинер
Защита Алехина

1.e4 Kf6 2.e5 Kd5 3.d4 d6 4.Kf3 g6 5. c4 Kb6 6.ed cd 7.Ce2 Cg7 8.0—0 0—0 9.Ce3 Kc6 10.Kc3 d5! Если до сих пор компьютер мог обращаться к дебютной библиотеке, то сейчас он вынужден принимать самостоятельные решения,— последний ход черных является теоретической новинкой. **11.c5 Kc4 12. C:c4 dc 13.Фe2 Cg4 14.Лad1.** В сложном положении черные затевают интересные осложнения, которые в конечном итоге складываются в их пользу. **14...K:d4 15.C:d4 C:d4 16.Л:d4.** После 16.Kb5 e5 17.Kb:d4 ed 18.Ф:c4 C:f3 19.gf Фf6 позиция принимала ничейные очертания. «Белл» избирает вариант, который ведет к выгодному материальному соотношению для белых. Конечно, компьютеру трудно было сообразить, что его кони окажутся не слишком подвижными. **16...Ф:d4 17.K:d4 C:e2 18.Kd:e2 Лfd8 19.b3!** (19.Лd1 Л:d1 20. K:d1 Лc8 с явным перевесом у черных).

19...cb 20.ab Лd2 21.f4! Лb2 22.Kd4 Лd8 23.Ka4. Белые изобретательно защищаются, если 23.Лd1, то 23...f6 и 24... e5. **23...Лd2 24.Kb5 a6 25.Kbc3 Лc2 26.Лd1 Лdd2 27.Л:d2 Л:d2 28.g3 f5 29.h3 Kpf7 30.Kpf1 e5! 31.fe Kpe6 32.Kb6 Лc2 33.Ke2 Kp:e5 34.Kpe1 Kpe4 35.Kc4 g5! 36.Kpd1 Л:c4 37.bc Kpd3 38. Kg1?**

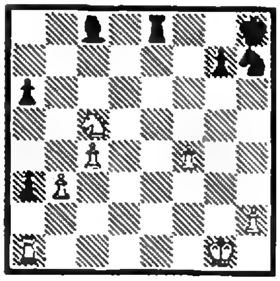
Несмотря на упорное стремление черных к победе, машина до сих пор не упустила шансов на ничью. Сейчас следовало продолжать 38.h4! h6 39.hg hg 40.Kg1 Kpe3 (40...g4 41.Ke2 Kp:c4 42.Kpd2 a5 43.Kpc2) 41.Kh3 f4 42.K:g5! fg 43.Kpc2 g2 44.Kh3 Kpd4 45.Kpd3, и выигрыша нет. **38...g4?** Взаимная любезность, после 38...Kpe3 39.Ke2 a5 белые оказывались в цугцванге. Ошибаются не только машины, но и люди. **39.h4?** Белые не используют последний шанс — 39.hg fg 40. Ke2 Kp:c4 41.Kf4 и т. д. **39...Kpe3! 40.Ke2 Kpf2 41.Kpd2 a5! 42.Kpd3 a4! 43.Kd4 a3 44.Kpc2 a2 45.Kpb2 f4 46.Kf5 fg. Белые сдались.** Поединок небезошибочный, но погрешности машины носят вполне человеческий характер.

Если в серьезной партии ЭВМ пока что далеко до гроссмейстеров (лучшие программы свои лучшие партии проводят на уровне кандидата в мастера), то в блице или сеансе одновременной игры они время от времени берут верх над знаменитыми шахматистами. Однажды, например, компьютер одолел английского гроссмейстера М. Стина.

«Чесс» — Стин
Ферзевое фианкетто

1.e4 b6 2.d4 Cb7 3.Kc3 c5 4.dc bc 5.Ce3 d6 6.Cb5+Kd7 7.Kf3 e6 8.0—0 a6 9.C:d7+Ф:d7 10.Фd3 Ke7 11.Лad1 Лd8 12. Фc4 Kg6 13.Лfe1 Ce7 14.Фb3 Фc6 15.Kph1 0—0 16.Cg5 Ca8 17.C:e7 K:e7 18.a4 Лb8 19.Фa2 Лb4 20.b3. Гроссмейстер избрал скромное начало, машина тоже ведет партию бесхитростно, в основном делая развивающие ходы. Поэтому, хотя положение черных и предпочтительнее, решающим образом разница в классе пока не сказалась. Последующая азартная игра черных является типичной для блицпартии. В турнирной встрече Стин избрал бы более надежное продолжение. **20...f5 21.Kg5 fe 22.Kc:e4.** Соблазн вскрыть большую диагональ и линию «f» был велик, но использовать это обстоятельство не удается, а центр черных заметно ослабляется. **22...Л:f2?** Проигрывающий ход. Наверное, гроссмейстер рассчитывал быстро закончить дело путем 23.K:f2 Ф:g2Х. Однако последовало **23.Л:d6 Ф:d6 24.K:d6 Л:g2 25.Kge4 Лg4 26.c4 Kf5 27.h3 Kg3+ 28.Kph2 Л:e4 29. Фf2 h6 30.K:e4 K:e4 31.Фf3,** и через несколько ходов черные сдались.

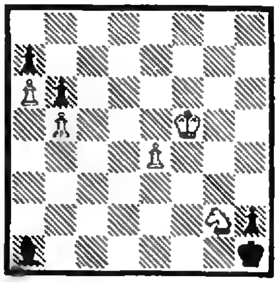
Самая трудная стадия игры для ЭВМ — эндшпиль, поскольку перебор вариантов (основное оружие компьютера) имеет здесь весьма относительную ценность. Впрочем, если окончание носит тактический, комбинационный характер, то машина может показать свои лучшие качества. Вот как завершилась сеансовая партия между компьютером и гроссмейстером У. Брауном.



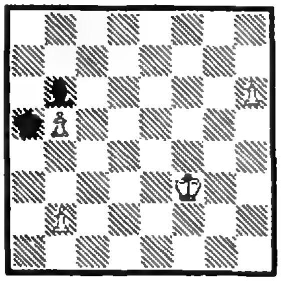
Браун — «Чесс»

Белые собираются взять на a3, после чего реализация лишней фигуры не так проста. Вторая чемпионка мира среди ЭВМ находит энергичный путь к цели. **47...g5! 48.fg Лe5 49.b4 a5! 50.Kd3 Л:g5+ 51.Kpf2 ab 52.K:b4 Лa5 53.Kpe3** (53.Kc2 a2 54.Kb4 Лa4 55.K:a2 Ce6) **53...Ce6 54.Kpd4 Kg5! 55.Kc2 a2 56.Kb4 Лa4 57.Kpc5 Ke4+ 58.Kpb5 Cd7+ 59.Kc6 Kc3+ 60. Kpc5 C:c6** и через несколько ходов белые сдались.

Конкурсные задания



19. Белые начинают и выигрывают.

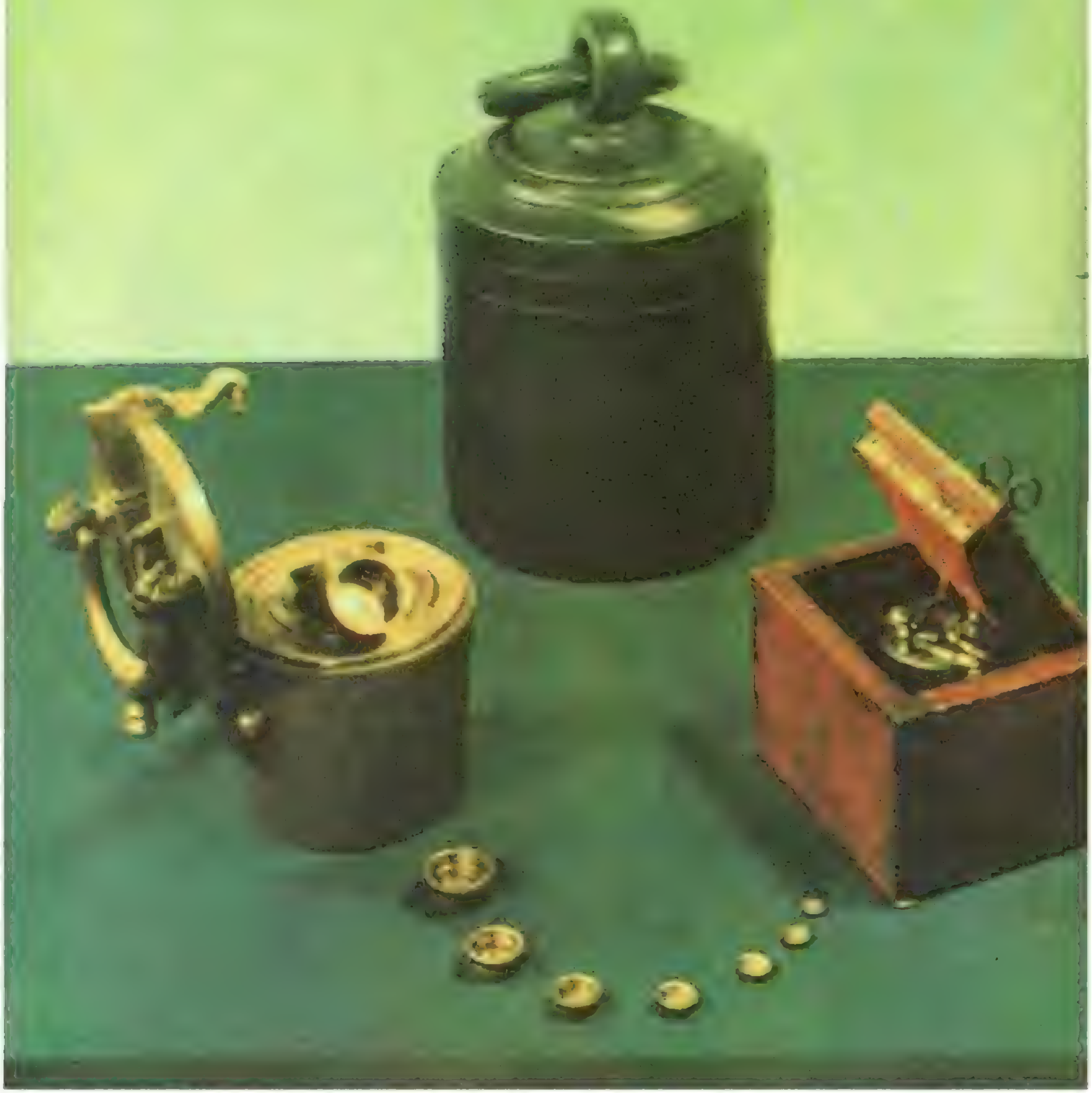


20. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 декабря 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 19, 20»).

Физика изучает только такие свойства тел, которые могут быть выражены числом, и для изучения этих свойств в физике вводятся физические величины, характеризующие те или иные свойства (о том, как это делают, рассказано в статье академика И. К. Кикоина в этом номере журнала). Для каждой физической величины должен быть указан способ ее измерения. Измерить физическую величину — это значит сравнить ее с однородной величиной, принятой за единицу. Для такого сравнения необходимо какое-либо устройство или тело, которое воспроизводило бы единицу данной величины. Такие устройства называют мерами. Для каждой физической величины приняты свои единицы измерения и, соответственно, свои меры. Например, миллиметровая линейка, сантиметр, которым пользуются портные,— это меры длины; гири и разновески — меры массы и т. д. Каждая мера с той или иной точностью воспроизводит эталон, который принят за единицу данной величины. Эталон массы — это, как известно, специально изготовленный цилиндр из сплава платины и иридия. Масса этого цилиндра — ее называют килограммом — и принята за международную единицу массы.

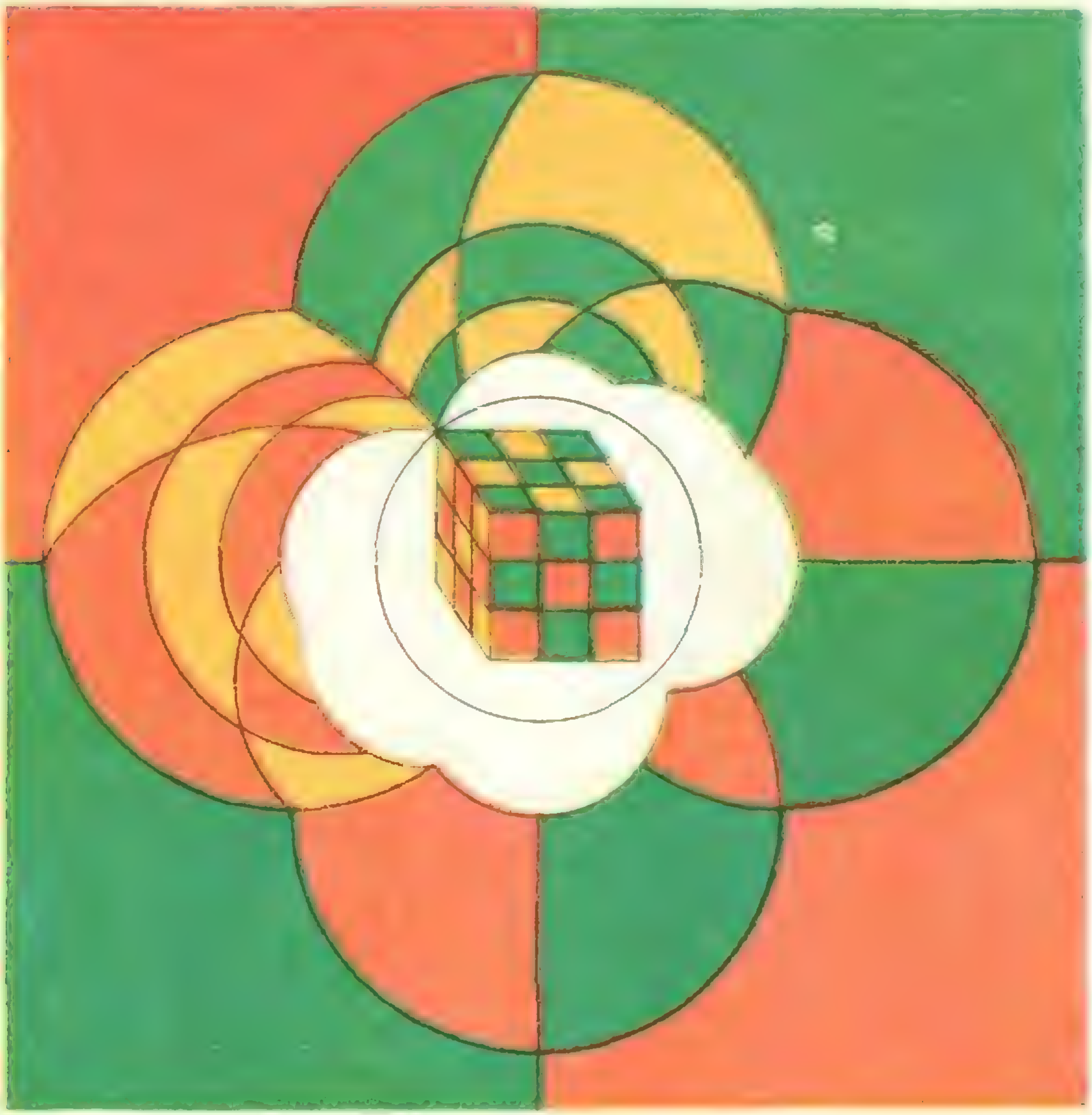
Килограмм как эталон массы получил «международное признание» сравнительно недавно — в начале XX века. А измерения массы производились с незапамятных времен, и в незапамятные времена существовали меры и приборы для измерения массы. По нашим сегодняшним представлениям они были примитивны и неудобны. С развитием культуры, науки и техники они совершенствовались, число их росло. Со временем стала очевидной необходимость создания эталонов, «хранящих» единицы измерения. На приведенной здесь фотографии вы видите сделанные из бронзы разновески, которые воспроизводили единицы массы, принятые в некоторых странах Европы специальным соглашением в 1570 году, и гирю, которой пользовались в те времена в быту (в настоящее время они хранятся в одном из музеев в Брюсселе).



Цена 40 коп.

Индекс 70465

На этой картинке художник сумел «вывернуть наизнанку» кубик Рубика. Если быть более точным, здесь показана инверсия изображения кубика Рубика относительно содержащей его черной окружности. Об инверсии можно прочитать в «Кванте» № 5 за этот год на с. 26. О кубике Рубика «Квант» писал неоднократно, в последний раз — в № 9 за 1983 год на с. 33.



НОМЕР
11

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант

11 1984

Основан в 1970 году

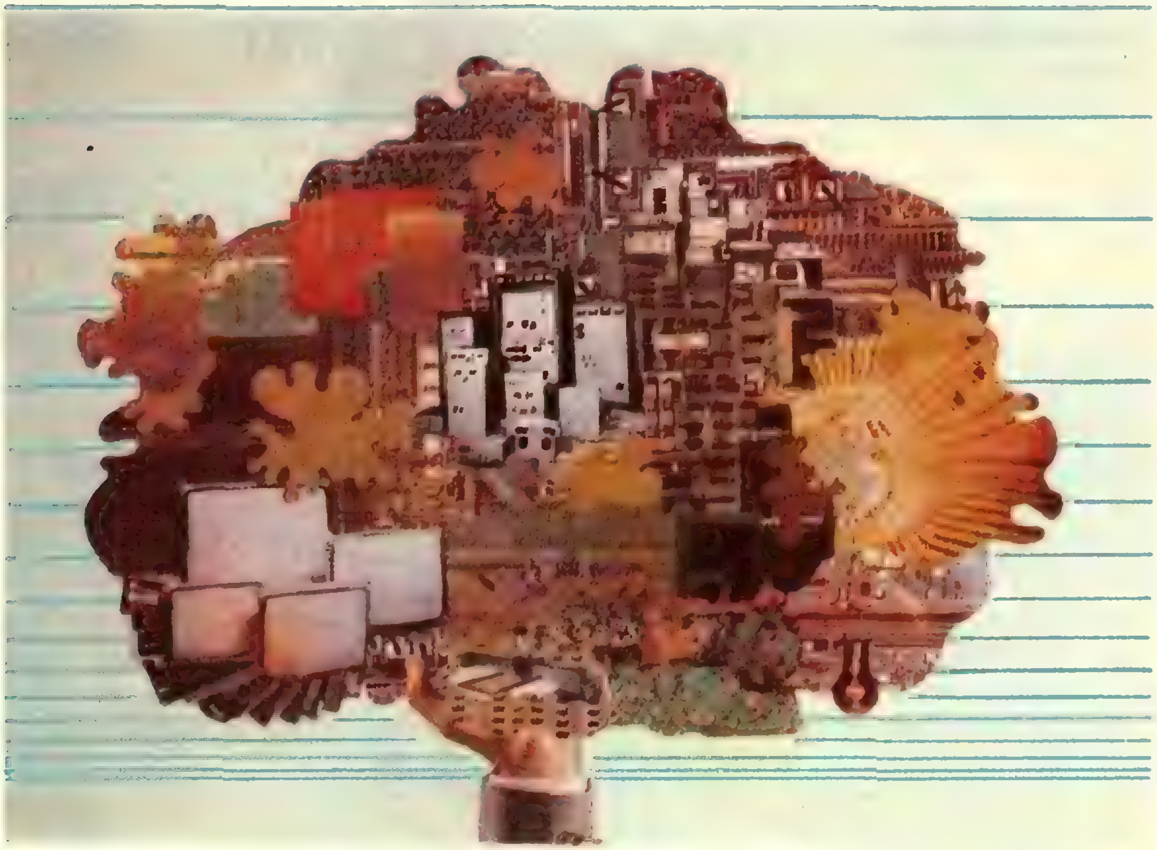
Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	*Д. Г. Крутогин, Л. М. Летюк, А. Т. Морченко.* Магнитная память ЭВМ	*D. G. Krutogin, L. M. Letyuk, A. T. Morchenko.* Magnetic computer memory
10	*С. Г. Гиндикин.* Высокой геометрии начала...	*S. G. Gindikin.* Thus "high geometry" began...
	Новости науки	**Science news**
9	Гало и лед	Halo and ice
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
19	*А. А. Лапидес.* Несколько опытов с объективом	*A. A. Lapides.* A few experiments with camera lenses
	Наш календарь	**Our calendar**
23	Спектральный анализ	Spectral analysis
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
24	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
29	Математика, 8, 9, 10	Mathematics 8, 9, 10
32	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
33	Задачи	Problems
34	Задача в картинках	A problem in pictures
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
35	Задачи М891 — М895; Ф903 — Ф907	Problems M891 — M895; P903 — P907
38	Решения задач М876 — М878, М880; Ф887 — Ф889	Solutions M876 — M878, M880; P887 — P889
	Олимпиады	**Olympiads**
45	*Л. П. Купцов, С. В. Резниченко, А. Б. Сосинский.* XVIII Всесоюзная олимпиада по математике	*L. P. Kuptsov, S. V. Reznichenko, A. B. Sossinsky.* XVIIIth All-Union mathematics olympiad
49	*Ю. А. Самарский, Л. В. Чернова.* XVIII Всесоюзная олимпиада по физике	*Yu. A. Samarski, L. V. Chernova.* XVIIIth All-Union physics olympiad
52	*В. А. Орлов, А. Г. Ростомян.* Экспериментальный тур олимпиады по физике	*V. A. Orlov, A. G. Rostomian.* Experimental stage of the Physics olympiad
56	Призеры XVIII Всесоюзной олимпиады школьников	Prizewinners of the All-Union school olympiad
58	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь *(9, 43, 44, 57)*	**Miscellaneous** *(9, 43, 44, 57)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Этюды Каспаряна *(3-я с. обложки)*	Kasparian's etudes *(3rd cover page)*

Фотография, приведенная на первой странице обложки, получена в ясный морозный январский день. Яркая светящаяся дуга на фоне неба — это солнечное гало. Об этом красивом природном явлении можно прочитать в статье «Гало и лед».

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант» 1984



Магнитная память ЭВМ

Кандидат технических наук Д. Г. КРУТОГИН, доктор технических наук Л. М. ЛЕТЮК, А. Т. МОРЧЕНКО

Наше время — начало эпохи ЭВМ. Зародившись около сорока лет назад, племя компьютеров быстро набрало силы, широко внедрилось в самые различные сферы человеческой деятельности, от кассовых аппаратов до расчетов космических трасс. Микроэлектроника в последние годы позволила так резко снизить размеры ЭВМ и повысить их надежность, что взгляд на ЭВМ как на экзотическую роскошь стал уходить в область преданий.

Цель и необходимость применения ЭВМ — освобождение человеческого мозга от рутинных мыслительных операций. Компьютер кое в чем заменяет мозг, но методы работы у них существенно различны. Особенность строения и функционирования современных ЭВМ в том, что самые сложные задачи в них расчленяются на последовательность простейших арифметических операций. Зато скорость выполнения огромна — арифметические устройства ЭВМ, которые называются процессорами, совершают миллионы операций в секунду. И промежуточные, и окончательные результаты расчетов на некоторое время нужно запомнить, как запоминаем мы цифру «в уме» при умножении в столбик. Поэтому любая ЭВМ, и самая большая, и микрокалькулятор, имеет собственную память, точнее говоря — запоминающие устройства.

В запоминающих устройствах (ЗУ) хранится всё, что нужно ЭВМ для вычислений. Чем больше должна знать и помнить ЭВМ, тем больше объем ее ЗУ, и тем больше масса машины и ее цена. Память составляет бо́льшую часть объема и стоимости ЭВМ (до 60—80 %). К тому же большая память подобна большой библиотеке, в которой время поиска и доставки требуемой книги иногда превышает время пользования ею.

«Мозг, хорошо устроенный, сто́ит больше, чем мозг, хорошо наполненный»

Вряд ли средневековый французский философ Монтень, которому принадлежит это высказывание, предвидел появление электронного мозга, но к вычислительным машинам, их системам памяти его афоризм подходит не меньше, чем к мозгу человека.

Эффективность ЭВМ зависит от двух показателей: объема информации, которую хранят и перерабатывают запоминающие устройства, и скорости выполнения элементарных операций с единицами этой информации. Емкость запоминающих устройств и их быстродействие на сегодняшний день находятся в противоречии: чем выше емкость — тем ниже относительное быстродействие. Чтобы сгладить это противоречие, комплекс запоминающих устройств ЭВМ строят из 3-4 систем с различным сочетанием конкурирующих параметров.

Наиболее быстродействующие запоминающие устройства — их называют оперативными (ОЗУ) — записывают или прочитывают (сообщают) порцию информации за одну микросекунду (10^{-6} с), а иногда и быстрее. ОЗУ запоминают промежуточную информацию, которую в процессе работы непрерывно сообщает процессор. Емкость ОЗУ составляет до 10^6—10^7 бит.

Словом «бит» обозначают наименьшую порцию информации, получаемую при осуществлении одного из двух равновероятных событий. Так, например, сообщение о том, что брошенная монета упала гербом вверх или вниз, несет информацию в 1 бит. Еще пример, более близкий к практике и к предмету нашего разговора. В вычислительной технике информация, как правило, «закодирована» в виде чисел, записанных в двоичной системе счисления, с помощью двух цифр — 0 и 1. Чтобы в этой системе записать, например, число 7, представим его сначала в виде суммы

$$7=2^2\cdot1+2^1\cdot1+2^0\cdot1,$$

а затем запишем последовательно количество целых степеней числа 2 в каждом разряде. Получается комбинация цифр 111. Таким образом, числу 7 десятичной системы соответствует в двоичной системе число 111, или $[7]_{10}=[111]_2$. Аналогично, $8=2^3\cdot\ 1+2^2\cdot\ 0+2^1\cdot\ 0+2^0\cdot\ 0$, или $[8]_{10}=[1000]_2$. Как видим, каждая цифра — 1 или 0 — несет информацию о наличии в десятичном числе целых степеней числа 2. Для записи чисел от 4 до 7 достаточно трех знаков — трех битов, для чисел от 8 до 15 — четырех и т. д. (Само́ слово «бит» образовано от английских слов "BInary digiT" — «двойная цифра».)

Память ЭВМ состоит из элементов, способных запоминать значения битов (0 или 1). Такой выбор кода записи в вычислительной технике связан с тем, что в физическом мире наиболее просто реализуются системы, обладающие двумя устойчивыми состояниями.

Минимальное быстродействие (10^{-2}—10^{+2} с) при максимальной емкости (до 10^{12} бит) имеют внешние запоминающие устройства (ВЗУ) ЭВМ. Они хранят информацию о поставленной задаче, введенных данных, программе решения, получаемых результатах, контроле режима работы машины. (Внешними их называют потому, что в больших машинах они отделены от оперативных ЗУ). ВЗУ называют также долговременными запоминающими устройствами (ДЗУ).

Между оперативными и внешними системами находятся так называемые буферные запоминающие устройства (БЗУ) со средними значениями емкости и быстродействия (10^7—10^9 бит и 10^{-5}—10^{-3} с соответственно).

Сочетание этих систем (расположенных на «служебной лестнице» в порядке подчиненности) называется иерархией памяти ЭВМ. Как правило, более развитая память имеет более сложную иерархию, сложные связи между отдельными системами ЗУ.

В принципе, человеческая память содержит основные элементы иерархии: ОЗУ, БЗУ, ДЗУ. Так, многие вещи мы помним и умеем делать всю сознательную жизнь: говорить, писать и т. п. Наше ДЗУ (к счастью, не внешнее) хранит информацию, делающую нас разумными существами. Другой пример: вы неплохо помните задание на завтра (если, конечно, заглянули в учебник). Через год, а то и через месяц, почти все детали урока забудутся, лишь очень малая часть информации перейдет из буферной системы в долговременную; мозг избегает перегрузок бесполезными сведениями и сохраняет свободными некоторое число ячеек памяти для предстоящей работы.

Человеческий мозг — эта весьма универсальная вычислительная система — имеет биологические ЗУ, структура которых нам далеко не ясна; поэтому биосистемы в кибернетике пока «осваивают» только писатели-фантасты.

Из чего построить «мозг»?

Какие же требования предъявить к искусственным системам памяти? Чем заменить нервные клетки мозга? Нужны малые габариты и масса, нужно высокое быстродействие, обязательно нужна реверсивность памяти, то есть способность к быстрой замене информации (перезаписи). Наконец, если эти требования выполнены, хорошо иметь системы, не требующие больших затрат энергии на управление, обладающие высокой надежностью и т. д.

Вообще говоря, запоминающие устройства можно построить на различных принципах: механическом, акустическом, электронном, магнитном, оптическом. Но... Механические ЗУ не устраивают нас по быстродействию, хотя изобретателю конторских счетов — простейшего запоминающего устройства — мы должны выразить признательность за первое техническое воплощение поразрядного принципа хранения информации, создание реверсивной среды для записи и т. д. Довольно высокой емкостью, надежностью, помехозащищенностью обладают граммофонные пластинки. Но для ЗУ ЭВМ пластинки не очень удобны: нет нужного быстродействия и совсем плохо с реверсивностью памяти.

Давно известен магнитный метод записи электрических сигналов. Он основан на свойстве некоторых материалов «запоминать» магнитное поле, в котором они побывали. Наверное, многим из вас приходилось намагничивать гвозди, иголки, ножницы и т. п., поднося их к постоянному магниту. И вы, возможно, обращали внимание, что ножницы после этого сами становятся хорошим магнитом — они притягивают к себе разную железную мелочь; намагниченная иголка может служить стрелкой компаса; а гвозди, если их отнести от магнита, быстро теряют свои магнитные свойства. Не все магнитные материалы обладают способностью «запоминать» магнитное поле; но один из них — минерал магнетит, представляющий собой сложный оксид железа,— известен людям больше тысячи лет и послужил первым материалом для компасов.

Особенно хорошо намагничиваются мелкие иглообразные частицы — побывав в магнитном поле, они могут запомнить и его индукцию, и его направление. Если такую намагниченную частицу пронести мимо замкнутого проводящего витка, в нем возникнет индукционный ток.

На этом свойстве магнитных материалов основана работа магнитофона. Носителем магнитных частиц служит пластмассовая лента, на которой в тонком слое лака закреплены иглообразные частицы магнитного порошка (длина частиц порядка микрона, диаметр — порядка десятой доли микрона). Вместо проводящего витка используется маленький электромагнит — головка записи и воспроизведения: по нашему желанию он либо намагничивает частицы порошка (запись), либо сам намагничивается полем проходящей мимо намагниченной частицы, и в его обмотке возникает ток, повторяющий по форме ранее записанный сигнал (воспроизведение).

Магнитофон появился на свет почти одновременно с телефоном — около ста лет назад. Но обеспечить хорошее качество записи удалось лишь в сороковых годах нашего века.

В вычислительных машинах магнитофон сразу нашел себе место. Каждая порошинка может нести 1 бит информации: намагниченной порошинке можно приписать значение 1, не намагниченной — 0. Понятно, что емкость и быстродействие такого устройства памяти зависят от длины ленты и скорости ее протяжения.

Переделка магнитофона позволила резко повысить быстродействие записи. Вместо магнитной ленты сигналы записывают на диске, покрытом магнитным лаком. Диск, диаметр которого около 0,5 м, вращается со скоростью 100 оборотов в секунду. Головка записи-считывания и поверхность диска не соприкасаются (иначе при таких скоростях они в результате трения сильно разогревались бы и быстро изнашивались). Головка парит над диском на расстоянии всего 2—5 мкм. Для качественной передачи сигнала важно, чтобы расстояние это было постоянно, поэтому диск не должен иметь заметных биений. Дисковый магнитофон любит чистый воздух — попадание в двухмикронный зазор трехмикронной пылинки, которую и глазом-то не увидишь, вызывает последствия, эквивалентные по значительности попаданию крупного булыжника под бешено мчащийся автомобиль.

С помощью дисковых магнитофонов можно удовлетворить потребности буферных ЗУ по емкости и быстродействию.

Ферритовое колечко — элемент памяти

В оперативных ЗУ основными элементами памяти долгое время были

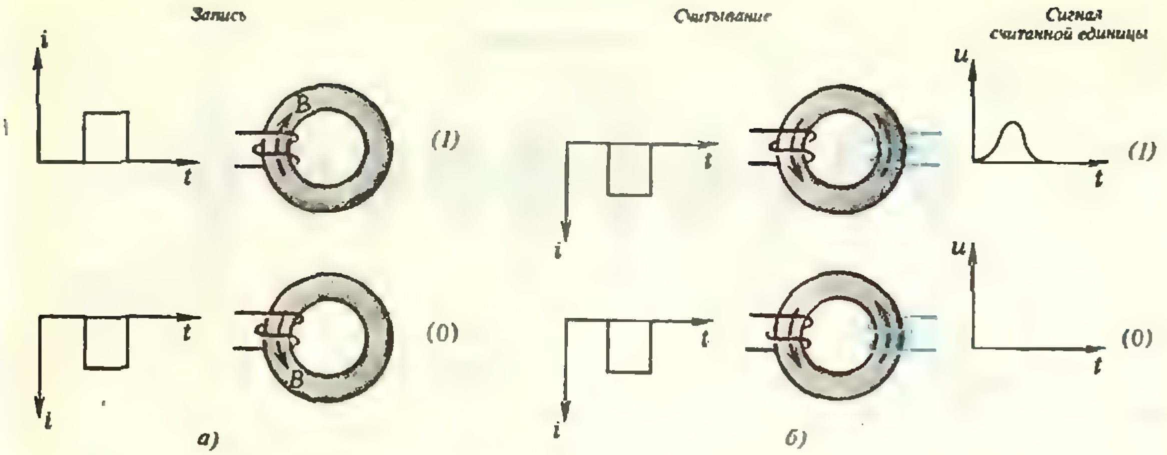


Рис. 1.

магнитные кольца. Такие кольца, сделанные из железоникелевого сплава или ферритов (неметаллических магнитных материалов), обладают свойством находиться в течение длительного времени в состоянии остаточной намагниченности. При этом индукция магнитного поля в материале кольца по направлению совпадает с индукцией внешнего поля, в котором кольцо намагничивалось, а по величине близка к ней.

Представим себе, что мы намагнитили кольцо, пропустив по намотанному на него проводу импульс тока, а по обмотке второго кольца пропустили импульс тока в противоположном направлении (рисунок 1, *а*). Тогда векторы индукции магнитных полей, возникающих в кольцах при намагничивании, будут направлены в противоположные стороны. Одному состоянию можно приписать значение 1, а другому — 0. Подадим теперь на оба кольца одинаковые по полярности импульсы тока. Одно кольцо (верхнее на рисунке 1, *б*) перемагнитится — за короткое время направление индукции магнитного поля в кольце изменится на противоположное. Изменение индукции означает изменение магнитного потока, пронизывающего любое сечение кольца. Следовательно, в намотанной на кольцо вторичной обмотке — обмотке считывания — при перемагничивании возникнет ЭДС индукции. Если вторичная обмотка замкнута, по ней протечет импульс тока — импульс «считанной» единицы. Таким образом, мы прочитали число, записанное в первом кольце, и стерли его, то есть разрушили информацию. А что же второе кольцо? Оно не перемагничивается, так как уже было ранее намагничено с заданным направлением вектора индукции. Отсутствие импульса от второго кольца — это тоже информация, но о числе 0. Таким образом, каждое кольцо — это элементарное запоминающее устройство емкостью в 1 бит.

Магнитная память на кольцевых сердечниках работает довольно быстро — время перемагничивания колец составляет доли микросекунды. Емкость памяти зависит от числа колец. Для оперативного ЗУ на 1 мегабит требуется не менее миллиона колец, а в некоторых случаях и более двух миллионов. Сделать такое количество колец можно, процессы эти автоматизированы. Далее нужно каждое кольцо испытать, потому что если одно из миллиона колец «врет» — всей системе грош цена. Были созданы машины, испытывающие до 5 тысяч колец в час, но и это еще не главная трудность.

Магнитные кольца надо снабдить обмотками записи и считывания, а затем организовать в некую систему, чтобы иметь возможность определить, какому именно кольцу соответствует данный бит информации. Миллион колец с двумя обмотками — это два миллиона проводов и четыре миллиона контактов. Избавиться от этого изобилия помогает матричная система построения ЗУ. Нанижем десяток колец на один провод, который назовем числовым (рисунок 2). Теперь все кольца можно намагнитить одним импульсом, и во всех кольцах запишется 0. Через каждое кольцо пропустим провод перпендикулярно числовому; эти десять проводов назовем разрядными. Конструкцию, которую мы получили, называют числовой линейкой. Чтобы записать в ней двоичное число 1110001101 (что это за число

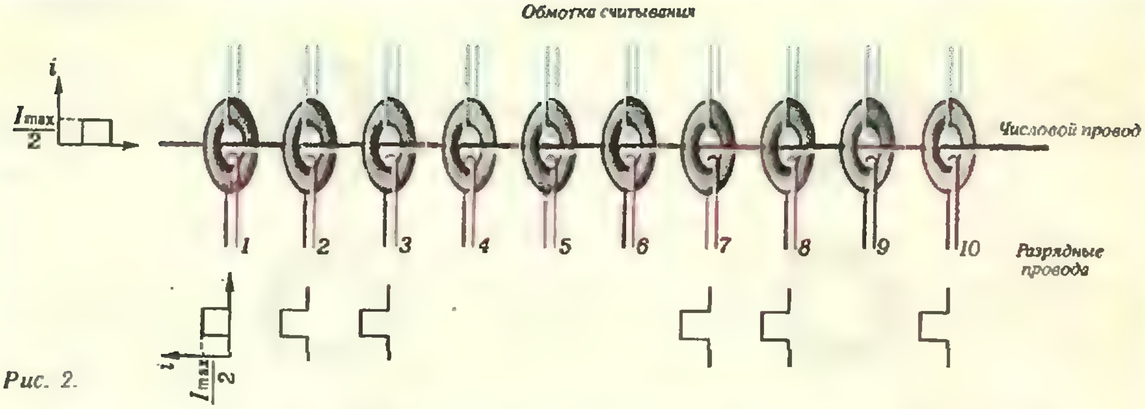


Рис. 2.

в десятичной системе?), пошлем по числовому проводу импульс, равный по величине половине перемагничивающего значения тока, а другой такой же импульс одновременно пошлем в разрядные провода колец 1, 2, 3, 7, 8 и 10. Там, где импульсы сложатся, кольца перемагнитятся; в кольцах 4, 5, 6 и 9 этого не произойдет. «Считать» все число можно, пропустив большой «отрицательный» (перемагничивающий) импульс по числовому проводу. Но для того чтобы получить и обработать сигнал считывания, нужен еще один провод в каждом разряде — обмотка считывания. Итак, на десять колец числовой линейки мы имеем двадцать один провод. На десять числовых линеек, то есть на десять десятиразрядных чисел, нужно десять числовых проводов (разрядные и считывающие будут прежними) — итого — 31 провод и т. д. Тоже, конечно, немало, но все-таки для создания мегабитового ЗУ можно ограничиться несколькими сотнями проводов. Сложнее другое.

Пусть колечко (далеко не самое маленькое) имеет наружный диаметр 0,6 мм, внутренний — 0,35 мм. Теперь через каждое кольцо необходимо в разных направлениях протянуть минимум три провода диаметром 0,05 мм и повторить эту операцию более миллиона раз. Такая работа сродни шитью бисером (она и называется прошивкой). Толком автоматизировать ее, увы, не удалось, а ручной труд чрезвычайно замедлял производство и удорожал собираемые устройства.

Первые образцы ЗУ на магнитных кольцах даже небольшой емкости представляли собой кубы памяти в буквальном смысле слова — они имели объем около 1 м^3. По вполне понятным причинам стремятся уменьшить габариты запоминающих устройств. К настоящему времени удалось уменьшить наружный диаметр изготовляемых колец до 0,25 мм. Можно представить себе, насколько усложняется при этом задача их прошивки. Казалось бы, трудности дальнейшего уменьшения размеров кольцевых сердечников непреодолимы, и продолжавшееся двадцать пять лет господство магнитных ОЗУ заканчивается; тем более, что благодаря успехам микроэлектроники полупроводниковые ОЗУ стали эффективнее магнитных, то есть компактнее и дешевле.

В этом месте следует прервать рассказ об истории магнитной записи и представить электронные ячейки памяти. Давно известно, что из двух триодов можно собрать схему, которая «работает» в двух режимах: при одном направлении тока работает один триод, а второй оказывается запертым, а при другом направлении тока триоды меняются ролями. В одном режиме работы системе можно приписать значение 0, в другом — 1. Такая система называется триггером. У самых первых ЭВМ как раз триггеры (тысячи триггеров) и выполняли функции оперативной памяти; но они не выдержали конкуренции с более компактной, почти не выделяющей тепла, надежной, потребляющей мало энергии магнитной памятью.

Современные полупроводниковые микросхемы ЗУ, в основном, те же триггеры, только уменьшенные до микронных размеров. На пластине размером 5×5 мм, сделанной из полупроводникового кристалла, удается разместить запоминающее устройство емкостью в 200 000 бит; быстродействие таких ЗУ — порядка 10^{-8} с. Объективно отметим один весьма существенный недостаток электронных ОЗУ: выключение питания стирает всю накопленную информацию. Во многих случаях этот недостаток терпим, но иногда, например в военной или космической технике, становится серьезным препятствием.

Бег магнитных пузырьков

Около пятнадцати лет назад появились первые модели экспериментальных ЗУ в интегральном исполнении, сочетающие достоинство магнитной записи с эффективностью микроэлектронной технологии. Эти устройства, использующие движение магнитных доменов, получили название доменных ЗУ. Доменами называются малые области (объемы) магнитного вещества (например, железа), каждая из которых самопроизвольно полностью намагничена. Векторы индукции магнитных полей отдельных доменов в отсутствие внешнего магнитного поля направлены так, что в целом образец оказывается размагниченным.

Наиболее перспективным для создания доменных ЗУ оказалось применение так называемых цилиндрических магнитных доменов. Их историю следует начать с конца 50-х годов, когда в ряде магнитных материалов были обнаружены домены специфической формы, напоминающие воздушные пузырьки в плотницком уровне. Поэтому эти домены часто так и называют — магнитные пузырьки. Однако особый интерес к этим доменам стали проявлять только после того, как в октябре 1967 года появилась статья американского физика Эндрю Бобека, в которой он впервые указал на заманчивые перспективы их использования для создания устройств хранения и переработки информации. (Примечательно, что сам Бобек не являлся специалистом в области физики магнитных явлений, а занимался вычислительной техникой.)

Магнитные пузырьки могут возникать в тонких пластинках или пленках некоторых магнитных кристаллов. В исходном (размагниченном) состоянии доменная структура тонкого слоя таких кристаллов состоит из равного числа доменов с противоположными направлениями намагниченности — векторы индукции магнитных полей отдельных доменов перпендикулярны плоскости слоя и направлены в противоположные стороны.

На рисунке 3, *а* показана магнитная структура кристалла в размагниченном состоянии, называемая лабиринтной доменной структурой (снимок сделан под микроскопом). Темные и светлые участки — домены различной полярности. А фотографии 3, *б—е* сделаны в процессе намагничивания кристалла магнитным полем, индукция которого направлена в сторону наблюдателя. При увеличении индукции внешнего поля домены с намагниченностью, направленной по полю, растут, а против поля — наоборот сужаются. В некотором интервале внешних полей остатки «невыгодно» намагниченных доменов стягиваются сначала в эллиптические, а затем и в круговые «пузырьки». Области кристалла, занимаемые магнитными пузырьками, в сечении, перпендикулярном плоскости пленки или пластины, имеют очертания «пузатых» цилиндриков. Поэтому такие домены называют еще цилиндрическими. Дальнейшее увеличение индукции внешнего поля приводит к уменьшению диаметра «пузырьков», и при некотором критическом значении индукции B_0 «пузырьки» схлопываются, или, как говорят, аннигилируют,— цилиндрические магнитные домены (ЦМД) скачком перемагничиваются до того же состояния, в котором пребывает основная часть кристалла. Если же индукцию поля, приложенного к пластине, в которой уже имеются ЦМД, уменьшать, то при некотором значении поля начинает искажаться форма доменов — они становятся эллиптическими и затем превращаются

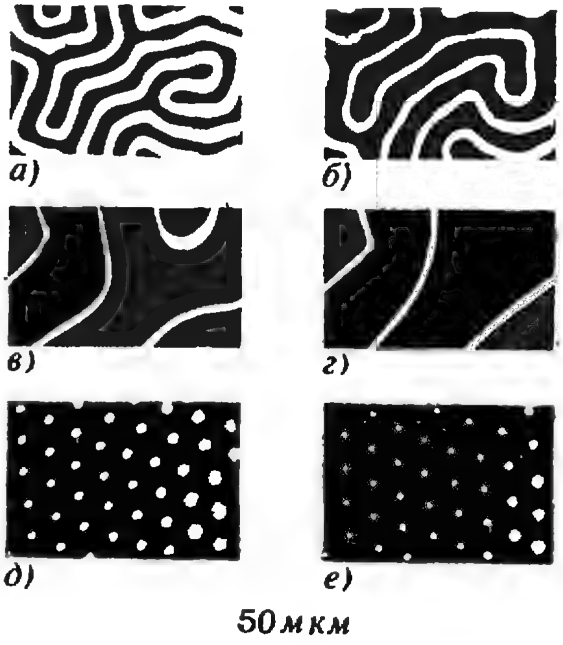


Рис 3

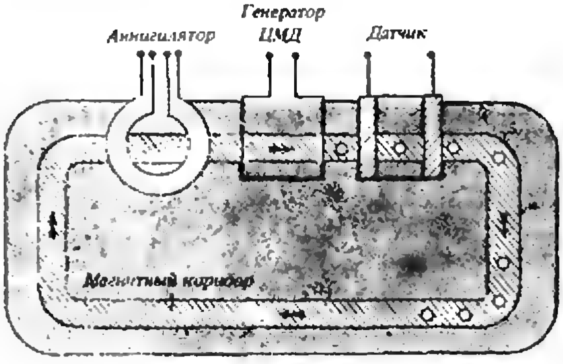


Рис. 4

и обычные полосовые домены лабиринтной структуры.

Итак, цилиндрические домены можно зарождать (генерировать), воздействуя на образец импульсным магнитным полем, которое возникает, например, при пропускании по витку импульса тока. Пропуская импульс обратной полярности, ЦМД можно уничтожить. Наличие или отсутствие в данной точке магнитной пластины цилиндрического домена эквивалентно 1 или 0 информации в этой точке.

Цилиндрические домены обладают еще одним замечательным свойством — их можно перемещать по пластине. Движутся они довольно быстро, подчас быстрее реактивного самолета, со скоростью до 500 м/с. Удобнее всего перемещать ЦМД магнитным полем, вектор индукции которого лежит в плоскости пластины. Чтобы придать их движению организованный, направленный характер, в пластине формируют специальные магнитные коридоры, в пределах которых только и могут двигаться домены. Запущенная в этот коридор последовательность ЦМД движется как единое целое, расстояния между соседними доменами при движении не изменяются. В отличие от магнитной ленты в этом случае информационная последовательность бежит в неподвижной магнитной среде.

Если магнитную дорожку (коридор) замкнуть в кольцо, получится аналогия с кольцом магнитной ленты или дорожкой дискового магнитофона, с той лишь разницей, что в ЦМД-кольце полностью отсутствуют движущиеся части, а размеры всего кольца составляют доли миллиметра.

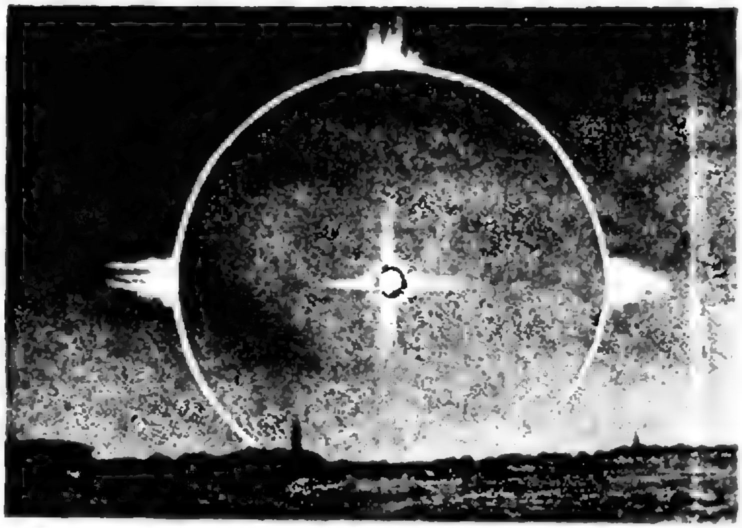
Для полной аналогии разместим на кольцевой ЦМД-дорожке (см. рисунок 4) генератор доменов (он будет выполнять функции записывающей головки), аннигилятор (уничтожитель) ЦМД (для стирания записанной информации) и, наконец, какой-либо датчик, отмечающий электрическим сигналом прохождение мимо него каждого ЦМД. Датчик будет выполнять функцию считывающей головки магнитофона. Магнитное поле, вектор индукции которого вращается в плоскости пластины с большой скоростью (100÷400 кГц), обеспечит циркуляцию информации в кольцевой дорожке. Когда это поле отключено, внешние постоянные магниты поддерживают все домены в устойчивом состоянии и прежнем порядке. Емкость одной дорожки может достигать сотни килобит; на пластине размером 10×20 мм можно разместить несколько десятков или сотен дорожек.

Микроскопические размеры ЦМД (до 0,5 мкм и менее), их уникальные свойства позволяют изготовить приборы, обладающие большой информационной емкостью при малых размерах и низком потреблении энергии, сохраняющие записанные сведения даже при отключении питания. Замечательно еще и то, что почти вся технология производства запоминающих устройств, основанных на ЦМД, практически готова — это технология полупроводниковых больших интегральных схем (БИС). Поэтому такие ЗУ развивались быстрыми темпами, и сейчас существуют серийные микросхемы с плотностью памяти 10^7 бит/см^2 и емкостью до 10^8 бит, занимающие объем менее литра, приемлемые по цене и по затратам энергии на управление.

ЗУ на ЦМД могут найти применение для устранения огромного разрыва во временах доступа к информации между оперативными ЗУ (на ферритовых сердечниках или полупроводниковых ИС) с высоким быстродействием (10^{-8}—10^{-6} с) и внешними ЗУ большой емкости (на магнитных лентах и дисках) с относительно низким быстродействием (10^{-3} с). Это позволит повысить эффективность работы современных ЭВМ, поскольку на сегодняшний день около 80 % машинного времени затрачивается на обмен информацией между оперативной и внешней памятью. Кроме того, ЗУ на ЦМД вне конкуренции при работе в экстремальных условиях, например, в бортовой электронной аппаратуре космических кораблей, в военной технике, где требуется повышенная надежность.

(Окончание см. на с. 18)

Гало и лед



Гало вокруг Луны с ложными лунами, верхней касательной дугой и световым крестом. (По акварели Л. Венкебаха.) О возникновении различных видов гало, радуги, комы, полярного сияния и других необычных природных оптических явлений можно прочитать, например, в книге М. Миннарта «Свет и цвет в природе».

Довольно часто, когда на небе появляются высокие перисто-слоистые облака, прозрачные и быстрые, а само небо становится молочно-белым, вокруг солнца появляется яркое светящееся кольцо или отдельные световые дуги и пятна. Это красивое явление носит название гало. Иногда оно наблюдается и около Луны.

Наиболее обычное из всех видов гало — это светящееся кольцо. Угловой радиус его всегда один и тот же и составляет около 22 °. Внутренний край кольца очерчен достаточно четко и окрашен в красноватый цвет, а наружный — расплывчат и имеет синеватую окраску.

Объяснение этого красивого явления известно очень давно — свечение возникает в результате преломления света ледяными кристалликами, образующими перистые облака. Они, как известно, часто имеют форму правильной шестиугольной призмы. Такие призмы, парящие в воздухе, отклоняют проходящий через них свет как раз так, что возникает гало с угловым радиусом 22 °. Кристаллики, конечно, ориентированы поразному, но они довольно плоские, и поэтому лучи света заметно отклоняются лишь тогда, когда падают параллельно основанию призмы.*)

Оказывается, существует еще одна разновидность гало — светящееся кольцо с угловым радиусом 28 °. За последние 300 лет его наблюдали всего лишь 7 раз. Недавно была высказана гипотеза, что такое гало возникает в результате преломления света на кристалликах льда, имеющих другую форму — форму октаэдра. Возможно, что эта новая, до сих пор неизвестная модификация льда и порождает гало с размерами как раз 28 °.

Лед такой структуры получен экспериментально при температуре ниже −100 °С. Пока не вполне ясно, почему соответствующее гало бывает видно не при столь жестоком морозе. Однако хочется надеяться, что красивая гипотеза все же окажется истинной.

Я. С.

---

*) Гораздо реже, но все-таки можно наблюдать так называемое большое гало — кольцо с угловым радиусом примерно 46°. Оно имеет те же цвета, что и малое гало (с размером 22°), но яркость его существенно меньше. Появление его связано также с преломлением света ледяными кристалликами, но в этом случае лучи, падая на боковую грань призмы, после преломления выходят через ее основание.

Советуем купить

Отдел «Книга — почтой» магазина № 8 «Техника» (адрес магазина: 103031, Москва, ул. Петровка, д. 15) имеет в наличии и высылает наложенным платежом (без задатка) следующие книги:

Горшковский В. *Польские физические олимпиады:* Задачи и олимпиады / Пер. с польск. — М.: Мир, 1982. — 55 к.

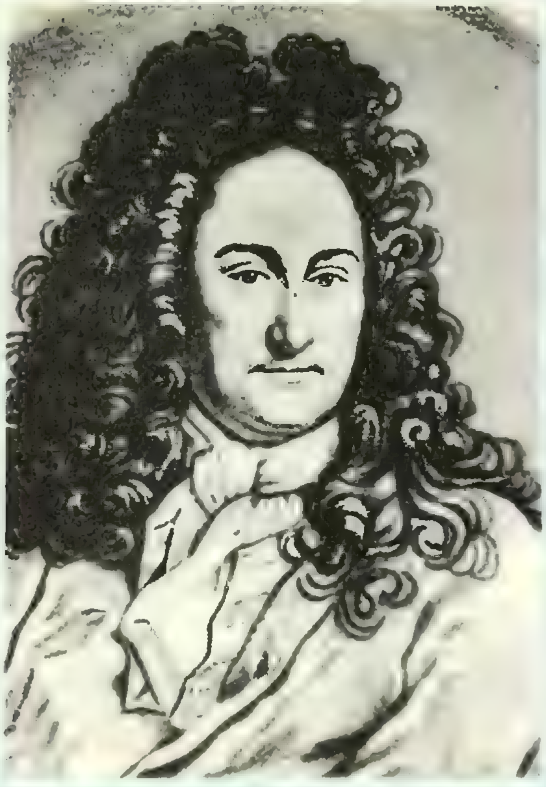
Каганов М. И., Цукерник В. М. *Природа магнетизма.* — М.: Наука, 1982. — (Библиотечка «Квант»). — 30 к.

Китайгородский А. И. *Физика для всех: Фотоны и ядра.* — М.: Наука, 1982. — 40 к.

Шкловский И. С. *Звезды: их рождение, жизнь и смерть.* — М.: Наука, 1984. — 2 р.

Цыпкин А. Г. *Справочник по математике для средних учебных заведений.* — М.: Наука, 1983. — 1 р. 80 к.

Яворский Б. М., Селезнев Ю. А. *Справочное руководство по физике для поступающих в вузы и самообразования.* — М.: Наука, 1984. — 2 р.



Высокой геометрии начала ...

(К 300-летию первой публикации по дифференциальному исчислению)

Кандидат физико-математических наук
С. Г. ГИНДИКИН

> *Но это лишь начала некоей много более высокой Геометрии, которая распространяется на труднейшие и прекраснейшие задачи прикладной Математики, и едва ли кому-нибудь удастся заняться с той же легкостью такими вещами, не пользуясь нашим дифференциальным исчислением или ему подобным.*
> *Лейбниц*

В 1684 году, в выходившем в Лейпциге журнале "Acta Eruditorum" («Труды ученых» или, как говорят сейчас, «Ученые записки»), появилась семистраничная статья Готфрида Вильгельма Лейбница (1646—1716) «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». Это была первая публикация по дифференциальному исчислению, хотя возникло оно лет за двадцать до этого, а первые шаги были сделаны на пятьдесят лет раньше — в самом начале XVII века. Однако статья Лейбница знаменовала важный этап в истории анализа бесконечно малых и 300-летие со дня ее появления — это естественный повод вспомнить о становлении этой великой математической теории.

Золотой век анализа

Анализ бесконечно малых был создан в течение XVII века в результате коллективных усилий замечательной плеяды математиков. Основными ориентирами были задача о касательной и задача о вычислении площадей криволинейных фигур (задача о квадратуре), которые впоследствии привели соответственно к дифференциальному и интегральному исчислениям. С проведением касательных, в свою очередь, связаны задачи об экстремумах (максимумах и минимумах), точках перегиба, выпуклости кривых. К квадратурам сводится вычисление разнообразных механических величин.

Становление анализа бесконечно малых было тесно переплетено с созданием новой механики. В начале века Галилей, исследуя свободное падение и движение тела, брошенного под углом к горизонту, одновременно решал первые аналитические задачи. Важнейший момент в создании анализа состоял в осознании взаимной обратности операций построения касательной и нахождения квад-

ратуры кривой, причем понято это было при помощи кинематических рассмотрений: нахождение скорости по пути сводится к построению касательной, и путь находится по скорости при помощи квадратуры.

К 60-м годам было решено большое число разнообразных задач, научились строить касательные к широким классам кривых, было сосчитано много площадей. В этой грандиозной работе принимали участие Кеплер, Кавальери, Декарт, Ферма, Паскаль, Гюйгенс и многие другие. Назрела необходимость систематизировать эти разрозненные результаты и превратить отдельные искусственные приемы в общие методы. Необходимо было превратить теорию бесконечно малых в исчисление — набор простых формальных, но широко действующих, рецептов. Нужно было превратить теорию из искусства в ремесло. В таком виде ее не только можно было вывести из узкого круга посвященных, но и крупным математикам это позволило бы пройти без усилий часть пути и сконцентрировать усилия на более глубоких вопросах.

Эту работу, опираясь на достижения их великих предшественников, выполнили Ньютон (1642—1727) и Лейбниц. «Бог сказал: да будет Ньютон! и наступил свет» — так сказано в популярном двустишии А. Попа. Ньютон создал свое исчисление в 1665—1667 годах во время своих «чумных каникул» в Вулсторпе, когда после окончания Кембриджского университета он оказался на своей ферме отрезанным из-за чумы от внешнего мира. Подробное сочинение Ньютона, почти законченное к 1670—1671 годам, не нашло издателя и надолго осталось неизвестным. Лишь разрозненные сведения о нем распространялись среди математиков. Одновременно наблюдался некоторый спад в математике. Как пишет Н. Бурбаки, к 70-м годам «активными остаются только Ньютон в Кембридже и Дж. Грегори, уединившийся в Абердине, к которым в скором времени со всем пылом вновь посвященного присоединяется Лейбниц».

Лейбниц и его путь в математику

Всю свою жизнь Лейбниц был нацелен на глобальные проблемы, на всеобъемлющие теории. Его путь в математику был не стандартен — он отдавал предпочтение методу в век, когда более ценили конкретные результаты. В жизни Лейбница было много планов. Некоторые поражают своей грандиозностью. Новые замыслы вытесняли старые, нередко увлекавшемуся автору не хватало реализма. Почти ни одной из задуманных книг он не дописал до конца, а большинство оставил в самом начале (лишь несколько книг по философии постигла лучшая участь). Но как трудно сохранить реализм, когда замыслы далеко обгоняют век!

Уже с 13—14 лет Лейбниц мечтает о перестройке логики, о создании алфавита человеческих мыслей, в котором можно было бы записывать все мыслительные процессы. Постепенно зреет главная идея его жизни: создание «универсальной характеристики», «универсального языка». «Универсальная математика является, так сказать, логикой воображения», она должна заняться всем, «что в области воображения поддается точным определениям». Язык должен быть защищен от записи неправильных мыслей: «химеры, которые не понимает даже тот, кто их создает, не смогут быть записаны его знаками». Он грезит о машине, которая будет доказывать теоремы, хочет превратить мышление в исчисление, арифметизировать его так, чтобы можно было заменять рассуждения вычислениями и решать споры при помощи математических выкладок. Трижды приступал Лейбниц к реализации своего грандиозного, сильно опередившего время замысла, но остановился, пройдя лишь первые шаги. Только в XX веке многое из задуманного Лейбницем оказалось явью в рамках математической логики и современной вычислительной техники. Стало ясно, что его замыслы были не утопичны, а прозорливы.

Лейбница интересуют разнообразные применения математики и он верит в безграничные ее возможности. Он готовится стать юристом и в 18 лет пытается строить юриспруденцию как математическую теорию с аксиомами и теоремами, думает о применении вероятностных соображений в судопроизводстве. В 20 лет он отказывается от кафедры в Нюрнбергском университете, его не привлекает спокойная академическая карьера. Планы Лейбница более честолюбивы:

> «Я давно в душе лелеял другое» и далее «Я считал недостойным молодого человека сидеть, точно пришпиленный к месту; дух мой горел желанием стяжать большую научную славу и посмотреть на свет».

Лейбниц принимает приглашение герцога Иоганна Филиппа и переезжает в Майнц. Он хочет воспользоваться ситуацией и, пусть в рамках довольно скромного государства, создать совершенный свод законов. Постепенно его планы становятся все более широкими и одновременно ... менее реалистическими. Он задумывает перестройку всей юридической науки, начинает три большие монографии. У него не мало интересных идей, но скоро приходит очередь совершенно другого замысла.

Живший в это время в Майнце известный дипломат Бойнебург увлекает Лейбница грандиозными планами изменить европейскую политику. Их замыслам тесно в провинциальном Майнце. Они берутся за предложение курфюрста Бранденбургского найти мотивировку для избрания на польский престол немецкого князя. Лейбниц сочиняет блестящий меморандум, который, впрочем, не помог выиграть дело: правильная практическая дипломатия оказалась эффективнее политического памфлета. Следующий прожект касался организации союза немецких государств против Франции. Он содержал немало остроумных ходов, но реализовать его не удалось. Наконец, третий грандиозный замысел: вовлечь Францию в войну с Турцией с тем, чтобы ослабить ее влияние в Европе. Для реализации этого замысла, в 1672 году Лейбниц едет в Париж. Единственным результатом было то, что Лейбниц по существу лишился поддержки курфюрста, который не очень был заинтересован в советнике, который через его голову пытался перестраивать европейскую политику.

Оставшись не у дел, Лейбниц переключается на математику. Первоначально в планах Лейбница математике предназначалась вспомогательная роль. В 1666 году он издал в Лейпциге «Диссертацию о комбинаторном искусстве», в которой он сообщает, что его не интересует открытие новых арифметических истин, математика должна помочь ему разработать «логику открытия». И в Майнце он находит время для «математических досугов». В 1670 году он работает над конструкцией арифметической машины, интересуется машиной Паскаля. Лейбниц привез в Париж в 1672 г. свои математические результаты. Осенью 1672 года они были темой обсуждения с Гюйгенсом, который тогда работал в Париже. Речь шла о суммировании числового ряда $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ при помощи подбора такой последовательности b_1, b_2, b_3, ..., что $a_n=b_n-b_{n+1}$. Тогда $a_1+\ldots+a_n=b_1-b_{n+1}$. Лейбниц рассматривает ряд примеров, когда его правило работает; под правило удачно подошел пример, предложенный Гюйгенсом

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots\left(b_n=\frac{1}{n}\right).$$

Они оба не знали, однако, что этот прием не был нов, да и речь шла об очень частном вопросе. Лейбниц, тем не менее, был тогда высокого мнения о своих достижениях. Позднее он более трезво оценивал ситуацию:

> «Когда я приехал в 1672 году в Париж, я был математиком-самоучкой, но опыт мой был не велик, мне не хватало терпения пройти долгую цепь доказательств... Я хотел плавать самостоятельно, без учителя... В этом высокомерном математическом невежестве я уделял внимание только истории и праву, видел в их изучении свою цель. Однако математика была для меня более приятным развлечением.»

«Самый учащийся из смертных»

В 1673 г. Лейбниц посетил Лондон в составе майнцской дипломатической миссии. Контакты с английскими математиками подействовали на него отрезвляюще. Он узнал, что его основные результаты не новы, а современная математика далеко впереди. У Лейбница оставался единственный путь войти в современную математику — начать все с начала. 27 лет — не самый подходящий возраст для старта в науку молодых, но Лейбница это не смущает. Он имел все основания позднее назвать себя «самым учащимся из смертных» (письмо Я. Бернулли, 1703 г.).

С осени 1673 года начинаются «годы математического ученичества» Лейбница, умело направляемые Гюйгенсом. Гюйгенс угадал в самоуверенном «переростке» подлинный дар.

> «...Гюйгенс, который, как я предполагаю, считал меня более способным, чем я был на самом деле, дал мне экземпляр только что изданного «Маятника». Для меня это было началом или поводом для более глубоких математических занятий.»

Итак, все началось с великой книги «Маятниковые часы». Затем последовало изучение работ Сент-Винцента, Декарта, Слюза, Валлиса и, прежде всего, Паскаля.

Лейбницу было бы не плохо почитать и более классические тексты, но он торопится и пробирается «к геометрии поистине с черного хода». Появляются результаты, удивившие Гюйгенса, например, ряд для вычисления числа π:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$$

Потом оказалось, что его знал Грегори. Гюйгенс рассчитывал, что при помощи ряда можно получить квадратуру круга (а Грегори, напротив, рассчитывал таким способом доказать трансцендентность π). Лейбниц занимается не только анализом. Он пытается найти формулу для решения общего алгебраического уравнения (именно общего, частные проблемы его мало интересуют), анализирует формулу Кардано в комплексной области (удивляет Гюйгенса соотношением $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$), работает над циркулем, который позволил бы находить корни любого уравнения, подобно тому как обычный циркуль позволяет находить корни квадратного.

Все же главные результаты связаны с бесконечно малыми. Лейбниц писал уже в 1673 году: «я заполнил несколько сот страниц», но еще «не считал этот труд достойным быть изданным. Ибо мне наскучило заниматься мелочами, когда передо мной открылся Океан». Много теорем было получено в первый год «ученичества», но большинство из них можно было найти у Грегори или у учителя Ньютона Барроу (1630—1677). Однако общие приемы позволяли получать все проще и единообразнее. Путь Лейбница был выбран: он строит исчисление бесконечно малых.

Характер его таланта, его предыдущий научный опыт как нельзя лучше отвечали этой цели. Он четко продумывает вопрос о классе функций, которые должны рассматривать в анализе (само слово «функция» впервые появляется у Лейбница в 1673 г.). Он решительно отвергает идею ограничиться алгебраическими функциями («геометрическими кривыми» по Декарту) и считает, что необходимо рассматривать и трансцендентные функции (термин Лейбница, Декарт говорил о «механических кривых»).

Лейбниц, как никто до него, понимал важность удачной символики, причем не только в математике. Исчисление бесконечно малых дало ему прекрасный повод для разработки символики, которая не только упрощает пользование исчислением, но и по существу необходима для овладения им. В 1678 году Лейбниц писал своему коллеге Чирнгаузу:

> «Следует заботиться о том, чтобы знаки были удобны для открытий. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают глубочайшую природу вещи, и при этом удивительным образом сокращается работа мышления».

Лейбниц искал возможность ввести удобную символику всюду. Стоит упомянуть, что к нему восходит метод решения систем линейных уравнений при помощи определителей, в связи с чем он писал Лопиталю во Францию (1693 г.):

> «Часть секрета анализа состоит в искусстве хорошо употреблять применяемые знаки, и по этому малому образцу Вы видите, сударь, что Виет и Декарт еще не познали все его тайны».

Следует подчеркнуть, что в исчислении Ньютона не было развитой символики. Ньютон сам писал, что «не дал своего метода в форме символов и не придерживался какого-либо их определенного вида». Вероятно, символика явилась решающей причиной, по которой мы пользуемся сегодня анализом в варианте Лейбница.

Уже в 1674 году Лейбниц уверен, что «все учение о суммах и квадратурах может быть сведено к анализу — вещь, на которую никто до сих пор не надеялся». К концу 1675 года в первом приближении исчисление построено. У Лейбница возникает повод убедиться в его эффективности при решении задачи Дебона, которой занимался Декарт, но не смог довести до конца:

> «Еще в прошлом году я поставил перед собой вопрос, который можно отнести к труднейшим во всей геометрии, поскольку распространенные до сих пор методы здесь почти ничего не дают. Сегодня я нашел его решение и я приведу его анализ» (11 ноября 1675 г.)

Речь идет о нахождении кривой с постоянной подкасательной — отрезок между проекцией точки A на ось x и точкой пересечения касательной в точке A с осью x (рис. 1). К середине 1676 года дифференциальное и интегральное исчисления сложились окончательно. Он поражается, что «благодаря этому исчислению все предстает перед очами и в уме с восхитительной краткостью и ясностью».

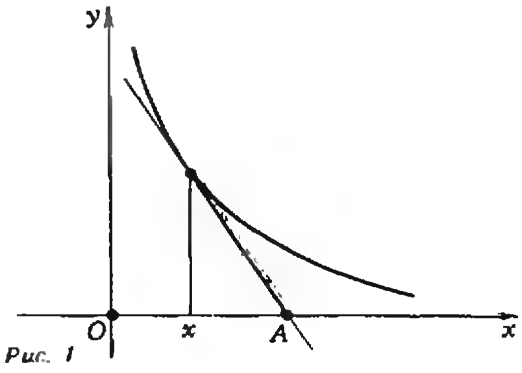


Рис. 1

Лейбниц, как и Ньютон, стремился создать мощный метод, не заботясь на этой стадии о достаточно строгом обосновании исчисления. Еще на стадии ученичества Лейбницу казалось, что Грегори слишком увлекается «доказательством на античный лад». Для Лейбница конкретные результаты, в первую очередь, рассматривались как возможная иллюстрацию его метода. Видимо здесь сказалось, что он никогда не умел легко делать выкладки и всегда завидовал вычислителям «из железа или меди». Позднее (1696 год, письмо Лопиталю) он связывал это с тем, что одновременно занимался многими разными вещами:

> «Моему уму, занятому другими предметами, не удается сосредоточиться в необходимой мере, из-за этого я ежеминутно спотыкаюсь, а когда я напрягаю внимание, у меня появляется неприятное ощущение какого-то жара». В 1699 году вычисления «становятся приятнее, когда их делишь с кем-нибудь, а я не в состоянии долго заниматься вычислениями, если мне не помогают».

В 1675 году в Париже вместе с Лейбницем работал его соотечественник и коллега Чирнгауз (1651—1708), который занимался больше всего алгебраическими уравнениями, но интересовался также и квадратурами. Умелый вычислитель, он удачно дополнял Лейбница, но тогда все же не смог оценить пользу исчисления.

Ньютон и Лейбниц

Лейбниц, разумеется, слышал, что Ньютон владеет какими-то мощными методами и решает обсудить с ним свой новый метод. Через посредничество Ольденбурга (секретаря Королевского общества) в 1676 году происходит обмен письмами. Лейбниц перечисляет задачи, которые он умеет решать, просит сообщить о методах Ньютона, обещает рассказать о своем методе. Еще ранее Лейбниц писал Ольденбургу, что создание метода — «единственная вещь», которой он придает значение. Результаты Лейбница не удивили Ньютона. Он сразу заметил, что задача Дебона сводится к квадратуре гиперболы (логарифмам), а по поводу ряда для π заметил, что потребовалось бы 1000 лет, чтобы сосчитать 20 десятичных знаков π. Очень скупо говорит Ньютон о методе. Ясно лишь, что центр тяжести в его рассмотрениях на степенных рядах. Ньютон утверждает, что он в состоянии решить при их помощи любое дифференциальное уравнение. Основная часть информации закодирована в двух анаграммах. Ньютон расшифровал их много позднее. Это был старинный способ сохранить приоритет. Быть может, значение, которое Ньютон приписывал степенным рядам, помешало Лейбницу осознать, что у Ньютона имеется исчисление.

Лейбниц не согласен, что ряды решают все проблемы. Ему видится иная картина. Надо пытаться сводить решение дифференциальных уравнений к известным квадратурам. Важно разобраться, хватает ли элементарных функций и квадратур гиперболы и круга (логарифмической и тригонометрических функций). Грегори приводил веские аргументы в пользу того, что для вычисления длин дуг эллипса или гиперболы (будущие эллиптические интегралы) этих квадратур мало. Тогда надо «установить какие-то другие высшие основные фигуры» (в другом месте «высшие трансцендентности в геометрии»), которых достаточно для решения дифференциальных уравнений. Ньютона и эта постановка не застает врасплох: он сообщает при каких α, β интеграл $\int x^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$ сводится к известным квадратурам. Переписку прервал Ньютон; кроме того в 1677 году умер Ольденбург, через которого она велась.

Вновь при дворе

Да и жизнь Лейбница решительно изменилась. От его парижского периода остались лишь черновики и наброски статей. У него зреет план подготовки всеобъемлющего труда «Математика бесконечного», но жизненные перемены решительно отвлекли его от математики.

Нам не дано знать, опять-ли взыграло у Лейбница политическое честолюбие или он не нашел возможности обеспечить себе жизнь занятиями наукой (возможно протестанство помешало ему получить место в Парижской академии наук). Так или иначе с конца 1676 года он на службе у герцога Иоганна Фридриха в Ганновере. Он едет в Ганновер кружным путем, посещает Лондон, где видится со многими математиками, но не встречается с Ньютоном, а в Голландии навещает Спинозу.

Итак, Лейбниц смог получить место лишь у второстепенного государя, да и то, поначалу, он лишь герцогский библиотекарь. Не самое завидное место для 30-летнего ученого и политика, еще не отказавшегося от честолюбивых замыслов. Но Лейбниц полон энтузиазма и мечтает о лучшей библиотеке в мире, пока реально отпускаемые средства не охладили его. Он занимается и юридической деятельностью, но его предпочитают загружать повседневными делами, к которым у него нет вкуса, а не к глобальным юридическим проблемам. Очень ограниченно допускают Лейбница к дипломатической деятельности. Так, ему поручается подготовить текст, мотивирующий право герцога участвовать во франко-германских мирных переговорах. Иоганн Фридрих был католическим монархом в протестантском государстве, и Лейбниц хотел воспользоваться этим обстоятельством, чтобы осуществить еще одну свою заветную идею — объединить католическую и протестантскую религии.

В 1679 году на престоле новый герцог, Эрнст Август, при котором дела стали идти хуже. Но Лейбниц полон проектов, спектр которых необычайно широк: усовершенствование кладки печей, производства гвоздей, молотков, усовершенствование колес экипажей, удочек, рулей, кораблей, литейного производства, пожарного дела, реорганизация архивов, составление «Свода законов Эрнста-Августа» и т. д. Почти ни один проект не нашел поддержки.

В каждом проекте Лейбница была остроумная находка, но ему часто не хватало реализма. Успех наступал тогда, когда за доводку идеи брался талантливый практик. Так было с паровой машиной: «...Лейбниц, рассыпая вокруг себя, как всегда, гениальные идеи без заботы о том, припишут ли заслугу открытия этих идей ему или другим, — Лейбниц, как мы знаем теперь из переписки Папена (изданной Герландом), подсказал ему при этом основную идею: применение цилиндра и поршня» (Энгельс) *).

Постоянная борьба за влияние при дворе надолго отвлекла Лейбница от математики. Новое обращение Лейбница к математике стимулировалось двумя обстоятельствами. С 1682 года при его поддержке стали выходить «Ученые записки» в Лейпциге и Лейбниц предлагает публиковать там свои результаты. В 1683—1684 годах в журнале публикуются статьи Чирнгауза о квадратурах, в которых Лейбниц обнаруживает следы своих недавних бесед с автором, без необходимых ссылок. Когда-то Лейбниц безуспешно пытался убедить Чирнгауза в эффективности исчисления, теперь Чирнгауз напечатал сам некоторые результаты в этом направлении. Очень вероятно, что Чирнгауз не помнил, что первоисточником его утверждений были высказывания Лейбница. Так бывает, что непонятные мысли прячутся глубоко, а через некоторое время возникают как свои собственные.

В мае 1684 года Лейбниц напечатал статью с осторожной критикой Чирнгауза (без приоритетных претензий и без указания полной фамилии своего коллеги), а в октябре выходит его знаменитая статья, юбилей которой явился поводом для наших обсуждений.

«Новый метод...» Лейбница

Попытаемся, опираясь на наши сегодняшние сведения о дифференциальном исчислении, прочитать текст Лейбница и отнесемся сочувственно к его современникам, которым статья осталась непонятной. Лишь математику масштаба Я. Бернулли (см. ниже) было по плечу домыслить то, что еще не приобрело форму, приспособленную для передачи другим.

> «Допустим, что даны ось AX и ряд кривых VV, WW, YY, ZZ и их перпендикулярные к оси ординаты VX, WX, YX, ZX, которые мы назовем соответственно v, w, y, z; отсекаемый на оси отрезок AX назовем x.
>
> Пусть VB, WC, YD, ZE будут касательные, пересекающие ось соответственно в точках B, C, D, E (рис. 2). Назовем произвольно взятую прямую dx, и другой отрезок, относящийся к dx так, как v (или w, или y, или z) относится к XB (или XC, или XD, или XE) назовем dv (или dw, или dy, или dz) или же раз-

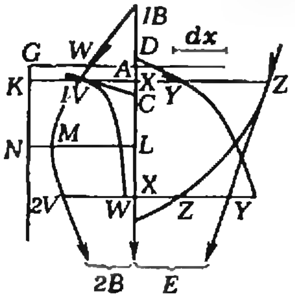


Рис. 2.

---

*) Маркс К., Энгельс Ф. Соч. 2-е изд., т. 20. с. 431.

ностью v (или w, или y, или z). Если установить это, то правила исчисления будут следующими.

Если a представляет собой постоянную величину, то da будет равно 0 и $d\overline{ax}$ равно adx. Если y равно v (или же каждая ордината кривой YY равна соответствующей ординате кривой VV), то dy равно dv. Далее, *Сложение* и *Вычитание:* если $z-y+w+x$ равно v, то $d\,\overline{z-y+w+x}$ или dv равно $dz-dy+dw+dx$. *Умножение:* $d\overline{xv}$ рав. $xdv+vdx$ или, если положить y равно xv, то dy равно $xdv+vdx$. Можно по произволу пользоваться либо формулой к xv, либо же, для краткости, одной буквой, как, например, y. Заметим, что в этом исчислении к x и dx обращаются так же, как и с y и dy или с какой-нибудь иной неопределенной буквой и ее дифференциалом. Заметим также, что обратный переход от дифференциального уравнения получается лишь при некоторых условиях; но об этом в другом месте. Далее, *Деление:* $d\left(\frac{v}{y}\right)$ или же $\left(\text{если положить } z \text{ равно } \frac{v}{y}\right)$

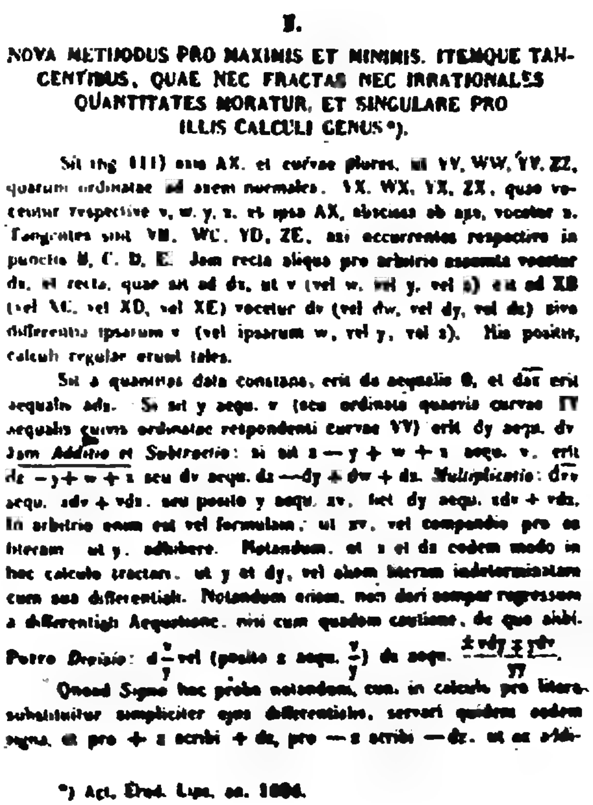
dz равно $\dfrac{\pm vdy\mp ydv}{yy}$.»

Здесь черта вверху заменяет скобки. Одновременно рассматривается несколько функций v, w, y, z от независимой переменной x, хотя термин «функция» еще не вводится. Дифференциал dy определяется из условия $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{l}$, где y — ордината, l — длина подкасательной, dx — произвольно выбранный отрезок. Подчеркивается его «отчуждение» от исходной функции и произвол (даже на рисунке он вынесен наружу). Казалось бы, его можно было положить равным 1 и тогда мы получили бы производную, но Лейбница это не устраивает. Он подчеркивает, что можно произвольно менять выбор независимой переменной и ее дифференциала, в одной фазе формулируя несомненно выстраданное им утверждение об «инвариантности дифференциала», то есть, в сущности, правила дифференцирования сложной функции. У Ньютона независимая переменная была фиксирована (время). В дальнейших примерах Лейбниц демонстрирует, как полезно бывает пользоваться произволом в выборе x и dx.

Дальнейший текст статьи содержит довольно туманные рассуждения о выборе знаков dy. Затем рассматривается задача о нахождении максимумов и минимумов, обращение dy в бесконечность связывается с перпендикулярностью касательной к оси AX. Без достаточных мотивировок рассматривается ddy — «разности разностей» — и исследуются задачи о точках перегиба, выпуклости и вогнутости. Дифференцируется функция x^a для любого рационального a и этому придается большое значение (см. заглавие статьи), поскольку задачи, содержащие радикалы, до работы Лейбница предварительно сводили к целым показателям. На примере циклоиды рассматривается задача о проведении касательных к трансцендентным кривым. Исследуются разнообразные задачи на касательные и экстремумы, в частности, выводится закон преломления и решается задача Дебона (см. выше). Очень оптимистична оценка предлагаемого исчисления: «То, что человек, сведущий в этом исчислении, может получить прямо в трех строках, другие учёнейшие мужи принуждены были искать следуя сложными, обходными путями».

Математика и «завоевание умов» государей

После публикации «Нового метода...» жизнь Лейбница в Ганновере продолжается без заметных изменений. По существу в это время Лейбниц не зани-



I.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS*).

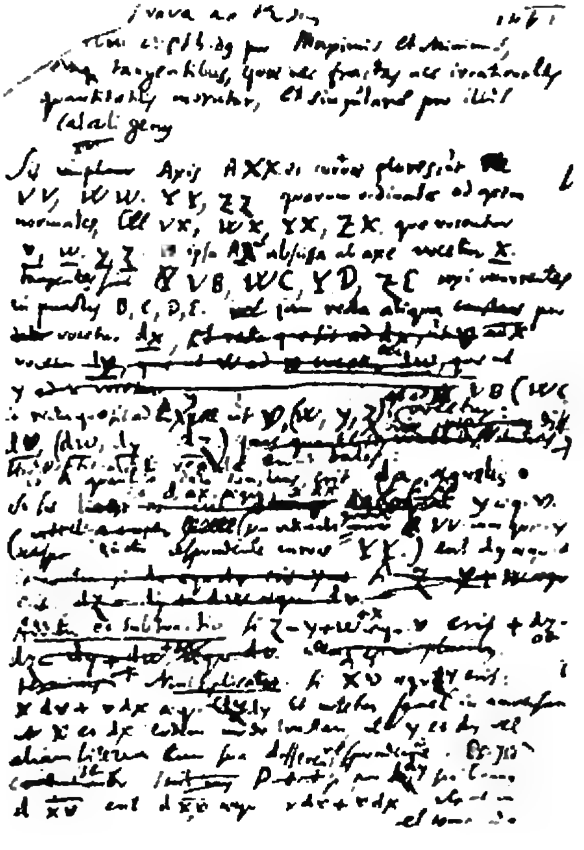
---

*) Act. Erud. Lips. an. 1684.

Первая страница статьи Лейбница «Новый метод...».

мается анализом. Он лишь печатает немногое из своих математических «кладовых». В частности, в 1686 году вышла статья «О глубоко скрытой геометрии и анализе неделимых, а также бесконечных». В ней впервые появляется в печати интеграл (он еще называется суммой, но обозначается через ∫; термин «интеграл» ввел И. Бернулли). Здесь четко формулируется взаимная обратность операций дифференцирования и интегрирования, подчеркивается необходимость рассмотрения трансцендентных функций в анализе. В статье приводятся краткие исторические замечания. Ньютон называется «глубочайшего дарования геометром», отмечается, что публикация его методов способствовала бы «немаловажному приращению науки». На этом фактически закончился второй период математической жизни Лейбница.

Дела Лейбница при дворе складываются все хуже. В 1687 году он отправляется в трехлетнюю поездку для работы в архивах Германии и Италии над историей дома Вельфов, к которому относится герцог Эрнст Август. С 1690 года Лейбниц снова в Ганновере. Он рассчитывает за два-три года закончить «Историю Вельфов», но его замысел все расширяется и эта оценка оказалась, как всегда, оптимистична. Книга тяжелым грузом висела над ним до конца его дней.



Рукопись статьи Лейбница «Новый метод...».

По приезде в Ганновер Лейбница ждало письмо Якоба Бернулли (1654—1705), отправленное еще в 1687 году. Я. Бернулли прочел статьи Лейбница и проникся духом нового исчисления. Ожидая ответа Лейбница, Бернулли начал активно работать в анализе, вовлекая в занятия своего младшего брата Иоганна (1667—1748). Лейбниц нашел понимание, которого ждал много лет. О лучших учениках не приходилось и мечтать. У Лейбница возникла своя научная школа (то, чего был лишен Ньютон). В контактах с братьями Бернулли Лейбниц начал систематически развивать анализ. Они печатали статьи в «Acta Eruditorum», обменивались письмами, обсуждали задачи. Позднее к триумвирату присоединился маркиз Лопиталь (1661—1704), ученик И. Бернулли, впоследствии автор первого курса дифференциального и интегрального исчисления. Между тем политические замыслы Лейбница по-прежнему не приносят успеха, хотя он и становится тайным советником. Новый герцог (с 1698 года) Георг Людвиг настойчиво выражает желание наконец увидеть «книгу-невидимку» — давно ожидаемую «Историю Вельфов», Лейбница по существу отстраняют ото всех дел и стараются ограничить его внешние контакты.

О систематических занятиях наукой не могло быть и речи. В 1695 году он пишет:

> «Нет слов, чтобы описать, насколько я не сосредоточен. Ищу в архивах разные вещи и собираю ненапечатанные рукописи, с помощью которых надеюсь пролить свет на историю Брауншвейгского дома. Я получаю и отправляю немалое число писем. У меня столько нового в математике, столько мыслей в философии, столько других литературных заметок, которым я не могу дать погибнуть, что я часто не знаю, за что раньше приняться... Уже свыше двадцати лет назад французы и англичане видели мою счетную машину*)... Теперь же с помощью собранных мною рабочих готова машина, позволяющая перемножать до двенадцати разрядов... А прежде всего я хотел бы закончить свою «Динамику», в которой, я полагаю, наконец нашел истинные законы материальной природы... Мои друзья, которые знают и по-

---

*) Счетная машина Лейбница показана на с. 10.

> строенной мною высшей геометрии, настаивают на издании моей «Науки о бесконечном», содержащей основы моего нового анализа...»

Последние годы жизни Лейбница были омрачены полемикой с Ньютоном о приоритете. Постепенно спор перерос в обвинение Лейбница в плагиате. Намекали на то, что возможно он познакомился с рукописями Ньютона в Лондоне. Сегодня независимость открытия Лейбница представляется доказанной. В Лондоне не было достаточно подробного текста, в первый приезд Лейбниц не был готов воспринять теорию Ньютона, не было никого, кто понимал исчисление настолько, чтобы передать его Лейбницу. Ко второму же визиту в Лондон Лейбниц уже владел своим исчислением. Вначале полемика проходила без участия Ньютона и Лейбница. Удивительно, что Ньютон, который всегда уходил от приоритетных споров, на этот раз энергично включился в полемику. Вероятно, Лейбниц очень задел его, ни разу не признав в нем творца нового исчисления (теперь уже появились публикации). В Англии организовали подлинную травлю Лейбница.

Все осложнилось еще из-за того, что в 1714 году герцог становится королем Англии Георгом I. Лейбниц рассчитывает переехать в Лондон, стать королевским историографом, но ему в оскорбительной форме отказывают даже в поездке на коронацию (заставляя завершать «Историю»). Сыграло свою роль и то, что король не хотел иметь в своей свите поверженного противника знаменитого Ньютона. Умер Лейбниц в 1716 году. Надпись на могильной плите весьма лаконична: «прах Лейбница».

Возможно, научная карьера Лейбница сложилась бы иначе, если бы он смог найти себе просвещенного и сильного покровителя. На склоне лет, в 1711 году, Лейбниц познакомился с Петром I, на свадьбе царевича Алексея. Петр принял Лейбница на русскую службу тайным советником юстиции, обсуждая с ним организацию Академии наук в Петербурге. Но планам Лейбница, связанным с Петром I, как и многим другим его проектам, не суждено было сбыться. Лейбниц писал Петру I:

> «Хотя мне часто приходилось действовать на политическом и юридическом поприщах, и знатные князья иногда в этих вопросах пользуются моими советами, и все-таки предпочитал науки и искусства, так как они постоянно содействуют славе господней и благосостоянию всего рода человеческого... науки и ремесла составляют настоящее сокровище человеческого рода, ибо посредством их искусство превозмогает природу и цивилизованные народы отличаются от варварских. Поэтому я с малолетства любил науки, занимался ими и имел счастье... сделать разные и очень важные открытия, восхваленные в печати беспристрастными и знаменитыми людьми. Я не находил только могущественного государя, который достаточно интересовался бы этим».

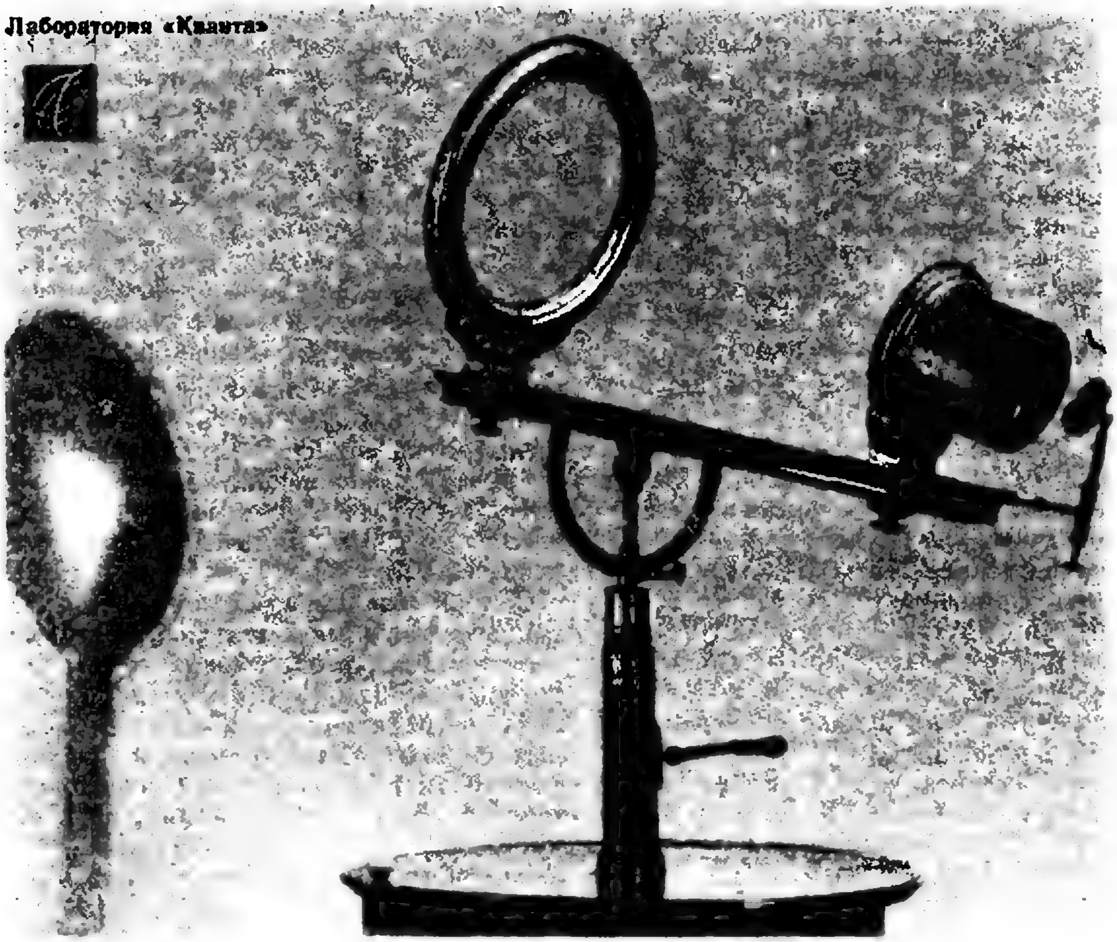
По-видимому с годами оценки Лейбница сместились: он долго отдавал приоритет политике перед наукой, но жизнь жестоко научила его, как неблагодарно положение ученого во дворцах. И последующие поколения помнят не столько неудачи Лейбница на политическом поприще, сколько его научные достижения, сыгравшие решающую роль в дальнейшем развитии науки. К числу таких работ, несомненно, принадлежит работа 1684 года о дифференциальном исчислении.

Магнитная память ЭВМ

(Начало см. на с. 2)

Заканчивая рассказ о магнитной памяти вычислительных машин, отметим, что идеальное ЗУ пока еще не создано, мечта фантастов о магическом кристалле, который все помнит и все знает, остается мечтой, но достаточно близкой к реализации. С точки зрения физиков, дело упирается в подходящий материал, с точки зрения инженеров — требуется удобная технология и доступная цена.

Авторы понимают, что в короткой статье все охватить невозможно. Поэтому они хотят еще раз напомнить читателям, что явление магнетизма, известное с древности, и сегодня служит самой передовой научной мысли и сулит блестящие перспективы. Его теоретические разработки далеки от завершения, а поиски новых магнитных материалов только развернулись. Магнитофизики и материаловеды ждут новых энтузиастов.



Несколько опытов с объективом

Кандидат физико-математических наук
А. А. ЛАПИДЕС

Наверное, каждому из вас приходилось иметь дело с биноклем или проекционным аппаратом, фото- или киноаппаратом, микроскопом или телескопом. Основной элемент всех этих оптических приборов — объектив, позволяющий получать действительные изображения различных объектов.

Современные объективы очень сложны по своему устройству, но все они, как правило, представляют собой совокупность специально подобранных линз. Так что линзу можно считать прародительницей сегодняшних объективов.

В конце XVII века нидерландский натуралист А. Левенгук, отшлифовав кусочек стекла, изготовил линзу, которая давала увеличение в 300 раз. С ее помощью Левенгуку впервые удалось исследовать мир инфузорий и бактерий, наблюдать движение крови в капиллярах и многое другое, что невозможно было увидеть невооруженным глазом.

Законы геометрической оптики объясняют способность линзы создавать изображение — световые лучи, испущенные какой-нибудь точкой объекта, преломляются в линзе так, что опять собираются в точку. Однако так происходит далеко не всегда. Любая одиночная линза обладает целым рядом недостатков.

Во-первых, лучи, испущенные светящейся точкой и идущие под малыми углами к оптической оси линзы, собираются в одной точке (B), а лучи, идущие под большими углами к оси,— в другой (B') (рис. 1). Поэтому, если в плоскости, проходящей через изображение B, установить экран, вокруг точки B мы увидим светлое пятно. Его часто называют кружком рассеяния.

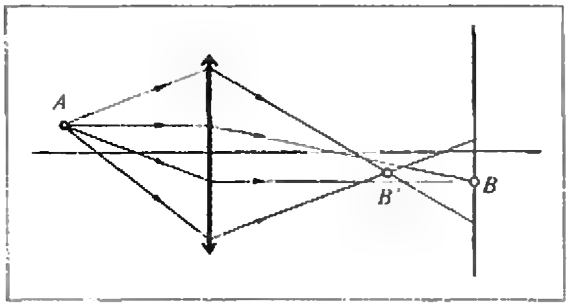


Рис. 1.

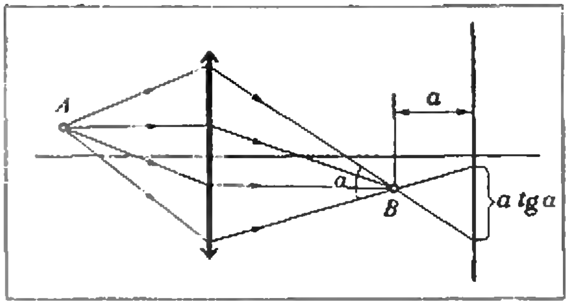


Рис. 3.

Во-вторых, из-за явления дисперсии линза преломляет свет разных длин волн (разных цветов) по-разному. А это значит, что лучи разных цветов собираются после преломления в разных точках и вместо одной яркой точки на экране наблюдается пятно, причем окрашенное.

Эти и другие погрешности линз приводят к тому, что изображения протяженных объектов оказываются искаженными, не вполне отчетливыми, порой окрашенными.

Характер искажений может изменяться в зависимости от различных причин. Но, во всяком случае, искажения тем больше, чем больше угол, образуемый с оптической осью лучами, идущими от объекта. Давайте убедимся в этом экспериментально.

Опыт 1. Возьмите очки, расположите их на расстоянии 20—30 см от глаз и посмотрите на какой-нибудь предмет, например на страницу текста. Перемещая текст и очки относительно лица, добейтесь такого положения, при котором вы видите текст увеличенным. Обратите внимание на то, что изображения букв вблизи краев искажены; в центре же искажения невелики (рис. 2). (Подумайте, почему те, кто носит очки, не замечают подобных искажений?)

Рис. 2.

Велики или малы искажения линзы? Как всегда в физике этот вопрос сам по себе бессмыслен. Необходимо иметь некоторый «эталон», с которым можно сравнивать величину искажений. В данном случае таким «эталоном» может быть размер наиболее мелкого характерного участка изображения. Если он много больше кружка рассеяния, то искажения линзы следует признать незначительными — наблюдатель их просто не заметит. Если же изображение таково, что размеры его мелких элементов сравнимы с диаметром кружка рассеяния, то они будут казаться как бы смазанными, нечеткими.

Можно ли исправить положение и уменьшить искажения изображения? Оказывается, это можно сделать введением на пути лучей дополнительной линзы, искажения которой противоположны по знаку искажениям данной линзы. Так, для линзы, изображенной на рисунке 1, роль «корректирующей» линзы будет играть рассеивающая линза, которая сильнее преломляет центральные лучи и слабее — периферийные (в этом легко убедиться, сделав соответствующий чертеж). В современных оптических приборах количество используемых с этой целью линз может достигать 8—10 и даже больше. Получаемую при этом систему линз и называют объективом. Он обладает основным свойством одиночной линзы — способностью создавать изображение, но дает существенно меньшие искажения.

Ход лучей в объективе представлен на рисунке 3. Сравнивая рисунки 1 и 3, мы видим, что объектив собирает практически все лучи в одну точку — размер кружка рассеяния объектива обычно составляет величину порядка 20 мкм. Однако, если экран смещен на величину a от точки B, на нем образуется круг размера $a\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где α — угол, соответствующий крайним лучам, проходящим сквозь линзу. Зависимость размера этого круга от угла, а значит и от диаметра объектива, используется фотографами для получения фотографий с большой глубиной резкости.

Наводка аппарата на резкость заключается в смещении объектива относительно пленки (которая в данном случае играет роль экрана на рисунке 3). Объектив устанавливают в такое положение, что изображение фотографируемого объекта оказывается расположенным точно в плоскости пленки. При этом, очевидно, изображения предметов, находящихся дальше от фотографируемого объекта, оказываются перед пленкой, а предметов, находящихся перед ним,— за пленкой. Отдельные малые элементы этих предметов создадут на пленке освещенные кружки, диаметр которых пропорционален величине диафрагмы объектива. Поскольку качество фотографического изображения определяется еще и зернистостью пленки, то изображения предметов не будут ухудшены по сравнению со случаем точной наводки на резкость, если размер кружка рассеяния не превосходит радиуса зерна пленки. А этого можно добиться соответствующим подбором диаметра объектива. Вот почему при фотографировании сцен, содержащих далеко расположенные друг от друга (вдоль оптической оси) предметы, или, как говорят, имеющих большую глубину, необходимо уменьшать диафрагму объектива. Подтвердим сказанное экспериментом.

Опыт 2. Возьмите фотоаппарат, лучше с зеркальным видоискателем (например, «Зенит»). Нарисуйте на белом листе несколько горизонтальных и вертикальных линий, закрепите лист на стене и осветите его настольной лампой.

С расстояния около 1 м наведите фотоаппарат на резкость при полностью открытой диафрагме объектива, отодвиньте его от первоначального положения на 20—30 см так, чтобы изображение стало нерезким, и задиафрагмируйте объектив. Глубина резкости при этом увеличится, и изображение опять станет четким.

Снова откройте диафрагму до максимальной величины. Приложите к объективу экран из картона в виде щели длиной примерно 3 см и шириной 2—3 мм. Если вы ориентируете щель горизонтально, изображение горизонтальных линий станет резким, в то время как вертикальные линии останутся размытыми; если же щель вертикальна — резко будут видны вертикальные линии. Фотография, воспроизведенная на рисунке 4, иллюстрирует этот факт (слева изображен неискаженный объект, а справа — его вид через горизонтальную щель).

Объяснить этот опыт можно так. Введение щели изменяет форму пятна рассеяния — вместо круглого оно становится прямоугольным, причем длинная сторона прямоугольника ориентиро-

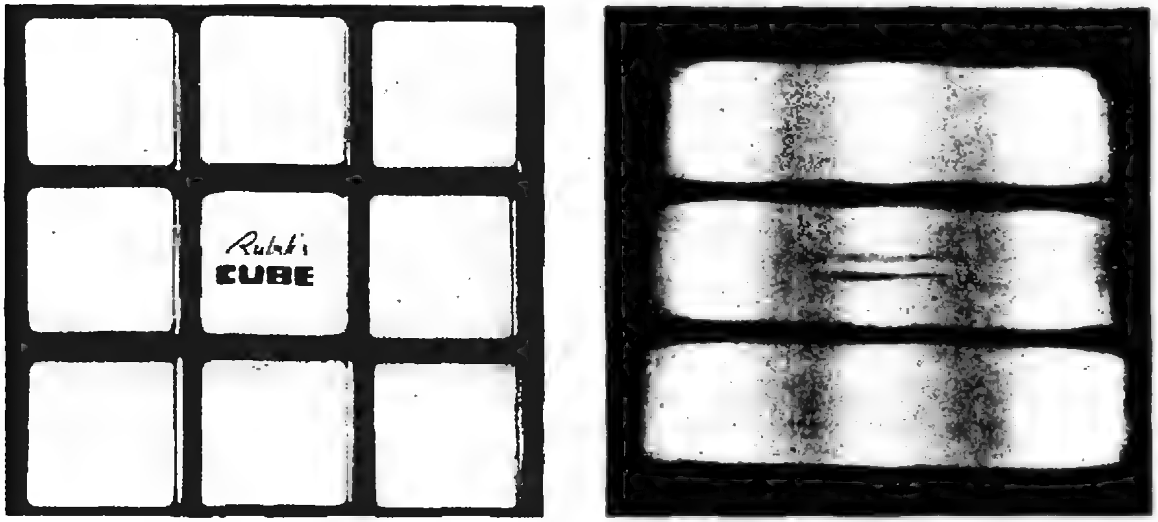


Рис. 4.

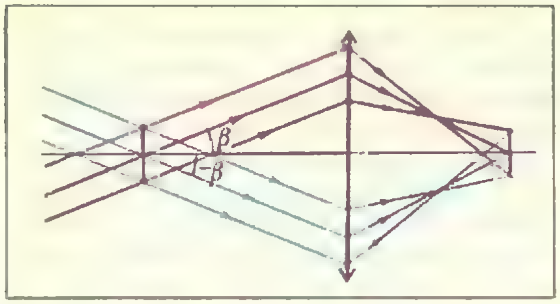


Рис. 5.

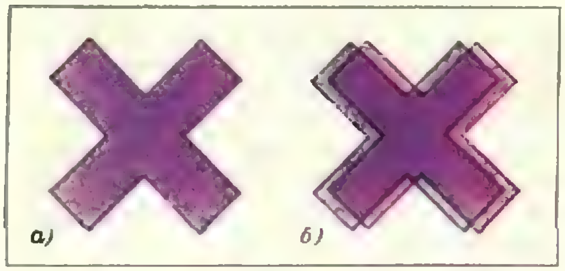


Рис. 6.

вана параллельно щели. Для линий, параллельных щели, глубина резкости оказывается большой (величину диафрагмы для них определяет ширина щели), а для линий, перпендикулярных щели,— малой (величину диафрагмы для них определяет длина щели).

Как мы уже говорили, если источник посылает свет во все стороны, размер кружка рассеяния на экране определяется диаметром диафрагмы объектива. Если же источник испускает узкий пучок, изменения диафрагмы роли не играют и диаметр кружка целиком определяется самим пучком.

Проведем опыт, цель которого — исследовать зависимость резкости изображения от расходимости освещающего пучка. Нам понадобятся объектив от фотоаппарата, два карманных фонарика и два цветных стеклышка, например красное и синее. Обращаться с объективом следует осторожно, чтобы не повредить поверхностей линз.

Опыт 3. Возьмите лист черной бумаги и бритвой прорежьте в нем тонкий крест. Установите этот лист перед объективом, а за объективом закрепите другой лист бумаги — экран. Осветите крест карманным фонариком. Перемещая оба листа и объектив друг относительно друга вдоль оптической оси, добейтесь такого положения, когда изображение креста на экране будет наиболее четким. Убедитесь, что изображение будет оставаться достаточно четким при перемещении экрана в некоторой области вдоль оптической оси.

Теперь направьте на крест свет от двух фонариков, совместив с одним из них красное стеклышко, а с другим — синее (рис. 5). Красные лучи, падающие под углом β, образуют красное изображение креста, а синие лучи, идущие под углом — β,— синее изображение. Эти изображения накладываются друг на друга только при одном положении экрана (рис. 6, *а*). Смещение экрана вызывает смещение изображений в поперечном относительно оптической оси направлении — появляется окрашенный контур изображения на экране (рис. 6, *б*). Но при этом как красное, так и синее изображения остаются четкими. Уберите цветные стеклышки — изображение креста станет бесцветным и менее четким.

Объяснение опыта состоит в следующем. Как красное, так и синее изображения образованы узкими пучками. Поэтому диаметр кружка рассеяния на экране, создаваемого светом каждой точки, мал. За счет наклона пучка к оси центр кружка, а значит и каждое одноцветное изображение, смещается в сторону, но остается достаточно резким. Если убрать цветные стеклышки, то белый свет от двух фонариков как бы образует общий пучок с углом раскрытия 2β, который значительно превосходит углы раскрытия красного и синего пучков. Поэтому резко возрастает радиус круга на экране — изображение становится менее четким.

Мы рассказали лишь о нескольких опытах с объективом, которые интересно и полезно провести. Разумеется, их число можно увеличить по своему усмотрению.

Поправка

В «Кванте» № 9 в заметке «Гармонические колебания. Сложение колебаний» в середине правой колонки на с. 23, там, где обсуждается первый крайний случай, вместо равенства

$$\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})=\cos(\varphi_2-\varphi_1)=0$$

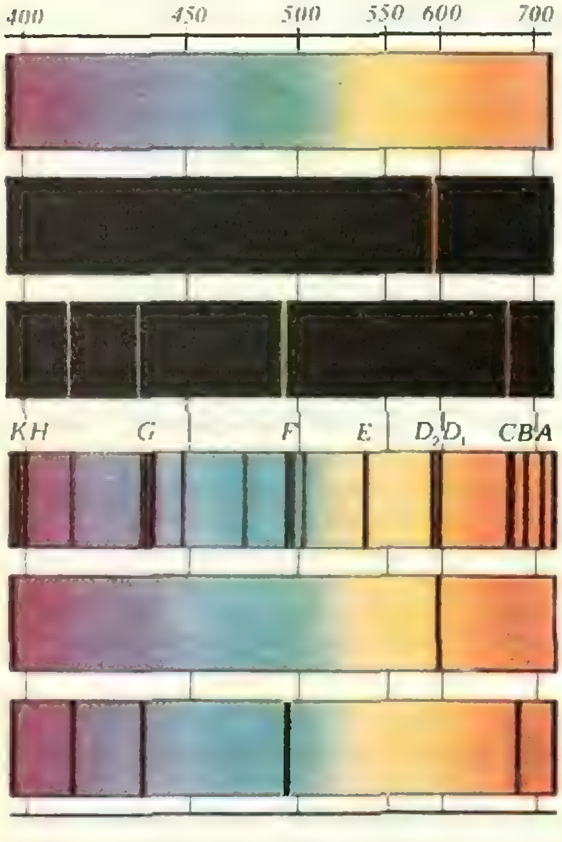
должно быть

$$\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})=\cos(\varphi_2-\varphi_1)=1.$$

Спектральный анализ

В этом году исполняется 125 лет спектральному анализу, одному из важнейших физических методов исследования вещества.

В 1802 году английский ученый У. Х. Волластон (1766—1828) впервые заметил в солнечном спектре узкие темные линии, но не придал этому наблюдению особого значения. Гораздо более обширные и достоверные результаты получил в 1814—1815 годах немецкий оптик Й. Фраунгофер (1787—1826). Он показал, что спектр Солнца содержит множество темных линий (позже их стали называть фраунгоферовыми), а спектр пламени, куда была введена поваренная соль,— две яркие желтые линии. При этом он заметил также, что положения двух этих цветных линий точно совпадают с положениями двух темных линий (*D*-линий, по Фраунгоферу) солнечного спектра. В последующие несколько десятилетий к исследованию спектров обращались многие ученые, но сколь-нибудь существенного прогресса достигнуто не было.



Спектры испускания и поглощения Солнца, натрия и водорода. Цифры на рисунке — это длины волн (в нанометрах), соответствующие различным участкам видимой области спектра. Буквами обозначены наиболее интенсивные фраунгоферовы линии.

Такова вкратце предыстория спектрального анализа. Его же действительная история начинается с октября 1859 года, когда в трудах Берлинской Академии наук появилась небольшая — всего две страницы — статья «О фраунгоферовых линиях». Статья была написана уже знаменитым в то время профессором физики Гейдельбергского университета Г. Кирхгофом (1824—1887), и речь в ней шла о спектральных исследованиях, которые он провел вместе с другим — не менее знаменитым — гейдельбергским профессором-химиком Р. Бунзеном (1811—1899).

Важнейший опыт состоял в следующем: перед разложением в спектр (с помощью призмы) солнечный луч пропускали через пламя, в которое была введена поваренная соль. «В тех случаях, когда солнечный свет был достаточно ослаблен,— писал Кирхгоф,— на месте темных *D*-линий появлялись две светлые линии; если же интенсивность солнечного света переступала известную границу, то обе темные *D*-линии обнаруживались с гораздо большей отчетливостью, чем при отсутствии пламени с поваренной солью». Кирхгоф сделал вывод: «Можно считать, что светлые линии в спектре пламени, совпадающие с *D*-линиями, всегда возникают вследствие присутствия в нем натрия; поэтому темные *D*-линии в солнечном спектре заставляют думать, что в атмосфере Солнца имеется натрий».

В наши дни даже трудно представить, сколь сильное впечатление произвел на современников этот вывод — впервые земная наука получила возможность определять химический состав далеких небесных тел. Сам же метод спектрального анализа, который с первых опытов представлялся гейдельбергским профессорам чуть ли не самоочевидным, был надежно проверен и со всей определенностью установлен в последующих работах Кирхгофа и Бунзена.

Вот его основной принцип: каждому химическому элементу свойственно специфическое расположение спектральных линий, которые выглядят яркими и цветными, когда атомы этого элемента излучают свет, и темными — когда они свет поглощают.

Огромная плодотворность метода спектрального анализа выявилась незамедлительно. Уже в 1860 году Кирхгоф и Бунзен, зарегистрировав неизвестный спектр, открыли новый элемент — цезий. В 1861 году они же открыли рубидий. Вскоре другими учеными аналогичным образом были открыты таллий и индий. Со временем открытие Кирхгофа и Бунзена превратилось в стандартный, универсальный и обладающий чрезвычайно высокой чувствительностью лабораторный метод качественного и количественного анализа вещества. Так, с его помощью можно обнаружить примеси, содержание которых составляет 10^{-6} % от основного материала.

Что касается природы самих спектров и причин удивительных закономерностей в расположении спектральных линий, то ответы на эти вопросы удалось получить только в первые десятилетия нашего века, когда возникла квантовая механика, теория, само создание которой было неразрывно связано с проблемой «расшифровки» спектров.

Б. Е. Явелов

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Как «открыть» второй закон Ньютона?» предназначена восьмиклассникам, «Газ превращается в жидкость» — девятиклассникам, «Уравнение волны» — десятиклассникам.
Материалы подготовил И. К. Белкин

Как «открыть» второй закон Ньютона?

Ньютон в своем знаменитом труде «Математические начала натуральной философии» определяет силу следующими словами:

«Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения».

Другими словами, сила есть причина ускорения. Второй же закон движения Ньютон формулирует так:

«Изменение движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует».

Слова «изменение движения», несомненно, означают изменение скорости движения, так как именно скорость — главная количественная характеристика движения, а направление вектора скорости и есть направление движения. Таким образом, второй закон Ньютона сводится к утверждению, что ускорение (которое непосредственно связано с изменением скорости) тела пропорционально приложенной к нему силе и направлено так же, как сила.

Но слово «пропорционально» предполагает, что сила может быть выражена численно. Между тем приведенное выше словесное определение силы не позволяет сопоставить силе какое-то число. Остается поэтому неясным, как именно Ньютон «узнал», что ускорение и сила связаны между собой так, как это утверждается в его законе. Но ясно, что второй закон Ньютона — это такой закон, который может быть получен только из опыта. Какого опыта? К сожалению, Ньютон не счел нужным сообщить об этом в своей книге. Но нетрудно себе представить, каким должен быть такой опыт.

Прежде всего для опыта нужно воспользоваться такой силой, которая не зависит от того, к какому телу она приложена. Этому условию удовлетворяет, например, сила упругости растянутой (сжатой) пружины. Она определяется *только* удлинением пружины, и при данном удлинении пружина действует на любое прикрепленное к ней тело с одинаковой силой.

Если для опыта использовать силу упругости пружины, то связь между силой и ускорением можно установить двумя способами.

Способ первый. Сила упругости определенным образом растянутой (сжатой) пружины принимается равной единице (эталон силы). К пружине прикрепляется какое-нибудь тело и измеряется ускорение тела при его движении под действием силы (разумеется, при движении тела удлинение пружины изменяться не должно!). Затем к этому же телу, то есть к телу той же массы, прикрепляются 2, 3, 4 и т. д. такие же и так же растянутые (сжатые) пружины и снова измеряются ускорения, сообщаемые телу силами, равными теперь двум, трем, четырем и т. д. единицам.

При всех этих измерениях масса m тела остается одной и той же. Поэтому должна быть какая-то величина, связанная с силой и ускорением, тоже одинаковая во всех опытах. Ее и следует приравнять массе тела. Такой опыт показал бы, что одинаковой при любых действующих силах величиной было бы отношение F/a, так что можно написать

$$m=\frac{F}{a}, \text{ или } F=ma.$$

Этот способ требует предварительного выбора эталона силы. Тогда измерение ускорения позволяет определить массу тела, выразить ее определенным числом.

Способ второй. Берется пружина, деформированная произвольным образом, так что возникает какая-то сила упругости, пока неизвестная. К пружине прикрепляется тело известной массы. А известна она потому, что существует эталон массы, с которым можно сравнить массу любого тела, например так, как это описано в § 23 «Физики 8». Измеряется ускорение тела, движущегося под действием силы упругости пружины. Затем к той же и так же деформированной пружине (так что сила осталась прежней) прикрепляются тела с другими, но тоже известными, массами и снова измеряются их ускорения.

Раз сила, приложенная к разным телам, одна и та же, то при измерениях должна получиться некоторая величина, связанная с ускорением, одинаковая для всех тел. Ее и нужно приравнять приложенной ко всем телам силе («Физика 8», § 25). Описанные опыты показывают, что такой одинаковой для всех тел величиной оказывается произведение ma. Значит,

$$F = ma.$$

Оба способа дают, как мы видим, одинаковый результат. Они эквивалентны друг другу, потому что все равно действовать ли разными силами на одно и то же тело или одной и той же силой на разные тела. В учебнике «Физика 8» второй закон Ньютона «открыт» с помощью второго способа, возможно, потому, что его проще выполнить. Дело в том, что первый способ предполагает, что выбран определенный эталон силы — какая-то и как-то деформированная пружина. Второй способ предполагает, что выбран определенный эталон массы. В физике и в технике пошли именно по этому пути — существует международный эталон массы в виде платино-иридиевого цилиндра. Эталон массы проще хранить и воспроизводить, чем эталон силы.

Таким образом, основной закон динамики — второй закон Ньютона — есть чисто опытный закон, впрочем, как и всякий другой закон природы. В то же время формула $F = ma$ второго закона может служить и определением силы как физической величины: силой называется физическая величина, равная произведению массы тела, к которому она приложена, на его ускорение.

Это не единственный случай, когда одна и та же формула выражает определенный закон природы и в то же время служит определением некоторой физической величины.

Газ превращается в жидкость

(Из истории физики)

Долгое время единственным известным науке газом был атмосферный воздух, который к тому же считался чем-то вроде элемента, составной части всего существующего. И лишь во второй половине XVIII века усилиями многих химиков было установлено, что существуют и другие газы, что сам воздух — это смесь различных по своей природе и свойствам газов. Впрочем слово «газ» тогда не было в употреблении. То, что мы теперь называем газом, тогда называлось «воздухом». Водород — это горючий воздух, кислород — огненный воздух, азот — удушливый воздух, аммиак — щелочной воздух и т. д.

Но в конце XVIII века химики, и прежде всего французский химик Антуан Лавуазье, сумели разобраться в новом своем газовом «хозяйстве». Лавуазье дал всем 20 известным в то время газам имена. Он же предложил слово «газ» в качестве общего наименования всего этого класса веществ. Лавуазье впервые ввел и представление об агрегатных состояниях вещества.

Как превратить газ в жидкость? О возможности превращения газа в жидкость Лавуазье высказал такую идею: «... Если бы мы могли поместить Землю в некую весьма холодную область, например в атмосферу Юпитера или Сатурна, то... воздух, или по крайней мере некоторые его компоненты, перестал бы быть невидимым и превратился в жидкость. Превращение такого рода открыло бы возможность получения новых жидкостей, о которых мы до сих пор не имеем никакого понятия».

Это было догадкой выдающегося химика, догадкой пророческой. Но нашлась и другая возможность.

Вместо охлаждения — сжатие. В 1792 году нидерландский физик Ван Марум пытался выяснить, справедлив ли закон Бойля — Мариотта («Физика 9», с. 45) для аммиака (ведь и Бойль и Мариотт открыли этот закон, исследуя воздух!). Для этого Ван Марум сжимал аммиак в цилиндре и измерял его давление, которое при этом, естественно, росло. Но неожиданно при давлении около 7 атмосфер (1 атм $\approx 10^5$ Па) давление газа

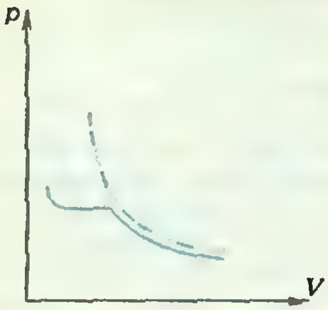


Рис. 1.

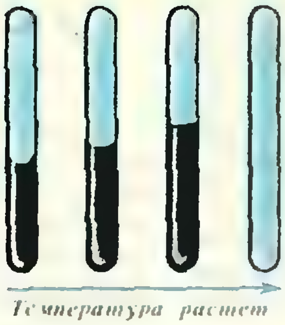


Рис. 2.

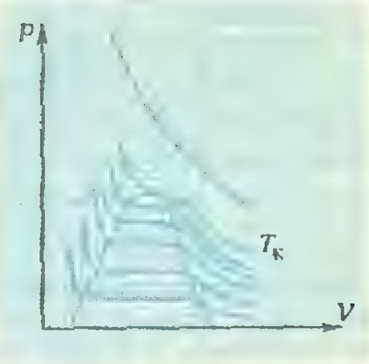


Рис. 3.

перестало расти, несмотря на то, что объем его продолжал уменьшаться. При этом в сосуде появился *жидкий* аммиак.

На рисунке 1 сплошной линией показана полученная Ван Марумом зависимость давления газа от объема. Штриховой линией показана зависимость p от V, соответствующая закону Бойля — Мариотта; так вел бы себя воздух. Различие между воздухом и аммиаком разительное. Уже при сравнительно малом давлении в сосуде с аммиаком появляется жидкость и, конечно, насыщенный пар над ней.

Следовательно, насыщенный пар можно получить не только испаряя жидкость в закрытом сосуде («Физика 9», с. 79), но и сжимая газ, конечно, тоже в закрытом сосуде. Опыт Ван Марума показывал как будто бы, что для сжижения газа охлаждение не обязательно, его можно заменить сжатием, повышением давления.

Изобретатель сирены нагревает жидкость. В 1822 году французский физик Каньяр де Латур, известный как изобретатель сирены и автор многочисленных исследований колебаний струны, опубликовал статью, в которой описал опыты с нагреванием жидкостей (спирта, эфира, воды) сначала в запаянном стальном сосуде (сделанном из пушечного ствола), а затем в запаянных толстостенных стеклянных трубках (в стальном сосуде ничего не видно!). Он заметил, что с повышением температуры уровень жидкости в сосуде сначала слегка понижается (жидкость испаряется), а затем повышается (жидкость при нагревании расширяется), при некоторой же температуре граница между жидкостью и паром над ней внезапно исчезает (рис. 2). Отсюда Каньяр де Латур сделал вывод, что при температуре выше той, при которой изчезает граница, вещество в жидком состоянии не может существовать — возможно только газообразное состояние.

Чтобы снова получить жидкость, вещество нужно охладить. Каньяр де Латур и в самом деле для многих веществ наблюдал восстановление границы жидкость — пар при охлаждении трубки. Только для воды он не смог увидеть исчезновение границы — еще до этого лопались трубки.

За дело берется Фарадей. Одним из немногих, кто понял работу Каньяра де Латура как указание на то, что для сжижения газа требуется не только сжатие его, но и охлаждение, был английский физик Майкл Фарадей. Уже в 1823 году он сумел превратить в жидкость хлор. Через 20 лет, в 1844 году, он снова вернулся к работе по сжижению газов. Действуя и охлаждением и повышением давления, Фарадей сумел сжижить сероводород, двуокись углерода, серный ангидрид. Правда некоторые газы, такие, как кислород, азот, водород, упорно не поддавались сжижению. Некоторые исследователи, считавшие, что для сжижения газа достаточно одного давления, подвергали эти газы действию все более высоких давлений. Но тщетно — даже казавшееся в то время чудовищным давление в 3000 атмосфер не принесло успеха. За этими газами прочно укрепилась «репутация» несжижаемых, и их стали называть «постоянными» газами.

Охлаждение обязательно. Однако все больше ученых склонялись к мысли, что для каждого вещества существует такая температура, выше которой оно может находиться только в газообразном состоянии. Так думал Фарадей. К такой же мысли в 1860 году пришел Д. И. Менделеев, который назвал эту температуру абсолютной точкой кипения.

Окончательную ясность в этот вопрос внес английский физик Томас Эндрюс. В 1869 году он опубликовал результаты своих многолетних опытов. Как и Ван Марум, Эндрюс изучал поведение газа при уменьшении его объема и увеличении давления. Но если Ван Марум провел опыт только при комнатной температуре, то Эндрюс проводил опыты при самых разных температурах.

На рисунке 3 сплошными линиями показаны кривые, полученные Эндрюсом. Он тоже наблюдал появление жидкости при давлениях, которым соответствуют горизонтальные участки кривых. Но с увеличением температуры эти давления постепенно повышались, а ширина горизонтальных участков становилась все меньше, пока при некоторой температуре, обозначенной на рисунке 3 через $T_к$, горизонтальный участок на кривой не исчезал совсем. При этом исчезала и граница между жидкостью и паром — то, что наблюдал еще Каньяр де Латур.

Выше этой температуры, названной Эндрюсом *критической температурой*, вещество жидким быть не может. Жидкость и насыщенный пар над ней могут наблюдаться лишь в той области давлений и объемов, которая на рисунке 3 ограничена штриховой линией. Если же температура газа выше $T_к$, то для его сжижения обязательно охлаждение.

После работы Эндрюса стало ясно, что и «постоянные» газы вовсе не постоянны. Просто их критические температуры много ниже комнатных. С этого времени борьба за сжижение «постоянных» газов превратилась в борьбу за получение низких температур. Потребовалось еще 40 лет, прежде чем удалось сжижить все без исключения газы. Так в 1877 году были сжижены азот ($T_к = 126{,}3$ К) и кислород ($T_к = 154{,}8$ К). В 1898 году был получен жидкий водород ($T_к = 33{,}2$ К). Еще через 10 лет, в 1908 году, был превращен в жидкость последний газ — гелий ($T_к = 5{,}2$ К). Этим было положено начало развитию одной из важнейших областей физической науки — физики низких температур.

Таким образом, для веществ, обычно известных нам как газообразные, комнатная температура выше их критической температуры. Поэтому они и газообразны. Наоборот, для веществ, которые мы привыкли считать жидкими, комнатная температура ниже их критических температур. У воды, например, критическая температура равна 647,3 К (374,3 °С). Поэтому на Земле вода жидкая. На Венере, планете горячей (температура на поверхности Венеры около 480 °С), рек и морей, похожих на земные, быть не может, даже если бы там и существовало вещество, молекулы которого имели бы состав H_2O.

Уравнение волны

Волна, как известно, это процесс распространения колебаний в пространстве. Чтобы волна в среде могла распространяться, точки среды должны быть связаны между собой силами, способными вызвать колебания, то есть силами упругости. На рисунке 1 показан ряд таких связанных между собой точек. Если одна из точек, например точка O, начинает колебаться, то ее колебания передаются в направлении r.

Пусть точка O колеблется вдоль оси X по закону

$$x = x_m \sin \omega t. \qquad (1)$$

Здесь время t отсчитывается от момента, когда точка O находилась в положении равновесия. Ее колебания передаются другим точкам не мгновенно, а с некоторой скоростью v. Это значит, что за единицу времени колебание доходит до точки в ряду, расположенной от точки O на расстоянии, численно равном v. Расстояние же, на которое колебание распространяется за время, равное одному периоду T колебаний, называется *длиной волны* λ («Физика 10», с. 81). Отсюда следует, что

$$\lambda = vT, \text{ или, так как } T = \frac{1}{\nu}, \quad v = \lambda\nu.$$

Любая точка в нашем ряду (см. рис. 1), как только до нее дойдет волна, начнет колебаться с той же частотой, что и точка O, то есть будет повторять эти колебания. Но повторять с некоторым запозданием — ведь до точки, находящейся от O на расстоянии r, колебание дойдет через промежуток времени, равный r/v. Поэтому для координаты x точки на расстоянии r мы должны написать

$$x = x_m \sin \omega\left(t - \frac{r}{v}\right). \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется *уравнением волны.* Оно позволяет найти смещение x от положения равновесия любой точки (находящейся на любом расстоянии r) в любой момент времени. Для данного момента времени оно дает как бы фотографию положений всех точек ряда относительно оси X. Уравнение волны показывает, что все точки действительно совершают одинаковые колебания (все колеблются вдоль оси X, и у всех одинаковые амплитуда и частота колебаний). Неодинаковы только фазы колебаний — разность фаз колебаний двух точек, расстояние между которыми равно Δr, составляет $\omega\Delta r/v$.

Иногда уравнение волны удобнее представить несколько иначе. Перепишем уравнение (2) в виде

$$x = x_m \sin\left(\omega t - \frac{\omega r}{v}\right).$$

Подставим во второй член в скобках вместо скорости волны v равную ей величину $\lambda\nu$, а вместо ω напишем $2\pi\nu$. Тогда получим

$$x = x_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right). \qquad (3)$$

Из этого выражения видно, что координата x любой точки на расстоянии r от источника волны зависит от величины r/λ, то есть от числа длин волн, укладывающихся на расстоянии r. Если, например, $r = \lambda$, то отставание по фазе будет равно 2π, а это значит, что фаза колебаний этой точки будет такая же, как и точки O. Точно так же, если $r = 2\lambda$, 3λ и т. д., то сдвиг фазы будет равен 4π, 6π и т. д., то есть и в этом случае фазы будут одинаковыми. Таким образом, точки волны, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны, двум длинам волн, вообще целому числу длин волн, колеблются в одинаковых фазах.

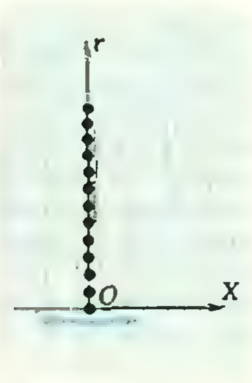


Рис. 1.

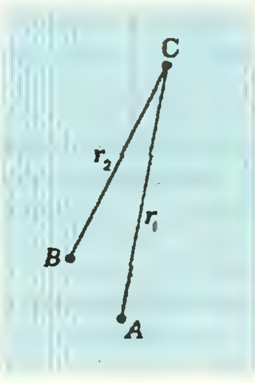


Рис. 2.

Уравнение волны (3) позволяет легко получить условия максимумов и минимумов при *интерференции волн* (о которых говорится в «Физике 10» на с. 94). Напомним, что вопрос об интерференции возникает тогда, когда в некоторую точку пространства приходят две волны, каждая из которых приносит в эту точку колебания. Поэтому точка, где «встретились» две волны, участвует в двух колебаниях. Результат же сложения двух колебаний зависит от разности фаз складывающихся колебаний.

Допустим, что в некоторую точку C пришли две волны, источники которых — точки A и B — отстоят от C на расстояния r_1 и r_2 (рис. 2). Тогда в точке C складываются два колебания, происходящие вдоль одной оси:

$$x_1 = x_{m1} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right),$$

$$x_2 = x_{m2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right).$$

Разность фаз этих колебаний равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2).$$

Поэтому условие усиления (максимумов) имеет вид

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = 2\pi k,$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots,$

откуда

$$r_1 - r_2 = k\lambda = 2k\frac{\lambda}{2}$$

— колебания будут усилены (то есть амплитуда сложного колебания будет равна сумме амплитуд складываемых колебаний), если разность хода $r_1 - r_2$ волн до места «встречи» равна *четному* числу полуволн. Соответственно условие минимумов —

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = (2k+1)\pi,$$

или

$$r_1 - r_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

— колебания будут ослаблены (результирующая амплитуда будет равна разности амплитуд колебаний в двух волнах), если разность хода волн равна *нечетному* числу полуволн.

Математика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Об одном способе решения некоторых уравнений» предназначена восьмиклассникам, «Три решения одной задачи» — девятиклассникам. Это деление в какой-то мере условно, так как каждая из этих заметок может быть полезной не только учащимся указанных классов.

Об одном способе решения некоторых уравнений

Рассмотрим следующую задачу:

1. Решите уравнение

$$(2x-1)\sqrt{x-2}=7\sqrt{2}. \qquad (1)$$

Традиционное возведение обеих частей в квадрат приводит к кубическому уравнению

$$4x^3-12x^2+9x-100=0,$$

и большинство решающих пробует найти другой способ решения задачи.

Наверное, многие догадались, что можно попытаться найти один из корней уравнения, приравняв соответствующие множители:

$$\begin{cases} 2x-1=7, \\ \sqrt{x-2}=\sqrt{2}, \end{cases}$$

откуда $x=4$.

К сожалению, нередко на этом останавливаются и выписывают ответ. В итоге решение содержит грубейшую ошибку, несмотря на правильный ответ: мы «угадали» (единственный) корень уравнения, но не доказали, что больше корней нет.

В данном случае легко доказать, что других корней уравнение (1) не имеет, так как при $x>4$ имеем $2x-1>7$, $\sqrt{x-2}>\sqrt{2}$ и левая часть больше правой, а при $x<4$ (из области определения уравнения) $2x-1<7$, $\sqrt{x-2}<\sqrt{2}$, поэтому левая часть меньше правой.

Еще раз подчеркнем, что решение состоит из двух частей:

1) мы «угадываем» корень (или корни) уравнения;

2) доказываем, что больше корней уравнение не имеет.

Заметим, что примененный для решения (1) способ угадывания корней пригоден и в случае, когда вместо произведения в уравнении взята сумма. Например, в такой задаче:

2. Решите уравнение:

$$2x+\sqrt{x-2}=8+\sqrt{2}.$$

Число множителей (слагаемых) в подобных задачах может быть и большим; при этом некоторые из множителей следует положить равными 1, как, например, в следующей задаче:

3. Решите уравнение:

$$(2y-1)\sqrt{y-2}\,\sqrt[3]{y-3}=7\sqrt{2}.$$

Отметим, что способы угадывания корней могут быть разными. Рассмотрим, например, следующую задачу:

4. Решите уравнение:

$$2a+\sqrt{a-2}+\sqrt[3]{a-3}=9+\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Естественно предположить, что $\sqrt{a-2}=\sqrt{2}$, откуда $a=4$. После этого легко проверить, что при $a=4$

$$2a+\sqrt[3]{a-3}=2\cdot4+\sqrt{1}=9.$$

Докажем теперь (аналогично задаче 1), что других корней уравнение (2) не имеет:

1) При $a>4$ имеем $2a>8$, $\sqrt{a-2}>\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{a-3}>1$, поэтому левая часть больше правой;

2) при $a<4$ (из области определения уравнения) левая часть меньше правой.

В. Е. Ольхов

Три решения одной задачи

Часто случается так, что мы не доводим своих рассуждений до конца и отказываемся от идей, которые у нас возникают. В данной заметке на примере одной задачи показывается, как разные идеи, далекие друг от друга в начальных стадиях, могут привести к цели, если проявить настойчивость в поисках решения.

Задача. *Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и биссектрисе прямого угла.*

Задача на вид сравнительно простая, но решить ее «с ходу» не удается.

Как известно, решение задач на построение состоит из 4 пунктов: 1) анализ,

2) построение, 3) доказательство, 4) исследование. Мы начнем с исследования, общего для всех трех способов решения задач. Пусть c, l_c, m_c, h_c — длины соответственно гипотенузы и проведенных из вершины прямого угла биссектрисы, медианы и высоты. В прямоугольном треугольнике имеем $m_c = c/2 = R$, где R — радиус описанной вокруг треугольника окружности.

Биссектриса CD угла C (рис. 1) проходит через точку K — середину дуги AB. Поэтому (если $|AC| \neq |BC|$) она лежит между медианой и высотой, и ее проекция на гипотенузу меньше, чем проекция медианы на гипотенузу. Отсюда вытекает неравенство $h_c < l_c < m_c = c/2$ (равенства достигаются для равнобедренного треугольника). Поэтому при $l_c > c/2$ решений нет, при $l_c < c/2$ решение существует и единственно.

Отметим, что при $l_c = c/2$ треугольник — равнобедренный, в этом случае построение и доказательство очевидны. В дальнейшем мы будем предполагать, что $l_c < c/2$ (и треугольник неравнобедренный).

Первая идея. Центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, лежит в середине *гипотенузы*, а *биссектриса* прямого угла проходит через середину дуги (полуокружности) AB, не содержащей точки C. Будем рассматривать треугольник вписанным в окружность. Тогда, возможно, удастся найти зависимости между данными и элементами, возникающими на чертеже, вытекающие из свойств треугольника, вписанного в окружность.

Анализ. Пусть треугольник ABC искомый. Опишем вокруг него окружность (см. рис. 1). Пусть M и K — точки пересечения окружности и ее диаметра, перпендикулярного AB. Тогда дуги AK и KB равны, поэтому CK — биссектриса угла C. Треугольник MCK — прямоугольный. Очевидно, что для решения задачи достаточно выразить длину отрезка CK через c и l_c.

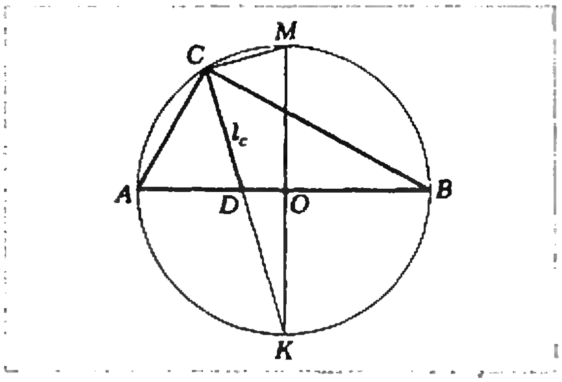


Рис. 1.

Треугольники MCK и KOD подобны по двум углам. Обозначим длину отрезка DK через x. Тогда

$$\frac{|CK|}{|KM|} = \frac{|OK|}{|DK|} \text{ или } \frac{l_c + x}{c} = \frac{c/2}{x},$$

откуда $x^2 + l_c x - c^2/2 = 0$. Поэтому,

$$x = -l_c/2 + \sqrt{l_c^2/4 + c^2/2}$$

(ясно, что подходит только положительный корень уравнения). Далее

$$|CK| = l_c + x = l_c/2 + \sqrt{l_c^2/4 + c^2/2}. \quad (1)$$

Построение. Построим отрезок $d = \sqrt{l_c^2/4 + c^2/2}$ как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами $l_c/2$ и $c/\sqrt{2}$, затем отрезок $l_c/2 + d$. После этого построим прямоугольный треугольник CMK по гипотенузе $|MK| = c$ и катету $|CK| = l_c/2 + d$ проведем окружность диаметра MK и построим диаметр AB этой окружности, перпендикулярный диаметру MK. Треугольник ABC искомый (см. рис. 1).

Доказательство. По построению $|AB| = c$, MK и AB — взаимно перпендикулярные диаметры, поэтому $\overset{\smile}{AK} = \overset{\smile}{KB} = 90°$, $\widehat{ACK} = \widehat{KCB} = 45°$, то есть CK — биссектриса (прямого) угла C. Осталось показать, что $|CD| = l_c$, где D — точка пересечения отрезков CK и AB.

Проведем доказательство методом от противного. Пусть, например, $|CD| = f > l_c$. Тогда в треугольнике ABC длина гипотенузы равна c, а длина биссектрисы CD — f, поэтому согласно (1)

$$|CK| = \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{c^2}{2}} > \frac{l_c}{2} + \sqrt{\frac{l_c^2}{4} + \frac{c^2}{2}} = |CK|$$

(по построению), противоречие. Аналогично рассматривается случай $|CD| = f < l_c$.

При изложении второго и третьего способов решения задачи мы ограничимся только анализом. Построение и доказательство проведите самостоятельно.

Вторая идея. А не связан ли искомый треугольник с другим треугольником, имеющим с ним общие элементы,

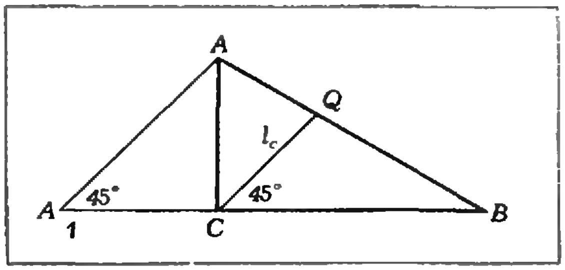


Рис. 2.

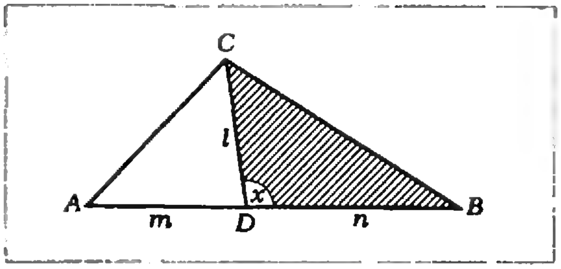


Рис. 3.

по которым его можно построить, а затем перейти к искомому треугольнику? Ну, скажем, искомый прямоугольный треугольник является частью тупоугольного или остроугольного треугольника, отсекаемой от него высотой. Последняя мысль подсказывает такой ход решения.

Пусть $\triangle ABC$ искомый. $|AB|=c$; $|CO|=l_c=l$ (рис. 2). Пусть $|CB|=a$ и $|CA|=b$. Отложим на прямой BC отрезок $|CA_1|$, равный $|AC|$. $|CA_1|=|CA|=b$; $|A_1B|=a+b$; $\widehat{AA_1B}=45°$.

Если найти длину $a+b$, то $\triangle A_1AB$ можно построить по двум сторонам и углу 45° против одной из них. Переход от $\triangle AA_1B$ к $\triangle ABC$ прост: для этого достаточно провести высоту AC в построенном треугольнике.

Для определения $a+b$ воспользуемся выражениями для площадей треугольников ABC, ACQ и BCQ.

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle CQB}+S_{\triangle AQC},$$

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}al\sin 45°+\frac{1}{2}bl\sin 45°,$$

$$ab=\frac{l\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

Учтя, что $a^2+b^2=c^2$, получим систему:

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2, \\ 2ab=\sqrt{2}l(a+b). \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получим уравнение относительно $a+b$:

$$(a+b)^2-\sqrt{2}l(a+b)-c^2=0,$$

откуда:

$$a+b=-\frac{l}{\sqrt{2}}+\sqrt{\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2+c^2}.$$

Третья идея. А что если найти величину или построить угол BDC, образованный биссектрисой с гипотенузой? Тогда было бы возможно построить вспомогательный треугольник BDC по длине биссектрисы l, углам 45° и $\widehat{BDC}=x$. Переход к искомому прямоугольному треугольнику возможен путем продолжения стороны угла x, не равной l до длины c и соединения конца продолжения с вершиной угла, равного 45°.

Введем обозначения: $|AD|=m$, $|DB|=n$ (рис. 3).

Из $\triangle ACD$ по теореме синусов имеем:

$$\frac{|AD|}{\sin 45°}=\frac{|CD|}{\sin\hat{A}}.$$

Далее $\hat{x}=\hat{A}+45°$ (по свойству внешнего угла треугольника), откуда $\hat{A}=\hat{x}-45°$. Таким образом,

$$\frac{m}{\sin 45°}=\frac{l}{\sin(x-45°)}. \qquad (2)$$

Из $\triangle BCD$, тоже по теореме синусов, имеем:

$$\frac{|BD|}{\sin 45°}=\frac{|CD|}{\sin\hat{B}},\quad \frac{n}{\sin 45°}=\frac{l}{\sin(180°-(x+45°))},\quad \frac{n}{\sin 45°}=\frac{l}{\sin(x+45°)}. \qquad (3)$$

Сложим почленно равенства (2) и (3):

$$\frac{m+n}{\sin 45°}=\frac{l(\sin(45°+x)+\sin(x-45°))}{\sin(x-45°)\cdot\sin(x+45°)},$$

$$\frac{c}{\sin 45°}=\frac{2l\sin x\cos 45°}{\sin(x-45°)\cdot\sin(x+45°)}=$$

$$=\frac{2l\sin x\cos 45°}{-\cos(x+45°)\cdot\sin(x+45°)},$$

то есть

$$c=-\frac{2l\sin x}{\sin(2x+90°)}=$$

$$=-\frac{2l\sin x}{\cos 2x}=\frac{2l\sin x}{2\sin^2 x-1},$$

откуда

$$2c\sin^2 x-2l\sin x-c=0.$$

Найдем из этого уравнения $\sin x$:

$$\sin x=\frac{l\pm\sqrt{l^2+2c^2}}{2c};$$

так как $\sin x>0$, то годится только положительный корень. Итак,

$$\sin x=\frac{l+\sqrt{l^2+2c^2}}{2c}.$$

По условию $0<\sin x\leqslant 1$. Наибольшее

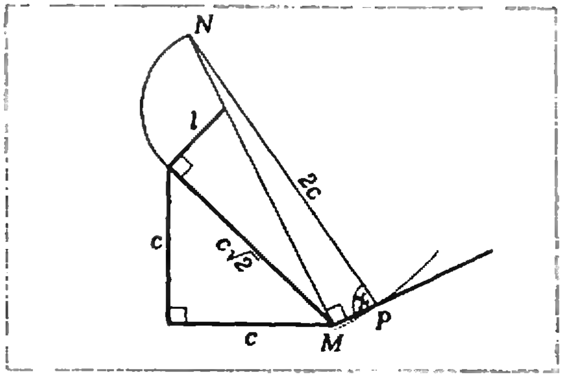


Рис. 4.

возможное значение для l равно $\frac{c}{2}$. В этом случае

$$\sin x=\frac{\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}+2c^2}}{2c}=\frac{\frac{c}{2}+\frac{3c}{2}}{2c}=1.$$

Этот результат согласуется с тем, что при условии $l=\frac{c}{2}$, $l=m=h$ и $\hat{x}=90°$.

Построение угла x. Построим отрезок $c\sqrt{2}$ как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами c и c. Затем построим отрезок $\sqrt{l^2+(\sqrt{2}c)^2}$ как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами l и $c\sqrt{2}$. Дальше все ясно из рисунка 4. В $\triangle MPN$, $\widehat{MPN}=\hat{x}$.

Мы привели три способа решения этой задачи, — а не найдете ли вы другого решения?

Н. П. Грицаенко

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Пусть K, M, N — соответственно основания высот AK, BM, CN остроугольного треугольника ABC. Докажите, что:

а) треугольники AMN, BNK и CKM подобны треугольнику ABC (и между собой), при этом для каждого из них коэффициент подобия равен косинусу их общего с треугольником ABC угла;

б) AK, BM, CN — биссектрисы углов треугольника KMN.

2. а) Восьмой член геометрической прогрессии равен 10. Найдите произведение всех ее членов от первого до пятнадцатого включительно.

б) Найдите сумму

$$x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots+nx^n.$$

3. Пусть в треугольнике ABC точка M делит сторону AB в отношении $m:n$, считая от вершины B, а точка N делит сторону BC в отношении $p:q$, считая от вершины B. Докажите, что отношение площадей треугольника BMN и BAC равно $\frac{m}{m+n}\cdot\frac{p}{p+q}$.

4. В арифметической прогрессии

$$S_m=S_n.$$

Найдите S_{m+n} (через S_k обозначена сумма первых k членов прогрессии).

5. а) Пусть хорды AB и CD одной окружности пересекаются в точке E. Докажите, что $AE\cdot EB=CE\cdot ED$.

б) Пусть из точки E, лежащей вне окружности, проведены к ней касательная EA (A — точка касания) и секущая EBC (B и C — точки окружности). Докажите, что $EA^2=EB\cdot EC$.

в) Пусть через точку E, удаленную от центра окружности радиуса R на расстояние a, проведена прямая, пересекающая окружность в точках A и B. Докажите, что $EA\cdot EB=|a^2-R^2|$ (не забудьте, что точка E может лежать как внутри, так и вне или на окружности).

Девятый класс

6. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, такой что $P(7)=11$, $P(11)=13$?

7. Могут ли две противоположные грани четырехугольной пирамиды быть перпендикулярными основанию?

8. а) Верно ли, что сумма двух рациональных чисел рациональна?

б) Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональной?

в) Докажите, что числа:

0,12345...99100... (бесконечная десятичная дробь, в которой после запятой подряд выписываются все натуральные числа) и tg 5° иррациональны.

9. Для каких n в сечении куба плоскостью можно получить правильный n-угольник?

10. а) Докажите, что

$$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}=-\frac{1}{2}.$$

Преобразуйте в произведение следующие суммы:

б) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin(n\alpha)$;

в) $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\sin^2 3\alpha+\ldots+\sin^2(n\alpha)$.

Десятый класс

11. Пусть шар касается всех ребер тетраэдра. Докажите, что суммы длин пар его скрещивающихся ребер равны.

12. Пусть плоскость пересекает боковые ребра тетраэдра так, что отношения длин отсеченных отрезков к длинам ребер равны соответственно a/b, c/d, e/f. Докажите, что объемы отсеченного и исходного тетраэдров относятся как $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$ (сравните с задачей 3).

13. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Докажите, что:

а) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma<\frac{3}{2}$;

б) $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}<\frac{1}{8}$.

14. Постройте графики функций:

а) $y=\cos(\arccos x)$;

б) $y=\cos(3\arccos x)$;

в) $y=\arcsin(\sin x)$.

15. Пусть все плоские углы при одной из вершин тетраэдра прямые. Докажите, что эта вершина, точка пересечения медиан противоположной ей грани и центр описанного около тетраэдра шара лежат на одной прямой.

Публикацию подготовил Ж. М. Раббот

КВАНТ для младших школьников

Задачи

1. Два двузначных простых числа получаются друг из друга перестановкой цифр, а их разность — полный квадрат. Какие это числа?

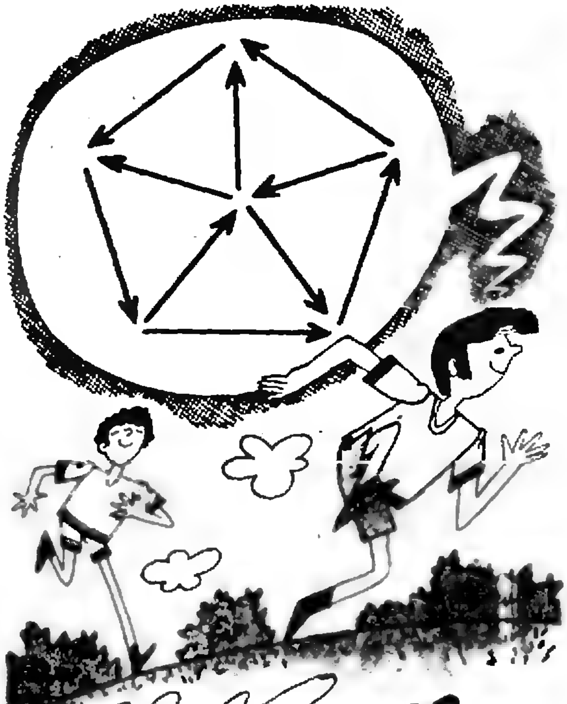
2. По десяти дорожкам сквера в направлении стрелок бегают спортсмены. Каждую дорожку каждый из спортсменов пробегает за 1 минуту, причем по одной из дорожек каждую минуту пробегает лишь один спортсмен, по другой — два, по третьей — три и т. д., по десятой — 10 спортсменов. Расставьте на рисунке номера дорожек.

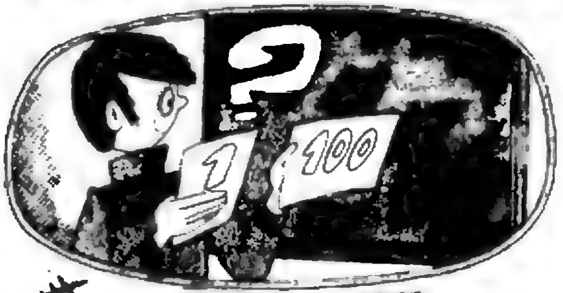
3. Мама сварила в одинаковых кастрюлях компот и кисель и, открыв крышки, поставила их охлаждаться на окно. Через полчаса я потрогал кастрюли. Какая из них оказалась теплее?

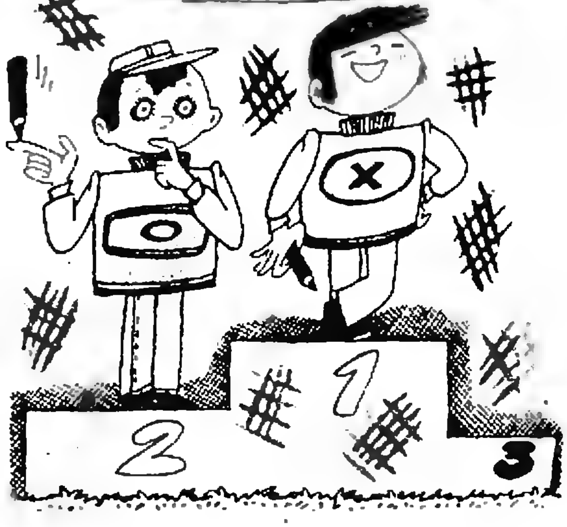
4. На доске было написано два одинаковых числа. Степа приписал к одному из них впереди 100, а ко второму сзади 1. Оказалось, что первое число ровно в 37 раз больше второго. Какие числа были написаны на доске?

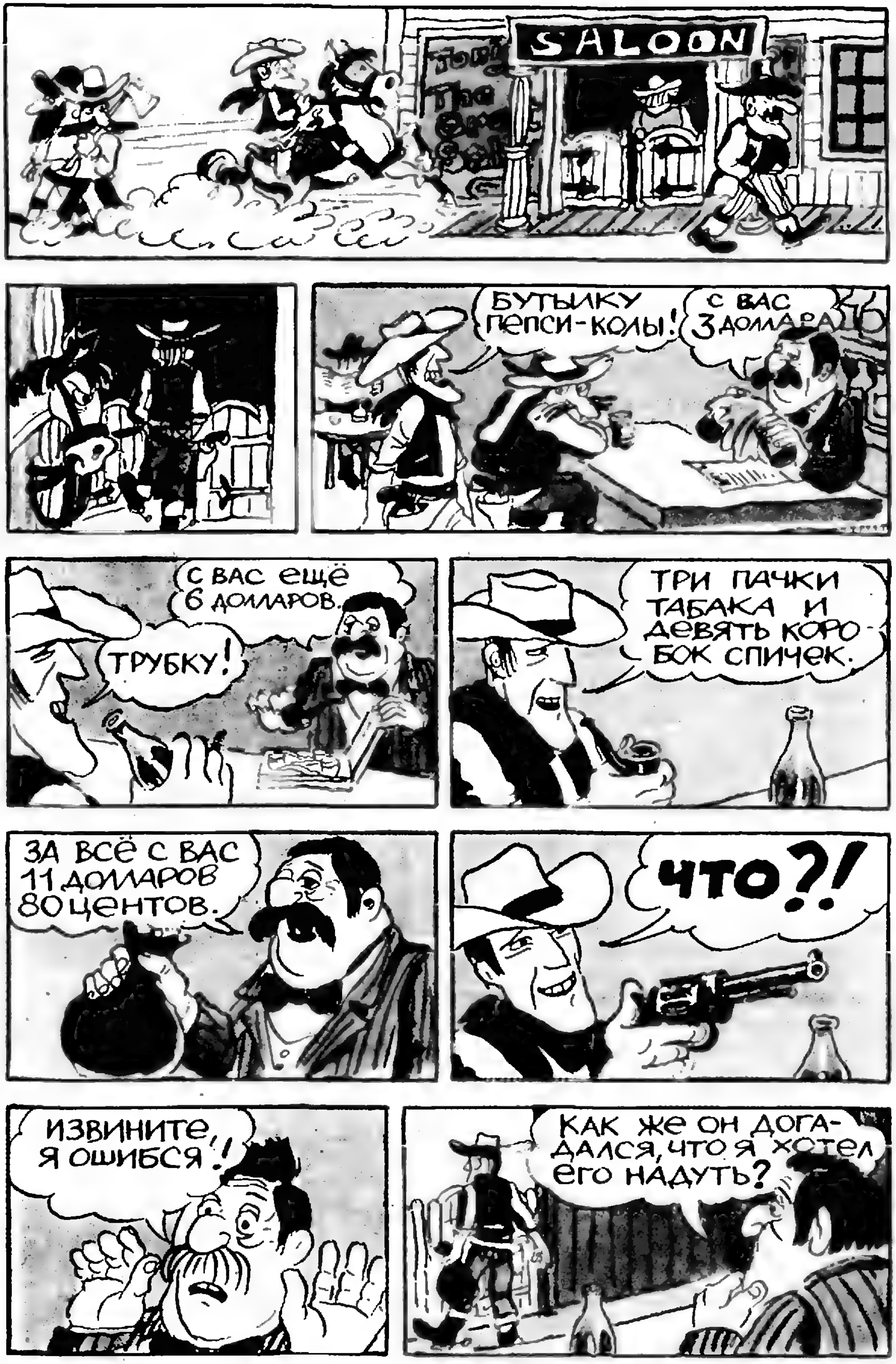
5. Вырежьте из листа клетчатой бумаги кусок, состоящий из наименьшего целого числа клеток такой, что, играя на нем в «крестики — нолики», начинающий всегда выигрывает (для победы в игре в «крестики — нолики» нужно поставить три своих значка подряд).

Эти задачи нам предложили: *Н. К. Антонович, Л. П. Мочалов, А. В. Бялко, А. Н. Меснякин, А. П. Савин*








SALOON
БУТЫЛКУ ПЕПСИ-КОЛЫ!
С ВАС 3 ДОЛЛАРА.
ТРУБКУ!
С ВАС ЕЩЁ 6 ДОЛЛАРОВ.
ТРИ ПАЧКИ ТАБАКА И ДЕВЯТЬ КОРОБОК СПИЧЕК.
ЗА ВСЁ С ВАС 11 ДОЛЛАРОВ 80 ЦЕНТОВ.
ЧТО?!
ИЗВИНИТЕ, Я ОШИБСЯ!
КАК ЖЕ ОН ДОГАДАЛСЯ, ЧТО Я ХОТЕЛ ЕГО НАДУТЬ?

Текст А. П. Савина, рисунки Э. В. Назарова

задачник кванта

Задачи

М891 — М895, Ф903 — Ф907

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 января 1985 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11 — 84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М891, М892» или «Ф903». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М893, М894, М895 а) предлагались на 47-й Московской городской олимпиаде в марте 1984 года.

М891. Окружность касается двух сторон треугольника и двух его медиан. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

А. А. Муратов

М892. а) Докажите, что среди чисел 2^m+2^k, а также среди чисел 3^m+3^k бесконечно много квадратов, а среди чисел 4^m+4^k, 5^m+5^k и 6^m+6^k нет ни одного квадрата целого числа (здесь m и k — натуральные числа, $m \neq k$).

б)* Есть ли квадраты среди чисел 7^m+7^k?

А. И. Зайчик

М893. Каждые два из n блоков ЭВМ соединены проводом. Можно ли каждый их этих проводов покрасить в один из $n-1$ цветов так, чтобы от каждого блока отходило $n-1$ проводов разного цвета, если а) $n=6$; б) $n=13$?

В. Б. Алексеев

М894. а) Сумма пяти неотрицательных чисел равна 1. Докажите, что их можно расставить по кругу так, чтобы сумма пяти попарных произведений соседних чисел не превосходила 1/5.

б)* По кругу расставлено $n \geqslant 4$ неотрицательных чисел, сумма которых равна 1. Докажите, что сумма всех n попарных произведений соседних чисел не превосходит 1/4.

С. Б. Гашков, А. Н. Дранишников

М895*. Докажите, что площадь сечения куба плоскостью, касающейся вписанной в него сферы, не превосходит половины площади грани куба. Рассмотрите случаи, когда это сечение а) треугольник, б) четырехугольник. в) Докажите, что в случае а) площадь полной поверхности отсекаемого от куба тетраэдра меньше площади грани куба.

С. Б. Гашков, И. Ф. Шарыгин

Ф903. На верхней образующей гладкого цилиндра радиуса R, ось которого наклонена под углом α к горизонту, укреплена гибкая невесомая веревка длины l (рис. 1). К другому концу веревки прикреплен небольшой груз. Определить:

1) длину свисающей части веревки в положении равновесия груза;
2) период малых колебаний груза в вертикальной плоскости, параллельной оси цилиндра.

С. С. Кротов

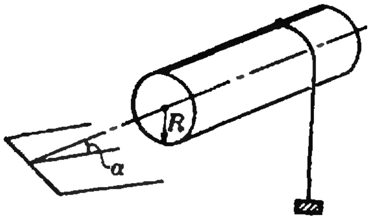


Рис. 1.

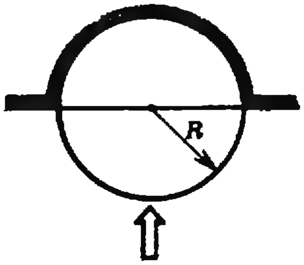


Рис. 2.

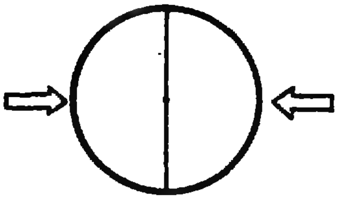


Рис. 3.

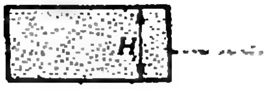


Рис. 4.

Ф904. Сферу радиуса R, составленную из двух одинаковых плотно пригнанных тонкостенных полусфер массы m каждая, наполняют жидкостью с плотностью ρ.

1) Какую вертикальную силу надо приложить к нижней полусфере, чтобы жидкость не выливалась, если верхняя сфера закреплена (рис. 2)?

2) С какой силой надо сжимать левую и правую полусферы (рис. 3), чтобы жидкость не выливалась?

Л. Г. Маркович

Ф905. Тонкостенный заполненный газом цилиндр массы M с высотой H и площадью основания S плавает в воде (рис. 4). В результате потери герметичности в нижней части цилиндра его глубина погружения увеличилась на ΔH. Каково было начальное давление газа в цилиндре? Атмосферное давление p, температура не меняется.

О. Ю. Никишина

Ф906. Проводник, сопротивление которого зависит от температуры, подключили к источнику постоянного напряжения U. Сопротивление проводника меняется в зависимости от температуры по закону $R=R_0(1-\mu t)$, где R_0 — сопротивление при $t=0\,^\circ\mathrm{C}$, $\mu>0$. Определить установившуюся температуру проводника, если температура окружающей среды равна 0 °C, а тепловая мощность, выделяемая проводником в окружающую среду, равна $W=b\cdot\Delta t$, где Δt — разность температур проводника и среды. Изменением размеров проводника из-за теплового расширения пренебречь.

Р. Ю. Винокур

Ф907. Два металлических шара массы m каждый с радиусами r и $2r$ помещены в электрическое поле, напряженность которого направлена от большего шара к меньшему и равна E. Расстояние между центрами шаров равно $R_0=4r$. Большой шар несет заряд $q\left(k\frac{q}{r^2}\ll E\right)$, малый шар не заряжен. Шары отпускают. Время между первым и вторым соударениями шаров равно τ. Найти время между n-ым и $(n+1)$-ым соударениями и пути, которые пройдут шары между этими соударениями. Чему равно среднее ускорение шаров за достаточно большой промежуток времени? Соударения считать абсолютно упругими.

А. А. Лапидес

Problems

M891 — M895; P903 — P907

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The

M891. A circle touches two sides of a triangle and two of its medians. Prove that this triangle is isosceles.

A. A. Muratov

M892. a) Prove that there are infinitely many squares of integers among the numbers 2^m+2^k and also among the numbers 3^m+3^k, but there are no squares

more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than January 31st, 1985 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант».

Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Problems M893, M894 and M895 a) were proposed at the 47th Moscow City Olympiad in march, 1984.

among the numbers 4^m+4^k, 5^m+5^k and 6^m+6^k (*m* and *k* here are natural numbers, $m \neq k$).

b)* Are there squares among the numbers 7^m+7^k?

A. I. Zaichik

M893. Each two of *n* blocks of a computer are connected by a wire. Is it possible to paint each wire in one of $n-1$ colours so that the colours of all the wires coming out of any block will be different if a) $n=6$, b) $n=13$?

V. B. Alekseev

M894. a) The sum of five non-negative numbers equals 1. Prove that they can be set around a circle so that the sum of the five pairwise products of neighbouring numbers does not exceed 1/5.

b)* The sum of $n \geqslant 4$ non-negative numbers which are set around a circle equals 1. Prove that the sum of *n* pairwise products of neighbouring numbers does not exceed 1/4.

S. B. Gashkov, A. N. Dranishnikov

M895. Prove that the area of the section of a cube by a plane tangent to the inscribed sphere of the cube does not exceed half of the area of the cube's face. Consider the cases when the section is a) a triangle, b) a quadrangle. c) Prove that in case a) the surface area of the tetrahedron cut off from the cube is less than the area of the cube's face.

S. B. Gashkov, I. F. Sharygin

P903. A flexible weightless string of length *l* is tied to the upper circle of a cylinder of radius *R*, whose axis forms the angle α with the horizon (see Fig. 1). A small weight is tied to the other end of the string. Determine

1) the length of the freely hanging part of the string when the weight is in equilibrium;

2) the period of the weight's small oscillations in the vertical plane parallel to the cylinder's axis.

S. S. Krotov

P904. A sphere of radius *R* made out of two identical hemispheres of mass *m*, closely fitting together, is filled with a liquid of density ρ.

1) What vertical force must be applied to the lower hemisphere to keep the water from pouring out if the upper hemisphere is fixed (see Fig. 2)?

2) With what force should the left and right hemispheres (Fig. 3) be squeezed together in order to keep the water from pouring out?

L. G. Markovich

P905. A thin-walled cylinder of altitude *H* and base area *S* has mass *M*; it is filled with gaz and floats in water (Fig. 4). As the result of a leak in its lower part, the cylinder's depth increases by ΔH. What was the initial pressure of the gaz in the cylinder? The atmospheric pressure is *p*, the temperature does not change.

O. Yu. Nikishina

P906. A conductor whose resistance depends on temperature is connected to a source of constant tension U. The resistance of the conductor depends on temperature according to the rule $R=R_0(1-\mu t)$, where R_0 is the resistance at $t=0$ °C, $\mu>0$. Determine the established temperature of the conductor if the surrounding temperature is 0 °C, while the power of heat loss to the surroundings is $W=b\cdot\Delta t$, where Δt is the temperature difference between the conductor and the surroundings. Changes in the conductor's size may be neglected.

P. Yu. Vinokur

P907. Two metallic balls of mass m each, whose radii are r and $2r$ are placed in an electric field whose tension is directed from the larger ball to the smaller one and equals E. The distance between the centres of the balls is $R_0=4r$. The larger ball carries the charge q ($kq/r^2 \ll E$), the small one is uncharged. The ball are released. The time between the first and second collisions of the ball is τ. Find the time between the n-th and $(n+1)$-st collisions and the distance covered by the balls during that time. What is their average acceleration during a sufficiently long period of time? The collisions are assumed absolutely elastic.

A. A. Lapides

Решения задач

М876 — М878, М880*); Ф887 — Ф889

М876. *На окружности, касающейся сторон угла с вершиной P, выбраны две диаметрально противоположные точки A и B (отличные от точек касания). Касательная к окружности в точке B пересекает стороны угла в точках C и D, а прямую OA — в точке E. Докажите, что длины отрезков BC и DE равны.*

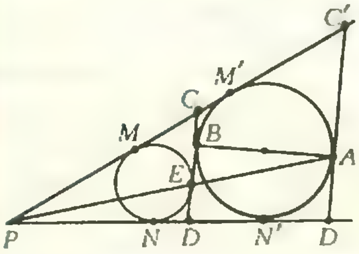
Будем считать, что окружность расположена вне треугольника PCD (см. рисунок; второй случай, когда она вписана в этот треугольник, рассматривается аналогично). Пусть C' и D' — точки пересечения сторон угла с касательной к окружности в точке A, так что (в рассматриваемом случае) данная окружность вписана в треугольник $PC'D'$. Очевидно, что этот треугольник гомотетичен треугольнику PCD с центром P, следовательно, E — точка касания вписанной окружности треугольника PCD со стороной CD. Обозначим через M, M', N и N' точки касания этих двух окружностей с прямыми PC и PD. По теореме о равенстве касательных, проведенных к окружности из одной точки,

$$2|BC|+|BE|=|BC|+|CE|=|M'C|+|CM|=$$
$$=|M'M|,$$

аналогично,

$$2|DE|+|BE|=|N'N|,$$

но, по той же теореме, $|M'M|=|PM'|-|PM|=$ $=|PN'|-|PN|=|N'N|$, поэтому $|BC|=|DE|$, что и требовалось.

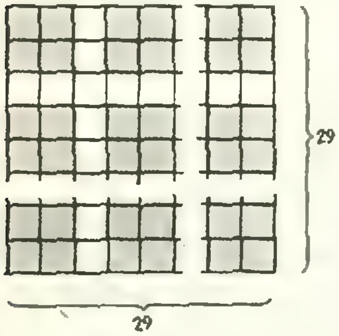


А. С. Меркурьев

---

*) Решение задачи М879 войдет в статью «Теорема Виета и вспомогательный многочлен», публикуемую в «Кванте» № 12 за этот год.

M877. *Из листа клетчатой бумаги размерами 29×29 клеток вырезали 99 квадратиков размерами 2×2 каждый. Докажите, что из него можно вырезать еще один такой квадратик.*

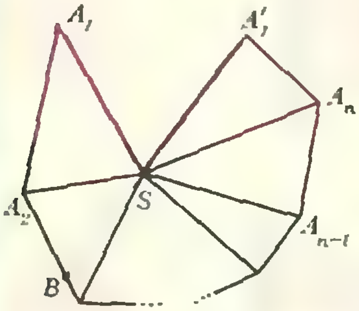


На рисунке серым цветом закрашены 100 квадратиков 2×2. Вырезая из исходного квадрата 29×29 любой квадратик 2×2, мы «задеваем» ровно один серый квадратик. Следовательно, после 99 таких операций один из серых квадратиков останется нетронутым.

С. В. Фомин

◆

M878. *Докажите, что если сумма плоских углов при вершине пирамиды больше 180°, то каждое боковое ребро пирамиды меньше полупериметра ее основания.*



Пусть $SA_1 \ldots A_n$ — данная пирамида. Разрежем ее боковую поверхность по ребру SA_1 и развернем ее на плоскость (см. рисунок, на котором SA_1 и SA_1' — это два экземпляра ребра SA_1, образовавшиеся в результате разрезания, так что $|SA_1| = |SA_1'|$). Из условия задачи следует, что точка S лежит внутри многоугольника $A_1 \ldots A_n A_1'$. Продолжая отрезок $A_1'S$ за точку S до пересечения с ломаной $A_1 \ldots A_n A_1'$, мы получим точку B, разбивающую ломаную на две части: ломаную $A_1 \ldots B$ длины a и ломаную $A_1' \ldots B$ длины b. Из неравенств $|SA_1| < a + |SB|$, $|A_1'S| + |SB| = |A_1'B| < b$ следует, что

$$2|SA_1| = |SA_1| + |SA_1'| < a + |SB| + |A_1'S| = a + b = \\ = |A_1A_2| + \ldots + |A_{n-1}A_n| + |A_nA_1'|.$$

Остается заметить, что в правой части стоит периметр основания пирамиды.

Ю. И. Ионин

◆

M880*. *В последовательности 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... каждый член, начиная с седьмого, равен последней цифре суммы шести предыдущих. Докажите, что в этой последовательности не встретятся подряд шесть чисел 0, 1, 0, 1, 0, 1.*

Эту задачу схематически можно представить так: задано преобразование некоторого множества (множества шестерок чисел; шестерке $(x_1, \ldots, x_6)$ сопоставляется $(x_2, \ldots, x_6, x_7)$, где x_7 — последняя цифра суммы $x_1 + \ldots + x_6$); требуется доказать, что повторяя это преобразование, из одной данной «точки» множества (шестерки (1, 0, 1, 0, 1, 0)) нельзя получить другую (шестерку (0, 1, 0, 1, 0, 1)). Очень часто такие задачи удается решить, найдя *инвариант*, то есть величину, не изменяющуюся при заданном преобразовании: достаточно установить, что значения инварианта для двух данных «точек» различны *).

В нашем случае такой величиной может служить последняя цифра числа $s(x_1, \ldots, x_6) = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 + 12x_6$. В самом деле, простое вычисление показывает, что разность $s(x_2, \ldots, x_7) - s(x_1, \ldots, x_6)$ (где x_7 — последняя цифра $x_1 + \ldots + x_6$) равна $10x_7 + 2(x_7 - (x_1 + \ldots + x_6))$, то есть оканчивается нулем. Следовательно, последние цифры чисел $s(x_1, ..., x_6)$ и $s(x_2, ..., x_7)$ совпадают: указанная нами величина — действительно инвариант. Остается проверить, что ее значения для заданных в условии шестерок различны:

---

*) Об инвариантах мы рассказывали неоднократно: см., например, статью А. Ходулева «Расселение фишек» («Квант», 1982, № 7, с. 28); там же приводятся ссылки и на другие статьи по этой теме. Ряд задач на инварианты можно найти в «Кванте» № 10 за 1983 г. на с. 30.

$$s(1, 0, 1, 0, 1, 0) = 18,\ s(0, 1, 0, 1, 0, 1) = 24.$$

А. С. Меркурьев

◆

Ф887. *На прозрачное стеклянное тело, представляющее собой два соединенных основаниями конуса, падает пучок параллельных световых лучей, имеющий круглое сечение диаметра d (рис. 1,а). Размеры тела указаны на рисунке 1,а; показатель преломления стекла n. Какая картина будет наблюдаться на экране, установленном на расстоянии l от тела?*

Изображение на экране будет различным в зависимости от соотношения между a, d и l.

1) Рассмотрим случай, когда луч $I(I')$ после преломления на грани $AB(AD)$ попадает в точку C (см. рис. 1, а). В этом случае после двукратного преломления лучей (на гранях AB и DC, AD и BC) пучок остается параллельным AC и на экране получится равномерно освещенный круг (рис. 1, б) диаметра d. Получающаяся картина от l не зависит.

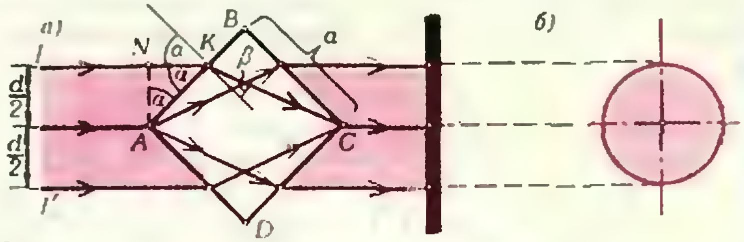


Рис. 1.

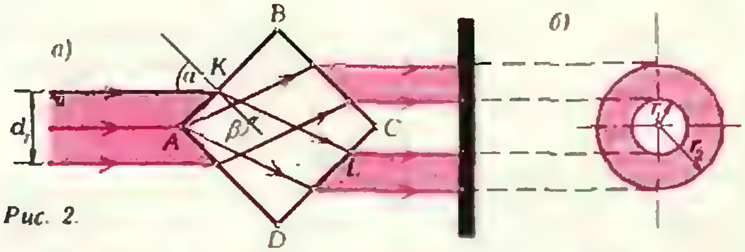


Рис. 2.

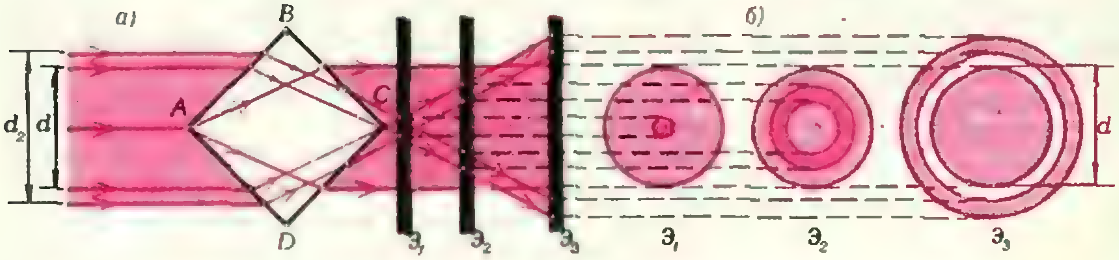


Рис. 3.

Значения d_1, при которых осуществляется такой вариант, определим из рисунка 1, a:

$$\frac{d_1}{2} = |KA| \sin\alpha = (a - |BK|) \sin\alpha = (1 - \operatorname{tg}\alpha) \sin\alpha.$$

Подставляя

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{1}{\sqrt{2n^2 - 1}},$$

получаем:

$$d_1 = a\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n^2 - 1}}\right).$$

2) Пусть $0<d_2<a\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}\right)$. В этом случае каждый луч после двукратного преломления будет вновь параллелен AC (рис. 2, *а*). На экране получится равномерно освещенное кольцо (рис. 2, *б*). Радиусы внутренней и внешней окружностей кольца —

$$r_1=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}\right)+\frac{d_2}{2\sqrt{2}},$$

$$r_2=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}\right)+\frac{d_2}{2\sqrt{2}}(1+2\sqrt{2}).$$

Получающаяся картина от l не зависит.

3) Пусть $a\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}\right)<d_2<a\sqrt{2}$. В этом случае (рис. 3, *а*) картина, получающаяся на экране, зависит от того, на каком расстоянии от точки C находится экран. На рисунке 3, *б* показаны картины, получающиеся при разных положениях экрана: $Э_1$, $Э_2$, $Э_3$.

А. В. Хельвас

◆

Предположим, что в некотором пункте на поверхности Земли разность уровней ртути в сосудах A и B оказалась равной h_0. Если разность давлений p_2 и p_1 в сосудах фиксирована, то из условия $p_2-p_1=\varrho g_0 h_0$ определяется значение ускорения свободного падения g_0 в данном пункте:

$$g_0=\frac{p_2-p_1}{\varrho h_0}.$$

В другом пункте ускорение будет отличаться от g_0; пусть оно равно $g=g_0+\Delta g$. Разность уровней ртути в сосудах A и B будет теперь $h=h_0+\Delta h$. При сохраняющейся разности давлений в сосудах и при малых вариациях Δg и, соответственно, малых приращениях Δh

$$\frac{\Delta h}{h_0}\approx\frac{\Delta g}{g_0}.$$

Таким образом, порядок величины вариаций Δg определяется порядком измеряемого значения Δh. Измерить непосредственно малые приращения Δh трудно. Чтобы определить значение Δh, поверх ртути наливают легкую жидкость: если разность горизонтальных смещений уровней толуола в капиллярах равна Δl (эта величина измеряется), то, очевидно,

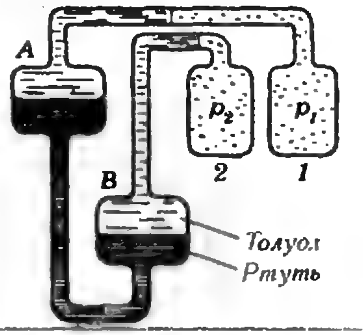
$$\Delta h\cdot S=\Delta l\cdot s,$$

где S и s — площади сечений сосудов и капилляров, соответственно. Следовательно,

$$\frac{\Delta g}{g_0}\approx\frac{\Delta h}{h_0}=\frac{s}{S}\,\frac{\Delta l}{h_0}=\frac{s}{S}\left(\frac{\varrho g_0\cdot\Delta l}{p_2-p_1}\right).$$

По условию $s/S\sim10^{-4}$, $\varrho\sim10^4$ кг/м³, $(p_2-p_1)\sim$ $\sim10^4$ Па, $\Delta l\sim10^{-2}$ м. Поскольку $g_0\sim10$ м/с², отно-

Ф888. *На рисунке изображена принципиальная схема гравиметра — прибора для измерения вариаций ускорения свободного падения g. В теплоизолированных газовых баллонах 1 и 2 давления соответственно $p_1\approx2\cdot10^4$ Па и $p_2\approx3\cdot10^4$ Па. Цилиндрические сосуды A и B радиуса 10 см и соединяющая их трубка заполнены ртутью. Поверх ртути налита очень легкая жидкость (толуол); эта жидкость заполняет также частично капилляры радиуса 1 мм, соединяющие сосуды A и B с баллонами 1 и 2. Опишите процесс измерения вариаций ускорения g с помощью этого прибора. Какова величина вариаций g, которые можно зарегистрировать этим гравиметром, если известно, что при измерениях в разных пунктах изменения разности горизонтальных смещений толуола в капиллярах могут достигать нескольких*



миллиметров (до 1 см)? Температура во время разных измерений поддерживается постоянной; плотность ртути $\rho = 13{,}5 \cdot 10^3$ кг/м³.

сительные вариации g_0, измеряемые прибором,

$$\frac{\Delta g}{g_0} \sim \frac{10^{-4} \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{10^4} = 10^{-5}.$$

Ю. М. Брук

◆

Ф889. *Солнце находится на угловой высоте φ над горизонтом. Под каким углом α к поверхности Земли нужно бросить тело в вертикальной плоскости, проходящей через Солнце, чтобы тень тела прошла наибольший путь по Земле?*

Рассмотрим отдельно случаи, соответствующие различным соотношениям между α и φ.

1) Если бросать тело под углом $\alpha \leqslant \varphi$, то путь, проходимый тенью за время полета тела, будет равен дальности полета, то есть $S_1 = \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2\alpha$ (см. рис. 1). При $\varphi < 45°$ ($\alpha < 45°$) значение S_1 тем больше, чем больше α; следовательно, надо бросать тело под углом $\alpha = \varphi$, и тогда

$$S_{1\,\max} = \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2\varphi. \qquad (1)$$

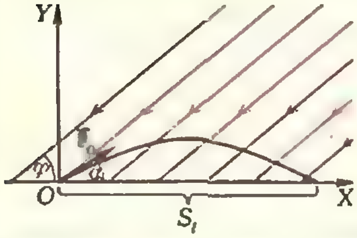


Рис. 1.

Если же $\varphi \geqslant 45°$, то α должно быть равным 45°, так как S_1 максимально при $\alpha = 45°$ (в этом случае $S_{1\,\max} = \frac{1}{g} v_0^2$).

2) Если бросать тело под углом $\alpha > \varphi$, то тень пройдет путь, равный (см. рис. 2)

$$S_2 = 2|OA| + S_x = 2|OA| + \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2\alpha. \qquad (2)$$

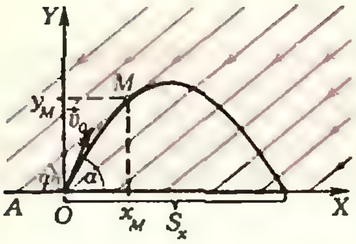


Рис. 2.

Найдем $|OA|$. Для этого нам надо получить уравнение касательной к параболе в точке M и определить абсциссу x_A точки пересечения касательной с осью X ($|x_A| = |OA|$).

Чтобы получить уравнение касательной AM, определим координаты x_M и y_M точки M. Угловой коэффициент касательной равен $\operatorname{tg}\varphi$ и равен производной функции $y(x)$, описывающей параболу, в точке M. Нетрудно показать, что

$$y(x) = (\operatorname{tg}\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2,$$

и следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \left((\operatorname{tg}\alpha)x_M - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} x_M^2\right)' = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha} x_M,$$

откуда

$$x_M = \frac{1}{g}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi) v_0^2 \cos^2\alpha,$$

$$y_M = \frac{1}{g}\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi) v_0^2\cos^2\alpha -$$

$$- \frac{1}{2g}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi)^2 v_0^2\cos^2\alpha = \frac{1}{2g}(\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\varphi) v_0^2\cos^2\alpha.$$

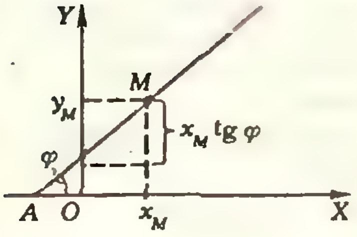


Рис. 3.

Теперь мы можем записать уравнение касательной AM (см. рис. 3) —

$$y_{AM}(x) = x\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2g}(\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\varphi) v_0^2\cos^2\alpha -$$

$$- \frac{1}{g}\operatorname{tg}\varphi(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi) v_0^2\cos^2\alpha =$$

$$= x\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{g}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi)^2 v_0^2\cos^2\alpha$$

— и найти абсциссу x_A точки A (и $|OA| = |x_A|$):

$$y_{AM}(x_A)=0 \Rightarrow x_A=-\frac{1}{2g\,\mathrm{tg}\,\varphi}(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\varphi)^2 v_0^2\cos^2\alpha.$$

Таким образом, если тело брошено под углом $\alpha>\varphi$, то тень проходит путь (см. (2))

$$S_2=\frac{1}{g}v_0^2\sin 2\alpha+\frac{1}{g\,\mathrm{tg}\,\varphi}(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\varphi)^2 v_0^2\cos^2\alpha.$$

Посмотрим, при каких значениях α это выражение максимально. Для этого найдем производную $S'(\alpha)$ и приравняем ее нулю:

$$S'(\alpha)=\frac{2}{g}v_0^2\cos 2\alpha+$$
$$+\frac{1}{g\,\mathrm{tg}\,\varphi}v_0^2(\sin 2\alpha+2\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos 2\alpha-\mathrm{tg}^2\,\varphi\sin 2\alpha)=0,$$

или

$$(1-\mathrm{tg}^2\,\varphi)\sin 2\alpha=0 \Rightarrow \sin 2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=90^\circ$$

(случай $\alpha=0$ нам не подходит, так как $\alpha>\varphi$).

Следовательно, S_2 максимально при $\alpha=90^\circ$, то есть когда тело бросают вертикально вверх, и (см. рис. 4)

$$S_{2\,\max}=2h_{\max}\,\mathrm{ctg}\,\varphi=\frac{1}{g}v_0^2\,\mathrm{ctg}\,\varphi.$$

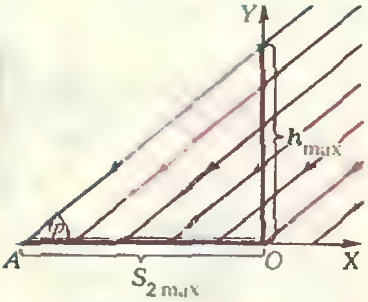


Рис. 4.

Теперь выясним, при каких условиях $S_{2\,\max}>S_{1\,\max}$ и при каких $S_{2\,\max}<S_{1\,\max}$. Для этого найдем отношение $S_{1\,\max}:S_{2\,\max}$ (см. (1)):

$$\frac{S_{1\,\max}}{S_{2\,\max}}=\frac{v_0^2\,g\sin 2\varphi}{v_0^2\,g\,\mathrm{ctg}\,\varphi}=2\sin^2\varphi.$$

При $\varphi=45^\circ$ это выражение равно 1 ($S_{1\,\max}=S_{2\,\max}$) — тень проходит одинаковые пути при $\alpha=45^\circ$ и при $\alpha=90^\circ$. Если $\varphi<45^\circ$, то $2\sin^2\varphi<1$ ($S_{1\,\max}<S_{2\,\max}$) — тень проходит максимальный путь при $\alpha=90^\circ$. При $\varphi>45^\circ$, как мы уже говорили, $S_{1\,\max}=\frac{1}{g}v_0^2$, и $S_{1\,\max}:S_{2\,\max}=\mathrm{tg}\,\varphi>1$ — тень проходит максимальный путь при $\alpha=45^\circ$.

Выпишем окончательный ответ:

если $\varphi<45^\circ$ — тело надо бросать вертикально;
если $\varphi=45^\circ$ — тело надо бросать либо вертикально, либо под углом 45° к горизонту;
если $\varphi>45^\circ$ — тело надо бросать под углом 45° к горизонту.

В. А. Нахшин

Задача для исследования

Операция «произведение соседних чисел» в таблице из ±1

В связи с двумя задачами Всесоюзной олимпиады этого года (№ 5 для 10 класса и № 8 для 9 класса; см. с. 47—48) естественно возникают следующие более общие вопросы.

Для каждой таблицы T размера $m\times n$, в клетках которой стоят числа 1 и −1, определяется новая таблица $P(T)$: в каждой ее клетке пишется число, равное произведению чисел, стоящих в соседних (имеющих с ней общую сторону) клетках в таблице T. Для каких m и n:

1) разным таблицам T соответствуют обязательно разные таблицы $P(T)$?

2) для любой таблицы T в последовательности таблиц $T_1=P(T)$, $T_2=P(T_1)$, ... встретится таблица из одних 1?

Попробуйте ответить на эти вопросы для других (по-видимому, более простых) случаев: «цилиндрической» таблицы $m\times n$, у которой две противоположные стороны длины m считаются склеенными, и для «тора», у которого считаются склеенными две пары противоположных сторон (при этом у каждой клетки ровно четыре соседних).

Заметим, что вопрос 2) для цилиндра высоты $m=1$, то есть для n клеток по окружности, разбирался в «Задачнике Кванта»; положительный ответ на него получается при $n=2^k$ ($k=2,3,\ldots$).

Н. Б. Васильев, И. К. Жук

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Из вступительных работ в ВЗМШ

Место работы и должность ваших родителей.
Отец — начальник,
мать — городская больница

* * *

Дайте алгоритм выигрыша...

1-й ход — по диагонали, 2-й тоже, в конце партии — по обстоятельствам.

1,2,3,4,5,6,7, 8,9, аут!

Выигрывает тот, кто больше думает.

* * *

Найти $\sqrt{\underbrace{0{,}99\ldots9}_{100\text{ раз}}}$ *с точностью до 100 знаков.*

Решение: $0,\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{100\text{ раз}}$

Т. к. $\sqrt{0{,}9}$ не извлекается, то $\sqrt{0{,}99\ldots9}$ тоже не извлекается.

* * *

... в растворе 200 % воды.

Для точности будем взвешивать на медицинских весах.

* * *

Занумеровать ребра куба не то чтобы вовсе нельзя, но у нас не выполняется данное условие.

Построение затруднений не вызывает, т. к. оно понятно объяснено.

* * *

Туман — это множество мелких водяных паров.

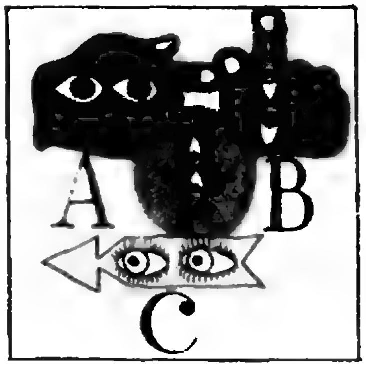
* * *

Любая часть правой части оси больше любой части левой части оси.

... число больше 0, но меньше 1, значит оно равно 1/2.

Сколько многочисленных решений имеет уравнение?

Единица всегда кончается на 0 или на 5.



..., где значки над буквами говорят, куда смотреть.

Трехзначные числа: 6,25 и 0,625.

* * *

Никакие признаки подобия сюда не подходят, но если измерить углы транспортиром, то треугольники подобны.

Пусть угол A будет наибольшим в треугольнике. Но в данном случае угол A не наибольший.

* * *

Тогда, если пренебречь несколькими километрами, то можно сказать, что велосипедист прошел тот же путь.

* * *

Я думаю, что, проверяя работу, вы примете во внимание сжатые сроки и мою любовь к математике.

Петя + алгебра =
АЛГЕБРА

Какие данные в задаче лишние? Ответ: Сколько я ее ни решал, она не решается. Значит, у нее нет решения. Значит, все данные — лишние.

* * *

Тогда задача будет решена, но у меня не хватает не то времени, не то знаний.

* * *

Подробные рассуждения, лишившие меня сна, я опустил, т. к. не смог правильно сформулировать свои мысли и догадки.

* * *

Кубанский привет вам, товарищи жюри.

Собрал *Л. Ф. Штернберг*

XVIII Всесоюзная олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук
Л. П. КУПЦОВ,
кандидат физико-математических наук
С. В. РЕЗНИЧЕНКО,
кандидат физико-математических наук
А. Б. СОСИНСКИЙ

С 11 по 18 апреля в Ашхабаде проводился заключительный этап XVIII Всесоюзной олимпиады школьников по математике. В столице Советской Туркмении собрались 159 школьников (43 восьмиклассника, 54 девятиклассника и 62 десятиклассника) — победители республиканских олимпиад, победители московской и ленинградской городских олимпиад и школьники, отмеченные на предыдущей Всесоюзной олимпиаде дипломами I и II степени. В состав жюри, работавшего под руководством академика АН УССР Б. В. Гнеденко, были включены 52 человека — представители Академии наук СССР, Академий наук Туркменской и Молдавской ССР, Московского, Ленинградского и Новосибирского Государственных университетов, Московского физико-технического института, крупнейших научно-исследовательских институтов страны. Среди них старший преподаватель Туркменского Государственного университета, организатор всех республиканских олимпиад в Туркмении Б. Б. Бердыев.

С первых минут пребывания на гостеприимной Туркменской земле участники олимпиады были окружены теплотой и вниманием. В аэропорту Ашхабада команды-участницы встречали ученики школ города, представители районных отделов народного образования и ЦК комсомола Туркмении. При регистрации каждому участнику олимпиады и руководителю команды вручался памятный сувенирный пакет с книгами и открытками, рассказывающими о Туркмении, памятными значками, программой олимпиады и приглашением принять участие в ее торжественном открытии.

12 апреля, в 15 часов, все участники олимпиады, члены жюри и оргкомитета, руководители команд собрались у городского Дворца пионеров. В сопровождении оркестра началось торжественное шествие к памятнику В. И. Ленину. У памятника был выстроен почетный караул, участники олимпиады возложили цветы. А затем в конференц-зале Академии наук ТССР состоялось торжественное открытие олимпиады. Были исполнены Государственный Гимн СССР и Гимн Туркменской ССР. С теплыми словами приветствия к участникам олимпиады обратился Министр просвещения ТССР М. А. Олиева. Успешного выступления, творческой, интересной работы, честного соперничества пожелали ребятам Вице-президент АН ТССР О. О. Овезгельдыев, председатель жюри академик АН УССР Б. В. Гнеденко, первый секретарь ЦК ЛКСМ Туркменистана Ж. К. Чарыева, ректор Туркменского Государственного университета Г. М. Мяликгулыев. На открытии олимпиады присутствовали зав. отделом науки и учебных заведений ЦК Компартии Туркменистана Е. О. Овлякулиев, зав. отделом науки и учебных заведений Совета Министров ТССР С. К. Какаев. Завершил торжественное открытие концерт участников коллективов художественной самодеятельности Ашхабадского Дворца пионеров.

Задания заключительного этапа олимпиады участники писали 13 и 14 апреля. Задание каждого из двух дней состояло из четырех задач, на решение которых отводилось по пять часов. Ниже приводятся условия всех задач. Некоторые из них включены в задачник «Кванта» (соответствующий номер указан после условия задачи).

Задачи

Первый день

8 класс

1. а) Произведение некоторых n чисел равно n, а сумма их равна нулю. Докажите, что число n делится на 4.

б) Пусть n — натуральное число, делящееся на 4. Докажите, что найдутся n целых чисел, произведение которых равно n, а сумма равна нулю.

А. А. Фомин

2. Докажите, что для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}.$$

А. Н. Смоляков

3. На плоскости расположены два равносторонних треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, вершины которых занумерованы по часовой стрелке. Из произвольной точки O отложены векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, равные, соответственно, векторам $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$. Докажите, что точки A, B, C также являются вершинами равностороннего треугольника.

Л. П. Купцов

4. Имеется четыре краски и бесконечно много квадратных плиточек со стороной длины 1. Разрешается окрашивать стороны плиточек так, чтобы цвета всех сторон у каждой плиточки были равные, и приклеивать плиточки друг к другу сторонами одного цвета. Для каких чисел m и n из этих плиточек можно склеить прямоугольник размера $m\times n$, у которого каждая сторона покрашена одним цветом и цвета всех сторон разные?

В. А. Уфнаровский

9 класс

1. Докажите, что при всех действительных $x>0$, $y>0$ и при всех действительных α справедливо неравенство

$$x^{\sin^2\alpha}\cdot y^{\cos^2\alpha}<x+y.$$

В. И. Буренков

2. Имеется куб и две краски: красная и зеленая. Двое играют в такую игру. Начинающий выбирает 3 ребра куба и красит их в красный цвет. Его партнер выбирает 3 ребра из тех, что еще не покрашены, и красит их в зеленый цвет. После этого снова 3 ребра в красный цвет красит начинающий, а затем 3 ребра в зеленый цвет — его партнер. Запрещается перекрашивать ребро в другой цвет или красить дважды одинаковой краской. Выигрывает тот, кто первым сумеет покрасить своей краской все ребра какой-нибудь грани. Верно ли, что начинающий при правильной игре обязательно выигрывает?

Н. Х. Агаханов

3. По кругу записаны $n\geqslant 3$ натуральных чисел так, что для каждого числа отношение суммы его соседей к нему является натуральным числом. Докажите, что сумма всех таких отношений: а) не меньше $2n$; б) меньше $3n$ (М875).

О. Р. Мусин

4. Окружность с центром в точке O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AC, AB, соответственно, в точках A_1, B_1, C_1. Отрезки AO, BO, CO пересекают окружность соответственно в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

И. Ф. Шарыгин

10 класс

1. При каких целых m и n выполняется равенство

$$(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n?$$

(М874 а)).

Ю. В. Михеев

2. В строку в возрастающем порядке выписали n различных действительных чисел. Под ними во вторую строку выписали те же числа, только, быть может, в другом порядке. Для каждой пары чисел, выписанных одно под другим, вычислили сумму. Эти суммы образовали третью строку. Оказалось, что числа в третьей строке также расположены в возрастающем порядке. Докажите, что первая строка совпадает со второй.

А. В. Анджанс

3. Дан треугольник ABC. Через точку P провели прямые PA, PB, PC, которые пересекли описанную около этого треугольника окружность в точках A_1, B_1, C_1, отличных от вершин треугольника. Оказалось при этом, что треугольник $A_1B_1C_1$ конгруэнтен треугольнику ABC. Докажите, что существует не более восьми точек P с указанным свойством.

И. Ф. Шарыгин

4. Положительные числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25,\\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=9,\\ z^2+zx+x^2=16.\end{cases}$$

Вычислите величину $xy+2yz+3zx$.

А. А. Болотов

Ребята довольно успешно справились с задачами, предложенными в первый день. Наибольшие трудности, как и ожидалось, вызвали задачи 8.4, 9.3, 9.4, 10.3 и 10.4. Особенно трудной оказалась задача 9.3. Лишь два участника сумели правильно решить оба ее пункта. Очень трудной оказалась и геометрическая задача 10.3, аккуратное решение которой представили лишь 3 участника. Однако ни в одном из классов не было задачи, которую бы никто не сумел решить. Жюри с удовлетворением отметило, что довольно трудную задачу 9.4 девятиклассники решали значительно лучше, чем ожидалось, причем многие ребята сумели найти такие решения, которые оказались проще решения, известного жюри.

13 апреля, после завершения работы над конкурсными заданиями, ребята приняли участие в спортивном празднике.

Второй день

8 класс

5. Учитель написал на доске квадратный трехчлен $x^2+10x+20$, после чего по очереди каждый из учеников увеличил или уменьшил на единицу либо коэффициент при x, либо свободный член, но не оба сразу. В результате на доске оказался написан квадратный трехчлен $x^2+20x+10$. Верно ли, что в некоторый момент на доске был написан квадратный трехчлен?

А. А. Берзиньш

6. Монету радиуса r перемещают по плоскости так, что ее центр обходит контур выпуклого

Председатель жюри академик Б. В. Гнеденко на экскурсии с участниками олимпиады.

многоугольника, описанного около круга радиуса $R>r$ и имеющего периметр p. Найдите площадь фигуры, образованной следом монеты.

А. А. Фомин

7. Имеется $n+1$ гирь общим весом $2n$ и весы с двумя чашками, находящиеся в равновесии. Вес каждой из гирь выражается натуральным числом. Гири по очереди кладут на чашки весов: сначала самую тяжелую (или одну из самых тяжелых), затем самую тяжелую из оставшихся и так далее. При этом каждую следующую гирю кладут на ту чашку весов, которая в данный момент легче, а если весы находятся в равновесии, то на любую из чашек. Докажите, что после того, как на весах окажутся все гири, весы будут находиться в равновесии.

А. В. Анджанс

8. Назовем натуральное число *абсолютно простым*, если оно простое и если при любой перестановке его цифр снова получается простое число. Докажите, что в записи абсолютно простого числа не может содержаться более трех различных цифр.

А. Т. Колотов

9 класс

5. Цифры $x\neq 0$ и y таковы, что при любом $n\geqslant 1$ число $\underbrace{x\ldots x}_{n}6\underbrace{y\ldots y}_{n}4$ является квадратом некоторого целого числа. Найдите все такие x и y.

Л. П. Купцов

6. На прямой взяты четыре различные точки, обозначенные в порядке следования буквами A, B, C, D. Докажите, что для любой точки E, не лежащей на прямой AD, справедливо неравенство

$$|AE|+|ED|+\big|\,|AB|-|CD|\,\big|>|BE|+|CE|.$$

С. Б. Гашков

7. Последовательность (x_n) задана рекуррентным образом:

$$x_1=1;\ x_2=-1;\ x_{n+2}=x_{n+1}^2-\frac{1}{2}x_n,$$

если $n\geqslant 1$. Докажите, что последовательность (x_n) имеет предел, и найдите его.

Н. Х. Агаханов

8. В белых клетках шахматной доски размером 1983×1984 записаны числа 1 или -1 так, что для любой черной клетки произведение чисел, стоящих в соседних с ней белых клетках, равно 1. Докажите, что это возможно только в том случае, если все записанные числа равны 1.

О. В. Ляшко

10 класс

5. В клетках квадратной таблицы 3×3 записаны числа 1 или -1. Для каждой клетки таблицы вычислим произведение чисел, стоящих в соседних с ней клетках (соседними называются клетки, имеющие общую сторону). После этого впишем вычисленные произведения в клетки таблицы вместо стоявших там ранее чисел. С новой таблицей проделаем ту же операцию, и т. д. Докажите, что после некоторого числа таких операций в таблице будут записаны одни единицы. (М871)

И. К. Жук, И. В. Воронович

6. Какое из чисел больше:

$$\frac{2}{201}\ \text{или}\ \ln\frac{101}{100}\ ?$$

Ю. В. Нестеренко

7. На плоскости расположены три окружности c_1, c_2, c_3 с центрами c_1, c_2, c_3 и радиусами r_1, r_2, r_3 соответственно, причем каждая лежит вне двух других. Пусть $r_1>r_2$, $r_1>r_3$, пусть A — точка пересечения внешних касательных к окружностям c_1 и c_2 — лежит вне окружности c_3, пусть B — точка пересечения внешних касательных к окружностям c_1 и c_3 — лежит вне окружности c_2. Из точки A проведены касательные к окружности c_3, из точки B — к окружности c_2. Докажите, что эти две пары касательных, пересекаясь, образуют четырехугольник, в который можно вписать окружность. Вычислите радиус этой окружности. (М872).

Л. П. Купцов

8. Докажите, что любое сечение куба плоскостью, проходящей через центр куба, имеет площадь, не меньшую площади грани куба.

А. А. Болотов

С заданиями второго дня ребята также справились, в целом, хорошо. В восьмом классе задачи второго дня были примерно равны по сложности задачам первого дня. Наибольшие трудности вызвала задача 8.8, которую правильно решили примерно 20 % участников. В десятом классе наиболее сложной оказалась задача 10.8, но и ее решили более трети десятиклассников. Неожиданно довольно трудной оказалась задача 10.6. Однако, в целом, задачи второго дня в 10-м классе были проще, чем задачи первого дня, и ребята с ними успешно справились. Задание второго дня в девятом классе было более сложным, чем задание первого дня. Никто из девятиклассников не сумел полностью решить все четыре задачи. Особенно трудной оказалась задача 9.7, которую сумели решить лишь 3 участника, тогда как 42 участника так и не смогли подступиться к ее решению. Более трудными, чем ожидалось, оказались задачи 9.1 и, особенно, 9.2. Радует, что и во второй день для некоторых задач ребята сумели найти свои, оригинальные решения, которые не были известны жюри.

17 апреля во Дворце пионеров состоялось торжественное закрытие олимпиады. Участникам олимпиады были вручены дипломы, грамоты и памятные призы. По итогам двух дней Дипломами I степени были награждены 16 участников, Дипломами II степени — 34 участника, Дипломами III степени — 32 участника. Были вручены также призы за оригинальные решения отдельных задач первого и второго дней, учрежденные Министерством высшего и среднего специального образования ТССР, ЦК ЛКСМ Туркмении, редакциями газет и журналов республики, редакцией и редколлегией журнала «Квант». Призы «Кванта» получили восьмиклассники Гундерс Coктс (Рига), Володя Усатюк (Владивосток), Кристина Бендорфа (Рига), Володя Тарьев (п. Красногвардейск, БССР), девятиклассники Айнарс Скуиньш (Рига), Айна Розыева (Ашхабад), Вадим Михайлов (Москва), десятиклассники Гульджахан Сахчиева (ТССР), Озот Акназаров (Уз. ССР), Игорь Трусов (Орел), Геннадий Маргвелашвили (Кутаиси). Специальный приз «С пожеланием успехов» был вручен ученице 9 класса школы № 6 г. Ашхабада Союнгулыевой Майе — первой девочке-туркменке, принявшей участие в заключительном этапе Всесоюзной математической олимпиады. Успешно выступили в Ашхабаде победители предыдущей олимпиады. Особенно хотелось бы отметить девятиклассницу Ольгу Леонтьеву и десятиклассника Федора Назарова, второй год подряд удостоенных Дипломов I степени. Оргкомитет Олимпиады-XVIII передал символическую эстафету представителю Белорусской ССР — республики, которой поручено проведение XIX Всесоюзной математической олимпиады.

Вечером 17 апреля состоялась встреча участников олимпиады с редколлегией журнала «Квант», на которой редактор отдела математики А. Б. Сосинский рассказал о профессии математика, а заместитель главного редактора, член жюри Всесоюзной олимпиады Ю. П. Соловьев рассказал о новейших приложениях геометрии к физике. Затем был проведен традиционный математический бой между командой жюри и командой участников. В упорной борьбе победу одержала команда участников олимпиады.

Очень насыщенной получилась культурная программа олимпиады. Для участников олимпиады были организованы увлекательные экскурсии по историческим местам Ашхабада и его окрестностям. Ребята побывали на развалинах крепости Ниса, построенной на территории древнего парфянского царства, в поселке Фирюза, посмотрели тюльпанные поля, посетили производственное объединение «Туркменковер», ВДНХ, Ботанический сад, Институт Солнца АН ТССР, встретились с деятелями искусства и кино Туркмении. Интересно прошла встреча участников олимпиады с академиком АН УССР Б. В. Гнеденко, учеными АН ТССР.

Быстро пролетели восемь дней, которые провели на гостеприимной туркменской земле участники олимпиады, но добрую память об этих днях ребята сохранят надолго.

XVIII Всесоюзная олимпиада по физике

Кандидат физико-математических наук
Ю. А. САМАРСКИЙ,
Л. В. ЧЕРНОВА

Восемнадцатый раз Всесоюзная олимпиада по физике собрала талантливых школьников всех союзных республик — победителей республиканских олимпиад этого года и призеров предыдущей Всесоюзной олимпиады — для участия в ответственных соревнованиях заключительного этапа олимпиады. На этот раз финальные соревнования проводились с 11 по 18 апреля в столице Армении — Ереване. Не случайно свое «совершеннолетие» олимпиада встречала в Советской Армении — республике с замечательными традициями физической науки.

Для участников олимпиады была выпущена специальная брошюра «Физика в Армении», которая открывалась приветствием Президента АН СССР академика А. П. Александрова и Председателя Центрального Оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников академика И. К. Кикоина:

«Дорогие друзья!

Мы горячо поздравляем вас с тем, что вы удостоились права принять участие в XVIII Всесоюзной олимпиаде по физике. Само участие в олимпиаде — это уже большая победа, которой вы добились своим трудолюбием и талантом. Мы хотим подчеркнуть, что талант без трудолюбия мало чего стоит...

Вам, участникам нынешней олимпиады, через несколько лет предстоит включиться в большую и серьезную работу по применению физики в самых различных областях техники и других наук...

В эти дни вам предстоит серьезное испытание. На Всесоюзной физической олимпиаде легких задач не бывает.

Мы от всей души желаем вам выдержать это испытание. Желаем больших успехов в учении и дальнейшей профессиональной работе».

На торжественном открытии, которое состоялось 12 апреля, все выступавшие были единодушны в своих добрых пожеланиях участникам олимпиады.

Утром 13 апреля состоялся теоретический тур заключительного этапа олимпиады, в котором приняли участие 144 школьника. Восьмиклассникам предлагались 4 задачи (на работу отводилось 4 часа), девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач (на их решение давалось 5 часов). Приведем условия этих задач (часть из них была опубликована в Задачнике «Кванта» в 8—10 номерах журнала за этот год).

Задачи теоретического тура

8 класс

1. Батарея водяного отопления поддерживает в комнате температуру $t_0 = +18$ °C при температуре наружного воздуха $t_1 = -20$ °C. Когда температура наружного воздуха понизилась до $t_2 = -22$ °C, и в комнате включили плитку мощностью $N = 1$ кВт, оказалось, что температура в комнате не изменилась. Какое количество теплоты в одну секунду выделяет батарея водяного отопления?

2. Для измерения распределения скорости ветра по высоте используются шары-зонды, которые имеют постоянную вертикальную скорость подъема. При запуске такого шара была получена зависимость угла α возвышения шара над горизонтом от времени (рис. 1). Полагая скорость ветра у поверхности Земли равной нулю, и расстояние от места запуска шара до наблюдателя равным 1 км (рис. 2), определите высоту подъема шара через 7 минут после запуска и скорость ветра на этой высоте.

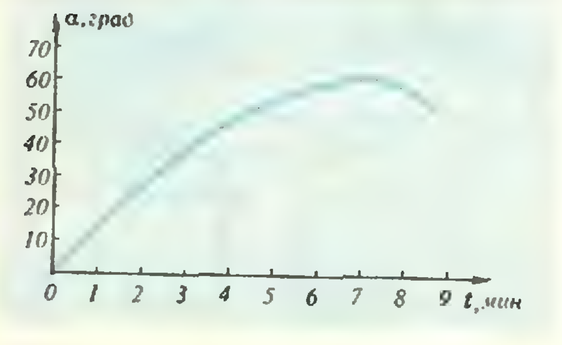


Рис. 1.

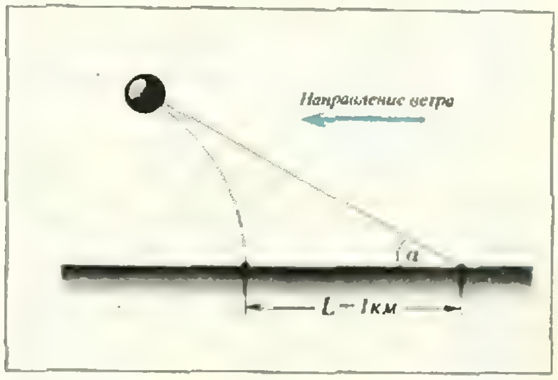


Рис. 2.

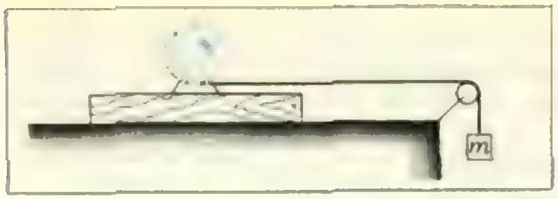


Рис. 3.

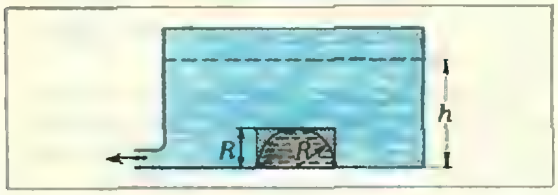


Рис. 4.

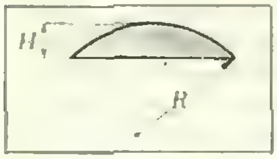


Рис. 5.

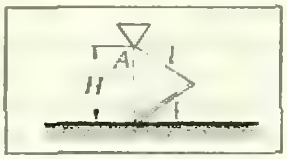


Рис. 6.

3. На бруске, лежащем на гладком столе, укреплена ось, вокруг которой может свободно вращаться валик радиуса $R=2{,}5$ см (рис. 3). К концу нити, намотанной на валик и перекинутой через невесомый блок, подвешивают груз массы m. Начав равноускоренно двигаться из состояния покоя, груз за время $t=3$ с опустился на расстояние $s=63$ см. Сколько оборотов совершил за это время валик, если масса бруска с валиком в $k=92$ раза больше массы груза? Трением пренебречь.

4. На дне большого закрытого сосуда, заполненного водой, лежит перевернутая чашка массы m. Чашка имеет форму цилиндра радиуса R и высоты R с полусферической полостью, радиус которой также равен R (рис. 4). Полость заполнена ртутью. Воду из сосуда начинают медленно откачивать. 1) Определите, при какой высоте h столба воды в сосуде чашка оторвется от его дна и ртуть начнет вытекать из-под ее краев. 2) Найдите высоту ртути в полости, когда из сосуда откачают всю воду. Давлением паров воды пренебречь. Плотность воды ϱ и плотность ртути ϱ_1 считать известными. Примечание. Объем шарового сегмента высоты H и радиуса R равен $\pi H^2(R-H/3)$ (рис. 5).

9 класс

1. Однородная палочка длины l привязана невесомой нитью длины l к неподвижной точке A (рис. 6). Нижний конец палочки может скользить без трения по горизонтальному столу. Расстояние от точки A до стола равно H ($l<H<2l$). Палочка начинает двигаться без начальной скорости из положения, изображенного на рисунке 6. Найдите максимальную скорость центра палочки при последующем движении.

2. Одна из гипотез о происхождении пояса астероидов (малых планет) восходит к древнегреческой легенде о Фаэтоне, сыне бога солнца Гелиоса, пораженном Зевсом (Юпитером) ударом молнии. Согласно этой гипотезе, рой каменных глыб, из которого должна была сформироваться гипотетическая планета Солнечной системы Фаэтон, слишком близко подошел к планете Юпитер и под влиянием гравитационного поля Юпитера распался на отдельные глыбы — астероиды. По оценкам радиус роя составлял примерно 10^4 км, а масса роя (суммарная масса астероидов) была в 10^6 раз меньше массы Юпитера. На каком расстоянии от центра Юпитера должен был пройти рой, чтобы он начал разваливаться?

3. В замкнутом сосуде находятся насыщенный водяной пар при температуре $t=100$ °C и остатки воды. Масса пара $M=100$ г, масса воды $m=1$ г. Сосуд нагревают, пока вся вода не испарится. До какой температуры надо нагреть сосуд? Какое количество теплоты для этого потребуется? Давление насыщенного пара возрастает на $\Delta p=3{,}7$ кПа при повышении температуры на $\Delta t=1$ °C. Удельная теплота испарения воды $r=2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость водяного пара при постоянном объеме $c_V=1{,}38\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

4. Часть графика, изображающего процесс, происходящий с идеальным одноатомным газом, утеряна (рис. 7). Масштабы по обеим осям известны (они указаны на рисунке 7). В течение всего процесса перехода из состояния *1* в состояние *2* газ отдал столько же тепла, сколько получил. Найдите работу, совершенную газом в этом процессе. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К).

5. Три одинаковых конденсатора, каждый емкости C, соединили последовательно и подключили к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$. После того как конденсаторы полностью зарядились, их отключили от батареи. Затем к ним одновременно подключили два резистора с сопротивлением R каждый так, как показано на рисунке 8. Какое количество теплоты выделится на каждом резисторе? Чему равны токи через резисторы в момент времени, когда напряжение на среднем конденсаторе в 10 раз меньше ЭДС батареи?

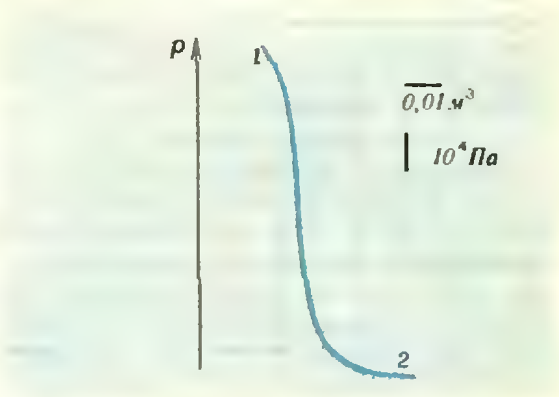
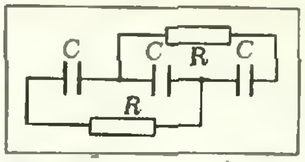


Рис. 7.



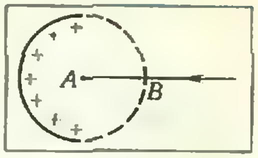


Рис. 8.

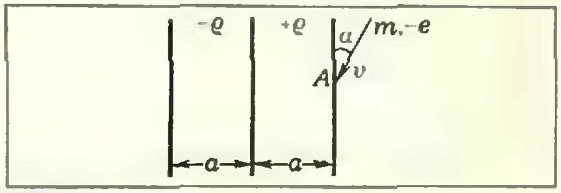


Рис. 9.

Призеры олимпиады по физике, получившие дипломы I степени. Слева направо: А. Севастьянов, Н. Ярунин, В. Барзыкин, И. Курников, Г. Григорьев, М. Свердлов, А. Алексеев, Л. Закревский, К. Мусаелян, И. Линдунен, М. Гринберг, А. Межлумян, Ю. Жестков.

10 класс

1. В одном из проектов для полетов космических аппаратов в Солнечной системе предполагалось использовать солнечный парус площадью $S=1$ км^2. Парус раскрывается, когда аппарат движется вокруг Солнца по земной орбите, радиус которой $R_{\text{З}}=1{,}5\cdot10^8$ км. При дальнейшем движении парус постоянно ориентирован перпендикулярно солнечным лучам, давление которых на земной орбите составляет $p=10^{-5}$ Па. 1) При какой массе космического аппарата он может улететь из Солнечной системы? 2) При какой максимальной массе аппарат может достичь орбиты Марса, радиус которой $R_{\text{М}}=2{,}3\cdot10^8$ км? Гравитационное влияние Земли и других планет не учитывать. Произведение массы Солнца на гравитационную постоянную $GM_{\text{С}}=1{,}3\cdot10^{11}$ км^3/с^2.

2. Тепловая машина Ползунова (одна из первых тепловых машин) работала следующим образом. В медный цилиндр с легким поршнем подавался водяной пар при температуре 100 °С. При этом поршень поднимался, совершая холостой ход. Затем пар в цилиндре охлаждался внешней водой при температуре 0 °С и конденсировался. Поршень опускался и через систему блоков поднимал груз, например уголь из шахты. Допустим, что для приготовления пара из воды с температурой 0 °С была сожжена 1 тонна угля. Пренебрегая трением и потерями тепла, определите, сколько угля было при этом поднято из шахты глубиной 100 м. Теплота сгорания угля $q=3{,}1\cdot10^7$ Дж/кг, теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $r=2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг, универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К).

3. Находящаяся на бесконечности в состоянии покоя заряженная частица притягивается однородно заряженным полукольцом вдоль линии AB (рис. 9). Отношение скоростей частицы в точках A и B известно и равно $v_A/v_B=n$. Найдите отношение ускорений частицы в этих точках.

4. Два плоских слоя толщины a каждый равномерно заряжены объемным зарядом с плотностями $-\varrho$ и $+\varrho$ (рис. 10). Частица с отрицательным зарядом $-e$ и массой m подлетает к положительно заряженному слою со скоростью $\vec{v}$, направленной под углом α к поверхности слоя. 1) При каком значении скорости частица не сможет проникнуть в отрицательно заряженный слой? 2) Через сколько времени и на каком расстоянии от точки A частица в этом случае покинет положительно заряженный слой?

5. Узкий пучок света падает нормально на стеклянный шарик радиуса R с показателем преломления n. На расстоянии r от центра пучок рассеивается равномерно по всем направлениям на маленьком воздушном пузырьке, образовавшемся при изготовлении шарика. Какая часть рассеянного пузырьком света выйдет из шарика? Потерями света в стекле пренебречь. Примечание. Телесный угол, образуемый конусом с углом 2β при вершине, равен $\Omega=2\pi(1-\cos\beta)$.

После проверки работ теоретического тура жюри получило следующие данные, по которым можно было судить о том, насколько успешно учащиеся справились с заданием:

		Номера задач				
		1	2	3	4	5
Число работ с полным решением задачи	8 кл.	27	12	18	6	
	9 кл.	8	5	18	10	8
	10 кл.	17	27	17	36	27
Число учащихся, не решивших задачу	8 кл.	2	15	17	11	
	9 кл.	6	6	6	11	18
	10 кл.	—	2	23	9	12

Экспериментальный тур заключительного этапа проводился 15 апреля. Каждому участнику предлагалось по 2 задачи. Подробный разбор этих задач дан в статье В. А. Орлова и А. Г. Ростомяна «Экспериментальный тур олимпиады по физике», помещенной в этом же номере журнала.

Для всех участников олимпиады хорошим подарком была культурно-познавательная программа, тщательно продуманная радушными хозяевами. В программу вошли: праздник «День физики», вечера в школах, экскурсии в Бюракан и встреча с учеными Бюраканской астрофизической обсерватории, экскурсия в Звартноц и Эчмиадзин, посещение музеев и театров. Многим особенно запомнился день, когда состоялась поездка на озеро Севан, а затем на Олимпийскую спортивную базу в Цахкадзоре. Специально для ребят был включен подъемник, и вся прелесть весенней долины предстала с высоты птичьего полета.

Утром 17 апреля участники олимпиады встречались с членами редколлегии журнала «Квант». Было задано много вопросов, высказаны различные пожелания и предложения по работе журнала. Наиболее активные участники встречи были награждены книгами серии «Библиотечка «Квант» с автографами авторов.

В тот же день состоялось торжественное закрытие XVIII Всесоюзной олимпиады по физике и победителям были вручены награды. Имена призеров, получивших дипломы I, II и III степеней, приведены на странице. Специальный приз редколлегии и редакции журнала «Квант» — подшивка «Кванта» за прошлый год с автографом главного редактора академика И. К. Кикоина — была вручена девятикласснику из Находки С. Чередниченко. По итогам Всесоюзной олимпиады была сформирована команда Советского Союза для участия в Международной олимпиаде по физике.*)

Статья о XV Международной физической олимпиаде школьников, которая проходила летом этого года в Швеции, будет опубликована в следующем номере нашего журнала. (*Прим. ред.*)

В заключение желаем всем хорошей учебы и успехов в покорении вершин физики.

Экспериментальный тур олимпиады по физике

Кандидат педагогических наук
В. А. ОРЛОВ,
кандидат физико-математических наук
А. Г. РОСТОМЯН

В подготовке экспериментальных заданий заключительного тура XVIII Всесоюзной олимпиады школьников по физике приняли участие преподаватели и научные сотрудники Ереванского государственного университета, Ереванского физического института и Института физических исследований АН Армянской ССР. Большую организационную помощь оказали работники Ереванского института усовершенствования учителей и Министерства просвещения Армении.

Приведем условия всех экспериментальных задач и варианты их решений, предложенные участниками олимпиады.

8 класс

Задание 1. *Определите отношение масс сосудов.*

Оборудование: два прозрачных сосуда из одинакового материала (стекла), ведро с водой, липкая лента для отметки уровней воды, груша для переливания воды

На первом этапе решения задачи нужно было выразить отношение масс сосудов через отношение определенных объемов, а на втором этапе — найти метод определения этого отношения без использования линейки.

В один из сосудов (назовем его первым) наливаем такое количество воды, чтобы при опускании этого сосуда в ведро с водой он погружался до краев, но не тонул (рис. 1). В соответствии с условием плавания тел имеем

$$m_1 g + \varrho_0 V_0 g = \varrho_0 (V_0 + V_1 + V_c) g,$$

где m_1 — масса первого сосуда, ϱ_0 — плотность воды, V_0 — объем воды в сосуде, V_1 — объем сосуда, не заполненный водой, V_c — объем стекла, из которого изготовлен сосуд. Отсюда следует:

$$m_1 = \varrho_0 (V_1 + V_c) =$$

$$= \varrho_0 (V_1 + m_1/\varrho_c) = \frac{V_1}{1/\varrho_0 - 1/\varrho_c},$$

где ϱ_c — плотность стекла. Аналогично для массы второго сосуда получим

$$m_2 = \frac{V_2}{1/\varrho_0 - 1/\varrho_c}.$$

Следовательно, отношение масс

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Отношение объемов V_1/V_2 можно определить разными способами. Например, предварительно отметив липкой лентой уровни жидкости в сосудах в опытах по рисунку 1, наполним первый сосуд водой полностью, а из второго сосуда воду выльем. С помощью груши перельем из первого сосуда во второй объем V_1 и отметим уровень воды в нем. Повторяем такое переливание, каждый раз отмечая новый уровень, до тех пор, пока во втором сосуде не поместится максимальное целое число объемов V_1. Проведем эту же процедуру, переливая объемы V_2 из второго сосуда в первый. Таким образом первый сосуд будет проградуирован по V_2, а второй — по V_1. Теперь, взяв из первого сосуда некоторый объем n_1V_2 жидкости, перельем его в пустой второй сосуд и определим его значение по шкале второго сосуда: $n_1V_2=n_2V_1$. Тогда искомое отношение масс

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

О. Волков (Горький), получивший высшую оценку за решение этой задачи, определил отношение V_2/V_1 следующим образом: с помощью груши он доливал воду в меньший (первый) сосуд до краев (от уровня V_0), а затем переливал этот долитый объем воды V_1 во второй сосуд столько раз, сколько было надо до его полного наполнения (от уровня V_0). Число таких переливаний и равно искомому отношению V_2/V_1.

Абсолютный победитель олимпиады по 8 классу *М. Свердлов* (Минск) решил задачу иначе. Опуская в ведро с водой сначала больший сосуд, а затем сразу два сосуда (один в другом) и поддерживая их в вертикальном положении, с помощью липкой ленты он отмечал объемы погруженной части большого сосуда (рис. 2). Из уравнения равновесия $m_2=\varrho_0V_2$ и $m_1+m_2=\varrho_0(V_1+V_2)$ получается $m_2/m_1=V_2/V_1$. Затем, наливая воду в большой сосуд до верхней отметки и переливая объем воды V_1 в пустой меньший сосуд, отмечался уровень воды в нем. Далее вода из объема V_2 отливалась порциями по V_1 с помощью меньшего сосуда с меткой и считалось число этих порций.

Во всех случаях искомое отношение масс сосудов получалось приблизительно равным трем.

Максимальное число баллов за эту задачу, кроме названных выше участников, получили *А. Курмис* (Рига) и *Н. Агазарян* (Ереван).

Задание 2. *Определите сопротивления трех резисторов.*

Оборудование: батарейка, два резистора с заданными сопротивлениями $R_1=1$ кОм и $R_2=1,3$ кОм, три резистора с неизвестными сопротивлениями R_3, R_4 и R_5, миллиамперметр с неизвестными пределами измерения, соединительные провода.

Решение задачи сводилось, по существу, к градуировке шкалы миллиамперметра в омах, подключая его в схему, приведенную на рисунке 3. Используя два эталонных сопротивления R_1 и R_2, можно было получить две точки на шкале миллиамперметра. Так как точки оказались близкими друг к другу, можно было считать участок шкалы, прилегающий к этим точкам, приблизительно линейным. Используя это, легко найти сопротивление R_3 неизвестного резистора, подключив его последовательно с первым резистором и определив их общее сопротивление R_1+R_3:

$$R_1+R_3=1200\ \text{Ом},\ \Rightarrow\ R_3=200\ \text{Ом}.$$

Аналогично определяется сопротивление R_4, только этот резистор нужно было подключить параллельно резистору с сопротивлением R_2 и определить сопротивление $R_2R_4/(R_2+R_4)$:

$$\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}=1200\ \text{Ом},\ \Rightarrow\ R_4\approx 20\ \text{кОм}.$$

Сопротивление R_5 определяется непосредственно, используя линейность шкалы около выделенного участка:

$$R_5=1,5\ \text{кОм}.$$

Большинство решивших задачу делали иначе. Измерив силу тока I_1 и I_2, соответствующую резисторам R_1 и R_2 (в условных единицах), и учитывая, что сопротивление батарейки и амперметра много меньше сопротивления эталонных резисторов, рассчитывалось напряжение батарейки (в условных единицах), а затем по закону Ома определялись сопротивления R_1+R_3, $R_2R_4/(R_2+R_4)$ и R_5, откуда рассчитывались сопротивления R_3 и R_4.

Лучшие результаты при выполнении этого задания показали *Н. Агазарян* (Ереван), *И. Матулёнис* (Вильнюс), *Г. Николаишвили* (Тбилиси), *А. Сонников* (Ленинград), *М. Свердлов* (Минск).

9 класс

Задание 1. *Определите неизвестную емкость конденсатора.*

Оборудование: конденсатор неизвестной емкости C_x, конденсатор с заданной емкостью C_0 ($C_x > C_0=2$ мкФ), батарейка, два резистора, сопротивления которых превышают 10^5 Ом, два переключателя, миллиамперметр и соединительные провода.

Бóльшая часть участников пыталась оценить неизвестную емкость непосредственно, сравнивая баллистические отбросы стрелки миллиамперметра при подключении к прибору конденсаторов емкостью C_0 и C_x, заряженных до напряжения батарейки. Однако в связи с тем, что емкость конденсатора C_0 мала, отброс стрелки миллиамперметра был настолько малым, что погрешность измерения достигала 500 %. Такое решение оценивалось невысоко.

Ю. Жестков (Алма-Ата) и *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) все же использовали метод баллистического отброса, причем так, что оба отброса давал конденсатор большой емкости C_x (так что погрешность измерения не выходила за допустимые пределы), заряженный до разного напряжения. Составлялась схема, приведенная на рисунке 4. Сначала конденсатор емкостью C_x заряжался до напряжения батарейки, и измерялся баллистический отброс стрелки I_0, соответствующий заряду q_0. Затем с помощью переключателя K_2 часть заряда

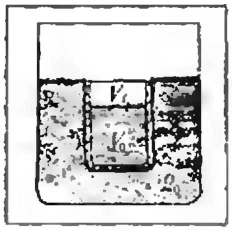


Рис. 1.

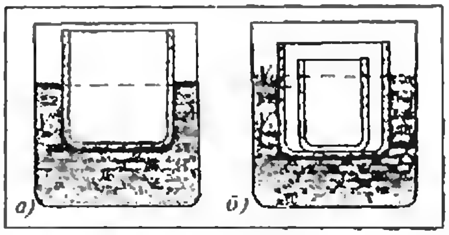


Рис. 2.

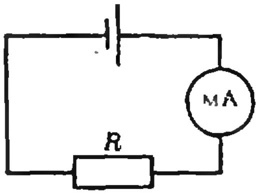


Рис. 3.

снималась на конденсатор емкостью C_0. Легко показать, что после n переключений на неизвестном конденсаторе остается заряд $q_n = (C_x/(C_x+C_0))^n q_0$. Откуда следует:

$$\frac{C_x}{C_x+C_0} = \sqrt[n]{\frac{q_n}{q_0}} = \sqrt[n]{\frac{I_n}{I_0}}, \quad C_x = \frac{C_0}{1/\sqrt[n]{I_n/I_0} - 1}.$$

где I_n — отброс стрелки миллиамперметра после n переключений ключа K_2.

Еще одно интересное решение нашел *И. Линдунен* (Ленинград). Им была собрана схема по рисунку 5. Предварительно определив отношение сопротивлений резисторов: $R_2/R_1 = 2$, он заряжал конденсатор емкостью C_x с помощью n подключений заряженного конденсатора емкостью C_0. При этом подбиралось такое число переключений ключа K, чтобы при подключении миллиамперметра ток через него не шел. Это означает, что напряжение на неизвестном конденсаторе достигло значения $U_n = U_0 R_1/(R_1 + R_2) = U_0/3$. Несложно показать, что $U_n = U_0(\alpha^n - 1)/\alpha^n$, где $\alpha = 1 + C_0/C_x$, отсюда

$$C_x = \frac{C_0}{\sqrt[n]{3/2} - 1}.$$

Метод, предложенный Линдуненом, дает хорошую точность, только если сопротивления резисторов определяются с малой погрешностью. Определение отношения R_2/R_1 с помощью отношения сил токов, измеряемых миллиамперметром, дает погрешность порядка 10 %, что приводит к погрешности ~100 % при расчете неизвестной емкости C_x. Существенно повысить точность измерений можно было, переставив резисторы местами и повторив опыт еще раз.

После n переключений ключа K_2 в схеме, приведенной на рисунке 6, напряжение на неизвестном конденсаторе уменьшается от значения U_0 до U_n:

$$U_n = \beta^n U_0, \text{ где } \beta = \frac{C_x}{C_0 + C_x}.$$

Отсюда

$$\beta^n = \frac{U_n}{U_0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Поменяв резисторы местами, после m переключений, в результате которых показания миллиамперметра, как и в предыдущем опыте, будут равны нулю, получим

$$U_m = \beta^m U_0,$$

откуда

$$\beta^m = \frac{U_m}{U_0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Очевидно, что

$$\beta^n + \beta^m = 1, \ \beta < 1.$$

Решим это уравнение графически. Для этого построим графики зависимости $\beta^n(\beta)$ и $1 - \beta^m(\beta)$ (рис. 7). Точка пересечения графиков даст значение для β, а значит и для C_x:

$$C_x = C_0 \frac{\beta}{1 - \beta}.$$

И наконец, самое лучшее решение предложил *В. Петров* (Москва). Сначала неизвестный кон-

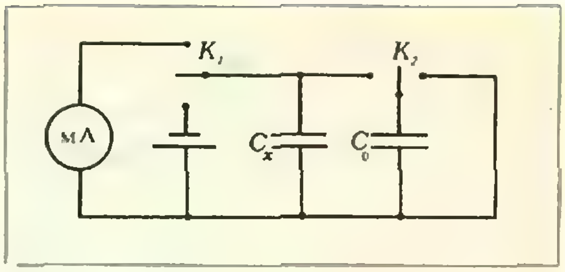


Рис. 4.

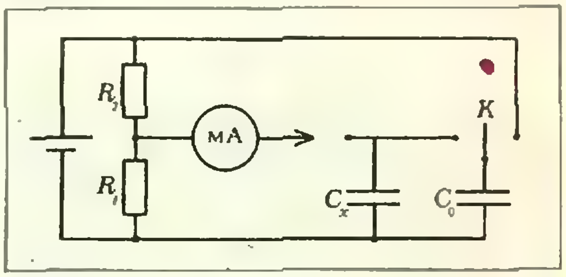


Рис. 5.

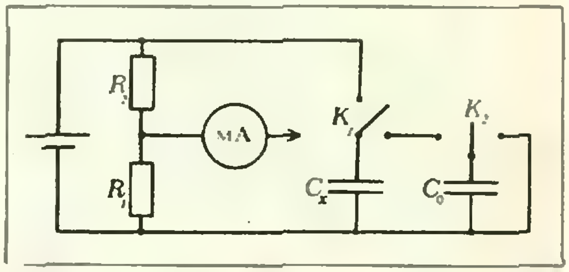


Рис. 6.

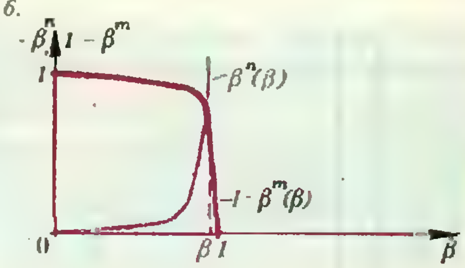


Рис. 7.

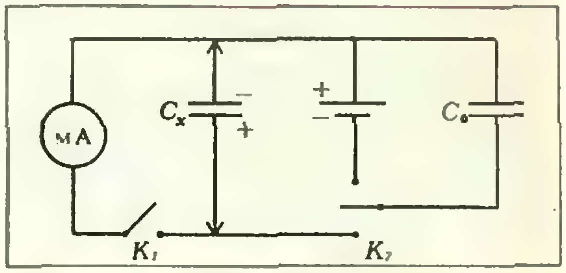
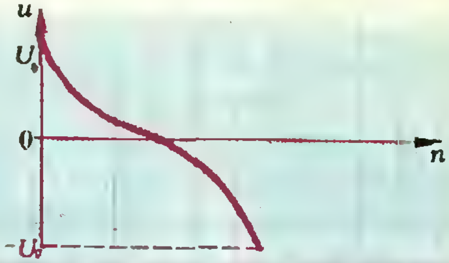


Рис. 8.



подключением к нему конденсатора с емкостью C_0, заряженного до напряжения $-U_0$ (рис. 8). При достаточно большом числе переключений неизвестный конденсатор может перезарядиться до напряжения $-U_0$ (рис. 9). Полная разрядка конденсатора ($U=0$) фиксируется в тот момент, когда при замыкании ключа K_1 ток через миллиамперметр не идет. Пусть к этому моменту было совершено n переключений. Если вначале на конденсаторе был заряд Q и после каждого переключения заряд изменяется на $\Delta Q_{\text{ср}}$, то

$$n=\frac{Q}{\Delta Q_{\text{ср}}}=\frac{C_xU_0}{C_0U_0+C_0U_0/2},$$

откуда получаем

$$C_x=\frac{3}{2}\,nC_0.$$

Этот метод дает погрешность измерений меньше 5 %.

Задание 2. *Исследуйте экспериментально колебания груза, подвешенного на двух нитях (маятник с бифилярным подвесом), при постоянном угле γ (рис. 10): а) найдите параметр, однозначно определяющий период колебаний этого груза, путем сравнения с колебаниями математического маятника (груза на длинной нити); б) определите зависимость периода колебаний груза от найденного параметра.*

Оборудование: маятник с бифилярным подвесом, математический маятник, линейка и миллиметровая бумага для построения графиков.

Изменяя по очереди различные параметры (l_1, l_2, d) бифилярного маятника и добиваясь каждый раз синхронного колебания бифилярного и математического маятников, можно заметить, что длина l математического маятника совпадает с отрезком L вертикали, проведенной из груза до подвеса (см. рис. 10). Серия таких опытов показывает, что параметр L однозначно определяет период колебаний бифилярного подвеса.

Затем нужно было экспериментально найти зависимость периода T колебаний бифилярного маятника от параметра L. Поскольку ни часов, ни секундомера не было, в качестве эталона времени следовало использовать математический маятник. Не изменяя длины математического маятника ($T_0=\text{const}$), измерялся период колебаний бифилярного маятника при разных значениях L в единицах T_0, для чего при каждом значении L подсчитывалось число колебаний N_0 математического маятника за некоторый промежуток времени и число ΔN полных совпадений состояний колебаний обоих маятников за это время:

$$\frac{T}{T_0}=\frac{\nu_0}{\nu}=\frac{\nu_0 t}{\nu t}=\frac{N_0}{N}=\frac{N_0}{N_0\pm\Delta N}.$$

Построив графики зависимости T/T_0 от L и $(T/T_0)^2$ от L, можно было убедиться в том, что $T\sim\sqrt{L}$.

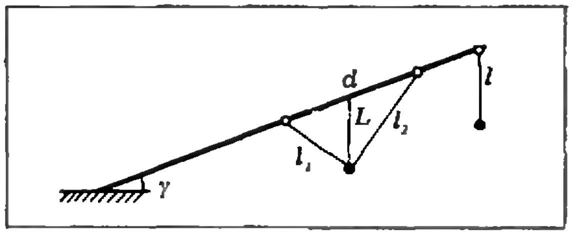


Рис. 10.

За эту задачу максимальное число баллов получили *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.), *Г. Григорьев* (Киев), *А. Севастьянов* (Северодвинск), *Л. Фельдман* (Саратов), *Д. Ян* (Ереван).

10 класс

Задание 1. *Определите отношения масс грузов и жесткостей пружин.*

Оборудование: два разных груза, две разные пружины, штатив.

Поскольку в данной работе не предполагалось использование часов и линейки, нужно было частоту собственных колебаний одного груза, подвешенного на одной пружине, использовать в качестве эталона для определения частоты собственных колебаний второго груза, подвешенного на второй пружине:

$$\frac{\nu_{11}}{\nu_{22}}=\frac{N_{11}}{N_{22}}=\sqrt{\frac{k_1}{k_2}\,\frac{m_2}{m_1}},$$

где k_1 и k_2 — жесткости пружин, m_1 и m_2 — массы грузов, N_{11} и N_{22} — число колебаний первой и второй колебательных систем за одно и то же время t (первое число в индексе показывает номер пружины, второе — номер груза).

Для нахождения искомых отношений k_1/k_2 и m_1/m_2 необходимо еще одно уравнение. Его можно получить, поменяв грузы местами и повторив опыт:

$$\frac{\nu_{12}}{\nu_{21}}=\frac{N_{12}}{N_{21}}=\sqrt{\frac{k_1}{k_2}\,\frac{m_1}{m_2}}.$$

Из полученных выражений следует:

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{N_{11}N_{12}}{N_{22}N_{21}},\quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{N_{12}N_{22}}{N_{21}N_{11}}.$$

Подсчитав число колебаний одной системы N_{11} (N_{12}) и число ΔN_1 (ΔN_2) совпадений фаз колебаний обеих систем, получаем расчетные формулы:

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{N_{11}N_{12}}{(N_{11}+\Delta N_1)(N_{12}+\Delta N_2)},$$

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{N_{12}(N_{11}+\Delta N_1)}{(N_{12}+\Delta N_2)N_{11}},$$

где ΔN_1 и ΔN_2 равны ±1, ±2, ±3, ... Выбор знака «+» или «—» определяется из учета опережения или отставания фазы второй системы от первой на $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$, ...

Лучшие решения представили *А. Алексеев* (Ленинград), *А. Дешковский* (Барановичи), *В. Каральник* (Алма-Ата), *И. Курников* (Гатчина).

Задание 2. *Определите экспериментально положение главных фокусов оптической системы двух линз $Л_1$ и $Л_2$, расположенных на расстоянии $L=10$ см друг от друга. Проверьте для этой системы применимость формулы Ньютона $x_1x_2=F^2$, где x_1 — расстояние от предмета до переднего фокуса, x_2 — расстояние от заднего фокуса до изображения.*

Оборудование: собирающая линза $Л_1$, рассеивающая линза $Л_2$, вспомогательная собирающая линза Л, батарейка, лампочка, экран, линейка, лупа для рассматривания изображений, миллиметровая бумага для построения графиков.

Положение главных фокусов оптической системы можно найти, направив параллельный пучок света вдоль главной оптической оси системы. Для этого нить лампочки устанавливается в главном фокусе вспомогательной линзы.

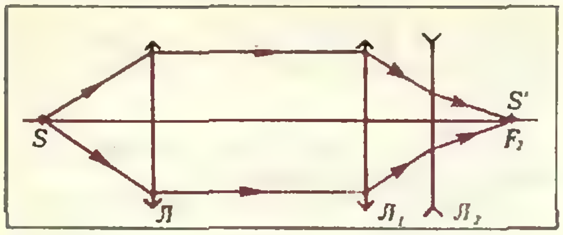


Рис. 11.

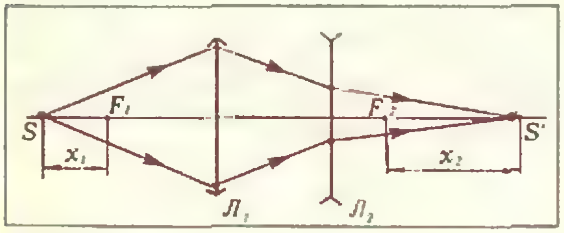


Рис. 12.

Проверка параллельности пучка света проводится с помощью измерения диаметра пятна на экране при перемещении последнего вдоль пучка.

Расположив данную систему двух линз и вспомогательную линзу так, чтобы их главные оптические оси совпали, находим задний фокус F_2 оптической системы — место получения изображения на экране нити лампочки (рис. 11). Направив параллельный пучок света с другой стороны системы, определяем положение переднего фокуса F_1. Расстояния от рассеивающей линзы до заднего фокуса и от собирающей линзы до переднего фокуса измеряются с помощью линейки.

Для проверки формулы Ньютона вспомогательная линза удаляется, и нить лампы устанавливается на главной оптической оси системы на разных расстояниях x_1 от переднего фокуса (рис. 12). Перемещая экран, получают на нем четкое изображение нити для каждого опыта и измеряют расстояние x_2 от заднего фокуса до экрана. По измеренным парам значений x_1 и x_2 удобно построить график зависимости произведения x_1x_2 от x_1, или x_2 от $1/x_1$ или $\lg x_2$ от $\lg x_1$ и убедиться в том, что он представляет собой прямую линию.

Максимальное количество баллов за задачу получили *А. Андреев* (Боровичи), *А. Коршак* (Киев), *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.), *А. Межлумян* (Ереван), *К. Мусаелян* (Ереван), *Е. Соколов* (Дятьково).

Призеры XVIII Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Бендорфа К. (Рига, с. ш. № 1),
Вайсбурд М. (Томск, с. ш. № 6),
Глущенко Г. (Запорожье, с. ш. № 91),
Калинин Г. (Ленинград, с. ш. № 308),
Coктс Г. (Рига, с. ш. № 1),
Лунин А. (Москва, с. ш. № 57),
Порошин В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Петрунин А. (Ленинград, с. ш. № 470),
Рачинский Д. (Харьков, с. ш. № 27);

по 9 классам

Бондаренко О. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Коротков А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Леонтьева О. (Ленинград, с. ш. № 239);

по 10 классам —

Астрелин А. (Новосибирск, с. ш. № 119),
Назаров Ф. (Ленинград, с. ш. № 239),
Оридорога Л. (Донецк, с. ш. № 64),
Струков С. (Воронеж, с. ш. № 85).

Диплом II степени

по 8 классам получили
Борисенко А. (Харьков, с. ш. № 27),
Борисов Л. (Минск, с. ш. № 19),
Кярас С. (Молетай, с. ш. № 2),
Судаков В. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Чусталу Т. (Таллин, с. ш. № 44),
Фролкин М. (Долгопрудный, с. ш. № 10),
Хапочкин Ю. (Брянск, с. ш. № 3);

по 9 классам —
Аршакян Н. (Аштарак, с. ш. № 3),
Басов О. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Бибин Д. (Витебск, с. ш. № 31),
Иванов Л. (Саратов, с. ш. № 13),
Михайлов В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Маслов А. (Москва, с. ш. № 57),
Малеванец А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Нажмитдинов А. (Наманган, с. ш. № 7),
Пентус М. (Таллин, с. ш. № 1),
Реджюнас М. (Вильнюс, с. ш. № 23),
Скуиньш А. (Рига, с. ш. № 1),
Святодух И. (Красноармейск Донецкой обл., с. ш. № 3),
Роглер М. (Калинин, с. ш. № 17);

по 10 классам —
Абакумов Е. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Алексеев М. (Москва, с. ш. № 2),
Богомольная А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Викста Ю. (Алуксне, с. ш. № 1),
Гараев М. (Физули, с. ш. № 2),
Грунумане Д. (Рига, с. ш. № 1),
Дуйсекулов М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Игнатов К. (Москва, с. ш. № 2),
Козлов С. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Лев М. (Свердловск, с. ш. № 130),
Мисник С. (Воронеж, с. ш. № 62),
Седола Сниедзе (Рига, с. ш. № 1),
Хрычиков В. (Севастополь, с. ш. № 24),
Этингоф П. (Киев, с. ш. № 145).

Диплом III степени

по 8 классам получили

Галиндухин Е. (Петропавловск, с. ш. № 1),
Газарян Т. (Ереван, ФМШ при ЕГУ),
Крестьянников А. (Славгород Алтайского кр., с. ш. № 10),
Минеев И. (Салехард, с. ш. № 2).

Парьев В. (п. Красногвардейск Белгородской обл., Красногвардейская с. ш.),
Прохоров М. (Полтава, с. ш. № 28),
Слепухин А. (Калуга, с. ш. № 5),
Тимкин В. (Новосибирск, с. ш. № 110),
Усатюк В. (Владивосток, с. ш. № 23),
Ферлегер С. (Ташкент, с. ш. № 110);

по 9 классам —
Алексеев Р. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Биргер А. (Иваново, с. ш. № 6),
Гольденберг И. (Мурманск, с. ш. № 8),
Гончаренко Ю. (Винница, с. ш. № 15),
Земцов П. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Ковшов Д. (Арзамас, с. ш. № 15),
Ойхберг Т. (Ленинград, с. ш. № 239),
Самойлов Д. (Минск, с. ш. № 30),
Славинский М. (Люберцы, с. ш. № 115),
Филиппов С. (Белорецк, с. ш. № 14),
Ясько Р. (Киев, с. ш. № 145);

по 10 классам —
Бураго А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Гочев Г. (Дубна, с. ш. № 9),
Кабанов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Кравченко А. (Харьков, с. ш. № 122),
Кривоносов А. (Свердловск, с. ш. № 37),
Курганов Д. (Туапсе, с. ш. № 6),
Маргвелашвили Г. (Кутаиси, ФМШ),
Михайлюк В. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Николаев В. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Румянцев И. (Ангарск, с. ш. № 10),
Филиппов В. (Караганда, с. ш. № 63).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Свердлов М. (Минск, с. ш. № 50);
по 9 классам —
Барзыкин В. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Григорьев Г. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Жестков Ю. (Алма-Ата, РФМШ),
Линдунен И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Севастьянов А. (Северодвинск, с. ш. № 17);

по 10 классам —
Алексеев А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Гринберг М. (Красноярск, с. ш. № 42),
Закревский Л. (Минск, с. ш. № 50),
Курников И. (Гатчина, с. ш. № 1),
Межлумян А. (Ереван, с. ш. № 55),
Мусаелян К. (Ереван, с. ш. № 55),
Ярунин Н. (Павлово, с. ш. № 1).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Волков О. (Горький, с. ш. № 23),
Гущин А. (Ленинск Каз. ССР, с. ш. № 30),
Матулёнис И. (Вильнюс, с. ш. № 7),
Матыцин А. (Москва, с. ш. № 91),
Мягчилов С. (Одесса, с. ш. № 16),
Николашвили Г. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Эрда Ю. (Таллин, с. ш. № 1);

по 9 классам —
Иваненко Т. (Киев, с. ш. № 145),
Климачев А. (Минск, с. ш. № 116),
Михеев А. (Кимры, с. ш. № 13),
Петров В. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Тепляев А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Фельдман Л. (Саратов, с. ш. № 13),
Черп О. (Минск, с. ш. № 50),
Ян Д. (Ереван, ФМШ);

по 10 классам —
Абанов А. (Красноярск, с. ш. № 170),
Бондаренко И. (Рига, с. ш. № 79),
Дешковский А. (Барановичи, с. ш. № 11),
Король А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Купцов Д. (Москва, с. ш. № 4),
Сайко Г. (Киев, с. ш. № 145),
Соколов Е. (Дятьково, с. ш. № 2).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Бакарян Т. (Ереван, ФМШ),
Агазарян Н. (Ереван, ФМШ),
Беренгольц А. (Кишинев, с. ш. № 3),
Боюр Р. (Тольятти, с. ш. № 28),
Зырянов И. (Братск, с. ш. № 32),
Лебедев Д. (Гатчина, с. ш. № 3),
Санников А. (Ленинград, с. ш. № 344),
Солодовников С. (Навои, с. ш. № 18),
Сукомников Н. (Винница, с. ш. № 17),
Чунаев А. (Волгоград, с. ш. № 92);

по 9 классам —
Зеленюк А. (Здолбунов, с. ш. № 6),
Каледин Д. (Москва, с. ш. № 91),
Кирюхин О. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Меньков В. (Мончегорск, с. ш. № 3),
Мотовилов М. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Рассолов В. (Кишинев, с. ш. № 13),
Якивчик А. (Москва, с. ш. № 91);

по 10 классам —
Баранаускас Г. (Шяуляй, с. ш. № 5),
Макаров Д. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Орлов С. (Москва, с. ш. № 842),
Потеряйко И. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ).

Встреча с читателями

В текущем году в Московском университете проходили ставшие уже традиционными курсы повышения квалификации учителей средних школ. 12 июня учителя математики, слушатели этих курсов, встретились с членами редколлегии журнала «Квант».

На встречу с учителями, которую вел заместитель главного редактора журнала «Квант» Ю. П. Соловьев, пришли члены редколлегии Н. Б. Васильев, Н. Х. Розов, заведующий отделом математики журнала А. Б. Сосинский. В своих выступлениях они рассказали об истории, работе и планах журнала, задачах, поставленных перед журналом предстоящей реформой общеобразовательной и профессиональной школы.

В развернувшемся обсуждении активное участие приняли многие из присутствовавших учителей. Они отметили квалифицированную помощь, которую журнал оказывает им при проведении факультативов и внеклассных занятий, значение «Кванта» для воспитания интереса учащихся к физике и математике. В выступлениях учителей прозвучали и критические замечания в адрес редколлегии журнала, были высказаны конкретные советы и предложения по его дальнейшему улучшению.

Н. Р.

Об одном способе решения некоторых уравнений

2. 4. 3. 4.

Избранные школьные задачи

1. а) Докажем (рис. 1), что треугольники BNK и ABC подобны. Угол B треугольника ABC для них общий. Кроме того, из прямоугольных треугольников BCN и BAK получаем, что $BK/AB=BN/BC=\cos\angle B$. Отсюда и следует доказываемое подобие, причем коэффициент подобия равен $\cos\angle B$. Аналогично рассматриваются и другие пары треугольников. б) Из подобия треугольников BNK и ABC вытекает, что $\angle BNK=\angle BCA$. Аналогично $\angle ANM=\angle BCA$. Поэтому $\angle MNC=\angle KNC=90°-\angle C$. Аналогично показывается, что AK и BM — биссектрисы углов NKM и NMK.

2. Ответ. а) 10^{15}; б) $\dfrac{x(1-(n+1)x^n+nx^{n+1})}{(1-x)^2}$ при $x\neq 1$ и $\dfrac{n(n+1)}{2}$ при $x=1$. Решение. а) Преобразуем произведение Π_{15} первых пятнадцати членов прогрессии (a — первый член, q — знаменатель прогрессии):

$$\Pi_{15}=a^{15}\cdot q^{1+2+3+\ldots+14}=(aq^7)^{15}=a_8^{15}=10^{15}.$$

б) Обозначим искомую сумму через S. Тогда при $x\neq 1$

$$Sx=x^2+2x^3+3x^4+4x^5+\ldots+nx^{n+1},$$

поэтому $S-Sx=x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n-nx^{n+1}=$

$$=\frac{x(1-x^n)}{1-x}-nx^{n+1}=\frac{x(1-(n+1)x^n+nx^{n+1})}{1-x}.$$

3. Пусть a, c, x и y — длины сторон BC, AB, BN и BM соответственно, β — величина угла ABC (рис. 2). Тогда $S_{ABC}=\dfrac{ac\sin\beta}{2}$, $S_{MBN}=\dfrac{xy\sin\beta}{2}$, поэтому $S_{MBN}:S_{ABC}=\dfrac{x}{a}\cdot\dfrac{y}{c}$.

4. Ответ. 0. Указание. Условие $S_m=S_n$ эквивалентно условию $2a_1=(1-m-n)d$, откуда $a_1+a_{m+n}=0$ и $S_{m+n}=\dfrac{a_1+a_{m+n}}{2}(m+n)=0$.

5. а) Треугольники AED и CEB подобны (у них равны вертикальные углы при вершине E, и $\angle CBE=\angle EDA$ как вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AC (рис. 3).

б) Треугольники EAB и EAC подобны (при доказательстве этого факта используется то, что угол, заключенный между касательной и хордой окружности, проходящими через одну ее точку, измеряется половиной ее дуги, заключенной между его сторонами, рис. 4).

в) Во всех случаях расположения точки E надо провести через нее диаметр окружности и воспользоваться пунктами а) или б) этой задачи.

6. Ответ. Нет. Указание. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда для любых целых b и c ($b\neq c$) целое число $P(b)-P(c)$ делится на число $b-c$. (Это следует, например, из формулы $b^k-c^k=(b-c)(b^{k-1}+b^{k-2}c+b^{k-3}c^2+\ldots+bc^{k-2}+c^{k-1})$, верной для любого натурального k). Если бы существовал многочлен, удовлетворяющий условиям задачи,

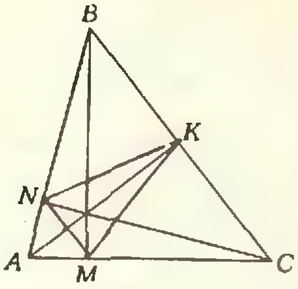


Рис. 1.

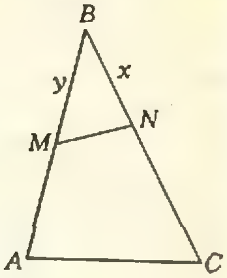


Рис. 2.

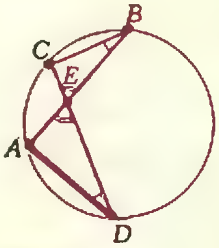


Рис. 3.

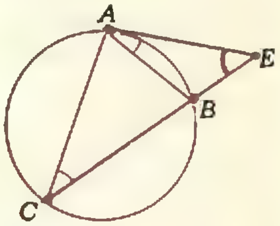


Рис. 4.

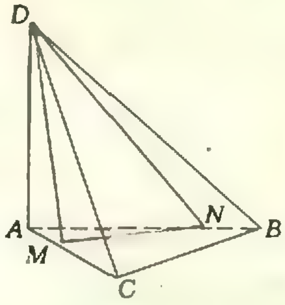


Рис. 5.

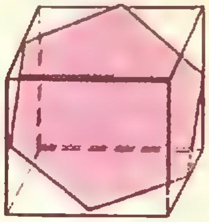


Рис. 6.

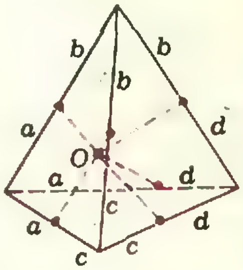


Рис. 7.

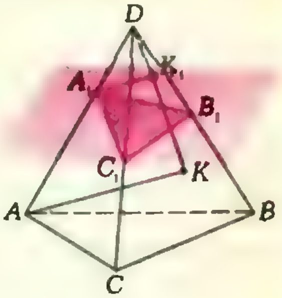


Рис. 8.

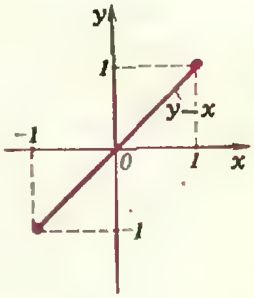


Рис. 9а.

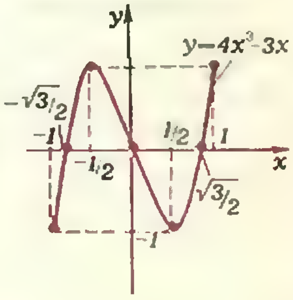


Рис. 9б.

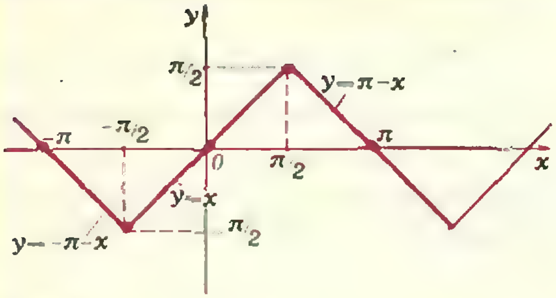


Рис. 9в.

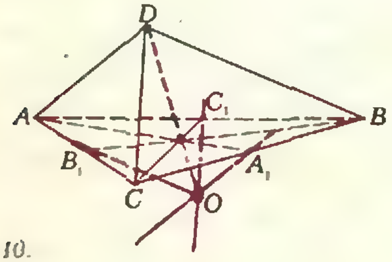


Рис. 10.

то число $P(11)-P(7)=13-11=2$ делилось бы на число $11-7=4$.

7. Могут. Приведем пример. Для этого через вершину D треугольной пирамиды $ABCD$, у которой ребро DA перпендикулярно основанию, проведем плоскость DMN (рис. 5). Пирамида $DNBCM$, очевидно, удовлетворяет условию.

8. а) Верно. б) Может. Пример: $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$. в) Предположим, что первое число рационально. Тогда оно является периодической десятичной дробью. Пусть период этой дроби содержит k цифр, а перед первым периодом имеется n цифр. Поскольку среди натуральных чисел имеется число, записываемое единицей с m $(m>n+k)$ нулями, получается, что период должен состоять из k нулей, что неверно. Получили противоречие.

Предположим, что $\operatorname{tg} 5°$ — рациональное число. В силу формулы $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ (в частности, $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$) имеем, что числа $\operatorname{tg}10°$, $\operatorname{tg}20°$ и $\operatorname{tg}30°$ — числа рациональные, но $\operatorname{tg}30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$ — иррациональное число. Получили противоречие.

9. Ответ. 3, 4, 6. Решение. Примеры таких сечений привести легко (вершины шестиугольника — середины соответствующих ребер, рис. 6). Докажем, что иных случаев быть не может. Во-первых, поскольку у куба 6 граней, то больше 6 сторон в сечении его плоскостью не бывает. Во-вторых, если предположить, что в сечении получается пятиугольник, то хотя бы две его стороны должны лежать в параллельных гранях куба, и, значит, эти стороны параллельны; но в правильном пятиугольнике нет параллельных сторон.

10. а) Умножьте обе части доказываемого равенства на $2\sin\frac{\pi}{5}$. б) Ответ. $\dfrac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ при $\alpha\neq 2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 0 при $\alpha=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Указание. Идея решения та же, что и в пункте а): умножьте и разделите данную сумму на $\sin(\alpha/2)$ и примените формулу $\sin\beta-\sin\gamma=\frac{1}{2}(\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma))$.

в) $\dfrac{n\sin\alpha-\sin n\alpha\cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$ при $\alpha\neq\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 0 при $\alpha=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Указание. Для решения сначала преобразуйте данную сумму с помощью формулы $\sin^2\varphi=(1-\cos2\varphi)2$, а затем, умножив и разделив ее на $\sin\alpha$, примените формулу $\sin\beta\cos\gamma=\frac{1}{2}(\sin(\beta+\gamma)+\sin(\beta-\gamma))$.

11. Отрезки касательных к шару, проведенных из одной точки, равны. Пусть a, b, c, d — длины этих отрезков для всех вершин тетраэдра соответственно (рис. 7). Тогда для каждой пары скрещивающихся ребер сумма их длин равна $a+b+c+d$.

12. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр и $A_1B_1C_1$ — его сечение, причем $\frac{|A_1D|}{|AD|}=\frac{a}{b}$, $\frac{|B_1D|}{|BD|}=\frac{c}{d}$, $\frac{|C_1D|}{|CD|}=\frac{e}{f}$, (рис. 8). Будем считать грани BCD и B_1C_1D основаниями тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D$ соответственно. Пусть AK — высота тетраэдра $ABCD$, опущенная из его вершины A, тогда параллельный этой высоте отрезок A_1K_1 будет высотой тетраэдра $A_1B_1C_1D$. Отношение объемов тетраэдров равно $\dfrac{S_{B_1C_1D}\cdot|A_1K_1|}{S_{BCD}\cdot|AK|}$. Но $S_{B_1C_1D}:S_{BCD}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$ (см. задачу № 3), а из подобия треугольников AKD и A_1K_1D вытекает, что $|A_1K_1|:|AK|=|A_1D|:|AD|$. Отсюда получается утверждение задачи.

13. а) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\beta+\cos\gamma-$

$$-\cos(\beta+\gamma)=2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+1-2\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}-2\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Равенство достигается только при $\alpha=\beta=\gamma=\pi/3$.

б) Поскольку

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{(\pi-(\beta+\gamma))}{2}=\cos\frac{\beta+\gamma}{2},$$

левую часть неравенства можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}-\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)^2\right),$$

откуда аналогично пункту а) можно получить искомый результат.

14. Графики изображены на рисунках 9а—9в.

15. Пусть плоские углы при вершине D тетраэдра $ABCD$ прямые (рис. 10). Обозначим центр описанного около тетраэдра шара через O, а середину ребра BC — через A_1. Докажем, что прямая OD пересекается с медианой AA_1 основания ABC. Из условия следует, что ребро AD перпендикулярно плоскости боковой грани BCD. Но точка O одинаково удалена от вершин B, C и D этой грани и поэтому лежит на перпендикуляре к этой грани, проведенном через центр A_1 окружности, описанной около прямоугольного треугольника BCD. Итак, отрезки AD и A_1O параллельны и поэтому образуют плоскость, в которой лежат непараллельные отрезки OD и A_1A. Таким образом, отрезок OD пересекается с медианой A_1A грани ABC. Точно также можно доказать, что отрезок OD пересекается и с другими медианами треугольника ABC. Отсюда вытекает, что отрезок OD содержит точку пересечения этих медиан.

XVIII Всесоюзная олимпиада по математике

Первый день

8.1. а) Если натуральное число n представимо в виде произведения n целых чисел и не делится на 4, то среди n сомножителей самое большее один является четным числом. Если число сомножителей n четно, то один из них является четным числом, а другие $n-1$ являются числами нечетными. Если же число сомножителей n нечетно, то все n сомножителей являются нечетными числами. В обоих случаях сумма всех n сомножителей является нечетным числом и не может равняться нулю. Получили противоречие.

б) Пусть $n=4k$. Тогда, если число k нечетное, то $n=2\cdot(-2k)\cdot 1^{3k-2}\cdot(-1)^k$; если же число k четное, то $n=(-2)\cdot(-2k)\cdot 1^{3k}\cdot(-1)^{k-2}$.

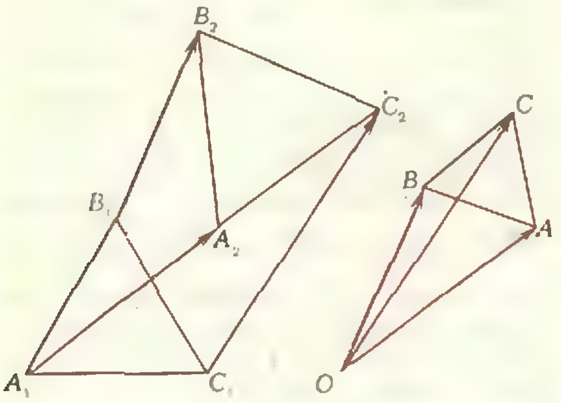


Рис. 11.

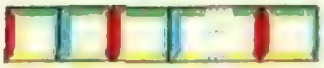


Рис. 12.

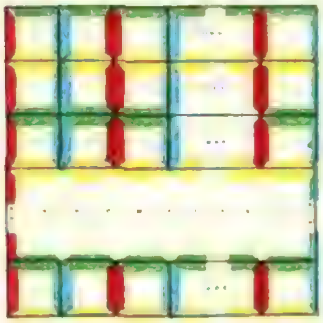


Рис. 13.

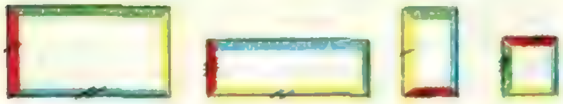


Рис. 14.

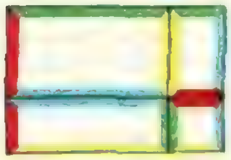


Рис. 15.

8.2. Данное неравенство после очевидных преобразований принимает вид

$$\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]\cdot\left(a+b+\frac{1}{2}\right)\geqslant\sqrt{ab}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b}). \qquad (1)$$

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, $\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$. Второй сомножитель в левой части неравенства (1) также не меньше второго сомножителя в правой части, поскольку

$$\left(a+b+\frac{1}{2}\right)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=$$
$$=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0.$$

Неравенство (1), а вместе с ним и данное неравенство, доказано.

8.3. Из равенства $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2B_2}$ следует $-\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{A_2B_2}-\overrightarrow{A_1B_1}$. Аналогично, $\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{C_1C_2}-\overrightarrow{C_2A_2}$ влечет $-\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{A_2C_2}-\overrightarrow{A_1C_1}$.

Используя условие задачи и эти равенства, получаем:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}=$$
$$=-\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2},$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=$$
$$=-\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_2C_2}.$$

Будем через $\vec{a}'$ обозначать вектор, получающийся *из вектора $\vec{a}$ поворотом на 60° против часовой* стрелки. Ясно, что $(k\vec{a})'=k\vec{a}'$ и $(\vec{a}+\vec{b})'=\vec{a}'+\vec{b}'$. Так как (рис. 11) $\overrightarrow{A_1B_1}=(\overrightarrow{A_1C_1})'$, $\overrightarrow{A_2B_2}=(\overrightarrow{A_2C_2})'$, получаем, $(\overrightarrow{AC})'=(-\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_2C_2})'=-(\overrightarrow{A_1C_1})'+(\overrightarrow{A_2C_2})'=-\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{AB}$. Мы видим, что вектор $\overrightarrow{AB}$ получается из вектора $\overrightarrow{AC}$ поворотом на 60°. Это и означает, что ABC — равносторонний треугольник.

8.4. Прямоугольник размера $m\times n$, удовлетворяющий условиям задачи, можно склеить, если числа m и n имеют одинаковую четность, и нельзя склеить в противном случае.

1-й случай. m и n нечетны. Тогда мы можем склеить прямоугольник-строчку размера $1\times n$ — с требуемыми свойствами (рис. 12), а затем из таких строчек тем же способом склеить искомый прямоугольник размера $m\times n$ (рис. 13).

2-й случай. m и n четны. Рассмотрим прямоугольники с нечетными длинами сторон размеров $(m-1)\times(n-1)$, $1\times(n-1)$, $(m-1)\times 1$ и 1×1 соответственно, изображенные на рисунке 14 (как доказано, такие прямоугольники склеить можно). Из этих прямоугольников склеиваем искомый прямоугольник размера $m\times n$ так, как показано на рисунке 15.

3-й случай. Числа m и n разной четности, для определенности, m — четно, n — нечетно. Допустим, что мы склеили прямоугольник размера $m\times n$, стороны которого окрашены в различные цвета. Рассмотрим одну из сторон прямоугольника, длина которой нечетна. Пусть она, например, красного цвета. Подсчитаем общее число красных сторон у использованных плиточек. На границе прямоугольника их n, а внутри их четное число, так как к каждой красной стороне одной плиточки примыкает красная сторона другой плиточки. Следовательно, общее число красных сторон нечетно. Всего плиточек, очевидно, использовано ровно столько же, сколько имеется красных сторон, то есть нечетное число. С другой стороны, их число равно mn, то есть четно. Получили противоречие.

9.1. Первое решение. При всех действительных $x>0$, $y>0$ справедливы неравенства $x\leqslant\max\{x, y\}$, $y\leqslant\max\{x, y\}$. Поэтому при всех действительных α

$$x^{\sin^2\alpha}\cdot y^{\cos^2\alpha}\leqslant(\max\{x, y\})^{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\max\{x, y\}<x+y.$$

Второе решение. Так как $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, то $x^{\sin^2\alpha}\cdot y^{\cos^2\alpha}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\sin^2\alpha}\cdot y$, и поэтому данное неравенство равносильно неравенству $\left(\frac{x}{y}\right)^{\sin^2\alpha}<\frac{x}{y}+1$, или $t^{\sin^2\alpha}<t+1$, где $t=\frac{x}{y}>0$, $0\leqslant\sin^2\alpha\leqslant1$. Если $0<t\leqslant1$, то $t^{\sin^2\alpha}\leqslant1<t+1$. Если же $t>1$, то $t^{\sin^2\alpha}\leqslant t<t+1$, и неравенство также выполняется.

9.2. Не верно. *Для того чтобы не проиграть*, партнеру начинающего достаточно покрасить в зеленый цвет любые три попарно скрещивающиеся ребра. Действительно, при этом в каждой грани будет покрашено одно ребро, так что партнер начинающего добьется как минимум, ничьей. Значит, задача начинающего — своим первым ходом помешать партнеру покрасить три попарно скрещивающихся ребра. Для этого начинающий должен так выбрать три ребра куба, чтобы в каждую тройку попарно скрещивающихся ребер входило, по крайней мере, одно из выбранных им ребер. Это, однако, сделать нельзя. В самом деле, всего имеется 8 таких троек: каждое из четырех ребер фиксированной грани куба порождает две тройки. Эти 8 троек различны, и в любую тройку попарно скрещивающихся ребер входит одно ребро из данной фиксированной грани. В то же время, покрасив 3 ребра, можно «испортить» самое большее 6 троек (две тройки могут иметь общее ребро, а три — не могут), причем для того чтобы «испортить» 6 троек, надо покрасить какие-нибудь три попарно параллельных ребра.

9.3. См. решение М875 в «Кванте» № 10.

9.4. Ясно, что точки A_2, B_2, C_2 являются серединами дуг B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 соответственно. Таким образом, мы приходим к следующей задаче: в окружность вписан шестиугольник $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$ (рис. 16) такой, что имеют место равенства дуг $A_1C_2=C_2B_1$, $B_1A_2=A_2C_1$, $C_1B_2=B_2A_1$. Требуется доказать, что главные диагонали этого шестиугольника A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке. Но эти главные диагонали являются биссектрисами треугольника $A_1B_1C_1$. Действительно, вписанные углы $\angle C_1A_1A_2$ и $\angle A_2A_1B_1$ опираются на равные дуги, то есть равны друг другу, что и означает, что A_2A_1 является биссектрисой угла $\angle C_1A_1B_1$. Аналогично доказывается, что B_1B_2 и C_1C_2 также являются биссектрисами соответствующих углов. Но биссектрисы любого треугольника пересекаются в одной точке, и требуемое доказано.

10.1. Ответ: при $m=n=0$. Решение см. М874 а).

10.2. Пусть даны числа (первая строка):

$$a_1<a_2<\ldots<a_m<a_{m+1}<\ldots<a_n.$$

Вторую строку образуют (различные!) числа

$$a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_m}, a_{k_{m+1}}, \ldots, a_{k_n},$$

а третью строку — числа

$$a_1+a_{k_1}, a_2+a_{k_2}, \ldots, a_m+a_{k_m},$$
$$a_{m+1}+a_{k_{m+1}}, \ldots, a_n+a_{k_n};$$

причем по условию задачи выполнены неравенства

$$a_1+a_{k_1}<a_2+a_{k_2}<\ldots<a_m+a_{k_m}<a_{m+1}+a_{k_{m+1}}<\ldots<a_n+a_{k_n}. \quad (2)$$

Покажем, что $a_1=a_{k_1}$. Пусть это будет не так, то есть $a\neq a_{k_1}$ (и, следовательно, $a_{k_1}>a_1$). Но тогда число a_1 стоит во второй строке на некотором m-ом месте, $m\geqslant2$, то есть $a_{k_m}=a_1$, а числа a_{k_1}, a_{k_2}, …, $a_{k_{m-1}}$ не равны a_1.

Так как по условию задачи выполнены неравенства (2), получаем

$$a_1+a_{k_1}<a_m+a_{k_m}=a_m+a_1,$$
$$a_2+a_{k_2}<a_m+a_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m-1}+a_{k_{m-1}}<a_m+a_1.$$

Заменив в левых частях этих неравенств числа $a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}$ на меньшее число a_1, получим неравенства

$$a_{k_2}<a_m, a_{k_3}<a_m, \ldots, a_{k_{m-1}}<a_m.$$

Кроме того, $a_1<a_m$, $a_{k_1}<a_m$. Следовательно, среди данных чисел мы нашли m различных чисел $a_1, a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_{m-1}}$, строго меньших числа a_m. Но таких чисел всего $m-1$ (это — числа $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$). Пришли к противоречию. Итак, $a_1=a_{k_1}$.

Отбрасывая теперь числа a_1, a_{k_1}, $a_1+a_{k_1}$ в первой, второй и третьей строках, мы аналогично можем доказать, что $a_2=a_{k_2}$. И так далее последовательно доказываем, что $a_3=a_{k_3}$, …, $a_n=a_{n_k}$.

10.3. См. заметку Н. Б. Васильева «Восемь точек» в одном из следующих номеров.

10.4. Введем обозначения

$$A=x^2+xy+\frac{y^2}{3},\ B=\frac{y^2}{3}+z^2,$$
$$C=z^2+zx+x^2,\ D=xy+2yz+3zx.$$

Если (x, y, z) — решение данной системы уравнений, то $A=25$, $B=9$, $C=16$. Далее мы будем работать только с такой тройкой чисел (x, y, z) и соответствующими значениями A, B, C. Равенство $A=B+C$ приводит к равенству

$$xy=2z^2+zx=z(x+2z).$$

Отсюда

$$D=(xy+2yz)+3zx=y(x+2z)+3zx=y\cdot\frac{xy}{z}+3zx=\frac{3x}{z}\left(\frac{y^2}{3}+z^2\right)=\frac{27x}{z}.$$

С другой стороны, $D=xy+2yz+3zx=2z^2+zx+$

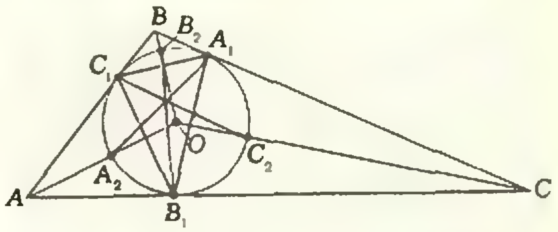


Рис. 16.

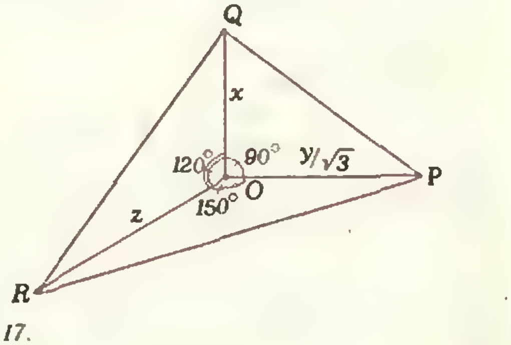


Рис. 17.

$+2yz+3zx=2z(2x+y+z)$, то есть $2x+y+z=$ $=D/2z=27x/2z^2$. Далее, $A-B+C=32=$ $=x(2x+y+z)=x\cdot D/2z=27x^2/2z^2$. Следовательно, $x/z=8/3\sqrt{3}$ (напомним, что $x>0$, $z>0$), и поэтому $D=27x/z=24\sqrt{3}$.

Замечание. Есть и другое решение, основанное на геометрической интерпретации A, B, C как квадратов сторон некоторых треугольников (рис. 17).

Второй день

8.5. Ответ: Да, верно. Решение см. М873.

8.6. Ответ: $\pi r^2+2pr-(pr^2/2R)$. Указание. При подсчете внешней части следа (πr^2+pr), воспользуйтесь тем, что составляющие ее секторы образуют круг. При подсчете внутренней части $(pr-(pr^2/2R))$ — соображениями гомотетичности.

8.7. Обозначим через k вес самой тяжелой из гирь, через S — число гирь веса 1. Заметим, что $S\geqslant k$. Действительно, у нас есть гиря веса k, S гирь веса 1 и еще $n-S$ гирь, вес каждой из которых не меньше 2. Поскольку вес всех гирь по условию равен $2n$, справедливо неравенство $2n\geqslant$ $\geqslant k+S+2(n-S)$, откуда $S\geqslant k$.

После того, как на весы положили первую гирю, разность между весами грузов на чашках стала равна k. Понятно, что и в дальнейшем вес более тяжелой чашки будет отличаться от веса более легкой чашки не более чем на k. В самом деле, на каждом следующем шаге мы кладем гирю на более легкую чашку. Если после этого она осталась более легкой, то разность весов на чашках уменьшилась. Если же после этого более легкая чашка стала более тяжелой, но новая разность между весами не превосходит веса положенной гири, а он не превосходит k.

Предположим, что мы положили на весы все гири, вес которых больше 1, и у нас остались S гирь веса 1. Так как S больше или равно разности весов на чашках, то, положив на весы некоторое количество гирь веса 1, мы приведем их в состояние равновесия. В этот момент общий вес гирь на весах будет выражаться четным числом, поэтому число оставшихся гирь веса 1 также будет четным. В дальнейшем мы должны будем класть их поочередно то на одну, то на другую чашку. Следовательно, в силу четности числа оставшихся гирь веса 1 в итоге весы окажутся в равновесии.

8.8. Очевидно, что в записи абсолютно простого числа не может встретиться ни одна четная цифра, а если число цифр в записи больше или равно двум, то не может также встретиться цифра 5 (если бы одна из цифр 0, 2, 4, 6, 8, 5 присутствовала, то, переставив ее на последнее место, получили бы составное число). Следовательно, в записи абсолютно простого числа могут встретиться только цифры 1, 3, 7 и 9. Предположим, что все эти цифры присутствуют в записи некоторого абсолютно простого числа. В таком случае, переставляя их, мы из данного числа можем получить следующие семь абсолютно простых чисел:

$M_1=\overline{a_1a_2\ldots a_m1379}=M+1379$,

где $M=\overline{a_1a_2\ldots a_m0000}$,

$M_2=M+3179$, $M_3=M+9137$, $M_4=M+7913$,
$M_5=M+1397$, $M_6=M+3197$, $M_7=M+7139$.

Это, однако, невозможно, так как числа 1379, 3179, 9137, 7913, 1397, 3197 и 7139 дают различные остатки при делении на 7 (соответственно 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6), и поэтому среди чисел M_1, M_2, ..., M_7 одно обязательно делится на 7.

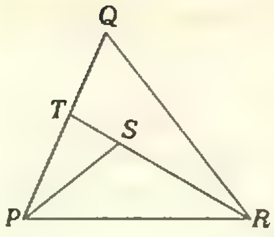


Рис. 18.

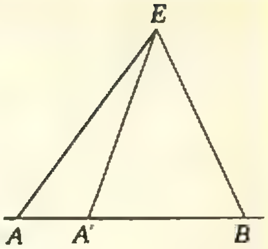


Рис. 19.

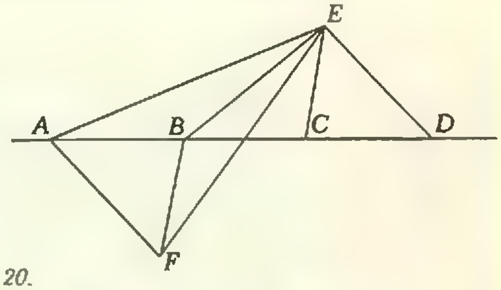


Рис. 20.

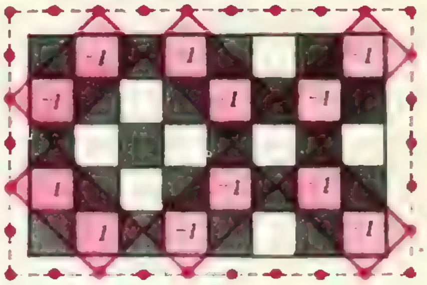


Рис. 21.

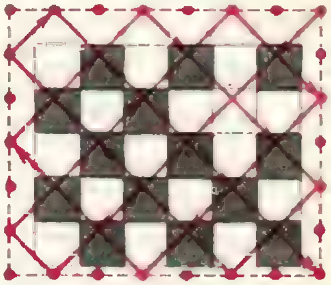


Рис. 22.

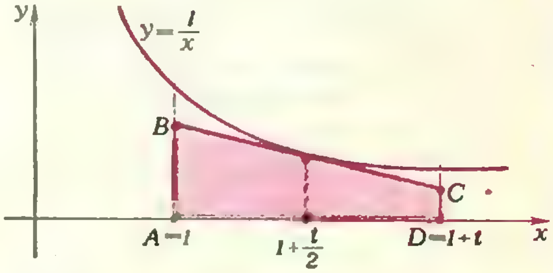


Рис. 23.

9.5. Если число $\overline{x6y4}$ является квадратом некоторого натурального числа A, то число A является двузначным и оканчивается либо на 2, либо на 8, причем $A>40$. Всего существует 12 таких чисел: 42, 52, 62, 72, 82, 92, 48, 58, 68, 78, 88, 98. Легко проверить, что только квадраты чисел 68 и 98 имеют цифру 6 в третьем разряде:

$68^2=4624$, $98^2=9604$. Следовательно, либо $x=4$, $y=2$, либо $x=9$, $y=0$. В обоих случаях число

$$\overline{\underbrace{xxx\ldots x}_{n}6\underbrace{yyy\ \ldots y}_{n}4}$$

является квадратом при всех $n\geqslant 1$:

$$\overline{\underbrace{4\ldots4}_{n}6\underbrace{2\ldots2}_{n}4}=4\cdot10^{n+1}\cdot(10^n+\ldots+10+1)+$$

$$+2\cdot10^{n+1}+2\cdot(10^n+\ldots+10+1)+2=$$

$$=4\cdot10^{n+1}\cdot\frac{10^{n+1}-1}{9}+2\cdot10^{n+1}+2\cdot\frac{10^{n+1}-1}{9}+2$$

$$=\frac{4}{9}\cdot(10^{n+1}+2)^2=(6\underbrace{\ldots}_{n}68)^2;\ \overline{9\underbrace{\ldots}_{n}9\,6\,0\underbrace{\ldots}_{n}04}=$$

$$=(10^n-1)\cdot10^{n+2}+6\cdot10^{n+1}+4=$$

$$=(10^{n+1}-2)^2=(9\underbrace{\ldots}_{n}98)^2.$$

9.6. Заметим, что если точка S лежит внутри или на стороне треугольника PQR (рис. 18), $S\neq Q$, то $|PS|+|SR|<|PQ|+|QR|$. Для доказательства достаточно сложить два очевидных неравенства $|PS|\leqslant|PT|+|TS|$, $|RS|+|TS|\leqslant|TQ|+$ $+|QR|$ и заметить, что одно из них будет строгим. Для определенности будем считать, что $|AB|\geqslant|CD|$. Тогда данное неравенство можно переписать в виде

$$|AE|+|ED|+|AB|-|CD|>|BE|+|CE|. \quad (3)$$

Возьмем на отрезке AB точку A' такую, что $|A'B|=|CD|$. Из замечания следует, что $|AE|+$ $+|AB|\geqslant|A'E|+|A'B|$ (рис. 19) и, значит, достаточно доказать неравенство (3) в предположении, что $|AB|=|CD|$. Будем далее считать, что $|AB|=|CD|$. Пусть F — точка, симметричная E относительно середины отрезка AD (рис. 20). Так как $|CE|=|BF|$, $|AF|=|ED|$, то из неравенства $|BF|+|BE|<|AF|+|AE|$, выполняющегося ввиду сделанного выше замечания, следует неравенство (3).

9.7. Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Если число c удовлетворяет неравенствам $0<c\leqslant1/4$ и при некотором k справедливы неравенства

$$|x_k|\leqslant c,\ |x_{k+1}|\leqslant\frac{5}{6}c, \quad (4)$$

то

$$|x_{k+2}|\leqslant|x_{k+1}|^2+\frac{1}{2}|x_k|\leqslant\frac{25}{36}c^2+\frac{1}{2}c=$$

$$=\left(\frac{25}{36}c+\frac{1}{2}\right)c\leqslant\left(\frac{5}{6}\right)^2c.$$

Повторяя эти рассуждения с заменой c на $5c/6$ найдем, что $|x_{k+3}|\leqslant c(5/6)^3$. Действуя далее аналогично, получим неравенство $|x_{k+n}|\leqslant c(5/6)^n$, из которого следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Осталось доказать, что существует c, $0<c\leqslant1/4$ и некоторый номер k, при которых выполнены неравенства (4). Непосредственно вычислив несколько членов последовательности (x_n), легко убедиться, что неравенства (4) имеют место при $k=7$ и $c=\frac{1}{4}$.

9.8. Предположим, что в некоторое непустое множество A белых клеток можно записать -1 так, что с каждым черным квадратом соседствует четное число клеток из A. Накроем каждую клетку из A повернутым на 45° красным квадратом со стороной $\sqrt{2}$ (за 1 примем сторону клетки).

Вершины красных квадратов лежат в центрах черных клеток (либо — в точках контура прямоугольника B 1984×1985, стороны которого отстоят на 1/2 наружу от сторон шахматной доски). Границей красной фигуры служит ломаная, которая может иметь самопересечения в центрах черных клеток доски, но вершины — только в «красных» точках контура B (отстоящих на целое расстояние от вершин прямоугольника B, рис. 21); действительно, угол в 90° или 270° красной фигуры внутри доски означал бы, что к соответствующему черному квадрату примыкает нечетное число белых квадратов из A. Таким образом, граница красной фигуры — замкнутый путь биллиардного шара, отражающегося от сторон под углом 45° в некоторых «красных» точках. На рисунке 11 для шахматной доски 5×6 (ей соответствует прямоугольник B 6×7) показан пример такой замкнутой биллиардной траектории. Но для биллиарда B размерами 1984×1985 замкнутой траектории не существует. Действительно, если выпустить из двух противоположных углов такого биллиарда под 45° к сторонам шарики, то они, отражаясь последовательно от сторон (на каждой стороне после очередного «цикла» точка отражения смещается на 2, рис. 22), пройдут по всем «диагональным» прямым, проходящим под 45° через красные точки. Поэтому любая биллиардная траектория, выходящая под 45° из красной точки, попадет в угол и не может быть замкнутой.

10.5. Решение см. М871 в «Кванте» № 10.

10.6. Ответ: $\ln\frac{101}{100}>\frac{2}{201}$. Решение. Как известно, число $\ln(1+t)$, где $t>0$, равно площади криволинейной трапеции, ограниченной на плоскости XOY прямыми $x=1$, $x=1+t$, $y=0$ и гиперболой $y=\frac{1}{x}$ (рис. 23). Проведем в точке $x=1+\frac{t}{2}$ касательную к гиперболе $y=\frac{1}{x}$. Она отсечет от криволинейной трапеции обычную трапецию $ABCD$ (см. рис. 23). Так как функция $y=\frac{1}{x}$ выпукла вниз, то площадь криволинейной трапеции будет строго больше площади трапеции $ABCD$. Следовательно, для любого $t>0$: площадь криволинейной трапеции $=\ln(1+t)>$ $>S_{ABCD}=t\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{2}}=\frac{2t}{2+t}$.

Полагая $t=\frac{1}{100}$, мы получаем нужное неравенство

$$\ln\frac{101}{100}=\ln\left(1+\frac{1}{100}\right)>\frac{\frac{2}{100}}{2+\frac{1}{100}}=\frac{2}{201}.$$

10.7. Ответ: $r=\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2-r_2r_3+r_3r_1}$. Решение см. М872 в «Кванте» № 10.

10.8. Указание. Рассмотрев подходящую развертку куба, оцените площадь сечения через его периметр.

4-я страница обложки

Оригинальность головоломки заключается в том, что ее нельзя сложить последовательным присоединением одной детали к другой. Сначала элементы нужно объединить попарно и только затем соединить в восьмиконечную звезду.

«Квант» для младших школьников»
(см. «Квант» № 9)

1. Ответ. Можно. После вычеркивания должно остаться 361-значное число 41984...1984.

Указание. Сумма цифр числа 1984 равна 22, а так как $1984=90\cdot22+4$, достаточно вычеркнуть первую восьмерку, оставить цифру 4 и 90 идущих за ней групп ...1984..., и затем вычеркнуть все оставшиеся цифры.

2. Вот одна из возможных расстановок:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

3. Первым ходом ставится знак + после 1. Затем первый игрок ставит знаки так, чтобы рядом с каждым нечетным числом (слева или справа) стоял знак умножения.

4. Пусть x — цена Шалтая, и y — цена Болтая. Тогда $175x-125y=25(7x-5y)\geqslant25$, а $126y-175x=7(18y-25x)\geqslant7$. Поэтому $y=126y-125y=126y-175x+175x-125y\geqslant7+25=32$.

Итак, Болтай стоит не меньше 32 копеек, но Шалтай стоит больше, чем $\frac{5}{7}y=\frac{5}{7}\cdot32$, то есть не меньше 23 копеек.

Поэтому на покупку 3-х Шалтаев и 1-го Болтая потребуется не меньше, чем $3\cdot23+32=101$ коп.

5. Треугольники ABD и BCD равны по трем сторонам. Поэтому равны углы DBA и CDB и, следовательно, $\triangle BOD$ — равнобедренный.

Кубический кроссворд
(см. «Квант» № 9)

1. Берклий. **2.** Гиперон. **3.** Вавилов. **4.** Миллион. **5.** Калория. **6.** Харитон. **7.** Андреев. **8.** Кипение. **9.** Биллион. **10.** Галилей. **11.** Линейка. **12.** Подобие. **13.** Касание. **14.** Бонокль. **15.** Полином. **16.** Вивиани. **17.** Алгебра. **18.** Корифей. **19.** Никомед. **20.** Позитив. **21.** Водород. **22.** Скаляры. **23.** Феномен. **24.** Дирихле. **25.** Медиана. **26.** Гипатия. **27.** Ванадий.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 7)

Задание 13 (В. Брон, 1947 г.). **1. Кg6! Фd5+ 2. Кра1 е5! 3. Ке7 Фе6 4. Крb1 g6! 5. Кра1!!** Таким удивительным образом белый король обманывает... кого бы вы думали? — черную пешку «g»! К ничьей ведет 5. Крb2 g5! 6. Крb1 g4 7. Крb2 Фh6 — пешка продвинулась вперед и освободила путь ферзю, а белый король не успел занять поле c3. **5...g5 6. Крb2! g4 7. Крс3! Фа2 8. Лb3+**, и ферзь погибает.

Задание 14 (Г. Надарейшвили, 1970 г.). Вот что сказал по поводу этого этюда М. Таль: «Позиция словно выхвачена из окончания практической партии. Может показаться, что, поскольку пешки проходят в ферзи одновременно, достижение ничьей особого труда не доставляет, но впечатление это обманчиво». Действительно, нельзя, например, играть 1. Крс7 из-за 1...d1Ф 2. b8Ф Фd7×. **1. Кра8!! Кd7 2. е6 d1Ф 3. ed** Ф:d7 **4.** b8Ф Кра6 5. Фd6+! Ф:d6 пат; 3...Кра6 4. b8К+! Крb6 5. d8Ф+! Ф:d8 — еще один пат со связкой коня. Как видите, под внешней простотой формы кроется довольно богатый этюдный сюжет — патовые идеи, слабое превращение и позиционная ничья.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров,
Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. Н. Грачев, В. С. Коваль, Т. Н. Кольченко, С. Ф. Лухин,
Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина,
П. Э. Чудновский, Е. С. Шабельник
Фото представили:
З. М. Хачикян, В. Н. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Е. В. Сидоркина

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 20.9.84
Подписано к печати 18.10.84
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Усл. кр.-от. 23,8
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,31 Т-21302
Цена 40 коп. Заказ 2506. Тираж 172 782 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

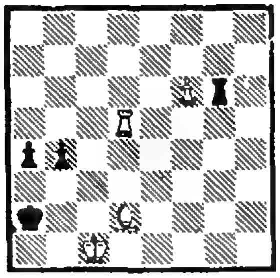
Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЭТЮДЫ КАСПАРЯНА

Мы уже рассказывали о трех гроссмейстерах по шахматной композиции. Теперь осталось познакомиться с творчеством старейшего советского этюдиста — Генриха Каспаряна.

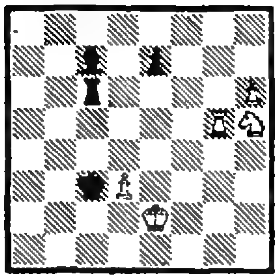
Представьте себе, что все шахматные композиторы мира решили выяснить, кто из них лучший шахматист. Победителем этого интересного состязания наверняка выйдет Г. Каспарян. Ведь он не только международный гроссмейстер по композиции, но и международный мастер по «обычным» шахматам, участник четырех чемпионатов страны.

Посмотрите ряд этюдов Каспаряна, которые он относит к числу своих лучших произведений.



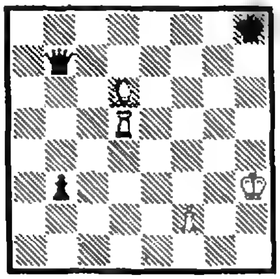
Г. Каспарян, 1939 г. Выигрыш.

Глядя на исходную позицию, трудно предположить, что нас ожидает острая борьба с эффектным финалом. **1. Cg5 b3 2. Лd2+ Крa1 3. f7** (но не 3. Ce3 b2+ 4. Л:b2 Л:f6 5. Cd4 Лf1+ 6. Крc2 a3! 7. Лb1++ Крa2 8. Л:f1 пат) **3...Л:g5! 4. f8Ф.** У белых на доске лишний ферзь, но успокаиваться рано. **4...Лg1+ 5. Лd1 Лg2 6. Фa3+ Лa2 7. Лd2!! Л:a3 8. Лb2.** Парадоксальная ситуация. У черных материальный перевес, который сохраняется до самого конца. **8...Лa2 9. Лb1×.** Простота формы в этом этюде сочетается с удивительной глубиной содержания.



Г. Каспарян, 1946 г. Выигрыш.

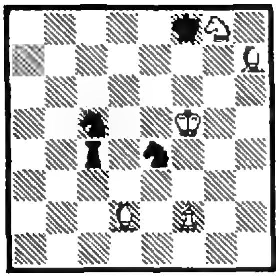
В этом этюде соединены обе грани таланта Каспаряна — практическая игра и композиция. Идея возникла из легкой партии, а обработанное произведение отвечает самым строгим требованиям этюдного искусства. **1. Kg7! Л:h6 2. Лc5+ Крd4 3. Лc4+ Крe5 4. Л:c7 Крf6 5. Ke8+ Крf7 6. Лc8 Лe6+! 7. Крd1!!** О смысле этого хода пока трудно догадаться. **7...Лg6! 8. Kc7!** Грозило 8...Лg8, выигрыш выпускало 8. Лa8? Лc6! 9. Крe2 Лc2+ 10. Крe3 Лc1 11. Крe4 Лc2 12. Крd5 Лc1 13. d4 Лc2 14. Kd6+ ed 15. Кр:d6 Лd2 16. d5 Лd1 с теоретической ничьей. **8... Лc6! 9. Крd2!!** Теперь понятно, что 7. Крd2? Лg6! 8. Kc7! Лc6! вело к ничьей — 9. d4 Лc4 10. d5 Крg6. Ну, а сейчас в цугцванг попадают черные. **9...Лc5 10. Лf8+!**, и конь вырывается на свободу.



Г. Каспарян, 1949 г. Ничья.

Одно из самых трудоемких творений гроссмейстера — работа над ним продолжалась три года.

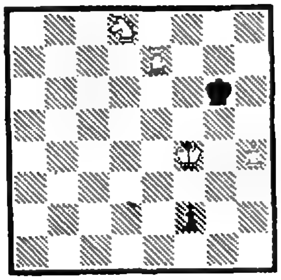
Были проанализированы десятки различных вариаций, пока не удалось уложиться в рамках миниатюры (на доске 7 фигур). **1. Ce5+ Крg8! 2. Лd8+! Крf7 3. Лd3 Крe6! 4. Лe3 Фh1+** (4...Крf5 5. Крh2 Фh7+ 6. Крg1 Фg6+ 7. Крf1! Фa6+ 8. Крg1 с ничьей) **5. Ch2+ Крf5 6. Л:b3.** Наконец-то пешка уничтожена, но черные неожиданно переходят в атаку. **6...Фf1+ 7. Крg3 Фc4! 8. Лf3+ Крg5 9. Cg1! Фg4 + 10. Крh2 Ф:f3 пат.**



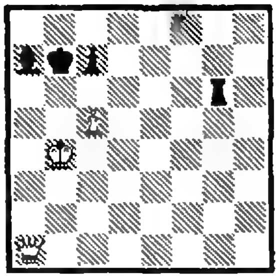
Г. Каспарян, 1970 г. Ничья.

1. Ch6+ Крf7 2. Крe5 Kd7+ 3. Крd5 Kb6+ 4. Крe5 K:f2 5. Kf6! Лc6! 6. Cg8+! Крg6 7. Ce3! Л:f6 8. Ch7+! Крg7 9. Cd4! Белые как ни в чем не бывало играют без ладьи. Замечательная иллюстрация преимущества двух слонов! **9...Лh6 10. Cf5! Kh1! 11. Ce6! Ka8.** Черные кони, как по мановению волшебной палочки, оказались в противоположных углах доски. **12. Cd5! Kc7 13. C:h1 Л:h1 14. Крd6+**, и белые спаслись. Есть и другой вариант, симметричный первому относительно диагонали a1 — h8: 8...Крf7 9. Cg8+! Крg7 10. Cd4 Лf8! 11. Ce6! Ka8 12. Cf5! Kh1 13. Ce4! Kg3 14. C:a8! Л:a8 15. Крf4+ с ничьей. Грандиозное сражение, охватывающее чуть ли не всю доску. Каспарян относит этот этюд к своим высшим достижениям.

Конкурсные задания



21. Белые начинают и выигрывают.



22. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 января 1985 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 21, 22»).

XVIII Всесоюзная олимпиада школьников по математике и физике

(Ашхабад, Ереван, апрель 1984 г.).

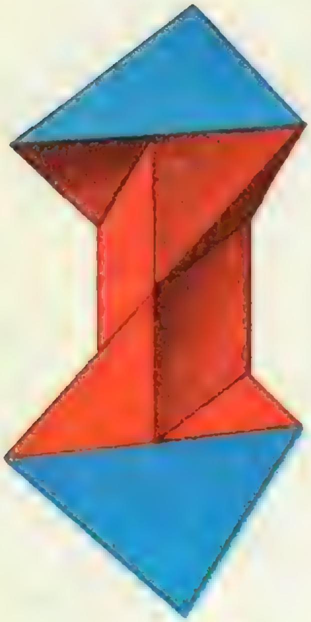
Цена 40 коп.

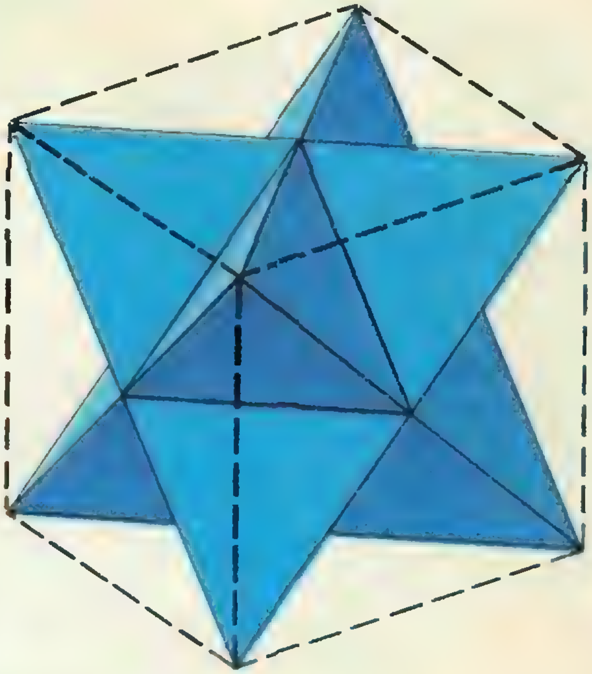
Индекс 70465

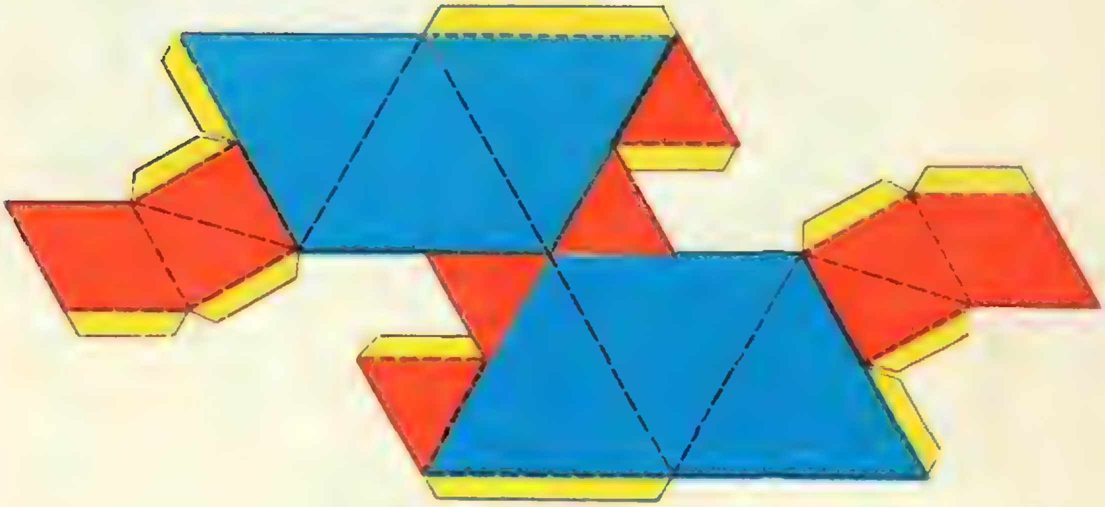
ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

Синий 24-х гранник, изображенный на рисунке справа, был открыт великим астрономом и математиком Иоганном Кеплером в 1619 году. Он назвал его Stella octangula («звезда восьмиугольная» по латыни) в связи с тем, что его 24 грани расположены на 8 плоскостях. Посмотрев на него внимательно, можно заметить, что Stella octangula Кеплера — объединение двух пересекающихся правильных тетраэдров, вершины которых образуют куб.

Звездчатый многогранник Кеплера можно разрезать на четыре одинаковых части (слева на рисунке) и превратить в интересную головоломку. Каждая часть вырезается из тонкого картона или плотной бумаги по развертке, приведенной на рисунке снизу, и склеивается. Головоломка состоит в том, чтобы собрать многогранник Кеплера из четырех таких деталей. Ее прислал нам Игорь Глушков из Обнинска.







НОМЕР
12

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант

12 1984

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

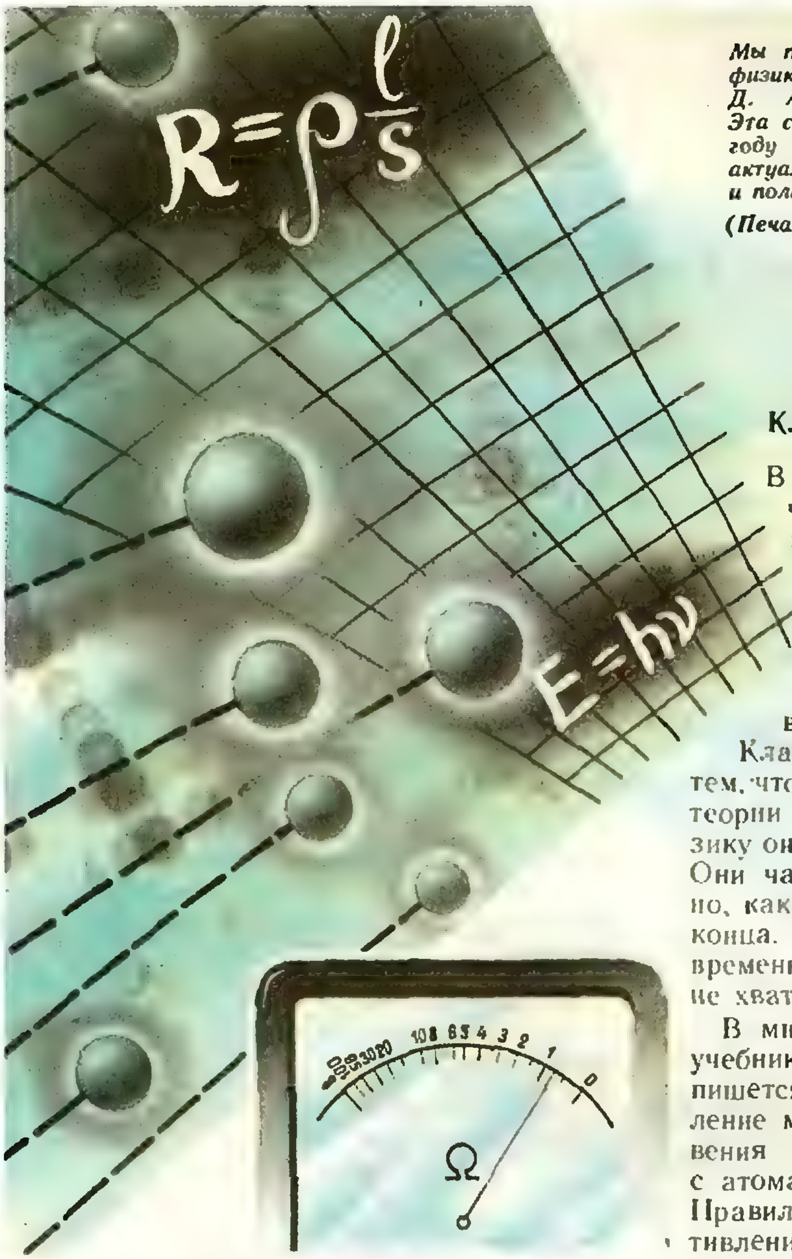
	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	*Д. А. Франк-Каменецкий.* Электрическое сопротивление — квантовое явление	*D. A. Frank-Kamenetskii.* Electric resistance is a quantum phenomenon
9	*А. Л. Тоом.* Сколько площадей у многоугольника?	*A. L. Toom.* How many areas does a polygon have?
	Наш календарь	**Our calendar**
13	Излучение Вавилова — Черенкова	The Vavilov — Cherenkov radiation
43	Мои встречи с Дебаем	My encounters with Debye
	Математический кружок	**Mathematics circle**
14	*Л. Д. Курляндчик, С. В. Фомин.* Теорема Виета и вспомогательный многочлен	*L. D. Kurlyandchik, S. V. Fomin.* Vieta's theorem and auxiliary polynomials
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
17	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
22	Математика 8, 9, 10	Mathematics 8, 9, 10
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
27	Задачи	Problems
28	*Н. А. Родина.* Как мы пьем чай	*N. A. Rodina.* How we drink tea
31	Задача в картинках	A problem in pictures
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
32	Задачи М896 — М900; Ф908 — Ф912	Problems M896 — M900; P908 — P912
36	Решения задач М881—М883; Ф890, Ф892, Ф893	Solutions M881—M883; P890, P892, P893
40	Электроемкость — свойство проводника	Capacity as a property of conductors
41	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
	Олимпиады	**Olympiads**
44	*А. П. Савин.* XXV Международная математическая олимпиада	*A. P. Savin.* The XXVth International Mathematics Olympiad
46	*С. С. Кротов.* XV Международная физическая олимпиада	*S. S. Krotov.* The XVth International Physics Olympiad
	Информация	**Information**
52	Заочная физико-техническая школа при МФТИ	Moscow physico-technical institute's correspondence school
	Игры и головоломки	**Games and puzzles**
54	Рэндзю — итоги конкурса	Renju contest results
55	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
61	**Напечатано в 1984 году**	**Printed in 1984**
	Смесь *(26, 30, 51)*	**Miscellaneous** *(26, 30, 51)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Матч века *(3-я с. обложки)*	The match of the century *(3rd cover page)*

Разноцветную дугу на небосводе (см. фотографию на первой странице обложки) можно увидеть лишь при определенных условиях. О том, когда и как она возникает, рассказывается в заметке «Что такое радуга?» (с. 20)

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1984

Мы публикуем статью крупного советского физика и блестящего популяризатора науки Д. А. Франк-Каменецкого (1910—1970). Эта статья, впервые опубликованная в 1970 году в «Кванте» № 9, не потеряли своей актуальности и, несомненно, будет интересна и полезна сегодняшнему читателю.

(Печатается с небольшими сокращениями.)



Электрическое сопротивление — квантовое явление

Доктор физико-математических наук
Д. А. ФРАНК-КАМЕНЕЦКИЙ

Сопротивление проводника протеканию электрического тока — совсем не такая простая вещь, как это кажется на первый взгляд. Как мы увидим, здесь не обойтись без кванта. Посмотрим сначала, что можно сделать без его помощи.

Классическая теория

В современной физике классическими называются теории, созданные классиками науки прошлых веков, до возникновения квантовой физики и теории относительности. Чаще всего слово «классический» физики употребляют как противоположное слову «квантовый».

Классическая теория отличается тем, что в ней не участвует квант. Такие теории очень просты, современному физику они кажутся несколько наивными. Они часто приносят большую пользу, но, как правило, решают вопрос не до конца. В классической теории для современного физика всегда чего-то не хватает.

В многих книгах, в том числе и в учебниках (и даже очень хороших), пишется, что электрическое сопротивление металла происходит от столкновения электронов, переносящих ток, с атомами*) кристаллической решетки. Правильно ли такое понимание сопротивления?

Лучше всего не говорить ни «да», ни «нет», а сказать, что оно выражает классическую теорию электрического сопротивления. К ней относится все, что мы только что говорили о классических теориях вообще. Но в данном случае классическая теория оказывается совсем слабой: она не может объяснить многих самых основных особенностей электрического сопротивления. В классической теории безусловно верно одно: сопротивление происходит оттого, что электроны передают часть своей энергии и импульса (количества движения) кристаллической решетке. Но каким именно образом происходит эта передача — вопрос совсем не простой и очень интересный.

---

*) Точнее было бы сказать с ионами, но это здесь для вас несущественно.

Температурная зависимость

Сопротивление чистых металлов сильно возрастает с температурой. Для многих из них оно примерно пропорционально абсолютной температуре. При низких температурах такая простая зависимость нарушается. Это хорошо видно на рисунке 1, где показано, как меняется с температурой удельное сопротивление меди — самого употребительного проводника электрического тока. Как видно из рисунка, в области высоких температур зависимость хорошо представляется прямой линией. Но если эту прямую продолжить в сторону низких температур (на рисунке показано пунктиром), она уходит не в абсолютный нуль, а в несколько более высокую температуру — для меди около 60 К. На самом деле при низких температурах зависимость становится более сложной: сопротивление меняется пропорционально пятой степени температуры. При приближении к абсолютному нулю сопротивление чистых металлов становится очень малым. Есть группа металлов, у которых сопротивление совсем исчезает при температуре на несколько градусов выше абсолютного нуля. Этого явления, называемого сверхпроводимостью, мы сейчас касаться не будем. Достаточно много интересного можно сказать и о более простых вещах.

Если объяснять электрическое сопротивление столкновениями электронов с атомами, то температурная зависимость сопротивления чистых металлов остается совершенно непонятной. Ведь дело обстоит так, как если бы электроны сталкивались только с атомами, совершающими тепловое движение, но свободно пролетали мимо неподвижных. Иногда так и говорят (как будто электрону легче попасть в движущийся атом), но это ошибка. Это все равно что считать, будто, стреляя не целясь, легче попасть в качающийся маятник, чем в неподвижный. Итак, классическая теория не способна объяснить зависимость сопротивления от температуры.

Остаточное сопротивление

Когда измеряют сопротивление чистых металлов при очень низких температурах, то обнаруживается замечательная вещь. Продолжая кривую рисунка 1 к абсолютному нулю, получают сопротивление, которое должно было бы остаться, если бы можно было на опыте достичь абсолютного нуля. Его так и называют остаточным сопротивлением. Оказывается, что оно сильно меняется от образца к образцу. Остаточное сопротивление крайне чувствительно к ничтожным примесям, к механической и термической обработке. Тщательно очищая металл, обрабатывая его так, чтобы добиться безупречного кристаллического строения, можно уменьшить остаточное сопротивление, и нет предела этому уменьшению. Итак, опыт наталкивает на удивительный вывод: идеальный кристалл при температуре абсолютного нуля не должен иметь электрического сопротивления. Иными словами: электрическое сопротивление чистых металлов происходит только от нарушений кристаллического строения, которые вызываются тепловым движением, примесями и дефектами (неправильностями) кристаллической решетки.

Атомные коридоры

Если бы электроны двигались по законам классической механики, они должны были бы сталкиваться с атомами независимо от того, расположены ли атомы в строгом порядке или нет. Конечно, между правильными рядами атомов есть своего рода коридоры (рисунок 2), но чтобы направить электрон по такому коридору, требовалась бы точная ориентировка кристалла по отношению к приложенному электрическому напряжению. А ведь обычно мы имеем дело не с одним кристаллом, а с сочетанием множества мелких кристалликов, ориентированных случайным образом. Одиночный правильный кри-

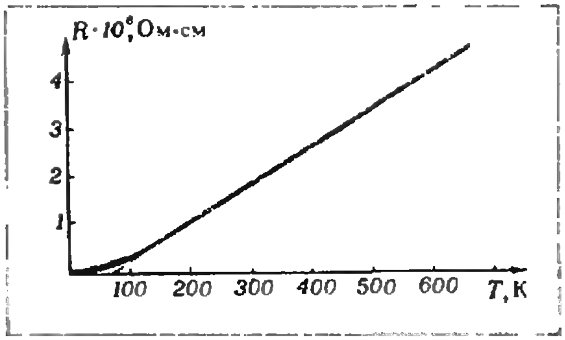


Рис 1. График зависимости удельного сопротивления меди от абсолютной температуры

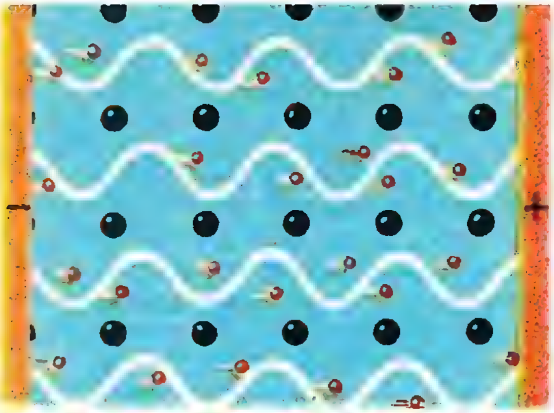


Рис. 2. Движение электронов и распространение электронных волн в правильном (идеальном) кристалле.

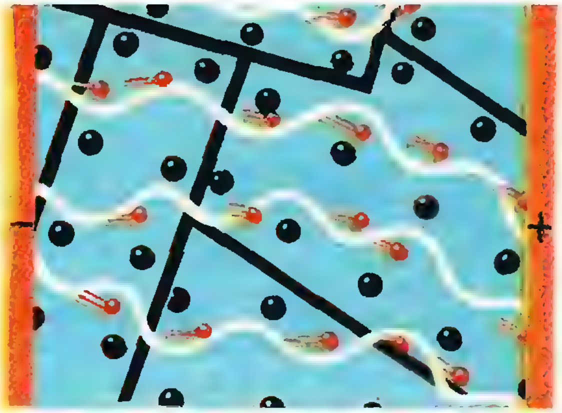


Рис. 3. Схема движения электронов по атомным лабиринтам в поликристаллическом агрегате. Красным цветом показаны электроны.

сталл называют монокристаллом (от греческого слова «моно» — один), а сочетание многих кристаллов — поликристаллическим агрегатом (от греческого «поли» — много). Так вот, точные измерения показали, что сопротивление поликристаллических агрегатов очень мало отличается от сопротивления монокристаллов. Особенно важно то, что сопротивление поликристаллических агрегатов сильно уменьшается с понижением температуры. Это никак нельзя объяснить движением электрона по атомным коридорам по законам классической механики. При переходе из одного кристаллика в другой атомный коридор резко меняет свое направление (рисунок 3). Электрон должен был с разлету стукнуться о «стенку». А он спокойно шествует по атомному лабиринту, подобно Тезею, которому указывала направление нить Ариадны. Что же это за чертовщина и как это объяснить?

Чудеса без чудес

Давно известны еще более удивительные факты. Механическая и термическая обработка заметно влияют на электрическое сопротивление металлов. Воспользуемся для удобства применяемой в технике единицей удельного сопротивления Ом·мм^2/м$=10^{-4}$ Ом·см$=$ $=10^{-6}$ Ом·м. В этих единицах удельное сопротивление обычной технической меди при 20 °С выражается числом 0,0172. После холодной протяжки сопротивление медной проволоки возрастает до 0,0177. Даже наматывания проволоки на катушку достаточно, чтобы ее сопротивление возросло. Если же подвергнуть проволоку отжигу, то есть длительному нагреву, а затем охладить ее опять до 20 °С, значение сопротивления возвращается к нормальной величине. Очевидно, сопротивление чувствительно к небольшим нарушениям кристаллической структуры (такие свойства называют структурно чувствительными). Еще поразительнее чувствительность сопротивления к ничтожным примесям. Тщательная очистка уменьшает удельное сопротивление меди при температуре 20 °С до 0,0169 Ом·мм^2/м. Это обстоятельство имеет большое значение для техники. Ведь если уменьшить сопротивление проводов, то уменьшаются и бесполезные потери электроэнергии на их нагрев. Поэтому медь, предназначенную на электротехнические нужды, подвергают специальной очистке посредством электролиза. Этот своеобразный металлургический процесс несколько напоминает «переливание из пустого в порожнее». На аноде медь растворяется, а на катоде осаждается медь, чистота которой измеряется «тремя девятками» после запятой: 99,999 %, то есть примеси в электролитической меди составляют всего тысячную долю процента.

Посмотрим теперь, как количество примесей влияет на сопротивление меди. Достаточно добавить к меди 1 % марганца, чтобы удельное сопротивление ее возросло до 0,048 Ом·мм^2/м, то есть почти в три раза! Между тем сопротивление чистого марганца составляет 0,05 Ом·мм^2/м. Таким образом, достаточно ввести в медь 1 % марганца, чтобы ее сопротивление стало практически равно сопротивлению 100 %-го марганца! Это не исключительный случай. Примерно так же действуют добавки железа, кобальта, иридия и другие. Если бы сопротивление происходило от столкновений электронов с атомами примесей, эти примеси должны были бы влиять раз в сто слабее. С точки зрения классической теории непомерное действие малых примесей — чистое чудо.

У сплавов, содержащих примеси в большой пропорции, сопротивление очень велико. Металлурги разработали замечательные рецепты сплавов с высоким сопротивлением: никелин, манганин, константан, нихром и другие. Сопротивление этих сплавов в несколько раз больше, чем у каждой из составных частей. Так, константан, состоящий из 60 % меди и 40 % никеля, имеет удельное сопротивление 0,44 Ом·мм^2/м, в то время как у чистой меди оно равно 0,017, а у никеля 0,072 тех же единиц*).

«Королем» подобных сплавов можно назвать всем известный нихром, удельное сопротивление которого около 1 Ом·мм^2/м. Недаром он нашел такое широкое применение в нагревательных приборах.

Поразительно, что температурная зависимость сопротивления у сплавов совсем другая, чем у чистых металлов. Сопротивление большинства сплавов тоже возрастает с температурой, но гораздо слабее. Специально для научных приборов, где желательно иметь постоянное сопротивление, разработан уже упоминавшийся константан, название которого означает «постоянный». В интервале температур от 0 ° до 400 °С его сопротивление меняется всего лишь от 0,441 до 0,448 Ом·мм^2/м.

С точки зрения классической теории постоянство сопротивления сплавов столь же мало понятно, как и пропорциональность сопротивления температуре для чистых металлов. Сопротивление сплава должно было бы по смыслу этой теории складываться из сопротивлений его составных частей по простому правилу смешения (как, например, теплоемкость). Если внимательно разобраться во всем, что известно об электрическом сопротивлении, то станет ясно, что уже это простое явление вынуждает для своего понимания обратиться за помощью к кванту.

Электронные волны и атомные волноводы

Все становится на свое место, если вспомнить, что по законам квантовой механики электрон имеет одновременно свойства частицы и волны. Ширина атомных коридоров близка к длине волны электрона, и потому при движении по таким коридорам волновые свойства электрона проявляются в полной мере.

В радиотехнике сантиметровых волн широкое применение имеют волноводы. Это — металлические трубки круглого или прямоугольного сечения. Радиоволны распространяются по волноводу, следуя за всеми его изгибами. Свет — тоже электромагнитные волны, и его можно запрятать в световод — трубку с зеркальными стенками*).

Действие световода с зеркальными стенками легко понять. Световые волны все время отражаются от стенок и, таким образом, остаются внутри световода. Радиоволны тоже хорошо отражаются от гладких металлических поверхностей. Если же поверхность шероховатая, то волна как бы разбивается о зазубрины и в результате рассеивается и поглощается. Ее энергия переходит в тепло.

В квантовой теории протекание электрического тока через металл описывается как распространение электронных волн по атомным коридорам, играющим роль волноводов. Если атомы расположены на плоскости в идеальном порядке, на равных расстояниях друг от друга, то такая плоскость полностью отражает электронные волны — наподобие идеального зеркала. Рассеяние и поглощение электронных волн происходит только при нарушении строгого порядка в расположении атомов. Этот удивительный вывод был получен впервые довольно сложным математическим путем из уравнений квантовой механики. Но его можно было бы сделать и на основании установленных опытным путем свойств электрического сопротивления, если бы к ним отнеслись более внимательно.

В идеальном правильном кристалле волноводы совершенно гладкие. Всякое нарушение атомного порядка действует как шероховатость стенок волно-

---

*) Все цифры здесь приведены для температуры 20 °С

*) На практике нет необходимости делать стенки зеркальными. Обычно используют явление полного внутреннего отражения, но это для нашей темы не имеет значения

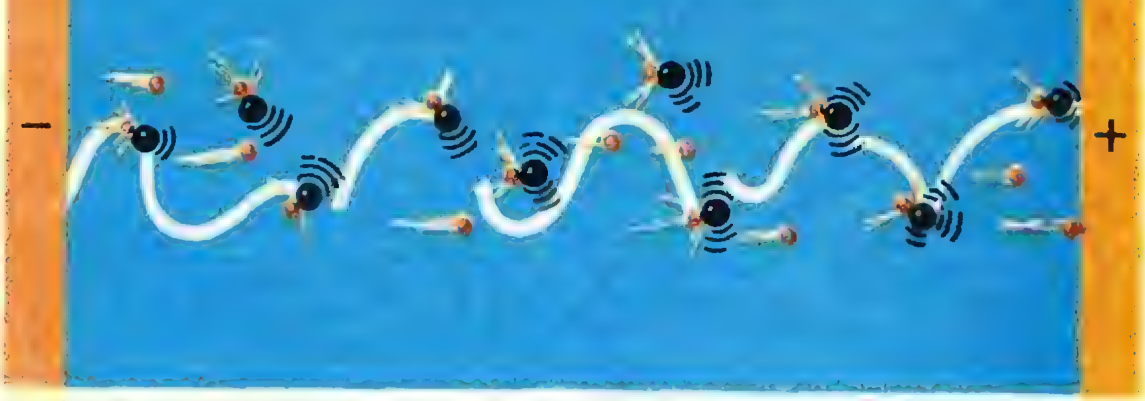


Рис. 4. Нарушение правильности атомного волновода тепловым движением.

вода. Электронные волны рассеиваются нарушениями решетки. Часть энергии электронов поглощается и переходит в тепло. Это и есть квантовый механизм электрического сопротивления. Правильность атомных волноводов нарушается тепловыми колебаниями, на которых рассеиваются электронные волны (рисунок 4). Отсюда возникает тепловая часть электрического сопротивления, зависящая от температуры. Охлаждая металл, ее можно сделать сколь угодно малой. При этом сохраняется остаточное, или структурное, сопротивление, связанное с постоянными дефектами (порчей) кристаллической структуры (рисунки 5 и 6). Дефекты есть во всяком кристалле и зависят от его «биографии» — от условий, в которых он зарождался, рос и существовал. Дополнительные дефекты возникают при холодной механической обработке — протяжке проволоки и даже намотке ее на катушку. Оттого и возрастает сопротивление. При длительном нагреве (отжиге) атомы возвращаются на свои места и дефекты залечиваются — сопротивление падает.

Внедрение инородных атомов вызывает серьезную порчу кристаллической решетки (рисунок 7). При этом один атом примеси может сбить с места сотни атомов кристалла-«хозяина». Оттого примеси и повышают сопротивление. Замечено, что действие примеси тем сильнее, чем больше ее атомы по размерам и другим факторам отличаются от атомов «хозяина», чем сильнее они нарушают правильность кристаллической решетки.

Если охлаждать металл, то тепловая (то есть происходящая от теплового движения) часть сопротивления падает. Когда она станет гораздо меньше, чем не зависящая от температуры структурная часть, то при дальнейшем охлаждении сопротивление почти не меняется. У сплавов с неупорядоченным строением структурная часть сопротивления настолько велика, что даже при высоких температурах преобладает над тепловой. Этим и объясняется слабая зависимость электрического сопротивления сплавов от температуры.

Рис. 5. Первый тип дефектов кристаллической решетки — вакансии (пустые места). Замечательно, что электроны рассеиваются и на вакансиях — нужно ли лучшее доказательство того, что они сталкиваются вовсе не с атомами решетки? Дело в том, что вакансия играет роль отверстия в стенке атомного волновода, нарушающего правильное распространение электронных волн.

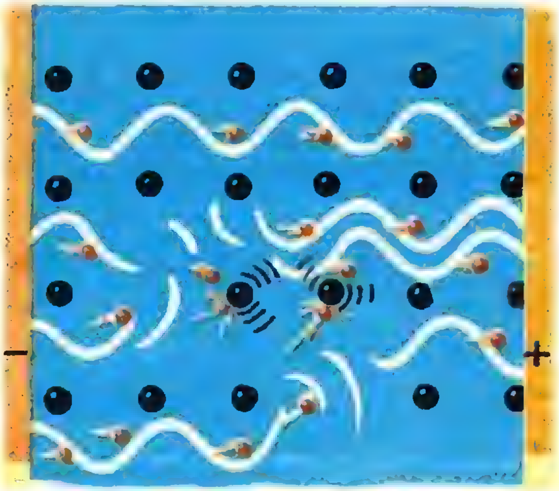
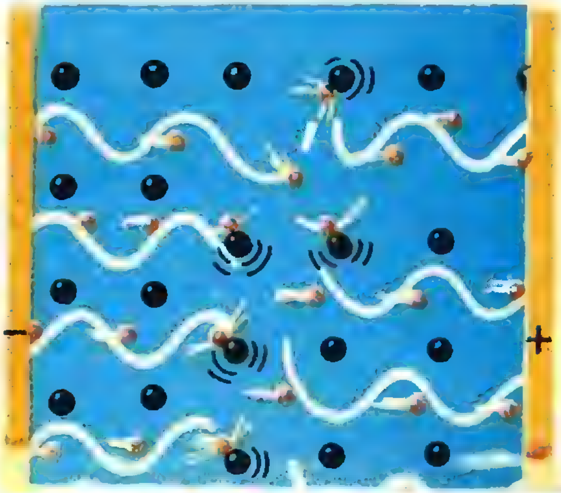


Рис. 6. Второй тип дефектов кристаллической решетки — дислокации.



Звуковой квант — фонон

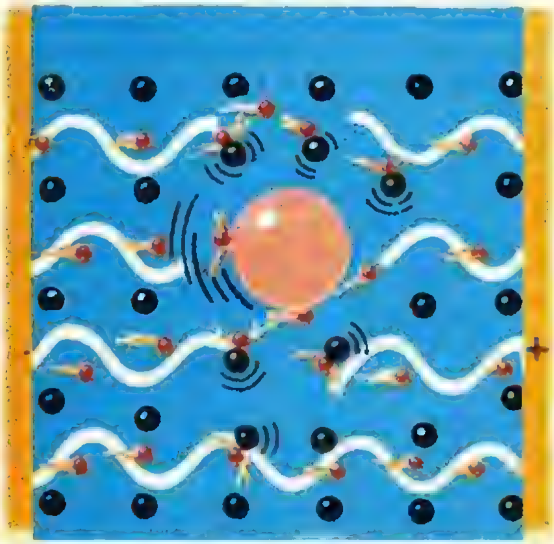
Мы познакомились с некоторыми квантовыми явлениями, но сам квант пока оставался в тени. Сейчас он выйдет на передний план.

Тепловое движение в твердом теле можно представлять себе как колебания атомов около своих положений равновесия. Но частицы в твердом теле не могут колебаться независимо. Они все прочно связаны между собой и совершают всегда коллективные колебания. Не так, как на танцплощадке, где каждая пара движется независимо от других, а как в массовой сцене большого балета, где все исполняют свои партии согласованно.

Коллективные колебания громадного числа частиц вещества — это то же самое, что звуковые волны. Если вывести любую частицу из положения равновесия, то возмущение будет распространяться по телу со скоростью звука. Оказывается, что тепловое движение в твердом теле можно рассматривать как распространение звуковых волн. Нагревая тело, мы заставляем его звучать. К счастью для нас, частота этих колебаний в миллиарды раз выше тех, какие может услышать наше ухо. Очевидно, живые существа в процессе эволюции приспособились не слышать «тепловой звук», иначе мы не выдержали бы непрерывного шума «кричащих» предметов.

Итак, обнаруживается неожиданная связь между электрическим сопротивлением и звуком. Электроны рассеиваются на звуковых волнах, возбуждаемых при тепловом движении кристаллической решетки. Но всякая волна состоит из квантов. У световой или вообще электромагнитной волны — это фотоны, у звуковой волны — фононы (от греческих слов, означающих свет и звук). Фотоны — самые настоящие частицы, вполне равноправные с другими элементарными частицами. Фононы не совсем равноправны в том смысле, что они способны существовать только внутри вещества (в пустоте фононов быть не может). Они — и подобные им — называются квазичастицами (то есть «почти частицами»). Фонон — самый простой представитель обширной семьи квазичастиц. Другие ее члены нас сейчас не интересуют.

Рис. 7 Атом примеси сбивает с места множество атомов решетки. Из-за этого нарушается правильное движение не только тех электронов, которые сталкиваются с самим атомом примеси, но и множества других. (Соотношения расстояний между атомами кристалла и их размеров по отношению к атому примеси — условные.)



Мы говорили, что электронные волны рассеиваются на шероховатостях, созданных тепловым движением, то есть звуковыми волнами. Но если звуковую волну описывать как поток фононов, то и электроны можно считать частицами, забыв про их волновые свойства. Теперь мы как бы возвращаемся к простому объяснению сопротивления: электронам мешает свободно двигаться то, что они сталкиваются с другими частицами. Но только не с частицами вещества, а с звуковыми квантами — фононами.

Теперь можно, наконец, немного и посчитать. Будем для простоты вести расчет так, как если бы все фононы имели одну одинаковую частоту ν. Такое допущение неправильно, но ошибка от него получается небольшая.

Энергия фонона, как и всякого кванта, равна $h\nu$, где h — постоянная Планка, а ν — частота волны. Число фононов есть $\frac{E}{h\nu}$, где E — энергия теплового движения, пропорциональная абсолютной температуре T. За множитель пропорциональности можно принять постоянную Больцмана k. Итак, число фононов* равно $N=\frac{kT}{h\nu}$. Мы получили очень важный результат. Число фононов в твердом теле пропорционально абсолютной температуре. Следовательно, если сопротивление происходит от столкновений электронов с фононами, оно тоже должно быть пропорционально абсолютной температуре! Так разрешается одна из загадок электрического сопротивления.

---

*) Это число фононов на одно колебание решетки, точнее говоря, на одну колебательную степень свободы, или, как любят выражаться физики, на один осциллятор.

Но этот результат справедлив только при достаточно высоких температурах. Ведь по смыслу квантовой теории число фононов не может быть меньше единицы. Посмотрим, при какой температуре оно равно единице. Эту температуру называют температурой Дебая и обозначают греческой буквой θ. Приравняв N единице, находим: $\theta = \frac{h\nu}{k}$. Температура Дебая (или дебаевская температура) играет очень важную роль в физике твердого тела. С помощью этой величины интересующее нас число фононов выражается совсем просто: $N = \frac{T}{\theta}$. При температуре ниже дебаевской это число становится меньше единицы. Это значит, что можно говорить только о среднем числе фононов, и расчет усложняется. Но величина $\frac{T}{\theta}$ по-прежнему остается мерой числа фононов в твердом теле, а следовательно, и числа столкновений электронов с фононами. Исходя из этих соображений, была высказана следующая гипотеза: температурная зависимость электрического сопротивления чистых металлов выражается универсальной функцией от меры числа фононов $\frac{T}{\theta}$. Математически эта гипотеза записывается так: $\frac{R}{R_\theta} = F\left(\frac{T}{\theta}\right)$, где R — сопротивление при температуре T, R_θ — при температуре θ, а F — функция, вид которой может быть найден из опыта. Важно то, что функция F — общая для разных чистых металлов. Как хорошо эта гипотеза оправдывается на опыте, видно из рисунка 8. Этот график построил в свое время американский физик Бардин, прославившийся впоследствии своими работами по теории сверхпроводимости.

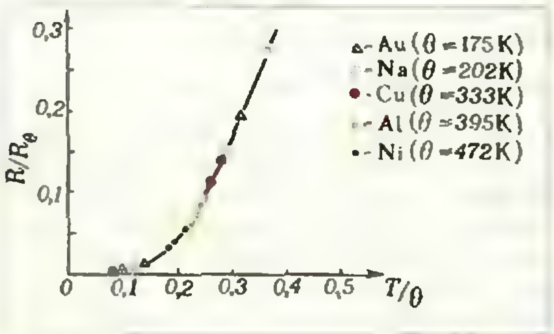


Рис. 8. Обобщенная кривая температурной зависимости удельного сопротивления чистых металлов.

Интересно и полезно связать дебаевскую температуру θ со скоростью звука c. Вспомним, что вещество состоит из атомов и волна распространяется не непрерывно, а перескакивает от атома к атому. За период колебания τ волна не может пройти путь, меньший, чем расстояние между соседними атомами a. Иначе волна «повисла бы» в пустоте между двумя атомами. Путь, проходимый звуковой волной за одно колебание, равен $c\tau$. Итак, атомное строение вещества накладывает на периоды звуковых колебаний ограничение: $c\tau \geqslant a$. Частота ν есть число периодов за единицу времени, откуда $\nu\tau = 1$. Таким образом, частоты звуковых колебаний ограничены условием

$$\nu \leqslant \frac{c}{a}. \qquad (*)$$

При тепловом движении возбуждаются звуковые волны (иначе говоря, фононы) с разными частотами, как говорят, целый спектр частот. Но у спектра фононов есть предельная частота. Волны с более высокими частотами не успевали бы перескочить от одного атома к следующему и потому не могут возбуждаться. Подробные расчеты показывают, что дебаевскую температуру можно определять так, как мы это делали, если только за частоту ν брать предельную частоту фононного спектра в твердом теле. Так мы и будем поступать.

Нам осталось оценить расстояние между атомами a. Если число атомов в единице объема равно n, то $n = \frac{1}{a^3}$. Отсюда и из формулы (*) получается: $\frac{\nu^3}{c^3} \leqslant n$. Более точный расчет, который мы здесь привести не можем, дает добавочный множитель 4π. Таким образом, получается формула, связывающая предельную частоту ν со скоростью звука c:

$$4\pi \frac{\nu^3}{c^3} = n. \qquad (**)$$

(Окончание см. на с. 12)

Сколько площадей у многоугольника?

Кандидат физико-математических наук
А. Л. ТООМ

В этой статье не излагается общая теория площадей, а просто рассказывается о различных подходах к определению площади многоугольника. В первой части речь идет о совсем простом (но для многих — совершенно неожиданном!) вопросе: корректно ли обычное определение площади треугольника и выпуклого многоугольника? Во второй части обсуждается понятие площади «самопересекающихся» многоугольников; оно оказывается связанным с двумя совсем разными физическими вопросами.

Площади треугольника и выпуклого многоугольника

Все знают, что площадь треугольника равна половине произведения длины основания на высоту. Но у треугольника любую сторону можно принять за основание. Так, треугольник, изображенный на рисунке 1, имеет три площади:

$$S_1=\frac{1}{2}ah_a,\ S_2=\frac{1}{2}bh_b,\ S_3=\frac{1}{2}ch_c,$$

где h_a, h_b, h_c — длины высот, опущенных на стороны с длинами a, b, c соответственно. Вы скажете, что $S_1=S_2=S_3$? Да, это верно. А почему? Потому что и то и другое и третье — площадь треугольника? Вот этот довод никуда не годится. Оттого что мы даем одно и то же название «площадь» каким-то трем величинам, они не обязаны стать равными. Наоборот, потому мы и можем называть все три написанные величины одним и тем же именем «площадь», что они равны. А что они равны — это надо доказать.

З а д а ч а 1. Докажите, что для любого треугольника

$$ah_a=bh_b=ch_c.$$

З а д а ч а 2. Профессор Нонсенс предложил рассматривать новую величину — «бульвар» треугольника, равный сумме длин его основания и высоты, опущенной на это основание. Согласно этому предложению, должны иметь место равенства (см. рис. 1)

$$a+h_a=b+h_b=c+h_c.$$

Так ли это? Годится ли предложение профессора Нонсенса? (Ответ надо обосновать.)

Две приведенные задачи иллюстрируют важное математическое понятие **корректности** определения. Нередко привычка заменяет понимание и доказательство, и мы наивно думаем, что смысл каждого слова всегда один и тот же. Однако в математике все должно быть строго обосновано, и если результаты двух разных вычислений называются одинаково, то из этого еще не следует, что они равны. Наоборот, надо доказать, что они всегда будут равны, чтобы иметь право одинаково их называть. Говорят, что определение, формулировка которого допускает несколько различных путей вычисления или построения, *корректно*, если все эти пути приводят к одинаковому результату. Так, первое определение (площади треугольника) оказалось корректным, а второе («бульвар» профессора Нонсенса) — не корректным. Обратите внимание: корректность определения нам пришлось доказывать. Это необходимо делать во всех случаях, когда в самом определении имеется некоторый произвол — неоднозначное построение, свобода выбора какого-то элемента и т. п.

Рассмотрим другой пример. В школь-

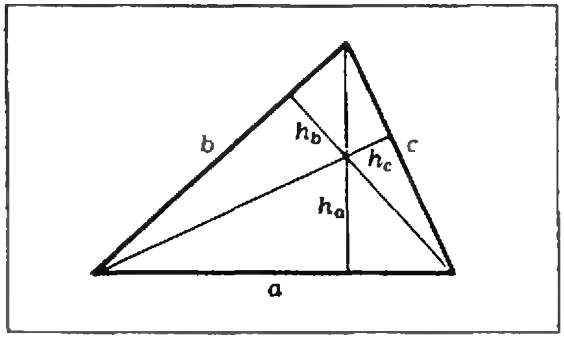


Рис. 1.

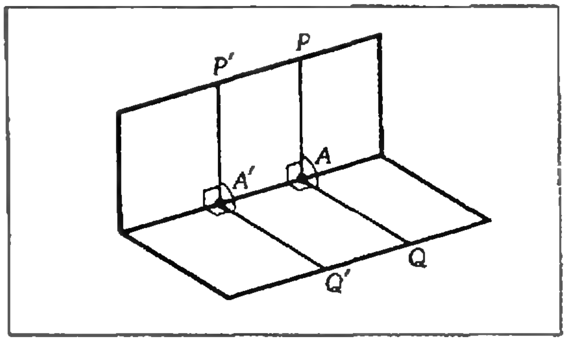


Рис. 2.

ном учебнике девятого класса величина двугранного угла определяется как величина его линейного угла (угол PAQ на рисунке 2). Но линейный угол можно отложить от произвольной точки A на ребре AA' двугранного угла, рассмотреть, например, угол $P'A'Q'$. Почему получится та же величина?

Задача 3. Докажите корректность определения двугранного угла.

Задача 4. Вспомните определение угла между скрещивающимися прямыми. В чем произвол в этом определении? Докажите его корректность.

Поговорим теперь о площади четырехугольника. Если это не есть какой-нибудь особенный четырехугольник, например трапеция, то обычный рецепт вычисления его площади таков: разрезать четырехугольник по диагонали на два треугольника и взять сумму их площадей. Но ведь выпуклый четырехугольник можно разрезать по диагонали двумя разными способами. Что, если в одном случае получится одно, а в другом — другое? А для многоугольника с большим числом сторон способов разрезания на треугольники еще больше. На каком основании мы уверены (если уверены), что при всех этих разрезаниях сумма площадей получившихся кусков будет одна и та же? Из практики? Но все практические измерения обеспечивают точность лишь с каким-то числом знаков. Показала же теория относительности, что обычная формула сложения скоростей верна лишь приблизительно, и лишь для скоростей, существенно меньших скорости света! Может быть и традиционные представления о площади многоугольников верны лишь приблизительно? Вот, например, чертеж, заимствованный нами из брошюры Я. С. Дубнова*).

Здесь квадрат со стороной 21 см разрезается на части, из которых, как показывает рисунок 3, вроде бы удается сложить прямоугольник со сторонами 34 см и 13 см.

Поскольку

$$21^2=441\neq 442=34\cdot 13,$$

площадь фигуры меняется от перестановки ее частей. А почему бы, собственно, и нет?

Задача 5. Разберитесь, в чем дело на рисунке 3.

Задача 6. Докажите, что, если многоугольник двумя разными способами разрезан на треугольники, то сумма площадей получившихся треугольников в обоих случаях одна и та же.

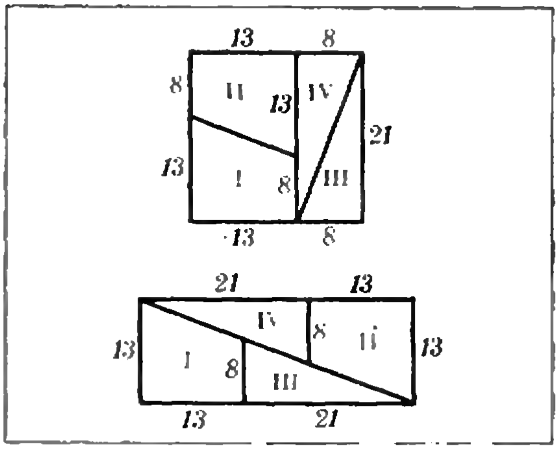


Рис. 3.

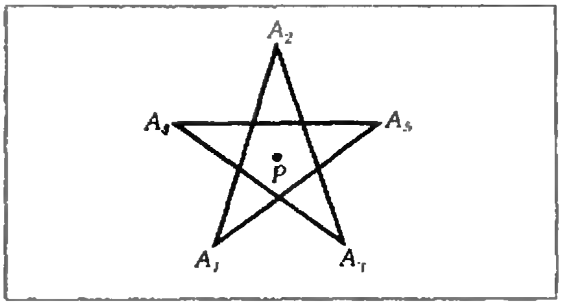


Рис. 4.

Площади самопересекающихся многоугольников

Мы обсудили корректность школьного определения площади многоугольника и треугольника — их внутреннюю непротиворечивость. Но к определениям в математике предъявляются не только формальное требование корректности. Определение должно еще «работать». Поясним это на следующем примере, тоже связанном с площадью многоугольника.

Можно ли, и если можно, то как разумно и естественно определить площади самопересекающихся многоугольников? Какова, например, площадь пятиконечной звезды (рис. 4)?

Говоря формально, есть очень много корректных способов приписать каждому самопересекающемуся многоугольнику какое-нибудь число и назвать это число его площадью. Но далеко не каждый такой способ заслуживает чтобы о нем говорить. Вообще, определения в математике формируются отнюдь не беспричинно, не «с потолка». Во многих (а, может быть, в конечном счете и во всех) случаях математические опреления бывают вдохновлены естествознанием. Вспомним, где в физике фигурирует площадь многоугольника. Вот два случая, которые пришли мне на ум.

---

*) Я. С. Дубнов. Ошибки в геометрических доказательствах. М., Гостехиздат, 1953, с. 10.

1) В электродинамике важным понятием является поток магнитной индукции (магнитный поток) Φ сквозь участок поверхности, ограниченный проводящим контуром. Пусть контур лежит в плоскости, а вектор $\vec{B}$ магнитной индукции одинаков во всех точках пространства и перпендикулярен плоскости контура. Тогда

$$\Phi = BS, \qquad (1)$$

где S — площадь фигуры, ограниченной контуром. С физической точки зрения вполне уместен вопрос о том, чему равен магнитный поток Φ, если контур имеет вид самопересекающегося многоугольника.

В самом деле, расположим изолированный провод в форме самопересекающегося многоугольника в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$ магнитной индукции однородного поля (рис. 5), и концы провода присоединим к амперметру. Что покажет амперметр, если начать «шевелить» этот провод? Ведь что-то он покажет! Например, отклонится ли стрелка амперметра при передвижении треугольника MNA в положение $M'N'A$? Площадь заштрихованной части не изменяется. Однако провод MN в своем движении пересекает магнитные силовые линии и поэтому возникает ЭДС индукции. Должен потечь ток. И он действительно течет!

Значит, магнитный поток Φ меняется. Поскольку мы хотим, чтобы формула $\Phi = BS$ имела место, то и S должно меняться (в отличие от заштрихованной площади). Так что же такое S — «площадь» самопересекающегося многоугольника?

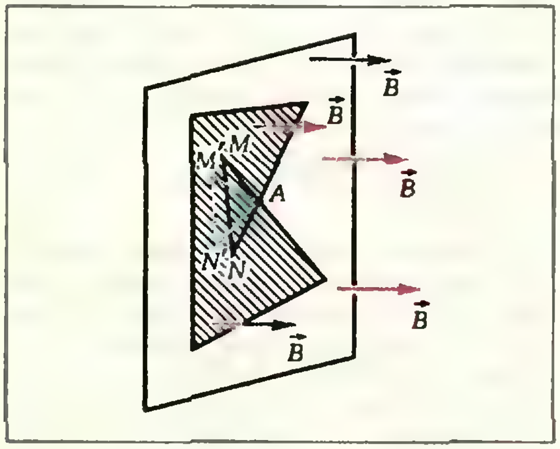


Рис. 5.

Легко понять, что в качестве S здесь не годится сумма обычных площадей ограниченных частей плоскости (заштрихованных на рисунке 5). Как же определить S в общей случае?

2) В термодинамике работа, которую совершает рабочее тело в произвольном замкнутом процессе, измеряется площадью, ограниченной линией, изображающей этот процесс на $(p-V)$-диаграмме (p — давление, V — объем). Естественно считать, что это верно и для процесса, изображаемого на $(p-V)$-диаграмме самопересекающейся ломаной.

В обоих приведенных физических примерах у нас возникла потребность указать площади самопересекающихся плоских многоугольников. Замечательно то, что в обоих случаях возникает одно и то же понятие площади, несмотря на то, что примеры эти взяты из различных областей физики. И это понятие площади уже разработано математиками. Оно описано, например, в статье Н. Вагутена*). В ней дается несколько определений этого понятия, эквивалентных между собой; мы остановимся на следующем.

Выберем направление обхода нашего многоугольника и обозначим его вершины в том порядке, в каком мы его обходим: $A_1, A_2, \dots, A_n$. Отметим на плоскости произвольную точку P, не лежащую на контуре многоугольника. Будем обходить многоугольник по его контуру: пойдем по A_1A_2, потом по A_2A_3 и так далее, и вернемся в точку A_1. При этом радиус-вектор, начинающийся в точке P и кончающийся в той точке, где мы находимся, будет вертеться то в положительном направлении (то есть против часовой стрелки), то в отрицательном. В конечном счете он повернется на угол $360° \cdot n$, где n — целое число, показывающее, сколько раз мы обходим вокруг точки P, идя по пути $A_1, A_2, \dots, \dots, A_n, A_1$. Так, если точку P взять в центре пятиконечной звезды (см. рис. 4), то мы получим $n=2$.

Наш многоугольник делит плоскость на области: одну бесконечную и несколько конечных. Число n постоянно в каждой области, причем в бесконеч-

---

*) «Формула площади» («Квант», 1981, № 4, с. 17—20).

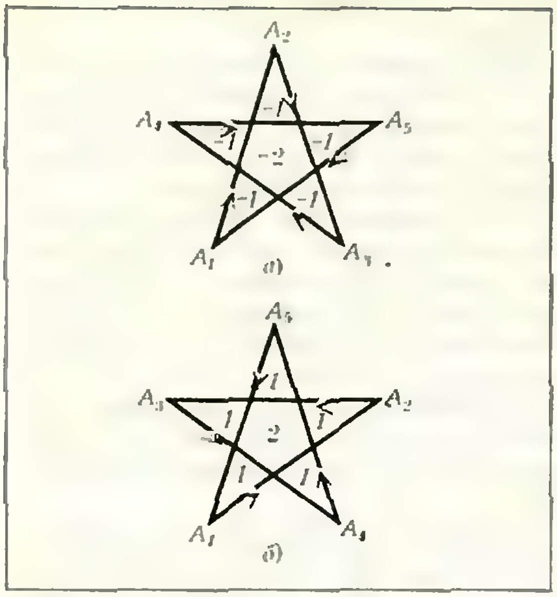


Рис. 6.

ной области $n=0$ (на рисунке 6, *а*, *б* расставлены значения n во всех конечных областях). Так вот, назовем ориентированной *площадью* нашего многоугольника сумму

$$S_1n_1+S_2n_2+\ldots+S_kn_k,$$

где $S_1, \ldots, S_k$ — обычные площади всех конечных областей вырезаемых нашим многоугольником из плоскости, а $n_1, \ldots, n_k$ — значения n для этих областей.

В отрыве от физических приложений это определение может показаться математической игрушкой, не имеющей практического смысла. В действительности же именно оно дает значения площадей, при которых выполняются оба названные выше физических соотношения.

Задача 7. Обоснуйте формулу (1) для магнитного потока в случае самопересекающихся плоских контуров, понимая S как ориентированную площадь.

Задача 8. Покажите, что работа тела на $(p-V)$-диаграмме пропорциональна ориентированной площади, ограниченной самопересекающейся линией, изображающей процесс.

Интересно, что определение, выработанное из чисто математических соображений, оказалось в согласии с двумя совершенно различными физическими законами. Подобное не раз происходило в истории науки, и об этом еще будет написано в «Кванте».

Электрическое сопротивление — квантовое явление

(Начало см. на с. 2)

Выражая частоту ν из формулы (**) и подставляя ее в выражение для дебаевской температуры — $\theta=\frac{h\nu}{k}$,— получим, что

$$\theta=\frac{hc}{k}\sqrt[3]{\frac{n}{4\pi}}.$$

Итак, мы получили связь между дебаевской температурой θ и скоростью звука в твердом теле c. С помощью этой формулы и графика, представленного на рисунке 8 (см. с. 8) можно решать задачи, которые мы вам предложим. Они просты и не требуют особой смекалки, но интересны и поучительны в двух отношениях. Во-первых, вы убедитесь в существовании неожиданной связи между такими разными вещами, как скорость звука и зависимость электрического сопротивления от температуры. Во-вторых, вы познакомитесь с обобщенными кривыми, очень полезными во многих случаях, когда не удается воспользоваться формулами теории. Зависимости $R=f(T)$ у каждого металла свои, но раз их удалось совместить на обобщенной кривой (см. рисунок 8), значит, эти зависимости и выражающие их кривые подобны. Подобие имеет здесь более широкий смысл, чем в школьной геометрии: оно означает, что кривые могут быть совмещены путем независимого изменения масштабов по двум осям координат.

А теперь попробуйте решить следующие задачи:

1. Скорость звука в железе равна 5200 м/с, удельное сопротивление при минус 100 °С равно 0,592 Ом·мм^2/м. Найдите удельное сопротивление железа при температуре +200 °С.

2. Пользуясь зависимостью сопротивления меди от температуры (см. рисунок 1 на с. 3), определите скорость звука в меди.

Излучение Вавилова — Черенкова

В этом году исполнилось пятьдесят лет с того дня, как в журнале «Доклады Академии наук СССР» появились первые сообщения об открытии одного из красивейших физических явлений.

В то время, в 1934 году, молодой начинающий ученый Павел Алексеевич Черенков под руководством академика Сергея Ивановича Вавилова исследовал люминесценцию (холодное свечение) растворов урановых солей под действием гамма-излучения. Для уточнения измерений было решено посмотреть, как светятся сами растворители. В то время считалось, что чистые жидкости вообще не дают никакого свечения, но в опытах Черенкова было обнаружено слабое видимое свечение растворителей. Это свечение не имело ничего общего с люминесценцией, но к такому выводу пришли не сразу.

В лаборатории Вавилова была разработана специальная методика измерений, которая позволяла определять, является ли свечение разных веществ люминесценцией или нет. Черенков провел соответствующие эксперименты с обнаруженным им свечением чистых жидкостей. По их результатам Вавилов заключил, что найденное излучение не есть люминесценция.

Какова же природа этого свечения? Первые соображения об этом высказал тоже С. И. Вавилов. Гамма-излучение, то есть электромагнитное излучение высокой энергии, проходя через вещество, выбивает из атомов электроны, которые затем движутся через вещество в направлении, близком к направлению распространения пучка гамма-лучей. Вот эти-то электроны и дают свечение. Вавилов высказал также некоторые предположения о том, как именно излучают выбитые электроны, но они не подтвердились в дальнейшем. Однако идея, что источником наблюдаемого свечения служат летящие через среду электроны, оказалась совершенно правильной и определила весь ход дальнейших исследований.

Круг проблем, связанных с опытами Черенкова, Вавилов постоянно обсуждал со многими физиками — своими сотрудниками (С. И. Вавилов был директором Физического института имени П. Н. Лебедева АН СССР) и учениками. В частности, ему удалось заинтересовать этими вопросами Игоря Евгеньевича Тамма и Илью Михайловича Франка. Многократные совместные обсуждения помогли понять природу нового физического явления. Важную роль для понимания сыграло то обстоятельство, что свечение оказалось направленным — свет излучался вперед, под острым углом к направлению движения выбитых электронов.

Через три года после того как были опубликованы первые сообщения об открытии нового вида свечения, Тамм и Франк разработали полную теорию явления. Они показали, что свечение излучается электронами, которые движутся через прозрачное вещество с постоянной (!) скоростью, превышающей (!) скорость света в этом веществе.

Согласно теории относительности, скорость света в вакууме — это предельная скорость для всех материальных тел. Электрон не может обогнать свет в вакууме. Но он может обогнать свет, двигаясь в прозрачной среде, где скорость света значительно меньше, чем в вакууме. Тогда-то и возникает излучение, открытое Вавиловым и Черенковым.

Теория Тамма и Франка объяснила не только свойство направленности излучения, но и все остальные его свойства — спектральный состав, интенсивность, поляризацию. После появления теории Черенков провел ряд дополнительных измерений для ее проверки. Их результаты, как и результаты предыдущих измерений, оказались в хорошем согласии с теорией Тамма и Франка.

Здесь следует сказать, что проведенные Черенковым измерения были необычайно трудны, потому что свечение было крайне слабым, на пределе чувствительности человеческого глаза, а приборов лучших, чем глаз, в то время еще не существовало. Черенков с большим искусством справился со всеми трудностями и получил надежные результаты.

В первые годы после открытия и объяснения нового свечения никто не думал о его практическом применении — слишком слабым было это свечение. Но десять лет спустя были разработаны очень чувствительные приемники света — фотоумножители, и тогда возникла идея использовать излучение Вавилова — Черенкова для регистрации быстрых заряженных частиц.

Довольно скоро на этом принципе были созданы соответствующие приборы, получившие название черенковских счетчиков. Такой счетчик состоит из прозрачного вещества, в котором летящая заряженная частица создает излучение Вавилова — Черенкова. Это излучение затем попадает на фотоумножитель и преобразуется в легко регистрируемый импульс напряжения. Ныне черенковские счетчики вошли в арсенал необходимых приборов во всех лабораториях (как наземных, так и космических — расположенных на спутниках), где ведутся исследования по изучению быстрых частиц.

Открытие излучения Вавилова — Черенкова получило широкое признание в отечественной и мировой науке. В 1946 году Вавилов, Тамм, Франк и Черенков были удостоены Государственной премии СССР, а в 1958 году Черенкову, Тамму и Франку (С. И. Вавилов скончался в 1951 году) за открытие и объяснение излучения Вавилова — Черенкова была присуждена Нобелевская премия по физике, высший знак международного научного признания.

А еще позже, в 1974 году, почти одновременно в Англии и в СССР вспомнили о том, что прохождение заряда через вещество со скоростью, превышающей скорость света в этом веществе, рассматривал в конце прошлого века английский физик и математик Оливер Хевисайд. Он довольно полно изучил это явление (хотя и не так полно, как Тамм и Франк), но в те времена сама мысль о возможности движения со столь большими скоростями казалась фантастической, и работы Хевисайда были прочно и надолго забыты.

Б. М. Болотовский

Теорема Виета и вспомогательный многочлен

Л. Д. КУРЛЯНДЧИК,
кандидат физико-математических наук
С. В. ФОМИН

Многие задачи так или иначе сводятся к нахождению корней алгебраических уравнений. Но бывает — и об этом пойдет речь в нашей статье, — что для решения задачи полезно, наоборот, построить многочлен, корнями которого являются данные, известные числа. Прием, связанный с введением вспомогательного многочлена, позволит нам решить несколько совсем разных на вид задач. Среди них — задачи М879 и М882 из Задачника «Кванта» и одна из задач последней международной олимпиады.

Пусть u и v — два действительных числа. Как построить квадратный трехчлен, корнями которого являются u и v? Проще всего — рассмотреть многочлен

$$P(t)=(t-u)(t-v)=t^2+pt+q.$$

Его коэффициенты равны:

$$p=-(u+v),\ q=uv, \qquad (1)$$

то есть сумме (со знаком минус) и произведению исходных чисел. Формулы (1) называются формулами Виета. С ними связаны две теоремы из школьного учебника:

если квадратное уравнение $t^2+pt+q=0$ имеет корни u и v, то выполняются равенства (1) (теорема Виета);

числа u и v являются корнями квадратного уравнения $t^2-(u+v)t+uv=0$ (обратная теорема).

Приведем несколько примеров применения обратной теоремы Виета. Начнем с совсем простой задачи.

Задача 1. *Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого является число $2+\sqrt{3}$.*

Решение этой задачи, как и многих других, может быть основано на том, что квадратное уравнение с «сопряженными» корнями $a+b\sqrt{d}$ и $a-b\sqrt{d}$ (где a, b и d — целые числа) имеет целые коэффициенты*). Этот факт, разумеется, сразу следует из формул Виета (1).

Итак, искомое уравнение имеет корни $t_1=2+\sqrt{3}$ и $t_2=2-\sqrt{3}$, поэтому его коэффициенты равны: $p=-(t_1+t_2)=-4$, $q=t_1t_2=1$.

Ответ: $t^2-4t+1=0$.

Задача 2. *Является ли число $t_1=\sqrt{37}-\sqrt{20}$ решением неравенства $t^2+9t-17>0$?*

Решение. Составим квадратное уравнение, корнями которого являются числа t_1 и $t_2=-\sqrt{37}-\sqrt{20}$:

$$t^2+2\sqrt{20}t-17=0.$$

Поскольку $2\sqrt{20}=\sqrt{80}<9$, справедливо неравенство $t_1^2+9t_1-17>t_1^2+2\sqrt{20}t_1-17=0$.

Ответ: число t_1 является решением данного неравенства.

Вычисление значения функции в данной точке часто упрощается, если предварительно построить многочлен, который в этой точке обращается в нуль. Вот типичный пример.

Задача 3. *Вычислить $u^4-5u^3+6u^2-5u$, если $u=2+\sqrt{3}$.*

Решение. Вспомним результат задачи 1: $u^2-4u+1=0$ или $u^2=4u-1$. Используя это соотношение, выразим линейно через u степени u^3 и u^4:

$$u^3=u^2\cdot u=(4u-1)u=4u^2-u=4(4u-1)-u=15u-4,$$

$$u^4=u^3\cdot u=(15u-4)u=15u^2-4u=15(4u-1)-4u=56u-15.$$

Отсюда $u^4-5u^3+6u^2-5u=56u-15-5(15u-4)+6(4u-1)-5u=-1$.

Ответ: -1.

Действуя так же, как в приведенном решении, можно значение любого многочлена с целыми коэффициентами в точке $u=a+b\sqrt{d}$ представить в виде $ku+l$ (a, b, d, k, l — целые числа).

Задача 4. *Доказать, что число $(7+\sqrt{48})^{13}+(7-\sqrt{48})^{13}$ целое и делится на 14.*

Решение. Числа $u=7+\sqrt{48}$ и $v=7-\sqrt{48}$ являются корнями квадратного трехчлена $t^2-14t+1$. Используя формулы $u^2=14u-1$ и $v^2=14v-1$, получим «рекуррентное соотношение» для величин $a_n=u^n+v^n$:

---

*) Много красивых примеров, связанных с этой идеей, читатель найдет в статье Н. Вагутена «Сопряженные числа» (Квант, 1980, № 2, с. 26).

$$a_0=2$$
$$a_1=u+v=14$$
$$a_2=u^2+v^2=(14u-1)+(14v-1)=14a_1-a_0$$
$$a_3=u^3+v^3=u(14u-1)+v(14v-1)=14a_2-a_1$$

. . . .

$$a_n=u^n+v^n=u^{n-2}(14u-1)+v^{n-2}(14v-1)=14a_{n-1}-a_{n-2}.$$

Из этих соотношений следует, что все числа a_n целые. Кроме того, если n нечетно, то a_n делится на 14. Доказать это утверждение можно по индукции: если a_{n-2} делится на 14, то и a_n делится на 14.

Задача 5. *Найти* $u^8+\frac{1}{u^8}$, *если* $u=\sqrt{2}+1$.*)

Формулы Виета, аналогичные формулам (1) для квадратного трехчлена, можно выписать и для многочлена n-ой степени

$$P(t)=(t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_n)=t^n+a_1t^{n-1}+a_2t^{n-2}+\dots+a_n$$

с корнями $x_1, \dots, x_n$. Для этого нужно раскрыть скобки, привести подобные члены и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях.

Напишем эти формулы в явном виде для многочлена третьей степени

$$P(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3+pt^2+qt+r$$

с корнями x, y и z:

$$\boxed{\begin{aligned}p&=-x-y-z\\ q&=xy+yz+zx\\ r&=-xyz\end{aligned}} \qquad (2)$$

Теперь перейдем к наиболее интересным примерам применения вспомогательного многочлена — они связаны именно с тем случаем, когда многочлен строится по нескольким (не менее, чем трем) корням.

Задача 6. *Числа x, y, z удовлетворяют соотношениям:*

$$x+y+z=a,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}.$$

Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно a.

Решение. Применим формулы (2). В нашем случае $p=-a$, $q=xyz/a=-r/a$. Поэтому

$$P(t)=t^3-at^2-\frac{r}{a}t+r=(t-a)\left(t^2-\frac{r}{a}\right).$$

Следовательно, число a является корнем многочлена $P(t)$ и значит, совпадает с одним из чисел x, y, z.

Задача 7. **(М882)** *Сумма трех целых чисел u, v и w равна нулю. Докажите, что число $2u^4+2v^4+2w^4$ — квадрат целого числа.*

Решение. Пусть $P(t)=t^3+pt^2+qt+r$ — многочлен, корнями которого являются числа u, v и w. В силу теоремы Виета, $p=-(u+v+w)=0$. Имеем:

$$u^3+qu+r=0,$$
$$v^3+qv+r=0,$$
$$w^3+qw+r=0.$$

Чтобы получить выражение, фигурирующее в условии, доможим эти уравнения на $2u$, $2v$ и $2w$ соответственно и сложим:

$$2u^4+2v^4+2w^4+2q(u^2+v^2+w^2)=0$$

(мы использовали то, что $u+v+w=0$). Но $u^2+v^2+w^2=(u+v+w)^2-2q=-2q$, поэтому $2u^4+2v^4+2w^4=(2q)^2$.

Сходным образом решается и нередко включаемая в олимпиады

Задача 8. *Разложить на множители:* $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Решение. Рассмотрим многочлен $P(t)=t^3+pt^2+qt+r$, корнями которого служат числа x, y, z; тогда $P(x)=0$, $P(y)=0$, $P(z)=0$. Сложим три равенства

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$
$$y^3+py^2+qy+r=0,$$
$$z^3+pz^2+qz+r=0,$$

а затем воспользуемся формулами Виета (2) и уже встречавшимся в предыдущей задаче тождеством

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=p^2-2q.$$

Получим

$$x^3+y^3+z^3+p(p^2-2q)-qp+3r=0,$$

откуда

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=-p(p^2-3q)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

Замечание. Выражение $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ неотрицательно (поскольку $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geqslant 0$). Поэтому из доказанного тождества вытекает неравенство

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc} \qquad (3)$$

для среднего арифметического и среднего геометрического трех неотрицательных чисел: достаточно положить в этом тождестве $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$.

Посмотрим теперь, как можно использовать вспомогательный многочлен при решении систем уравнений.

Задача 9. *Решить систему*

$$\begin{cases}x+y+z=2\\ x^2+y^2+z^2=14\\ x^3+y^3+z^3=20.\end{cases}$$

Решение. Следуя нашему методу, введем многочлен

$$P(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3+pt^2+qt+r.$$

По теореме Виета

$$p=-(x+y+z)=-2,$$

$$q=xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=-5.$$

Для нахождения коэффициента r доможим уравнения системы на q, p и 1 соответственно и сложим. Поскольку $P(x)=P(y)=P(z)=0$, получим:

$$-3r=2q+14p+20=-10-28+20=-18.$$

Итак, $P(t)=t^3-2t^2-5t+6$. Это — многочлен с целыми коэффициентами, причем его старший коэффициент равен 1. Поэтому любой целый корень многочлена $P(t)$ должен быть делителем свободного члена. В данном случае все три корня целые (и находятся среди делителей числа 6) — это 1, −2, и 3*). Таким образом, $\{x, y, z\}=\{1, -2, 3\}$.

---

*) Указания и ответы к задачам 5, 10, 13 и упражнениям приводятся в конце журнала.

*) В принципе достаточно угадать — или найти перебором — хотя бы один корень, а затем использовать разложение на множители. Подробнее об этом приеме рассказано в статье С. В. Фомина «Разложение на множители» (Квант, 1983, № 7, с. 23).

Ответ: $(1, -2, 3)$, $(1, 3, -2)$, $(-2, 1, 3)$, $2, 3, 1)$, $(3, 1, -2)$, $(3, -2, 1)$.

Задача 10. *Решить систему*

$$\begin{cases} xyz=1 \\ x+y+z=xy+yz+zx \\ x^3+y^3+z^3=\dfrac{73}{8}. \end{cases}$$

Рассматриваемый метод эффективен и во многих задачах, связанных с неравенствами.

Задача 11. *Числа u, v, w, x, y, z таковы, что*

$$x+y+z=u+v+w,$$
$$xyz=uvw,$$
$$0<u\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant w,\ u\leqslant v\leqslant w.$$

Докажите, что $u=x$, $v=y$, $w=z$.

Решение. Рассмотрим два многочлена:

$$P(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3+pt^2+qt+r,$$
$$Q(t)=(t-u)(t-v)(t-w)=t^3+pt^2+kt+r$$

(коэффициенты при t^2 и свободные члены совпадают в силу теоремы Виета). Пусть $R(t)=P(t)-Q(t)=(q-k)t$. Тогда $R(u)=P(u)=(u-x)(u-y)(u-z)\leqslant 0$. С другой стороны, $R(u)=(q-k)u$, поэтому $q-k\leqslant 0$. Аналогично, $R(w)=P(w)=(w-x)(w-y)(w-z)\geqslant 0$, откуда $q-k\geqslant 0$. Значит, $q=k$, то есть многочлены $P(t)$ и $Q(t)$ совпадают и корни у них одинаковые.

Задача 12*). *Доказать, что для неотрицательных чисел x, y, и z с суммой $x+y+z=1$ выполнены неравенства*

$$0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant \frac{7}{27}.$$

Решение. Левое неравенство доказать нетрудно:

$$xy+yz+zx-2xyz=xy(1-z)+yz(1-x)+zx\geqslant 0.$$

Для доказательства правого неравенства рассмотрим многочлен

$$P(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-t^2+qt+r,$$

где $q=xy+yz+zx$, $r=-xyz$, и перепишем неравенство так: $q+2r\leqslant 7/27$. Поскольку

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}q+r=-\frac{1}{8}+\frac{q+2r}{2},$$

достаточно доказать, что $P(1/2)\leqslant 1/216$. Если все числа x, y, z не больше $1/2$, то в силу неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом (3)

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{1/2-x+1/2-y+1/2-z}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}.$$

Если же какое-то из этих чисел больше $1/2$ (такое число может быть только одно), то

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\leqslant 0.$$

В заключение рассмотрим две задачи, в которых используются многочлены более высоких степеней.

Задача 13. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=n \\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=n \\ x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3=n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n=n, \end{cases}$$

где x_1, x_2, …, x_n — комплексные числа (о комплексных числах читатель может прочесть в статье Л. С. Понтрягина (Квант, 1983, № 2)).

Задача 14 (**М879**). *Пять целых чисел a, b, c, d, e таковы, что $a+b+c+d+e$ и $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ делятся на нечетное число n. Докажите, что число $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$ также делится на n.*

Решение. Пусть $P(t)=t^5+pt^4+qt^3+rt^2+kt+l$ многочлен, корнями которого являются числа a, b, c, d и e. Сразу отметим, что в силу теоремы Виета все коэффициенты этого многочлена — целые числа, причем p и q делятся на n. Складывая равенства $P(a)=0$, $P(b)=0$, …, $P(e)=0$, получим, что

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5+5l+$$
$$+r(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)+k(a+b+c+d+e)$$

делится на n. А так как $l=-abcde$, утверждение задачи доказано.

Внимательный читатель, конечно, заметил, что во всех разобранных задачах мы имели дело с так называемыми симметрическими многочленами, то есть такими выражениями, которые не меняются при перестановках переменных. Красивая и содержательная теория этих многочленов излагается, например, в книге В. Г. Болтянского и Н. Я. Виленкина «Симметрия в алгебре» (М., 1967). В частности, доказывается теорема о том, что всякий симметрический многочлен от переменных x_1, x_2, …, x_n может быть выражен через коэффициенты a_1, a_2, …, a_n многочлена $P(t)=t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n=(t-x_1)\times(t-x_2)\ldots(t-x_n)$. И хотя мы, строго говоря, нигде в решениях задач не воспользовались этой теоремой, но именно она по существу лежит в основе нашего метода.

Упражнения

1. Докажите, что $\varphi^8=13-21\varphi$, где $\varphi=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

2. Сумма длин ребер прямоугольного параллелепипеда равна 96 см, площадь полной поверхности — 286 см², объем — 120 см³. Найдите длины ребер.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^5+y^5+z^5=1. \end{cases}$$

4. Разложите на множители: $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$.

5. Положительные числа x, y, z удовлетворяют неравенствам $xyz>1$, $x+y+z<\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$. Докажите, что ровно одно из этих чисел меньше 1.

---

*) Эта задача — из XXV Международной математической олимпиады. Другое ее решение см. на с. 56.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Закон нечетных чисел» для свободного падения тел» предназначена восьмиклассникам, «Теорема, позволяющая решать основные задачи электростатики» — девятиклассникам, «Что такое радуга?» — десятиклассникам.
Материалы подготовил И. К. Белкин.

«Закон нечетных чисел» для свободного падения тел

Движение свободно падающих на Землю тел — это, как известно, движение с постоянным ускорением $g=9{,}81$ м/с². В случае, если тело в начальный момент покоится относительно Земли, закон свободного падения математически выражается уравнением

$$h=\frac{gt^2}{2}, \qquad (1)$$

где h — перемещение тела (по вертикали), t — время, отсчитываемое от начала падения.

Оказывается, формула (1) приводит к одному любопытному следствию, о котором в учебниках физики обычно не говорится, но о котором знал еще Галилей, открывший закон свободного падения. Оно само по себе может считаться законом, и им можно пользоваться при решении конкретных задач.

О каком же следствии идет речь? Формула (1), очевидно, позволяет вычислить перемещение тела за любое время, в том числе и за время $t=n\Delta t$ секунд (здесь $n=1, 2, 3, \ldots, \Delta t=1$ с). Мало того, с помощью этой же формулы можно определить перемещение не только за все n секунд, но и за каждую из n секунд — за первую, вторую, третью и т. д.

В самом деле, если за n секунд тело совершило перемещение h_n, а за $(n-1)$ секунд — h_{n-1}, то за n-ю секунду (здесь n — «номер» секунды) перемещение $h(n)$, естественно, равно разности h_n и h_{n-1} (здесь n — число секунд):

$$h(n)=h_n-h_{n-1}=\frac{g(n\Delta t)^2}{2}-\frac{g((n-1)\Delta t)^2}{2}=$$
$$=\frac{g}{2}((n\Delta t)^2-((n-1)\Delta t)^2)=$$
$$=\frac{g(\Delta t)^2}{2}(2n-1). \qquad (2)$$

Из формулы (2) видно, что перемещение $h(1)$ за первую секунду $(n=1)$ равно

$$h(1)=\frac{g(\Delta t)^2}{2}$$

Аналогично можно найти, что в последующие секунды тело совершает перемещения:

$$h(2)=3\frac{g(\Delta t)^2}{2}, \quad h(3)=5\frac{g(\Delta t)^2}{2},$$
$$h(4)=7\frac{g(\Delta t)^2}{2}, \quad h(5)=9\frac{g(\Delta t)^2}{2},$$
$$h(6)=11\frac{g(\Delta t)^2}{2}, \ldots, h(n)=(2n-1)\frac{g(\Delta t)^2}{2}.$$

Таким образом, перемещения за последовательные равные промежутки времени длительностью в 1 секунду относятся друг к другу как 1:3:5:7:9:11: ... :$(2n-1)$, то есть как ряд нечетных чисел (заметим, что величина $(2n-1)$ при любом значении n является нечетным числом).

Интересно, что Галилей сформулировал закон свободного падения тел именно в этой форме. Словами самого Галилея: «Пространства, проходимые падающим телом в одинаковые промежутки времени, относятся между собой как последовательные нечетные числа».

Не следует думать, что «закон нечетных чисел» относится исключительно к случаю свободного падения тел. Он, разумеется, справедлив для любого равноускоренного движения без начальной скорости. Ведь эта закономерность есть прямое следствие того, что перемещение тела при таком движении пропорционально квадрату времени. Не нужно также думать, что этот «закон» верен только тогда, когда промежутки времени, для которых вычисляются перемещения, равны одной секунде. Он, конечно, верен для любых равных промежутков времени, как это и отмечено Галилеем.

В заключение предлагаем читателям выяснить самостоятельно, как выглядит «закон нечетных чисел» в случае равнозамедленного движения.

Теорема, позволяющая решать основные задачи электростатики

Известно, что электростатическое поле часто изображают при помощи силовых линий. Попытаемся установить связь между числом силовых линий N и зарядом q, создающим электрическое поле. Для этого введем понятие потока электрического поля.

Потоком электрического поля через некоторую поверхность будем называть произведение ES, где S — площадь поверхности, а E — модуль вектора напряженности электрического поля, перпендикулярного этой поверхности.*) (Понятие «поток» здесь введено по аналогии с потоком жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы площадью S в единицу времени, который, как известно, равен vS («Физика 8», § 65).)

Начнем с простейшего случая — одного точечного заряда. Картина силовых линий поля, созданного положительным точечным зарядом q, изображена на рисунке 1. Рассмотрим сферу радиуса r, центром которой служит сам заряд q, и определим поток электрического поля через поверхность этой сферы. Силовые линии, выходящие из заряда, перпендикулярны поверхности сферы, и в каждой точке сферы модуль напряженности поля равен

$$E=\frac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0}, \qquad (1)$$

где $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Кл^2/(Н·м^2) — электрическая постоянная. Но $4\pi r^2$ — это площадь поверхности сферы. Обозначив ее через S, получим:

$$ES=\frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

Отсюда видно, что поток через поверхность сферы электрического поля, созданного точечным зарядом, не зависит от радиуса сферы, а зависит только от самого заряда q. Поэтому, если провести ряд концентрических сфер, то поток электрического поля через все эти сферы будет одинаковым. Очевидно, что и число силовых линий, пересекающих эти сферы, тоже будет одинаковым.

Условились число силовых линий, выходящих из заряда, принимать равным потоку электрического поля:

$$N=ES=\frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (3)$$

Отношение N/S, представляющее собой число силовых линий, пересекающих единицу площади поверхности, перпендикулярной (ортогональной) силовым линиям, называют густотой силовых линий. Ясно, что она характеризует величину напряженности поля в данном месте.

Можно показать, что поток электрического поля, а значит и число силовых линий, равняется q/ε_0 не только для поля одного точечного заряда, но и для поля, создаваемого любой совокупностью точечных зарядов, в частности — заряженным телом. Тогда в формуле (3) q означает алгебраическую сумму всей совокупности зарядов. Мало того, если сферу заменить любой другой замкнутой поверхностью, то поток электрического поля, а следовательно и число силовых линий, пересекающих ее, не изменится.

Утверждение, что *поток электрического поля и число силовых линий через замкнутую поверхность, внутри которой находится система зарядов, равняется q/ε_0, где q — алгебраическая сумма зарядов*, называется теоремой Гаусса.

Воспользуемся теоремой Гаусса для решения некоторых конкретных задач электростатики.

1. Чему равна напряженность электростатического поля внутри проводника?

Известно, что проводник — это такое тело, в котором имеются свободные заряды. Эти заряды действительно свободно могут перемещаться по всему объему проводника. Единственным препятствием для их передвижения служит

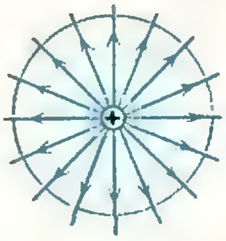


Рис. 1.

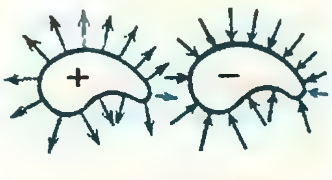


Рис. 2.

---

*) Если электрическое поле не перпендикулярно данной поверхности, при вычислении потока электрического поля надо учитывать только проекцию вектора напряженности на направление нормали к поверхности.

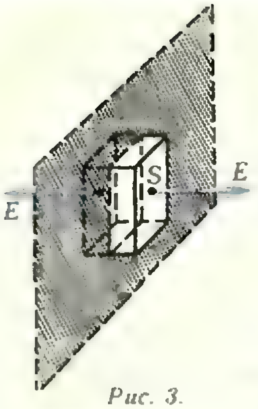


Рис. 3.

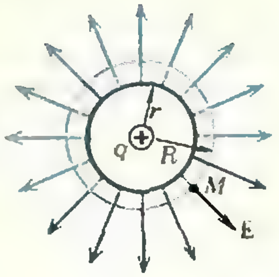


Рис. 4.

поверхность проводника, которую они сами покинуть не могут.

Рассмотрим изолированный проводник, которому сообщен электрический заряд. Вокруг такого проводника, конечно, создается электростатическое поле. Докажем, что *внутри заряженного проводника электростатическое поле отсутствует, то есть напряженность поля равна нулю.*

Как известно, в незаряженном проводнике отрицательный заряд всех электронов точно сбалансирован положительным зарядом всех протонов, и их суммарный заряд равен нулю. Но если проводник заряжен, то баланс зарядов нарушается. В проводнике создается избыток свободных электронов, если он заряжен отрицательно, или избыток протонов (недостаток электронов), если он заряжен положительно. В первом случае, взаимно отталкиваясь, избыточные электроны разойдутся друг от друга на максимально возможные расстояния, вследствие чего они расположатся на поверхности проводника (которую покинуть не могут). Внутри же проводника баланс зарядов восстановится, и там суммарный заряд снова станет равным нулю.

Во втором случае, наоборот, часть электронов с поверхности проводника, вследствие сил притяжения к положительным зарядам, устремится внутрь проводника и сбалансирует избыточные положительные заряды. Суммарный заряд внутри проводника снова станет равным нулю, а избыточный положительный заряд сосредоточится на его поверхности.

Выходит, что заряд любого знака, сообщенный проводнику, располагается на его поверхности. Внутри же проводника, то есть внутри замкнутой поверхности, которой в данном случае служит поверхность самого проводника, заряд равен нулю ($q=0$). Но тогда из теоремы Гаусса следует, что

$$E=\frac{q}{\varepsilon_0 S}=0,$$

то есть внутри проводника поля нет.

2. Как направлены силовые линии у поверхности заряженного проводника?

На любой свободный электрон, находящийся на поверхности заряженного проводника, действуют силы со стороны остальных зарядов поверхности (в объеме проводника сумма положительных и отрицательных зарядов равна нулю). Имея возможность свободно перемещаться по поверхности, электроны сами расположатся так, чтобы результирующая сила, действующая на каждый из них вдоль поверхности, стала равной нулю. Это означает, что проекция напряженности поля на направление касательной к поверхности проводника в любой ее точке равна нулю. А это возможно только при условии, что *силовые линии поля направлены перпендикулярно поверхности заряженного проводника* (рис. 2).

3. Какова напряженность поля, созданного заряженной плоскостью?

На рисунке 3 изображен участок заряженной проводящей плоскости с площадью S, на который приходится заряд q.

Мы знаем, что силовые линии поля, созданного этой плоскостью, всюду перпендикулярны к ней. А чему равняется модуль напряженности электрического поля?

Окружим выбранный участок плоскости замкнутой поверхностью, через которую силовые линии проходят под прямым углом к ней. Для плоскости такой поверхностью служит, например, прямоугольный параллелепипед с основаниями, параллельными плоскости. Силовые линии поля перпендикулярны только этим основаниям, остальные четыре грани параллелепипеда параллельны силовым линиям. Площадь обоих оснований равна $2S$.

Из теоремы Гаусса следует, что

$$E\cdot 2S=\frac{q}{\varepsilon_0}, \text{ откуда } E=\frac{q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Эта формула приведена в § 45 «Физики 9» без вывода. Из формулы видно, что напряженность поля в любой его точке не зависит от расстояния до заряженной плоскости. Такое поле называют однородным.

4. Чему равна напряженность поля заряженного проводящего шара?

Поскольку шар проводящий, силовые линии поля всюду направлены перпендикулярно его поверхности, то есть по радиусам (рис. 4). Найдем модуль напряженности поля в любой точке M, находящейся на расстоянии R от центра шара. Проведем через эту точку замкнутую поверхность, ортогональную силовым линиям поля. Такой поверхностью служит сфера радиуса R и площадью $4\pi R^2$, концентрическая поверхности проводящего шара.

По теореме Гаусса $ES=q/\varepsilon_0$. Отсюда

$$E=\frac{q}{\varepsilon_0 S}=\frac{q}{4\pi R^2\varepsilon_0}$$

— заряженный шар создает вокруг себя такое же поле, как точечный заряд, помещенный в центре шара (см. рис. 4).

Что такое радуга?

Каждому, наверное, доводилось видеть эту удивительную разноцветную «небесную арку», протянувшуюся на полгоризонта. После освежающего грозового ливня она радует глаз своим многоцветием на фоне свинцовых туч, уносимых ветром.

Как возникает и что представляет собой это поразительное зрелище? Прежде всего опишем саму радугу, какой она видится наблюдателю.

Характерно, что радугу можно видеть только стоя спиной к солнцу, если перед глазами наблюдателя есть туча, а высота солнца над горизонтом не превышает приблизительно 42°. Радуга представляет собой часть окружности основания конуса, вершина которого — глаз наблюдателя. Ось конуса — прямая, идущая от солнца через глаз наблюдателя (рис. 1). Центр окружности обычно ниже линии горизонта, так что радуга не есть полуокружность. К таковой она приближается, если солнце близко к закату. Угол при вершине конуса равен приблизительно 84°.

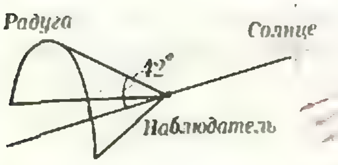


Рис. 1.

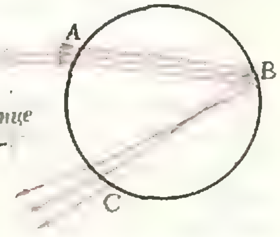


Рис. 2.

При перемещениях наблюдателя радуга перемещается вместе с ним, так что не имеет смысла пытаться добраться до основания радуги и посмотреть на нее «сбоку». Радуга — это не то, что находится в определенном *месте*. Радуга — это то, что можно видеть в определенном *направлении* (под углом около 42° к упомянутой оси).

Внешняя (верхняя) часть радуги — красного цвета, нижняя — фиолетового. Между ними — «все цвета радуги».

Основные явления в радуге

Туча, на фоне которой видна радуга, состоит из водяных капель. В них-то и происходят те оптические явления, из-за которых она возникает. В основном это:

1) Преломление света на границе воздух — вода. Согласно закону преломления, $\sin\alpha/\sin\beta=n$, где α — угол падения света, β — угол преломления и n — показатель преломления второй среды (воды) относительно первой (воздуха).

2) Отражение на границе вода — воздух. Оно происходит по обычному закону отражения — угол падения равен углу отражения.

3) Дисперсия света, то есть зависимость показателя преломления от длины световой волны. Видимый солнечный свет содержит в себе различные длины волн — от самых длинных, около 750 нм, вызывающих ощущение красного цвета, до самых коротких, около 400 нм,— фиолетовых. У воды показатель преломления для красного света $n_к=1{,}331$, для фиолетового — $n_ф=$ $=1{,}344$. Значения n для других цветов лежат между этими числами.

Как возникает радуга?

Пользуясь приведенной формулой и значениями n, можно понять, как образуется радуга.

Рассмотрим каплю воды, на которую падает солнечный свет (рис. 2). Пусть пучок света (пока какой-нибудь одной длины волны) падает на каплю вблизи точки A, преломляется в ней и доходит до точки B. Здесь он отражается, в точке C снова преломляется и вы-

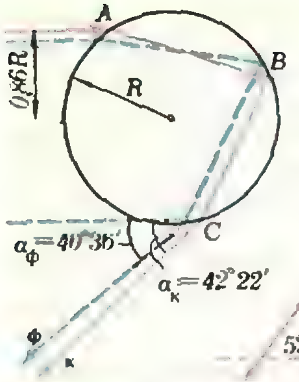


Рис. 3.

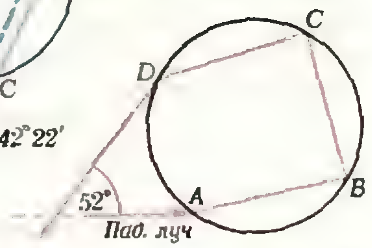


Рис. 4.

ходит из капли. Но выходит уже в виде *расходящегося* пучка.

Можно, однако, показать, что пучки, которые попадают в то место капли, которое находится на расстоянии 0,86*R* (где *R* — радиус капли) от оси, выходят из капли почти без всякой расходимости (рис. 3). *Только эти лучи и видит глаз наблюдателя.* А при таком положении точки *A* угол между падающим лучом и лучом, выходящим из капли, как раз близок к 42°. Точнее, для красного цвета этот угол равен 42°22′, а для фиолетового — 40°36′. Таким образом, угловая ширина радуги составляет 1°46′. В этом угловом интервале и лежат «все цвета радуги».

Конечно, одна и та же капля не может находиться и под углом 42°22′ и под углом 40°36′. Каждый «цвет» исходит поэтому из разных капель, находящихся в данный момент под соответствующим углом в указанном интервале. В образовании радуги участвуют миллионы капель.

Вторая радуга

Обычно над основной яркой радугой видна еще одна, менее яркая. Она концентрична с первой, но порядок цветов в ней обратный. Нижний ее край красного цвета, верхний — фиолетового. Возникает она в результате тех же процессов преломления и отражения света в каплях воды. Но если основная радуга возникает в результате двукратного преломления и однократного отражения света, то вторичная образуется при двукратном преломлении и двукратном же отражении света.

Как видно из рисунка 4, свет в капле преломляется в точке *A*, дважды отражается в точках *B* и *C* и выходит из капли после второго преломления в точке *D*. Видна эта радуга под углом не 42°, а 52°. «Лишнее» отражение приводит к некоторой потере световой энергии (в точке *C* происходит ведь и преломление света!), поэтому она менее яркая. Вторая радуга исходит из совсем других капель, расположенных под бо́льшим углом к оси конуса.

Понятно, что свет от тех или иных капель (для обеих радуг), попавший в ваш глаз, не может попасть в глаз вашего соседа или вообще какого-то другого наблюдателя. Каждому наблюдателю природа показывает его «индивидуальную» радугу, возникшую в «его» миллионах капель.

Заключение

Изложенная здесь теория радуги, предложенная еще Ньютоном, не описывает все процессы, происходящие в каплях дождя. Картина радуги осложняется дополнительными процессами интерференции и дифракции света, играющими важную роль, когда капли очень малы по размерам. Описанная выше картина относится к каплям диаметром 0,5—2 мм.

Дополнительные явления несколько меняют вид радуги. Все это приводит к тому, что цвета в радуге менее чисты, чем те цвета, которые можно видеть при преломлении солнечного света в призме.

Математика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Где ошиблись Петя и Вова?» предназначена восьмиклассникам, «Геометрия помогает решать уравнения» — девятиклассникам и «Двугранные и трехгранные углы» — десятиклассникам. Это деление в какой-то мере условно, так как каждая из этих заметок может быть полезной не только учащимся указанных классов.

Где ошиблись Петя и Вова?

Два друга, Петя и Вова, решали на олимпиаде*) систему уравнений

$$\begin{cases}(x^2-xy+y^2)(x-y)=1+y^3,\\(x^2+xy+y^2)(x+y)=1-y^3.\end{cases}$$

Петя заменил второе уравнение произведением уравнений:

$$\begin{cases}(x^2-xy+y^2)(x-y)=1+y^3,\\(x^3-y^3)(x^3+y^3)=1-y^6,\end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases}(x^2-xy+y^2)(x-y)=1+y^3,\\x^6-y^6=1-y^6.\end{cases}$$

Из второго уравнения $x=\pm1$, откуда он получил ответ: $(1;0)$; $(-1;-1)$.

Вова заменил первое уравнение произведением уравнений:

$$\begin{cases}x^6-y^6=1-y^6,\\(x^2+xy+y^2)(x+y)=1-y^3,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}x=\pm1,\\(x^2+xy+y^2)(x+y)=1-y^3.\end{cases}$$

Отсюда получается ответ: $(1;0)$; $(-1;1)$.

После олимпиады они сверили ответы и очень удивились. Кто был неправ?

П. П. Горнуша

Геометрия помогает решать уравнения

В некоторых случаях вместо того чтобы преобразовывать уравнение можно поступить следующим образом: перевести задачу на геометрический язык, а затем записать полученное геометрическое условие другим способом; в результате получается более простое уравнение. Сейчас мы рассмотрим два таких примера, причем в каждом из них исходное уравнение равносильно условию «некоторые точки лежат на одной прямой»; подходящим образом записав это условие, мы получим более простое уравнение, которое и будем решать.

Задача 1. Решите уравнение $\sqrt{15-12\cos x}+\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}=4$, где $0°<x<90°$.

Решение. Придадим уравнению вид:

$$\sqrt{(\sqrt{12})^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos x}+\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot2\cdot\cos(90°-x)}=4. \quad (1)$$

На рисунке 1 изображен прямоугольный треугольник, в котором $|AC|=\sqrt{12}$, $|BC|=2$, $\widehat{ACD}=x$, $\widehat{DCB}=90°-x$; $|CD|=\sqrt{3}$, $|AB|=4$. Первое слагаемое в левой части (1) равно $|AD|$, второе — $|DB|$. Но так как $|AD|+|DB|=|AB|$, значит, $D\in[AB]$. Поэтому данное уравнение можно заменить на уравнение

$$\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin x+\sqrt{3}\cdot2\cdot\sin(90°-x)=2\cdot\sqrt{12} \quad (2)$$

(так как $S_{ACD}+S_{DCB}=S_{ACB}$), или

$$6\sin x+2\sqrt{3}\cos x=4\sqrt{3},$$

которое решается легче, чем исходное. Имеем: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=1$, то есть $\sin(x+30°)=1$, откуда $x=60°$.

Ответ: $x=60°$.

Замечание. Строго говоря, требуется доказать, что из уравнения (2) следует уравнение (1). Покажем это. Из уравнения (2) следует, что $S_{ACD}+S_{DCB}=S_{ACB}$, поэтому $|AD|+|DB|=|AB|$, а это и записано в уравнении (1).

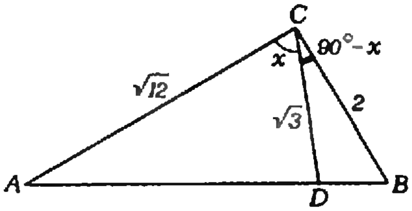


Рис. 1.

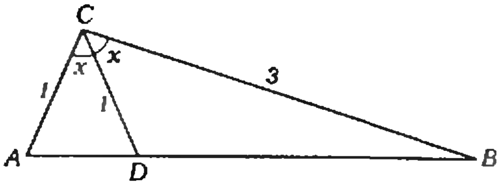


Рис. 2.

---

*) Олимпиада МФТИ — 84

Задача 2. Решите уравнение: $\sqrt{2-2\cos x}+\sqrt{10-6\cos x}=\sqrt{10-6\cos 2x}$, где $x\in\,]0;\pi/2[$.

Решение. Пусть $|CA|=1$, $|CB|=3$, $|CD|=1$, $\widehat{ACD}=\widehat{DCB}=x$ (рис. 2). Тогда $|AD|=\sqrt{2-2\cos x}$, $|DB|=\sqrt{10-6\cos x}$, $|AB|=\sqrt{10-6\cos 2x}$.

Данное уравнение означает, что $|AD|+|DB|=|AB|$, откуда $D\in[AB]$. Следовательно, $S_{ACD}+S_{CDB}=S_{ACB}$ то есть $\sin x+3\sin x=3\sin 2x$, $4\sin x=6\sin x\cdot\cos x$. Отсюда следует, что $\cos x=2/3$, так как $\sin x\neq 0$ (из условия: $x\in\,]0;90°[$).

Ответ: $x=\arccos 2/3$.

Замечание. Если бы $x\in[0;\pi/2]$, то уравнение имело бы еще один корень $x=0$.

Упражнение. Докажите равносильность двух уравнений: $\sqrt{5-4\cos x}+\sqrt{13-12\sin x}=\sqrt{10}$ и $2\sin x+6\cos x=3$, где $x\in\,]0;\pi/2[$.

Э. Я. Ясиновый

Двугранные и трехгранные углы

Двугранные углы. Двугранным углом называют объединение двух полуплоскостей, имеющих общую границу, и одной из ограниченных ими пространственных областей (рис. 1). Подчеркнем: не всякий двугранный угол есть пересечение двух полупространств (см. рис. 1б).

Величиной двугранного угла называют величину плоского угла, получающегося в сечении этого двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру. Величина двугранного угла на рисунке 1а меньше π, а двугранного угла на рисунке 1б — больше π.

Двугранные углы — пространственные аналоги углов на плоскости: многие их свойства аналогичны свойствам плоских углов. Например, биссектор выпуклого двугранного угла (так называют полуплоскость, делящую двугранный угол на два конгруэнтных двугранных угла) можно определить как множество точек двугранного угла, равноудаленных от его граней. Так же, как и на плоскости, определяются вертикальный и смежный углы, при этом их величины равны соответственно φ и $\pi-\varphi$, где φ — величина исходного двугранного угла.

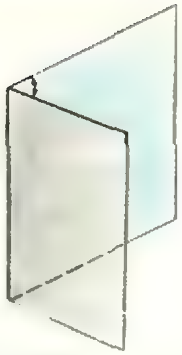


Рис. 1а.

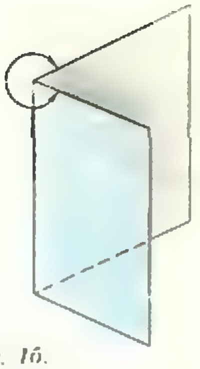


Рис. 1б.

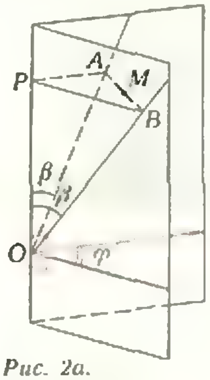


Рис. 2а.

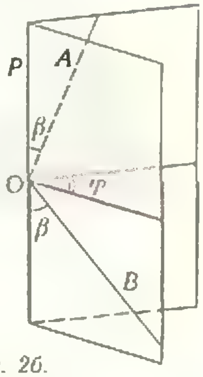


Рис. 2б.

Сейчас мы разберем решения двух задач, в некотором смысле обратных друг другу.

Задача 1. *Двугранный угол величины φ, $0<\varphi<\pi$, пересечен плоскостью. В каких пределах может лежать величина α угла, получающегося в сечении?*

Задача 2. *В каких пределах может лежать величина φ угла, являющегося ортогональной проекцией угла величины α, $0<\alpha<\pi$?*

Ответ к задаче 1: $0<\alpha<\pi$. Поскольку величина двугранного угла меньше π, он лежит по одну сторону от плоскости любой из своих граней. Поэтому и угол в сечении лежит по одну сторону от прямой, содержащей любую из его сторон. Следовательно, $\alpha<\pi$. Остается показать, что для любого α из промежутка $]0;\pi[$ существует плоскость, пересекающая двугранный угол по углу величины α. Для этого проще всего указать два луча с общей вершиной на ребре двугранного угла, лежащие в разных его гранях, такие, что угол между ними равен α (а затем через эти два луча провести секущую плоскость).

Выберем на ребре двугранного угла луч OP и проведем в его гранях лучи OA и OB под одинаковым углом β к OP (рис. 2а). При изменении β лучи OA и OB будут поворачиваться, и ясно,

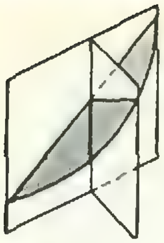


Рис. 3.

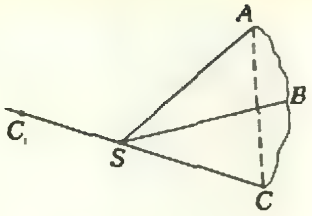


Рис. 4.

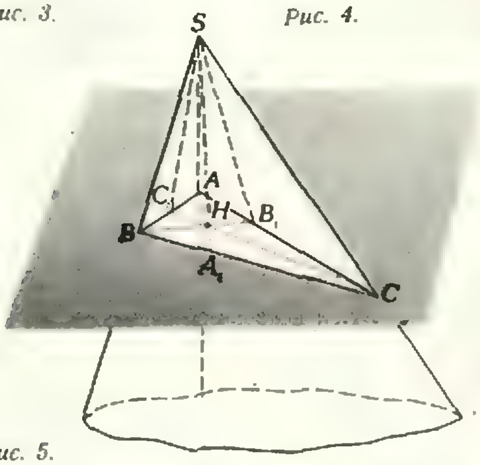


Рис. 5.

что когда β пробегает все значения от 0 до $\pi/2$, угол $\widehat{AOB}=\alpha$ будет меняться от 0 до φ. Если же луч OB проводить под углом $\pi-\beta$ к OP (рис. 2б), угол α будет меняться от π до φ (при $0<\beta<\pi/2$).

Строго обосновать это рассуждение позволяет несложный расчет. Пусть плоскость, перпендикулярная к ребру двугранного угла и проходящая через точку P, пересекает лучи в точках A и B, M — середина отрезка AB (мы рассматриваем первый случай — рис. 2а). Тогда

$$\sin(\alpha/2)=\frac{|MA|}{|OA|}=\frac{|PA|\sin(\varphi/2)}{|OA|}=$$
$$=\sin\beta\cdot\sin(\varphi/2),$$

поэтому $\sin(\alpha/2)$ принимает при изменении β от 0 до $\pi/2$ все значения в промежутке $]0;\ \sin(\varphi/2)]$, а сам угол α — в промежутке $]0;\ \varphi]$ (поскольку угол $\alpha/2$ — острый).

Вычисления для второго случая мы оставим читателю, а здесь покажем, как можно обойтись без них. Очевидно, что в сечении двух смежных двугранных углов любой плоскостью (пересекающей их общее ребро) образуются смежные плоские углы (рис. 3). Но угол в сечении двугранного угла, смежного к данному, как показано выше, может иметь любую величину от 0 до $\pi-\varphi$ ($\pi-\varphi$ — величина этого смежного угла). Поэтому в соответствующих сечениях исходного двугранного угла будут получаться углы величиной от π до φ, что как раз и требовалось.

Перейдем к задаче 2. Пусть угол A_1OB_1 величины φ является ортогональной проекцией угла AOB величины α. Угол A_1OB_1 определяет двугранный угол величины φ, ребро которого — это перпендикуляр к плоскости A_1OB_1, проходящий через точку O, а грани содержат лучи OA_1 и OB_1. Очевидно, угол AOB является сечением этого двугранного угла. Таким образом, мы снова оказались в ситуации задачи 1, только теперь задана величина угла в сечении α, а не двугранного угла φ. Но из задачи 1 известно, что при любых заданных значениях α и φ, $0<\alpha,\varphi<\pi$, можно так пересечь двугранный угол величины φ, чтобы в сечении получился угол величины α. Следовательно, в задаче 2 при проектировании можно получить угол любой величины φ, $0<\varphi<\pi$, независимо от α. Учитывая, что $\varphi<\pi$ (так как угол AOB меньше развернутого), находим ответ $0<\varphi<\pi$.

Трехгранные углы. Пусть дан треугольник ABC и точка S, не лежащая в плоскости этого треугольника. Трехгранным углом $SABC$ (выпуклым) называют объединение всех лучей с вершиной S, пересекающих треугольник ABC. (Иногда определяют и невыпуклый трехгранный угол $SABC$ — объединение всех лучей с вершиной S, не пересекающих внутренность треугольника ABC — такие трехгранные углы мы рассматривать не будем.)

Для краткости мы будем использовать следующие обозначения для трехгранного угла $SABC$: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ — величины двугранных углов с ребрами SA, SB, SC соответственно, α, β, γ — величины противолежащих им плоских углов.

Трехгранные углы — один из возможных пространственных аналогов треугольников (другой аналог — тетраэдры). Поэтому многие теоремы геометрии трехгранных углов похожи на теоремы геометрии треугольников (при этом плоским углам соответствуют стороны треугольников, а двугранным углам — углы треугольников). Например, известная теорема «каждый плоский угол меньше суммы двух других» — аналог неравенства треугольника. Применяя эту теорему к трехгранному углу $SABC_1$ (рис. 4), получаем другое полезное свойство трехгранных углов: «сумма плоских углов меньше 360°».

Аналогом теоремы «высоты треугольника пересекаются в одной точке» служит утверждение следующей задачи.

Задача 3. *Докажите, что три плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла перпендикулярно противолежащим граням («высоты»), имеют общую прямую.*

(Имеется в виду, что указанные плоскости определены однозначно, то есть хотя бы два плоских угла, для определенности ASB и ASC, не прямые.)

Доказательство мы сведем к применению аналогичной планиметрической теоремы.

Проведем через точку A, взятую на ребре SA, плоскость, перпендикулярную этому ребру (рис. 5). Пусть B и C — точки пересечения этой плоскости с прямыми SB и SC соответственно, AA_1, BB_1, CC_1 — линии пересечения плоскостей из условия задачи с плоскостью ABC.

Плоскость SAA_1 перпендикулярна плоскостям SBC (по условию) и ABC (она проходит через перпендикуляр SA к (ABC)), поэтому она перпендикулярна к их линии пересечения — прямой BC. Отсюда следует, что $(AA_1)\perp(BC)$, то есть, что AA_1 — высота треугольника ABC.

Плоскость ASC перпендикулярна плоскостям ABC и SBB_1, поэтому она перпендикулярна прямой BB_1, следовательно, $(BB_1)\perp(AC)$, аналогично $(CC_1)\perp(AB)$, значит $[BB_1]$ и $[CC_1]$ — тоже высоты треугольника ABC.

Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке — точке H, поэтому три плоскости, о которых идет речь в задаче, пересекаются по прямой — прямой SH.

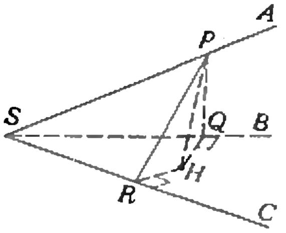


Рис. 6а.

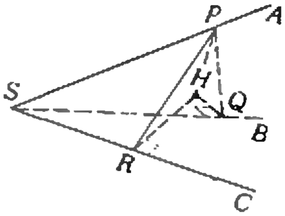


Рис. 6б.

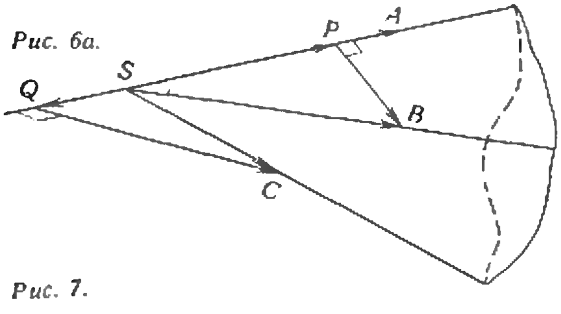


Рис. 7.

Теоремы синусов и косинусов. *Для (выпуклого) трехгранного угла верны следующие соотношения:*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}$$

(теорема синусов); (1)

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\hat{A}$$

(первая теорема косинусов); (2)

$$\cos\hat{A}=-\cos\hat{B}\cos\hat{C}+\sin\hat{B}\sin\hat{C}\cos\alpha$$

(вторая теорема косинусов). (3)

Доказательство теоремы синусов. Возьмем на ребре SA точку P, $|SP|=1$; пусть Q, R и H — ее проекции на прямые SB, SC и плоскость SBC (рис. 6). В прямоугольном треугольнике PQH угол при вершине Q равен $\hat{B}$ (если $\hat{B}\leqslant\pi/2$ — рис. 6а) или $\pi-\hat{B}$ (при $\hat{B}>\pi/2$ — рис. 6б); в любом случае

$$|PH|=|PQ|\sin\hat{B}=|SP|\sin\gamma\cdot\sin\hat{B}=\sin\gamma\cdot\sin\hat{B}.$$

Из прямоугольных треугольников PRH и SPR аналогично получается, что $|PH|=\sin\beta\cdot\sin\hat{C}$. Приравнивая эти два выражения, находим, что $\sin\beta/\sin\hat{B}=\sin\gamma/\sin\hat{C}$. Точно так же доказывается второе равенство теоремы.

Доказательство первой теоремы косинусов. Пусть векторы $\vec{SA}$, $\vec{SB}$, $\vec{SC}$ имеют длину 1, P и Q — проекции точек B и C на прямую SA (рис. 7). Тогда $\vec{SA}\cdot\vec{SB}=\cos\gamma$, $\vec{SA}\cdot\vec{SC}=\cos\beta$, $\vec{SB}\cdot\vec{SC}=\cos\alpha$, угол между векторами $\vec{PB}$ и $\vec{QC}$ равен $\hat{A}$, $\vec{SP}=\cos\alpha\,\vec{SA}$, $\vec{SQ}=\cos\beta\,\vec{SA}$ и (вне зависимости от того острые, прямые или тупые углы β и γ) $|\vec{QC}|=\sin\beta$, $|\vec{PB}|=\sin\gamma$. Далее, $\vec{QC}=\vec{SC}-\vec{SQ}$, $\vec{PB}=\vec{SB}-\vec{SP}$ и в силу свойств скалярного произведения

$$\vec{QC}\cdot\vec{PB}=\vec{SC}\cdot\vec{SB}-\vec{SC}\cdot\vec{SP}-\vec{SQ}\cdot\vec{SB}+\vec{SQ}\cdot\vec{SP},$$

откуда

$$\sin\beta\sin\gamma\cos\hat{A}=\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma-\cos\beta\cos\gamma+\cos\beta\cos\gamma,$$

то есть

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\hat{A}.$$

Теорема доказана.

Если угол A — прямой, то $\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma$. Это утверждение иногда называют теоремой Пифагора для трехгранных углов.

Для доказательства второй теоремы косинусов удобно воспользоваться понятием полярного (или пополнительного) трехгранного угла.

Полярный угол*). Пусть дан трехгранный угол $SABC$. Проведем через его вершину S перпендикуляр к плоскости SBC и выберем на нем (из двух возможных) луч SA_1 так, чтобы угол ASA_1 был тупым. Иными словами, точки A и A_1 должны лежать по разные стороны от плоскости SBC. (Объясните сами, почему угол ASA_1 не может быть прямым.) Аналогично выбираются лучи SB_1 и SC_1: $(SB_1)\perp(SAC)$, $(SC_1)\perp(SAB)$, углы BSB_1 и CSC_1 — тупые. Трехгранный угол $SA_1B_1C_1$ и называют *полярным* к углу $SABC$.

Многие применения полярных углов основаны на следующих двух интересных свойствах:

1) угол, полярный к полярному, совпадает с исходным трехгранным углом;

2) для взаимно полярных трехгранных углов $SABC$ и $SA_1B_1C_1$

$$\alpha_1=\pi-\widehat{A},\ \beta_1=\pi-\widehat{B},\ \gamma_1=\pi-\widehat{C}, \quad (4)$$

$$\widehat{A}_1=\pi-\alpha,\ \widehat{B}_1=\pi-\beta,\ \widehat{C}_1=\pi-\gamma. \quad (5)$$

Докажите эти свойства самостоятельно (см. упражнение 5).

Доказательство второй теоремы косинусов. Запишем первую теорему косинусов для угла $SA_1B_1C_1$, полярного к данному углу $SABC$: $\cos\alpha_1=\cos\beta_1\cos\gamma_1+\sin\beta_1\sin\gamma_1\cos\widehat{A}_1$, и воспользуемся соотношениями (4) и (5). Получим

$$\cos(\pi-\widehat{A})=\cos(\pi-\widehat{B})\cos(\pi-\widehat{C})+$$
$$+\sin(\pi-\widehat{B})\sin(\pi-\widehat{C})\cos(\pi-\alpha),$$

откуда немедленно вытекает (3).

Упражнения

1. Докажите, что биссектор выпуклого двугранного угла есть множество точек этого угла, равноудаленных от его граней.

2. Дан двугранный угол и прямая l, пересекающая его ребро и проходящая внутри него.

а) Пусть она не перпендикулярна ребру двугранного угла. Докажите, что через прямую l можно провести плоскость так, чтобы она была биссектрисой получившегося в сечении угла, и что такая плоскость единственна.

б) В каких случаях можно провести плоскость из п. а), если данная прямая перпендикулярна ребру?

3. Докажите, что три следующие плоскости имеют общую прямую:

а) биссекторные плоскости двугранных углов трехгранного угла («биссектрисы»);

б) плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла и биссектрисы противолежащих плоских углов («медианы»);

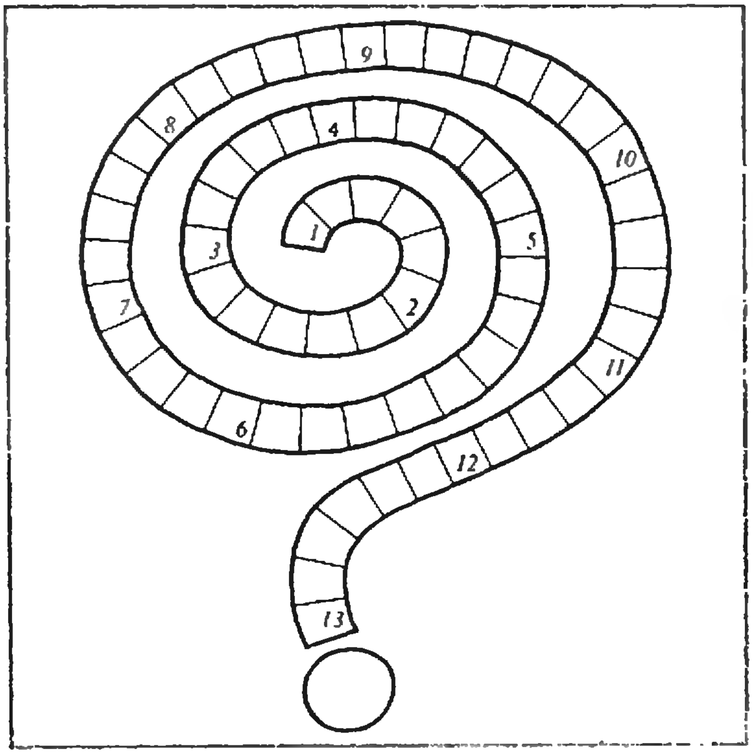
в) плоскости, проходящие перпендикулярно граням трехгранного угла через их биссектрисы («серединные перпендикуляры»).

(Окончание см. на с. 42)

---

*) См. также «Квант», 1983, № 7, с. 53–54.

Чайнворд



Заполните клетки буквами слов, заданными в списке 1—12 ниже, имея в виду, что последняя буква каждого предыдущего слова является началом следующего. Выписав буквы, стоящие на клетках с нечетными цифрами, вы получите имя выдающегося французского математика первой половины XIX века. Какого именно?

1. Плоская геометрическая фигура. 2. Выдающийся советский математик начала XX века. 3. Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону. 4. Высота боковой грани пирамиды. 5. Раздел математики. 6. Французский физик и математик. 7. Отрезок, соединяющий центр с точкой окружности. 8. Математические знаки. 9. Математический знак. 10. Французский математик и механик начала XIX века. 11. Тригонометрическая функция. 12. Часть круга, ограниченная дугой окружности и стягивающей ее хордой.

И. И. Картузов

КВАНТ для младших школьников

Задачи

1. Сколько зеленых стаканчиков нужно поставить на левую чашку весов, чтобы изображенные на рисунке весы оказались в равновесии?

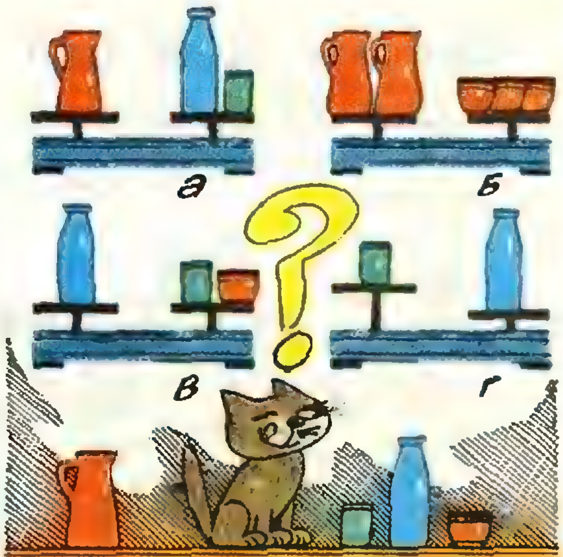
2. На клетчатой плоскости из точки A проведены три луча AB, AC и AD (см. рисунок). Докажите, что угол BAC равен углу CAD, используя свойства квадратной сетки.

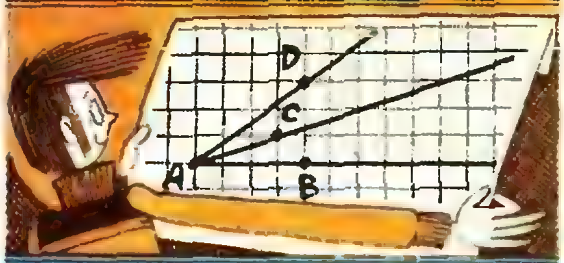
3. Недавно я нашел прошлогоднюю таблицу хоккейного турнира между 6-ми классами нашей школы. На ней сохранилась лишь небольшая часть записей. Попробуйте восстановить таблицу.

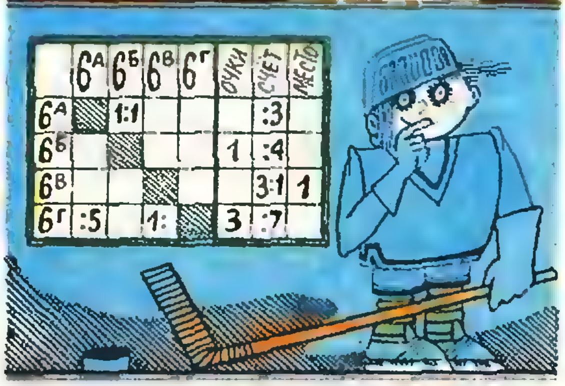
4. Фигуру, изображенную на рисунке, требуется разделить на 6 одинаковых частей, делая разрезы только по линиям сетки. Сколькими способами вам удастся это сделать?

5. На рисунке изображена электрическая цепь со звонком, тремя лампочками и тремя кнопками, каждая из которых в свободном состоянии соединяет одну пару контактов, а в нажатом — другую. Цепь включена в сеть. Как она будет работать при нажатии на одну из кнопок?

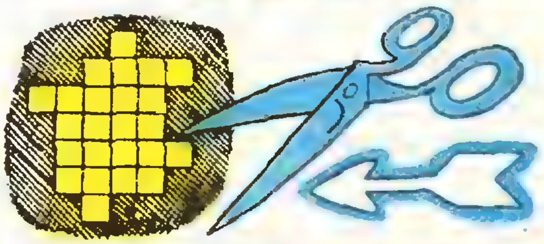
Эти задачи предложили:
М. Коман (ЧССР) и Б. Н. Гордейчик.

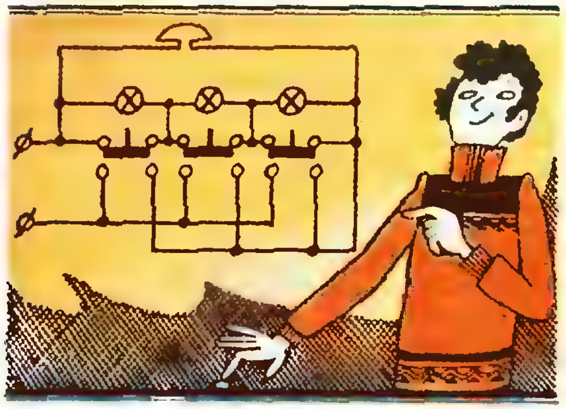






	$6^{\text{А}}$	$6^{\text{Б}}$	$6^{\text{В}}$	$6^{\text{Г}}$	очки	счет	место
$6^{\text{А}}$	▨	1:1				:3	
$6^{\text{Б}}$		▨			1	:4	
$6^{\text{В}}$			▨			3:1	1
$6^{\text{Г}}$	:5		1:	▨	3	:7	





Как мы пьем чай

(или о том, как надо решать качественные задачи по физике)

Доктор педагогических наук
Н. А. РОДИНА

В одном из выпусков телевизионной передачи «Что? Где? Когда?» «знатокам» был задан вопрос (приводим его в несколько уточненном виде):

«Уважаемые знатоки! Перед вами стоит стакан с чаем. Отпейте глоток и ответьте на вопрос: почему чай поднимается вверх, в то время как обычно вода льется вниз?»

Ответ, на котором остановились после минутного обсуждения знатоки, был такой: «воду мы всасываем». Он был признан правильным, и знатоки получили очко и награду — книгу.

А что бы ответили вы, если бы такой вопрос задали вам и не в телевизионной передаче, а на уроке физики? Ведь вопрос этот — настоящая качественная физическая задача (так условно называют задачи, в которых нет числовых данных и решение которых не обязательно должно быть выражено в виде формулы или числа). Но прежде чем думать над ответом, договоримся, что мы будем считать ответом. Решить качественную задачу по физике — это значит дать ответ на ее вопрос, обоснованный законами и правилами физической науки, выраженный принятыми в ней терминами, изложенный логично, так, чтобы каждый новый этап рассуждений являлся следствием предыдущего. Наверное, вы согласитесь, что с этой точки зрения нельзя считать данный знатоками ответ на «задачу о чае» удовлетворительным.

Так как же решать задачу? Давайте послушаем, как это делают два шестиклассника — Саша и Алеша.

Саша. Все дело в атмосферном давлении!

(Надо сказать, что Саша предпочитает отвечать на вопросы быстро.)

Алеша. Подожди, надо начать с самого начала — с условия: неподвижное тело — чай, находящийся в стакане,— пришло в движение. Мы знаем, что существует явление инерции — если на тело не действуют другие тела, не действует сила, то тело находится в покое или движется равномерно и прямолинейно. Тело не может само по себе изменить это состояние, и чай не может начать двигаться без действия силы.

Саша. Но ведь на все тела действует сила тяжести, она действует и на чай. Он не льется, не падает вниз, потому, что у стакана есть дно.

Алеша. Такое объяснение — у стакана есть дно — может дать и маленький ребенок. С точки зрения физики это — не объяснение. Кто учил физику, тот скажет: под действием веса чая дно прогибается, возникает сила упругости, направленная вверх. Она действует на чай и уравновешивает действующую на него силу тяжести.

Мы объяснили, почему чай был сначала неподвижен относительно стакана. Но в нашей задаче речь идет не о движении всего тела — воды в стакане — как целого, а о движении частей воды относительно друг друга. Такое движение вызывается разницей давлений в разных местах внутри жидкости или на ее поверхность.

Саша. Это похоже на сообщающиеся сосуды. Когда давление столбов жидкости в сосудах не одинаково, то один столб опускается, а другой поднимается. В нашей задаче один столб чая — это тот, который находится около рта, а второй — весь остальной чай. Пока мы не пьем чай, давление этих столбов воды одинаково, а как только...

Алеша. Нужно объяснить, почему те два столбика чая, о которых ты говорил, производят друг на друга одинаковое давление.

Саша. Это мы потом докажем, а теперь продолжим решение задачи. Итак, нам дано: чай в стакане был неподвижен, а когда человек коснулся стакана губами, чай начал подниматься.

Алеша. Во-первых, в физике есть более точные термины, и нужно сказать так: чай находился в покое относительно стакана; а во-вторых, нужно учесть все особенности явления. Ты не обратил внимания на то, что, если стакан неполный, приходится наклонять его, пока губы не коснутся чая. Потом человек делает вдох — и только тогда чай начинает подниматься.

Предлагаю такую, на мой взгляд — четкую, формулировку задачи.

Дано: в стакане находится чай; он покоится относительно стакана. Человек наклоняется к стакану или наклоняет его так, чтобы чай и губы соприкоснулись. Потом он делает вдох, и чай в этом месте поднимается, попадает человеку в рот. Остальная часть чая опускается. Вопрос задачи: почему та часть чая, которая касается губ человека, поднимается вверх?

Саша. Но ведь всего этого не было в условии задачи!

Алеша. Было. Просто нужно точно представить себе то явление, о котором говорится в условии. А после этого нужно «привнести» еще те данные, о которых, может быть, и не сказано, но которые можно получить из наблюдений или при продумывании задачи. По-моему, правильное и до конца понятое условие задачи — это уже начало решения.

Саша. Тогда давай продолжим решение. Человек делает вдох, то есть втягивает в себя воздух,...

Алеша. Подожди. Что значит — втягивает воздух? Вдох человек делает так: усилием мышц он расширяет свою грудную клетку, объем его легких увеличивается, воздух в них расширяется. От этого плотность воздуха в легких и в сообщающейся с ними полости рта уменьшается, и давление его становится меньше, чем давление наружного воздуха. Воздух перемещается из места более высокого давления, то есть снаружи, в область более низкого, то есть в легкие.

Саша. А так как человек, делая вдох, касается губами поверхности чая, причем касается плотно, то происходит вот что: на всю поверхность чая действует атмосферное давление, а на поверхность, примыкающую к губам человека, действует давление воздуха, находящегося в полости рта, а оно меньше атмосферного. Все ясно! Я же говорил, что причина всего — атмосферное давление! Опять скажешь: подожди?

Алеша. Скажу. Почему атмосферное давление, про которое мы знаем, что оно действует на чай сверху вниз, заставляет чай подниматься вверх?

Саша. Потому что жидкости и газы передают давление во всех направлениях без изменения. Это — закон Паскаля.

Алеша. По-моему, мы уже можем сформулировать окончательное решение задачи.

Чай в стакане был неподвижен, так как равнодействующая приложенных к нему сил — силы тяжести и силы упругости дна стакана — равна нулю — ведь значения этих сил равны, направлены силы по одной прямой в противоположные стороны. Неподвижны относительно друг друга были и части жидкости (чая), так как давление внутри нее и давление на ее поверхность было

везде одинаково. Когда человек приблизил вплотиую губы к какому-то месту поверхности чая и сделал вдох, то есть расширил легкие, в этом месте давление воздуха на поверхность чая стало меньше, чем действующее на остальную часть поверхности атмосферное давление. Разница давлений заставила чай перемещаться в область более низкого давления — столбик чая, находящегося под губами человека, поднялся, а остальной чай опустился.

Мне кажется, мы дали образцовое решение задачи.

Алеша. Давай спросим у автора статьи, как можно оценить наше решение.

Автор. Я учительница физики, и шестиклассникам Саше и Алеше поставила бы за данное ими решение задачи оценку «пять». Решение считаю очень хорошим. Мне очень понравилось, что по ходу рассуждений у Алеши все время возникали «попутные» вопросы. Ведь ответы на них и были этапами решения всей задачи.

Но является ли это решение образцовым? В зависимости от того, каковы были практические цели решения задачи, каковы знания решающего ее человека, решение можно оценить по-разному. Но его можно улучшать, пожалуй, беспредельно. Например, можно было бы указать, почему и при каких условиях плотность воздуха изменяется при изменении его объема, причем, дать объяснение на основании знаний о молекулах; можно более подробно разъяснить роль закона Паскаля в наблюдаемом явлении и т. д.

Эти дополнительные объяснения и те, о которых говорили Саша и Алеша, решая задачу, советую читателям продумать.

В заключение предлагаю вам самостоятельно решить такую качественную задачу.

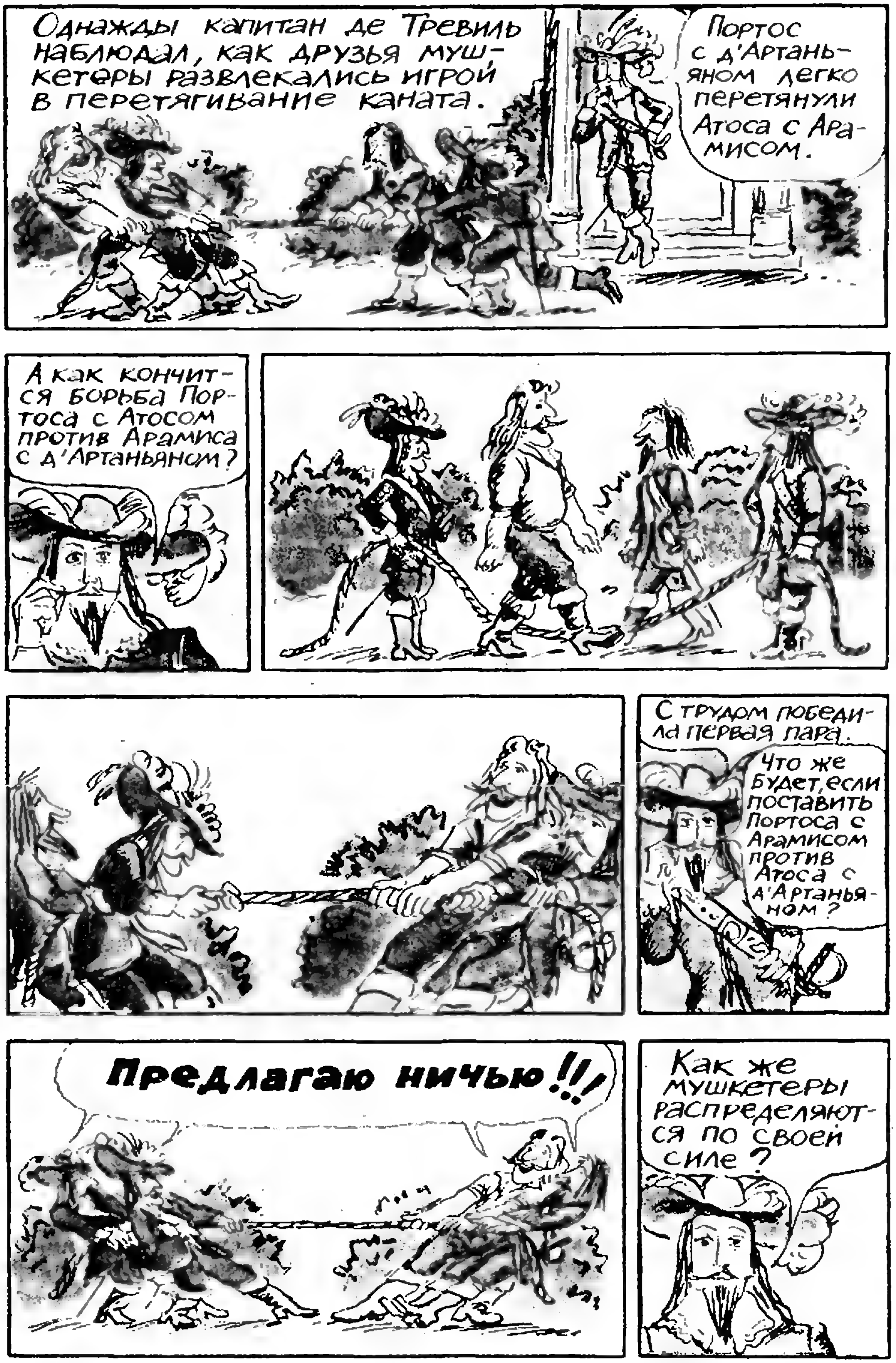
Все знают, как пользуются пипеткой. А почему поднимается жидкость в пипетке? Будет ли пипетка «работать», если вместо резинового баллончика на стеклянную трубку надеть маленький полиэтиленовый мешочек?

Наша анкета

Дорогие читатели! Для улучшения работы журнала нам очень важно знать ваше мнение о публикуемых в «Кванте» материалах. Просим ответить на вопросы нашей анкеты.

1. Ваши фамилия, имя, отчество, возраст, место учебы (город, школа, класс) или работы (профессия, специальность), круг интересов (математика, физика).
2. С какого года вы читаете «Квант»? Ваше отношение к журналу в целом.
3. Сколько человек читают ваши номера «Кванта»?
4. Материалы каких рубрик журнала вас интересуют и доступны для вас? Какие не интересуют или не нравятся?
5. Назовите 2 — 3 лучшие статьи (за 1983 — 1984 годы) из разных рубрик журнала.
6. Справляетесь ли вы с задачами из Задачника «Кванта»?
7. Статьи на какие темы вы хотели бы видеть в «Кванте» в 1985 году?
8. Дополнительные замечания и пожелания.

Ответы высылайте на отдельном листе бумаги, сохранив нумерацию вопросов, до 20 февраля 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, дом 32/1, «Квант», «Анкета».


Однажды капитан де Тревиль наблюдал, как друзья мушкетеры развлекались игрой в перетягивание каната.
Портос с д'Артаньяном легко перетянули Атоса с Арамисом.
А как кончится борьба Портоса с Атосом против Арамиса с д'Артаньяном?
С трудом победила первая пара.
Что же будет, если поставить Портоса с Арамисом против Атоса с д'Артаньяном?
Предлагаю ничью!!!
Как же мушкетеры распределяются по своей силе?

Текст А. П. Савина, рисунки Э. В. Назарова

задачник кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 28 февраля 1985 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12—84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М896, М897» или «Ф908». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М896 — М900; Ф908 — Ф912

М896. Про выпуклый четырехугольник $ABCD$ известно, что окружность с диаметром AB касается прямой CD. Докажите, что окружность с диаметром CD касается прямой AB тогда и только тогда, когда прямые BC и AD параллельны.

М897. Найдите хотя бы одну пару целых чисел (x, y) такую, что число

$$(x+y)^7-x^7-y^7$$

делится на 7^7, а число $(x+y)xy$ не делится на 7.

М898*. Для нечетных натуральных чисел $a<b<c<d$ выполнены условия: $ad=bc$; $a+d=2^k$ и $b+c=2^m$, где k и m — некоторые натуральные числа. Докажите, что

а) $a=1$;

б) для каждого $m\geqslant 3$ существует, причем только один, набор чисел a, b, c, d, k, удовлетворяющий этим условиям.

М899. Назовем *округлением* нецелого числа x замену его на одно из двух ближайших целых чисел ($[x]$ или $[x]+1$).

а) Докажите, что в любом равенстве

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+y_2+\ldots+y_n$$

все нецелые слагаемые можно округлить так, что равенство останется верным.

б) В таблицу из m строк и n столбцов записаны некоторые числа, причем суммы их по строкам $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и по столбцам $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — целые числа. Докажите, что все нецелые числа в таблице можно округлить так, что суммы по строкам и столбцам не изменятся.

в)* Пусть теперь суммы $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ не обязательно целые. Докажите, что нецелые числа в таблице можно округлить так, что их суммы по строкам и столбцам будут округлением соответствующих сумм $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$.

А. П. Савин

М900. Может ли проекция на плоскость выпуклого многогранника с 6 гранями быть а) 8-угольником? б) 9-угольником?

в)* Какое наибольшее число сторон может иметь проекция выпуклого многогранника с n гранями?

М. Д. Ковалев

Ф908. Самолеты летят по одной прямой навстречу друг другу с одинаковой скоростью v. Предельная дальность обнаружения — l. Один самолет после обнаружения другого совершает разворот, не меняя значения скорости, и летит параллельно второму самолету, который продолжает лететь со скоростью $\vec{v}$. Потеряют ли самолеты друг друга из виду после разворота, если ускорение при повороте равно a? Спустя какое время после обнаружения надо начинать разворот, чтобы в конце разворота расстояние между самолетами оказалось наименьшим?

И. И. Воробьев

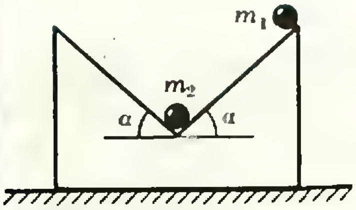


Рис. 1.

Ф909. На невесомой горке, образованной двумя гладкими плоскостями, каждая из которых составляет угол α с горизонтальной плоскостью (рис. 1), находятся два шарика. Горка может без трения скользить по горизонтальной плоскости. Верхний шарик, масса которого m_1, отпускают. При каком условии нижний шарик, масса которого m_2, начнет после этого «забираться» на горку?

А. И. Буздин

Ф910. На цилиндр радиуса R одето равномерно растянутое резиновое кольцо массы m. Длина кольца в нерастянутом состоянии равна πR, жесткость резинки — k. Цилиндр начинают раскручивать с постоянным угловым ускорением β. Через какое время кольцо начнет проскальзывать относительно цилиндра, если коэффициент трения кольца о цилиндр равен μ? Чему будет равна при этом угловая скорость кольца?

А. А. Лапидес

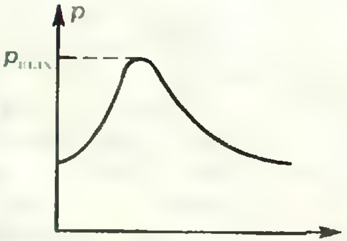


Рис. 2.

Ф911. На рисунке 2 приведен график изменения давления пороховых газов в стволе ружья по мере продвижения пули в стволе. Определите скорость сгорания пороха (в кг/с) при давлении p_{max}, если скорость пули в этот момент равна v. Площадь поперечного сечения ствола равна s. Температуру пороховых газов считать постоянной. Известно, что пороховые газы, образующиеся при сгорании массы пороха M, в объеме V_0 создают давление p_0.

Л. Г. Маркович

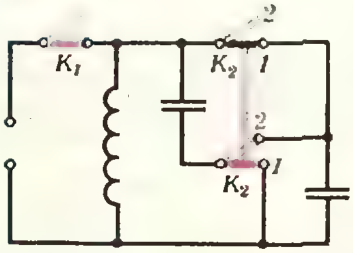


Рис. 3.

Ф912. В катушке из сверхпроводящего провода создают постоянный ток, подключив ее к источнику тока через ключ K_1 (рис. 3). После этого к концам катушки подключают батарею из двух одинаковых конденсаторов, включенных параллельно. Ключ K_1 размыкают, после чего ток начинает течь через конденсаторы, заряжая их. В момент времени, когда напряжение на конденсаторах максимально, а ток равен нулю, двойной ключ K_2 перебрасывают из положения 1 в положение 2, так что конденсаторы оказываются включенными последовательно, а напряжение на катушке удваивается. Поскольку индуктивность катушки не изменилась, а напряжение возросло, максимальный ток через катушку, а значит, и запасенная энергия будут больше первоначальных. Найдите ошибку в приведенных рассуждениях.

Д. В. Павлов

Problems

M896—M900; P908—P912

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than February 28th, 1985 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M896. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral such that the line CD is tangent to the circle on AB as a diameter. Prove that the line AB is a tan'gent to the circle on CD as a diameter if the lines BC and AD are parallel.

M897. Find one pair of positive integers a, b such that the number $(a+b)^7-a^7-b^7$ is divisible by 7^7 and the number $ab(a+b)$ is not divisible by 7.

M898*. Let a, b, c, d be odd integers such that $0<a<b<c<d$ and $ad=bc$. Prove that if $a+b=2^k$, $b+c=2^m$ for some natural numbers k and m, then

a) $a=1$,

b) for each $m \geqslant 3$ there exists one and only one set of integers a, b, c, d satisfying these conditions.

M899. Let us call either of two integers closest to a non-integral number x (i.e. $[x]$ or $[x]+1$) *a round-off* of x.

a) Prove that all non-integral summands in any equality of the form

$$x_1+\ldots+x_m=y_1+\ldots+y_n$$

may be rounded off so that the equality remains true.

b) Some numbers are written down in a table with m lines and n columns, and it is known that the sums $a_1, \ldots, a_m$ of these numbers along the lines and the sums $b_1, \ldots, b_n$ along the columns are integers. Prove that all the non-integral numbers in the table may be rounded off so that their sums along the lines and along the columns do not change.

c)* Now suppose the sums $a_1, \ldots, a_m$ and $b_1, \ldots, b_n$ are not necessarily integers. Prove that the non-integral numbers in the table may be rounded off so that their sums along the lines and along the columns will be the round-offs of the corresponding sums $a_1, \ldots, a_n$ and $b_1, \ldots, b_n$.

A. P. Savin

M900. Can a projection of a convex polyhedron with 6 faces on a plane be a polygon with a) 8 sides? b) 9 sides? c)* What is the greatest possible number of sides of a polygon that is a projection of a polyhedron with n faces?

M. D. Kovalev

P908. Two planes fly along the same rectilinear course towards each other with the same speed v. The planes can detect each other from the distance l. After having detected the other plane, one of the planes makes a 180° turn at the same speed and flies parallel to the other plane, which continues flying with velocity $\vec{v}$. Will the planes then be located outside the range of detection, if the accelleration during the turn is a? How long after detecting the other plane must the maneuvering plane begin its turn in order to make the distance between the planes at the end of the turn minimal?

I. I. Vorobiev

P909. Two ball bearings are placed on a "hill" whose sides are smooth planes forming the same angle α with the horizontal plane (Fig. 1). The hill can slide without friction along the horizontal plane. Then the upper ball bearing, whose mass is m_1, is released. Under what condition will the other ball bearing, whose mass is m_2, begin to "climb" up the hill?

A. I. Buzdin

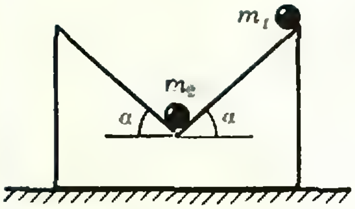


Fig. 1.

P910. A uniformely streched rubber band of mass m is slipped on a cylinder of radius R. The length of the rubber band (in unstretched state) equals πR, the elasticity of rubber is k. The cylinder is then rotated with constant angular acceleration β. How much time later will the rubber band begin to slip down the cylinder if the friction coefficient is μ? What will the angular velocity of the cylinder then equal?

A. A. Lapides

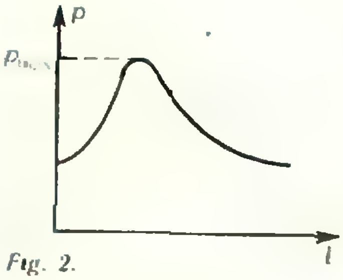


Fig. 2.

P911. Figure 2 shows the plot of gas pressure inside the barrel of a shotgun as the bullet moves along the barrel. Determine the speed of powder burning (in kg/s) at the pressure p_{max} if the velocity of the bullet at that moment is v. The area of the barrel's perpendicular section is s. The gas temperature may be assumed constant. It is known that burning powder gas generated by the combustion of powder of mass M yields pressure p_0 in a volume V.

L. G. Markovich

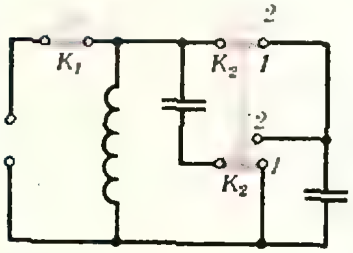


Fig. 3.

P912. Direct current is sent through a coil made of superconducting wire by turning on the switch K_1 connecting it to the source (Fig. 3). Then a battery consisting of two parallel capacitors is connected to the extremities of the coil. The switch K_1 is turned off, and then current flows through the capacitors, charging them. At the moment of time when the tension on the capacitors is maximal while the current is zero, the double switch K_2 is thrown over from position *1* to position *2*, so that the capacitors are then in sequence, and the tension on the coil doubles. Since the inductivity of the coil does not change while the tension increases, the maximal current through the coil and hence the stored energy will be greater than before we switched over K_2.

Find the mistake in the above argument.

D. V. Pavlov

Решения задач

М881—М883; Ф890, Ф892, Ф893*

М881. *Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки плоскости до трех вершин равнобедренной трапеции больше расстояния от этой точки до четвертой вершины.*

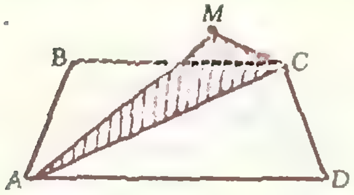


Рис. 1.

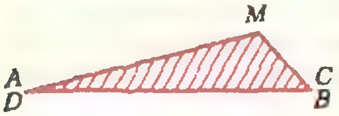


Рис. 2.

Пусть, для определенности, MA — наибольшее из расстояний от точки M до вершин равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 1). По неравенству треугольника $MA \leqslant AC + MC$ и $BD \leqslant MB + MD$, причем для любой точки M плоскости хотя бы одно из этих неравенств строгое. Складывая неравенства и учитывая, что $AC = BD$, получаем $MA \leqslant MB + MC + MD$.

Это решение имеет красивую геометрическую интерпретацию: прикладывая друг к другу треугольники AMC и BMD так, чтобы их равные стороны AC и BD совместились, мы получаем четырехугольник (рис. 2); утверждение задачи сводится к тому, что каждая его сторона меньше суммы остальных (это утверждение выполняется и в тех случаях, когда один или оба треугольника AMC, BMD вырождаются в отрезки).

С. Е. Рукшин

М882. *Сумма трех целых чисел a, b и c равна 0. Докажите, что число $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ — квадрат целого числа.*

◆

Пользуясь условием $a + b + c = 0$, получаем, что $a^4 + b^4 + c^4 = a^2(b + c)^2 + b^2(c + a)^2 + c^2(a + b)^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2abc\,(a + b + c) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - a^4 - b^4 - c^4$, откуда $2a^4 + 2b^4 + 2c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$.

Л. Д. Курляндчик, С. В. Фомин

М883. *В какое наименьшее число цветов нужно раскрасить клетки бесконечного листа клетчатой бумаги, чтобы*

а) любые две клетки на расстоянии 6 были покрашены в разные цвета? (Расстояние между клетками — наименьшее число линий сетки, горизонтальных и вертикальных, которые должна пересечь ладья на пути из одной клетки в другую.)

б) любые четыре клетки, образующие фигуру в форме буквы Г (рис. 1), были покрашены в четыре разных цвета?

◆

а) Ответ: в 4 цвета. Пример раскраски клетчатой плоскости в 4 цвета, при которой любые две клетки на расстоянии 6 окрашены в разные цвета, представлен на рисунке 2.

Чтобы доказать, что меньшим числом цветов обойтись нельзя, достаточно рассмотреть 4 клетки, показанные на рисунке 3. Любые две из них расположены на расстоянии 6 друг от друга и, следовательно, все они должны быть окрашены в разные цвета.

б) Ответ: в 8 цветов. Схема доказательства повторяет пункт а): надо привести пример 8-цвет-

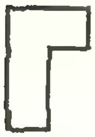


Рис. 1.

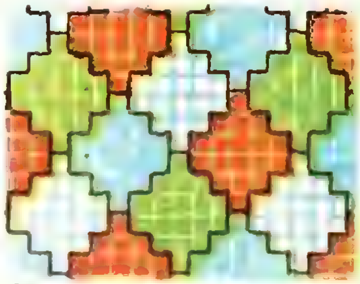


Рис. 2.

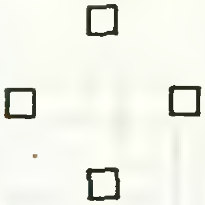


Рис. 3.

---

*) Решение задачи Ф891 см. в заметке «Электроемкость — свойство проводника» на с. 40.

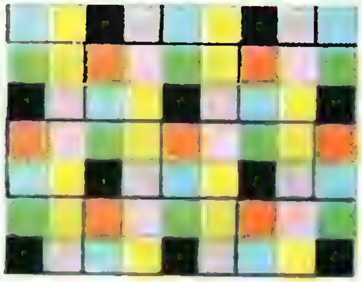


Рис. 4.

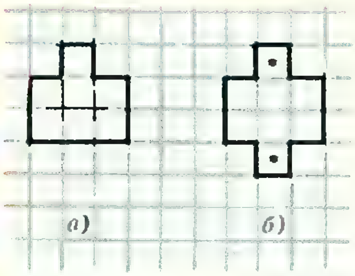


Рис. 5.

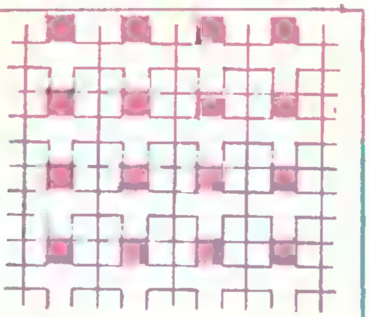


Рис. 6.

ной раскраски (он показан на рисунке 4) и объяснить, почему семи цветов недостаточно.

Рассмотрим 7-клеточную фигуру на рисунке 5,*а*. Любые две ее клетки можно покрыть одной «буквой Г» из четырех клеток, поэтому все ее клетки должны быть разноцветными. Следовательно, в фигуре на рисунке 5,*б* клетки, отмеченные звездочками, при 7-цветной раскраске должны быть одного цвета (потому что остальные ее 6 клеток нужно покрасить в 6 разных цветов). Тогда, очевидно, в любой бесконечной решетке с шагом в 3 клетки (рис. 6) все клетки должны быть окрашены одним цветом, а остальные клетки плоскости — другими цветами. Но в таком случае потребуется уже не 7, а 9 цветов (по числу таких решеток, покрывающих плоскость).

А. Г. Печковский, И. В. Итенберг

Ф890. *Кристаллы железа при температуре до 910 °C состоят из элементарных ячеек, имеющих форму куба с длиной ребра $a_1 = 2{,}87 \cdot 10^{-10}$ м. Атомы железа располагаются в вершинах куба и в его центре (рис. 1). Такая разновидность элемента — с объемноцентрированной кубической решеткой — называется альфа-железом (Fe_α). При температуре выше 910 °C ячейки кристалла железа представляют собой гранецентрированный куб с длиной ребра $a_2 = 3{,}63 \cdot 10^{-10}$ м. Атомы располагаются в вершинах куба и в центрах его граней (рис. 2). Такая разновидность элемента называется гамма-железом (Fe_γ). Одинакова ли плотность железа в этих состояниях? Относительная атомная масса железа $\mu = 55{,}847$.*

◆

Определим сначала, сколько атомов элемента приходится на каждую ячейку-куб. Если мысленно вырезать один элементарный кубик, то в каждой его вершине будет по 1/8 атома (каждая вершина — общая для 8 кубиков). Таких вершин 8. Следовательно, на ячейку-куб Fe_α приходится $\frac{1}{8} \cdot 8 + 1 = 2$ атома (с учетом центрального атома).

На элементарную ячейку Fe_γ приходится $\frac{1}{8} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 4$ атома, так как на каждую грань приходится по $\frac{1}{2}$ атома, а граней — 6.

На ячейку альфа-железа приходится объем

$$V_\alpha = (2{,}87 \cdot 10^{-10})^3 \text{ м}^3 \approx 23{,}64 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3,$$

на ячейку гамма-железа —

$$V_\gamma = (3{,}63 \cdot 10^{-10})^3 \text{ м}^3 \approx 47{,}83 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3.$$

Масса одного атома железа—

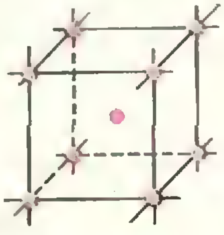


Рис. 1.

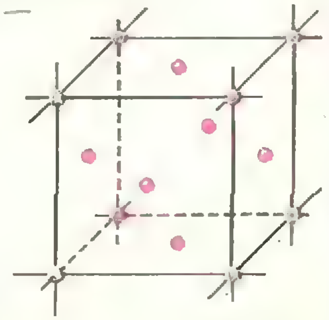


Рис. 2.

$$m=\frac{55{,}847\cdot 10^{-3}}{6{,}02\cdot 10^{23}}\ \text{кг}\approx 9{,}28\cdot 10^{-26}\ \text{кг}$$

($6{,}02\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро). Таким образом, плотности Fe_α и Fe_γ равны, соответственно,

$$\varrho_\alpha=\frac{2m}{V_\alpha}\approx\frac{2\cdot 9{,}28\cdot 10^{-26}}{23{,}64\cdot 10^{-30}}\ \text{кг/м}^3\approx 7850\ \text{кг/м}^3,$$

$$\varrho_\gamma=\frac{4m}{V_\gamma}\approx\frac{4\cdot 9{,}28\cdot 10^{-26}}{47{,}83\cdot 10^{-30}}\ \text{кг/м}^3\approx 7760\ \text{кг/м}^3,$$

и $\varrho_\alpha>\varrho_\gamma$

И. М. Низамов

♠

Ф892. *На стеклянный шарик радиуса R падает луч света, направленный вдоль радиуса. На расстоянии r от центра шарика свет рассеивается равномерно по всем направлениям на маленьком воздушном пузырьке, образовавшемся при изготовлении шарика. Определить зависимость доли выходящего из шарика света от r. Показатель преломления стекла n. Потерями света в стекле пренебречь.*

В результате рассеяния на пузырьке луч отклоняется на угол β от своего начального направления и падает на границу раздела стекло — воздух под углом α (рис. 1). Если при этом оказывается, что $\sin\alpha>\frac{1}{n}$, то на границе происходит полное внутреннее отражение. Второй раз луч упадет на границу стекло — воздух снова под углом α, снова произойдет полное внутреннее отражение, и т. д. Таким образом, лучи, испытавшие после рассеяния полное внутреннее отражение на границе стекло — воздух не выйдут из шарика. Найдем, при каких значениях *угла отклонения β это происходит.*

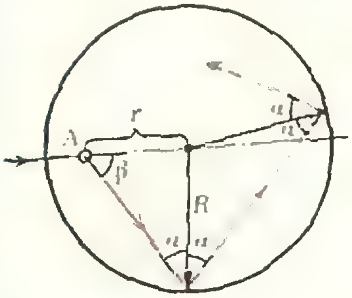


Рис. 1.

Согласно теореме синусов (см. рис. 1),

$$\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin\beta}.$$

Подставляя $\sin\alpha$, находим:

$$\beta_1=\arcsin\left(\frac{R}{rn}\right),\qquad(1)$$

$$\beta_2=\pi-\arcsin\left(\frac{R}{rn}\right).\qquad(2)$$

Полное внутреннее отражение испытывают все лучи, отклоняющиеся при рассеянии на углы β, удовлетворяющие условию

$$\beta_1<\beta<\beta_2.$$

Все остальные *лучи после рассеяния выходят* из шарика.

Так как лучи рассеиваются на пузырьке равномерно по всем направлениям, доля η света, выходящего из шарика, равна отношению площадей двух сферических сегментов (на рисунке 2 они заштрихованы) к полной площади сферы произвольного радиуса, центр которой совпадает с центром пузырька:

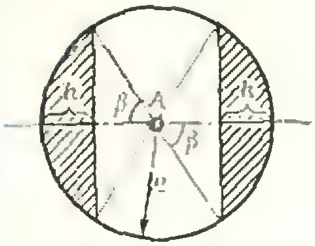


Рис. 2.

$$\eta=\frac{2\cdot 2\pi\varrho h}{4\pi\varrho^2}=\frac{h}{\varrho}.$$

Как видно из рисунка 2,

$$h=\varrho(1-\cos\beta)=\varrho\left(1-\sqrt{1-\sin^2\beta}\right)=$$

$$=\varrho\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{R}{rn}\right)^2}\right).$$

Таким образом,

$$\eta=1-\sqrt{1-\frac{1}{r^2}\left(\frac{R}{n}\right)^2}.\qquad(3)$$

При $r<\frac{R}{n}$ выражения (1) — (3) теряют смысл — в этом случае ни один из лучей, рассеянных пузырьком, не испытывает полного внутреннего отражения, и весь свет выходит из шарика.

А. А. Лапидес

◆

Ф893. *Для измерения распределения скорости ветра на высоте используются шары-зонды, которые имеют постоянную вертикальную скорость подъема. При запуске такого шара были получены зависимость угла α возвышения шара над горизонтом от времени t (рис. 1). Полагая скорость ветра у поверхности Земли равной нулю, а расстояние от места запуска шара до наблюдателя равным L=1 км (рис. 2), определить высоту подъема шара через 7 минут после запуска и скорость ветра на этой высоте.*

В начальный момент времени вектор $\vec{v}$ скорости шара направлен вертикально. Поскольку скорость ветра вблизи поверхности Земли равна нулю, скорость шара при малых высотах подъема (и при малых $\alpha(t)$) постоянна и равна $\vec{v}$. Следовательно, при малых α зависимость $\alpha(t)$ определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha(t)\approx\alpha(t)\approx\frac{vt}{L}. \qquad (1)$$

Пусть за малый промежуток времени Δt угол возвышения изменился на $\Delta\alpha$. Из (1) следует, что $\Delta\alpha/\Delta t=v/L$, откуда

$$v=L\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Отношение $\Delta\alpha/\Delta t$ может быть найдено по графику зависимости $\alpha(t)$. Оно определяется наклоном касательной к кривой $\alpha(t)$ в точке $\alpha=0$ (см. рис. 1). Выразив α в радианах, найдем из графика значение $\Delta\alpha/\Delta t$ и, подставив его в (2), найдем скорость шара-зонда при малых α:

$$v=10^3\frac{50\cdot2\pi}{360\cdot3\cdot60}\text{ м/с}\approx4{,}85\text{ м/с}.$$

(Точность определения v зависит от точности построения касательной. Для данного на рисунке 1 масштаба значения v лежат в пределах 4,8÷5,0 м/с.)

За время $t_1=7$ мин $=420$ с шар поднимается на высоту

$$h=vt_1\approx2000\text{ м}.$$

Как видно из рисунка 1, в этот момент $\alpha(t)$ достигает максимального значения. Это означает, что на высоте h вектор скорости шара направлен вдоль луча зрения, проведенного из точки наблюдения. Следовательно, угол наклона вектора $\vec{v}_h$ к горизонту равен $\alpha(t_1)=60°$. Вертикальная проекция $\vec{v}_h$ равна $v=4{,}85$ м/с, а горизонтальная — это скорость u_h ветра на высоте h. Значит,

$$u_h=v\operatorname{ctg}60°\approx\frac{4{,}85}{\sqrt3}\text{ м/с}\approx2{,}8\text{ м/с}.$$

В. В. Можаев

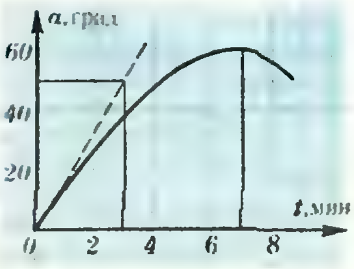


Рис. 1.

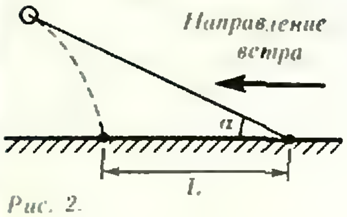


Рис. 2.

Электроемкость — свойство проводника

(к решению задачи Ф891)

Известно, что заряд, сообщенный проводящему телу, располагается на его поверхности. При этом распределение заряда по поверхности таково, что напряженность электрического поля внутри проводника в любой точке равна нулю. Проводник представляет собой эквипотенциальную область (любая поверхность, лежащая целиком внутри проводника, является эквипотенциальной). Линии напряженности электрического поля перпендикулярны поверхности проводника.

Электрическое поле, создаваемое проводником с зарядом q, в любой точке пространства определяется суперпозицией полей, создаваемых отдельными заряженными участками проводника. Каждый такой участок несет заряд $\Delta q_i = \sigma_i \cdot \Delta s_i$, где Δs_i — площадь участка, σ_i — поверхностная плотность зарядов на данном участке проводника. Что произойдет, если проводнику сообщить заряд в n раз больший (или меньший), чем q? Плотность заряда в любой точке поверхности проводника изменится в n раз.*) Напряженность поля, создаваемого проводником в каждой точке пространства, изменится в n раз. Это означает, что элементарная работа, совершаемая электрическим полем над единичным положительным зарядом, на любом участке изменится в n раз. Во столько же раз изменится работа электрических сил, действующих на единичный положительный заряд при перемещении его от поверхности проводника до бесконечности — то есть потенциал φ проводника.

Итак, при изменении заряда проводника в n раз во столько же раз изменяется потенциал проводника, и следовательно, отношение q/φ остается неизменным. Величину

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

называют электроемкостью (или просто емкостью) уединенного проводника. Чем больший заряд можно сообщить проводнику при заданном потенциале, тем больше емкость проводника. Можно сказать, что электроемкость характеризует способность проводника накапливать заряд при данном потенциале. Для данного проводника (проводника с емкостью C) существует единственное значение заряда q, который нужно сообщить проводнику для того, чтобы его потенциал был равен φ.

Электроемкость однозначно определяется формой проводника, его размерами и электрическими свойствами окружающей среды.

Если размеры проводника подобно уменьшить в n раз, то и емкость проводника уменьшится в n раз. Покажем это.

Пусть на уединенном проводнике N с емкостью C имеется заряд q; потенциал проводника равен, очевидно, $\varphi = q/C$. Сообщим проводнику дополнительно небольшой заряд Δq, принеся его на поверхность проводника из бесконечности. Работа, которая будет совершена электрическим полем при перемещении заряда Δq, равна

$$\Delta A = -\varphi \cdot \Delta q = -\frac{q}{C} \cdot \Delta q = -\Delta\left(\frac{q^2}{2C}\right).$$

Эта работа идет на изменение потенциальной энергии проводника. Следовательно, с добавлением заряда Δq потенциальная энергия проводника изменилась на

$$\Delta U = -\Delta A = \Delta\left(\frac{q^2}{2C}\right).$$

Но это значит, что потенциальная энергия проводника с емкостью C, которому сообщен заряд q, равна

$$U = \frac{q^2}{2C}. \qquad (*)$$

Можно сказать, что эта энергия обусловлена силами отталкивания, действующими между одноименно заряженными отдельными участками поверхности проводника и представляет собой потенциальную энергию взаимодействия одноименных точечных зарядов, распределенных по поверхности проводника. Два элементарных участка поверхности проводника N (рис. 1, *а*) вносят в полную потенциальную энергию вклад

$$\Delta U_{12} = k\frac{\Delta q_1 \cdot \Delta q_2}{R_{12}},$$

где Δq_1, Δq_2 — заряды этих участков, R_{12} — расстояние между ними.

А теперь обратимся к уединенному проводнику N', линейные размеры которого в n раз меньше, чем у проводника N. Что можно сказать об электроемкости C' этого проводника?

Пусть проводник N' имеет тот же заряд q, что и проводник N. Рассмотрим два элементарных участка поверхности проводника N' (рис. 1, *б*), подобные участкам *1* и *2* проводника N. Вклад, который дает взаимодействие зарядов этих участков в полную потенциальную энергию, равен

$$\Delta U'_{12} = k\frac{\Delta q'_1 \cdot \Delta q'_2}{R'_{12}}.$$

Из подобия линейных размеров проводников N' и N следует, что площади участков *1'* и *1*, *2'* и *2* связаны соотношениями $\Delta s'_1 = \Delta s_1/n^2$, $\Delta s'_2 = \Delta s_2/n^2$. Из теоремы единственности можно получить связь между плотностями зарядов на этих участках: $\sigma'_1 = \sigma_1 n^2$, $\sigma'_2 = \sigma_2 n^2$. Следовательно, $\Delta q'_1 = \sigma'_1 \cdot \Delta s'_1 = \Delta q_1$ и $\Delta q'_2 = \sigma'_2 \cdot \Delta s'_2 = \Delta q_2$. А поскольку $R'_{12} = R_{12}/n$, $\dfrac{\Delta U_{12}}{\Delta U'_{12}} = \dfrac{1}{n}$, то есть $\Delta U'_{12} = n \cdot \Delta U_{12}$. Следовательно, и полная потенциальная энергия проводника N' больше потенциальной энергии провод-

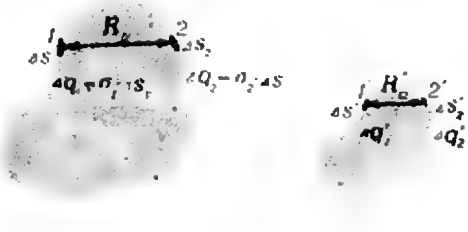


Рис. 1. *а)* *б)*

---

*) Это следует из так называемой теоремы единственности, согласно которой существует единственное равновесие распределение заряда на проводнике. (См. статью «О теореме единственности в электростатике» в «Кванте» № 2 за 1982 год.)

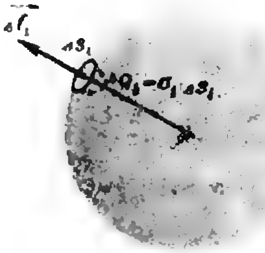


Рис. 2.

ника N в n раз. А как мы показали (см. (*)), $U=q^2/2C$; значит, емкость C' в n раз меньше емкости C.

Итак, при уменьшении размеров проводника в n раз его электроемкость уменьшается во столько же раз.

Рассмотрим теперь, как изменение формы проводника влияет на его емкость (и ответим на вопрос задачи **Ф891**: как изменится электроемкость проводящей сферы, если в ней сделать вмятину?).

На заряд $\Delta q_i=\sigma_i\cdot\Delta s_i$, сосредоточенный на малом участке Δs_i заряженного проводника (рис. 2), действуют силы отталкивания со стороны остальных зарядов, лежащих на поверхности проводника. Результирующая всех этих сил — $\Delta\vec{f}_i$ — перпендикулярна поверхности участка. Чтобы на месте этого участка сделать вмятину, нам надо совершить работу против силы $\Delta\vec{f}_i$ (мы говорим только о работе против электростатических сил). А это приведет к увеличению электрической потенциальной энергии проводника. Поскольку заряд проводника остается прежним, увеличение энергии означает уменьшение емкости. Если же какой-нибудь участок проводника «выпучится», это приведет к увеличению электроемкости.

Наконец, скажем, как зависит электроемкость проводника от электрических свойств окружающей его среды. Если заряженный проводник находится в среде с диэлектрической проницаемостью ε, то в любой точке пространства (вне проводника) напряженность поля, создаваемого зарядом проводника, в ε раз меньше, чем это было бы в вакууме. Значит, и потенциал проводника в такой среде в ε раз меньше, чем в вакууме, а электроемкость — в ε раз больше.

Р. Л. Энфиаджян

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М851—М865, Ф863—Ф877, справились с задачами М851, М852, М854, М862 и Ф864, Ф869, Ф873, Ф874. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

М. Александров (Москва) **52, 57, 60, 61, 63, 64;** *Р. Алексеев* (Ленинград) **61, 65;** *Г. Андреева* (Пермь) **57;** *В. Апальков* (Харьков) **57;** *А. Артюх* (Чернигов) **56;** *А. Асрян* (с. Грибоедов Арм. ССР) **53;** *Р. Бабиев* (Баку) **57, 63;** *С. Балтова* (Старозагорский округ, НРБ) **60;** *А. Барабаш* (Киев) **53, 56, 57;** *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **53, 57, 61, 63, 65;** *М. Барон* (Ленинград) **59;** *А. Батырев* (Москва) **53, 57, 59, 61, 63;** *Ю. Бекетов* (Ленинград) **53, 57;** *М. Бенце* (Сацеле, СРР) **65;** *И. Бирман* (Донецк) **57, 61, 63;** *А. Бирюков* (Саратов) **55, 63;** *И. Бордовский* (Трубчевск) **55;** *М. Будулуца* (Невельск) **57;** *В. Бурковский* (В.— Коровинцы Житомирской обл). **53;** *А. Бурлука* (Ростов) **57;** *В. Васильев* (Воронеж) **53;** *А. Ващенко* (Дзержинск) **61;** *С. Велесько* (Минск) **61, 63;** *Э. Велиметов* (Баку) **53, 59;** *Л. Вертгейм* (Новосибирск) **53, 55, 57—60;** *И. Вехтер* (Кишинев) **53;** *Р. Видгоп* (Баку) **63;** *А. Вишик* (Москва) **53;** *А. Габриелян* (Лутугино) **57;** *Т. Газарян* (Ереван) **53, 57—61, 63;** *Т. Гамбарян* (Баку) **53;** *Р. Гендлер* (Ташкент) **53, 55, 57, 59—61, 63—65;** *Э. Годзданкер* (Витебск) **53;** *Е. Гольдберг* (Ленинград) **59;** *Г. Горбатенко* (Арзамас) **55;** *В. Гордиюк* (Киев) **53, 56;** *Ю. Грабовский* (Киев) **53;** *Н. Григорьева* (Андропов) **57, 61, 63;** *И. Гуров* (Баку) **64;** *А. Давтян* (п. Мецамор, Арм. ССР) **53;** *Ю. Дейкало* (Киев) **53, 57, 63;** *С. Демьянченко* (Москва) **57, 63;** *А. Джафаров* (Баку) **57;** *Н. Джурелов* (Ямбол, НРБ) **53;** *В. Дончева* (Черна Гора, НРБ) **60;** *А. Дубровин* (Воронеж) **53, 55, 57;** *С. Дудко* (Донецк) **53, 59;** *В. Душацкий* (Одесса) **63;** *А. Дынников* (Жуковский) **53, 55, 57, 59, 63, 65;** *И. Дынников* (Жуковский) **57;** *В. Елистратов* (Донецк) **53, 59, 63;** *В. Журавлев* (Гайворон) **61, 63, 65;** *Е. Зиманов* (Алма-Ата) **53;** *Л. Зосин* (Киев) **53, 55, 63;** *Л. Иванов* (Саратов) **55;** *Л. Йорданова* (Стара Загора, НРБ) **60;** *А. Кадыров* (Ташкент) **63;** *В.* и *И. Каловичи* (Хабаровск) **60, 61;** *А. Касимов* (Киев) **63;** *П. Кирилин* (Дубна) **53, 58, 59, 63;** *А. Киселев* (Ленинград) **53;** *Т. Кобдиков* (Павлодар) **61, 63;** *Л. Козомиец* (Москва) **57, 61, 63;** *И. Кольтовер* (п. Черноголовка Московской обл.) **53;** *К. Копотун* (Киев) **59, 63;** *С. Котов* (Первоуральск) **61;** *Ю. Кочетков* (Винница) **61;** *Н. Крылов* (Ленинград) **63;** *В. Кузнецов* (Пенза) **56;** *Г. Кукарских* (Москва) **53, 55;** *Н. Курило* (с. Ольховка Харьковской обл.) **53, 56, 59, 60;** *М. Куринной* (Харьков) **59, 61, 63;** *С. Кярис* (Молетай) **61, 63;** *Л. Леняшин* (Ленинград) **57;** *С. Литовченко* (Воронеж) **59;** *В. Любарский* (Киев) **53;** *Е. Макаренко* (Херсон) **53;** *М. Макаров* (Севастополь) **61, 63;** *М. Маринов* (Ямбол, НРБ) **53;** *Ю. Махлин* (Москва) **53, 55, 57, 60;** *А. Мельников* (Москва) **57;** *Р. Микаилов* (Масаллы) **53;** *А. Милушевич* (Титово-Ужице, СФРЮ) **52;** *С. Минаев* (Свердловск) **53, 61;** *А. Мирзабекян* (Москва) **63;** *Т. Мисирпашаев* (Москва) **57—61, 63, 65;** *Ю. Михлин* (Москва) **61;** *Е. Мишин* (Севастополь) **61;** *И. Мишинев* (Ямбол, НРБ) **53;** *А. Молотков* (Ленинград) **57—59;** *Б. Монхтор* (Улан-Батор, МНР) **53;** *Е. Мухин* (Кинешма) **53;** *С. Мягчилов* (Одесса) **53;** *О. Никифорчин* (Ивано-Франковск) **53;** *Ю. Никулинский* (Пенза) **53;** *М. Ободовский* (Москва) **57;** *О. Овецкая* (Донецк) **53, 55, 63;** *Л. Ольха* (Свердловск) **57;** *Р. Оруджев* (Баку) **53;** *Б. Панич* (Севастополь) **63;** *И. Пивкина* (Новосибирск) **53;** *Н. Писаренко* (Новосибирск) **53, 55;** *В. Погребняк* (Винница) **53, 61;** *Т. Поликарпова* (Белорецк) **59;** *С. Полинов* (Магнитогорск) **53;** *В. Порошин* (Ленинград) **56, 57, 61, 63, 64;** *Т. Радько* (Корсунь-Шевченковский) **53, 55, 57, 59—61, 63—65;**

Е. Растигеев (Барнаул) **61**; *Д. Розман* (Севастополь) **61**; *Е. Романов* (Димитровград) **61**; *И. Самовол* (Гайворон) **61, 63, 65**; *Ю. Свирид* (Минск) **53**; *К. Семенов* (Киев) **53, 56, 57, 63**; *А. Сенчик* (Киев) **53**; *Р. Сибилев* (Ленинград) **53, 55, 57, 59**; *А. Сидорович* (Москва) **59**; *А. Смирнов* (Ленинград) **57**; *Г. Спивак* (Киев) **53**; *С. Старцев* (Уфа) **53, 59, 61**; *М. Степанов* (Ленинград) **53**; *В. Судаков* (Тбилиси) **53**; *В. Тартаковский* (Киев) **53, 55**; *М. Тейтель* (Киев) **53, 55, 57, 59, 60, 61**; *И. Терез* (Симферополь) **61**; *Д. Толпин* (Электросталь) **57**; *А. Трухан* (Минск) **56, 63**; *В. Тульчинский* (Киев) **53**; *Л. Тюрин* (Николаев) **63**; *А. Умнов* (Миасс) **53**; *Е. Финк* (Ленинград) **56, 57, 61, 64**; *Б. Фридман* (Москва) **53, 56—59**; *К. Хлебаров* (Ямбол, НРБ) **53**; *М. Хованов* (Москва) **57**; *М. Холмянский* (Москва) **53, 56—59**; *Б. Цветков* (Люберцы) **56**; *А. Череватый* (Киев) **53, 55, 57, 63, 65**; *Е. Чернан* (Днепродзержинск) **53, 57, 63**; *Ю. Шамрук (д. Новый Двор Гродненской обл.)* **63**; *О. Шаров* (Киев) **53, 63**; *С. Шейнин* (Молодечно) **57**; *Т. Шибанова* (Ангарск) **53**; *Г. Шпитальник* (Ленинград) **63**; *В. Шульга* (Евпатория) **59, 61**; *А. Эфендиев* (Баку) **53**; *Е. Юдицкий* (Киев) **53**.

Физика

О. Авраменко (Херсон) **65, 67, 68, 70—72, 75, 76**; *В. Апальков* (Харьков) **66—68, 70—72, 75—77**; *А. Артюх* (Чернигов) **68, 71, 75, 76**; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **63, 66—68, 70—72**; *Д. Борец* (Харьков) **63, 68**; *Д. Бердников* (Винница) **66, 75**; *О. Бесман* (Алма-Ата) **68**; *Э. Бондаренко* (Полтава) **70, 75, 76**; *Ю. Боровский* (Киев) **68**; *Р. Боташев* (Фрунзе) **68, 70, 75**; *Т. Брейтус* (Москва) **76**; *В. Бурковский* (п. Великие Коровинцы Житомирской обл.) **65, 75**; *О. Васильев* (Алма-Ата) **70, 75**; *С. Винтовкин* (Свердловск) **70**; *О. Гавриков* (Киев) **68, 72**; *А. Галактионов* (Пермь) **63**; *В. Галухин* (Рязань) **68, 70, 75**; *А. Глухов* (Саратов) **75**; *Г. Горбатенко* (Арзамас) **67**; *М. Готман* (Киев) **65, 68, 70, 75, 76**; *Ю. Грабовский* (Киев) **68, 70, 72**; *В. Гринштун* (Караганда) **76**; *В. Гусев* (Красноярск) **68**; *Ю. Дейкало* (Киев) **68**; *А. Доде* (Корсунь-Шевченковский) **76, 77**; *С. Дубовик* (Брест) **70, 75, 76**; *С. Дудко* (Донецк) **66, 68, 70**; *Д. Ермошин* (Москва) **66, 68, 71**; *С. Жилинскас* (Вильнюс) **68**; *К. Залуцкий* (Киев) **63, 75**; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) **63**; *И. Калиновский* (Киев) **68, 70—72, 75, 76**; *В. Киреев* (Киев) **75, 77**; *А. Кириченко* (Пермь) **66, 70—72**; *П. Кларк* (Тула) **72**; *А. Климачев* (Минск) **70, 75, 76**; *Г. Климович* (п. Болшево Московской обл.) **63, 65, 70—72, 76, 77**; *А. Клишко* (Улан-Удэ) **68, 72**; *М. Козлов* (Москва) **63**; *А. Кордюк* (Киев) **66**; *Я. Корчевский* (Киев) **75**; *С. Котов* (Первоуральск) **70, 75**; *В. Краснов* (Чебоксары) **63**; *К. Кудрявцев* (Стаханов) **75**; *М. Кудряшев* (с. Красный Яр Куйбышевской обл.) **75, 76**; *М. Курдюкова* (Москва) **76**; *Н. Курило* (п. Ольховатка Владимирской обл.) **75**; *В. Кусков* (п. Красный Октябрь Владимирской обл.) **68, 70, 76**; *П. Линник* (ст. Анапская Краснодарского кр.) **65**; *Ю. Литвиненко* (Воронеж) **75**; *А. Лихтциндер* (Ташкент) **66, 67, 75, 76**; *К. Лопин* (Фрунзе) **63**; *Д. Лунц* (Саратов) **63, 65, 67, 68, 70, 71, 75—77**; *П. Лушников* (Москва) **63, 68, 70, 75, 76**; *О. Мазяр* (Львов) **68, 70, 75, 76**; *К. Макарчук* (Киев) **63, 68, 72, 75, 77**; *А. Мастыркин* (Минск) **77**; *Ю. Махлин* (Москва) **65, 68, 70**; *В. Меньков* (Мончегорск) **63, 65, 66, 68, 72, 75**; *А. Микалькявичус* (Паневежис) **75, 76**; *С. Минаев* (Свердловск) **70**; *А. Михеев* (Кимры) **63, 71, 75**; *О. Мороз* (Алма-Ата) **65, 70**; *К. Мосейчев* (Зеленоград) **68, 70—72**; *С. Мошкевич* (Киев) **68, 71, 72, 75—77**; *С. Мягчилов* (Одесса) **63, 68, 75, 76**; *С. Никоненко* (Киев) **68, 70, 76**; *О. Осауленко* (п. Ольшанка Кировоградской обл.) **68**; *А. Онуфриев* (Москва) **68, 75**; *А. Парьев* (п. Красногвардейский Белгородской обл.) **76**; *Д. Пастухов* (Витебск) **65, 67, 75—77**; *П. Пеев* (Русе, НРБ) **68**; *И. Перелыгин* (Харьков) **72, 75, 76**; *А. Перепеличный* (Владимир) **68, 70, 75**; *И. Пильников* (Тамбов) **75, 76**; *Ю. Праховник* (Москва) **68, 70**; *Я. Пугай* (Алма-Ата) **70, 75**; *В. Рай* (с. Марфовка Крымской обл.) **68**; *С. Рахамов* (Казань) **63, 65—68, 70, 71, 75—77**; *А. Ржевский* (Новосибирск) **63, 65—68, 70**; *Р. Ривкин* (Минск) **68, 75, 76**; *В. Руднев* (Целиноград) **68**; *М. Рудык* (Винница) **63, 66, 67, 68**; *Д. Русинов* (Ленинград) **63, 65**; *Ю. Рыбалочко* (Киев) **75, 76**; *М. Савченко* (Белгород) **67, 68, 70, 71, 75—77**; *И. Серикбаев* (с. Чилик Алма-Атинской обл.) **76**; *К. Симонов* (Новосибирск) **63, 65—68, 70**; *М. Скоробогатов* (Киев) **65—68, 70—72, 75—77**; *С. Собесский* (Красноармейск Кокчетавской обл.) **68, 76**; *Г. Спивак* (Киев) **68, 70**; *С. Стасевич* (Брест) **63, 70, 75**; *С. Степанянц* (Ереван) **68, 70**; *М. Стрешинский* (Киев) **68**; *С. Суздаленко* (Полоцк) **68, 70**; *Д. Таджибаева* (Учкурган) **70, 75**; *В. Тартаковский* (Киев) **68, 75, 76**; *И. Терез* (Симферополь) **63, 65—68, 70**; *А. Тихомиров* (Чимкент) **68; 70**; *С. Тужанский* (Винница) **63, 66—68, 75—77**; *А. Умнов* (Миасс) **67**; *Н. Федин* (Омск) **75—77**; *Л. Федичкин* (Москва) **63, 65—68, 71, 72, 75, 76**; *Л. Фельдман* (Саратов) **68, 70, 71, 75—77**; *С. Феранчук* (Минск) **68, 71, 72**; *В. Фурман* (Ташкент) **66, 68, 70—72, 75—77**; *А. Ходарцев* (Беслан) **76**; *А. Хонахбаев* (Рига) **74**; *Б. Цветков* (Люберцы) **68**; *А. Цирс* (Апатиты) **63, 66, 67**; *О. Чемерченко* (п. Купянск-Узловой Харьковской обл.) **79**; *С. Чернышев* (п. Юкари-Юз Ташкентской обл.) **66, 70, 71**; *С. Черняк* (Харьков) **63, 66, 67**; *Г. Швец* (Киев) **66, 68, 76, 77**; *А. Щеголев* (п. Черноголовка Московской обл.) **68, 70—72, 75, 76**; *О. Юминов* (Омск) **68**; *О. Яковлев* (Иркутск) **68, 75, 76**.

Двугранные и трехгранные углы

(Начало см. на с. 23)

4. В сечении любого ли трехгранного угла плоскостью можно получить правильный треугольник?

5. Докажите свойства 1) и 2) полярного трехгранного угла.

6. В каких пределах могут лежать суммы:
а) плоских,
б) двугранных углов трехгранного угла?

7. а) Докажите, что если все двугранные углы трехгранного угла острые, то и все плоские углы — острые.

б) Верно ли обратное утверждение?

8. В трехгранном угле сумма двух двугранных углов равна π. Докажите, что сумма противолежащих им плоских углов также равна π.

9. В плоскости каждой грани трехгранного угла через его вершину проведена прямая, перпендикулярная противоположному ребру. Докажите, что эти три прямые лежат в одной плоскости.

Б. М. Ивлев

Мои встречи с Дебаем

(к 100-летию со дня рождения Петера Дебая)

Выдающийся физик и химик Петер Йозеф Вильгельм Дебай (1884—1966) широкому кругу физиков известен как автор теории теплоемкости твердых тел.

В начале нашего века разработка такой теории представлялась трудной проблемой. Дело в том, что в прошлом столетии была найдена любопытная закономерность, касающаяся *теплоемкости*. Многочисленные измерения показали, что произведение удельной теплоемкости на молярную массу вещества постоянно для всех твердых тел, практически не зависит от температуры и равно приблизительно 25,2 Дж/(моль·К). Это — закон Дюлонга и Пти.

В начале этого века было экспериментально установлено, что при низких температурах теплоемкость твердых тел с понижением температуры уменьшается. И если построить кривую зависимости теплоемкости от температуры, то она стремится к нулю при абсолютном нуле температур. Сколь-нибудь удовлетворительного объяснения этому не было.

Многие ученые пытались выразить найденную температурную зависимость теплоемкости математической формулой. Но кроме более или менее приближенных эмпирических формул никому не удавалось ничего получить. Первую настоящую теорию теплоемкости твердых тел дал Эйнштейн. В ней использовалась идея Планка о том, что энергия атомов меняется дискретно, кратно $h\nu$, где ν — частота колебаний атомов. Эйнштейн поначалу предположил, что для всех атомов частоты одинаковы (что на самом деле не так), и сумел построить теорию теплоемкости в сравнительно грубом приближении.

Воспользовавшись той же основной идеей Планка, Дебай в 1912 году создал теорию, в которой было учтено, что различные атомы колеблются с разными частотами. Эта теория позволила теоретически получить закон Дюлонга и Пти при сравнительно высоких температурах и вывести довольно точную зависимость теплоемкости от температуры при низких температурах. В соответствии с данными измерений, из теории следовало, что теплоемкость пропорциональна третьей степени абсолютной температуры. Теперь эту зависимость называют законом теплоемкости Дебая.

В дальнейшем выяснилось, какие температуры следует считать высокими, а какие — низкими. Оказалось, что для каждого вещества в твердом состоянии существует характеристическая температура — температура Дебая, выше которой применима классическая теория теплоемкости, а ниже — требуется введение квантовой теории.

Из теории Дебая, в частности, следовало, что при низких температурах *теплопроводность* твердых диэлектриков с уменьшением температуры должна увеличиваться. И это действительно так. Например, для алмаза температура Дебая порядка 2000 °С, комнатные температуры для него низкие, и теплопроводность очень велика — она сравнима с теплопроводностью хороших проводников (меди).

Имя Дебая связано не только с теорией теплоемкости и теплопроводности твердых тел; оно знакомо ученым, занимающимся и магнетизмом, и электролитической диссоциацией и др. За крупные научные достижения Дебай в 1936 году был удостоен Нобелевской премии по химии.

Мне удалось познакомиться с Дебаем в 1928 году на Всесоюзном съезде физиков, на котором присутствовало много именитых зарубежных ученых. Я тогда был студентом, и для нас Дебай был классиком, так как его имя часто встречалось во многих курсах физики. Личная встреча и знакомство с ним было для меня и других молодых физиков событием.

Тогда Дебаю было 44 года. Когда объявили его доклад, на трибуну вышел человек атлетического телосложения, и мы приготовились услышать громовой голос. Каково же было всеобщее удивление, когда он начал говорить очень высоким голосом, почти что дискантом.

Мы хорошо знали Дебая как теоретика и мало знали о его экспериментальных работах. На съезде рассказывали, что когда в кулуарах обсуждался какой-нибудь вопрос и к Дебаю обращались теоретики, Дебай говорил, что он экспериментатор и что теория — не его специальность. А если обращались экспериментаторы, Дебай говорил, что он теоретик. На самом деле он был, конечно, и тем и другим.

Дебай был веселый и остроумный человек. Мы были удивлены, когда он в шутку затеял бороться с другим известным немецким физиком Робертом Полем, человеком тоже атлетического телосложения, и победил его.

После окончания съезда большинство иностранных делегатов отправились домой через Батуми. Дебай же поехал вместе с нами в Ленинград, сказав, что ему интереснее ехать со студентами, чем с учеными. Ехали мы в обычном вагоне. В дороге Дебай развлекал нас многочисленными рассказами из жизни физиков и из своей тоже. Кстати сказать, по дороге он обучал нас немецкому языку (Дебай родился в Нидерландах, но работал в Германии), а мы его — русскому. Он был, видимо, лучшим учителем, чем мы, поскольку мы понимали его, а он нас — практически нет.

Второй раз я встретился с Дебаем в 1930 году, когда после окончания института был командирован в Германию и посетил Лейпциг, где Дебай тогда заведовал кафедрой физики в университете. Помня о нашем знакомстве, он встретил меня весьма любезно, показал лабораторию, пригласил на лекцию и на семинары. Я убедился в том, что многие экспериментальные работы Дебая были обставлены с большим искусством и остроумием.

И. К. Кикоин

XXV
Международная математическая олимпиада

MMO
PRAHA 1984

Кандидат физико-математических наук
А. П. САВИН

Юбилейная XXV Международная математическая олимпиада проходила с 29 июня по 10 июля в столице ЧССР г. Праге. Она собрала рекордное количество стран-участниц — 34; впервые в олимпиаде приняли участие команды Норвегии и Кипра. Почти все команды школьников состояли из 6 человек. Исключение составили команды Алжира — 4 человека, а также Норвегии и Люксембурга — по 1 человеку.

В команду СССР вошли: Евгений Абакумов (Ленинград, ФМШ при ЛГУ), Андрей Астрелин (Новосибирск, с. ш. № 119), Константин Игнатьев (Москва, с. ш. № 2), Федор Назаров (Ленинград, с. ш. № 239), Леонид Оридорога (Донецк, с. ш. № 64), Сергей Струков (Воронеж, с. ш. № 85).

Ежегодно при встречах на международных олимпиадах руководители команд обмениваются опытом работы. В этом году такой разговор был проведен в виде официального симпозиума, на котором были заслушаны доклады И. Моравчика (ЧССР), Т. А. Сарычевой (СССР), Д. Херси (Великобритания), А. Маковского (ПНР), Ж. Вилмета (Бельгия), Г. Буроша (ГДР), Л. Киффера (Люксембург), Е. Гиянакополоса (Греция) и Л. Давидсона (Куба).

Выступавшие рассказали об особенностях проведения олимпиад в своих странах, высказали пожелания по улучшению организации международных олимпиад. В докладе И. Моравчика в частности было рассказано об интересном опыте проведения олимпиад в ЧССР для школьников 6 и 7 классов.

В рамках симпозиума была организована большая интересная выставка материалов внеклассной работы из многих стран. Большим успехом пользовался стенд СССР, на котором широко был представлен журнал «Квант», а также библиотечка «Квант».

По завершении симпозиума жюри, состоящее из научных руководителей команд, приступило к исполнению своих прямых обязанностей — отбору задач для соревнований. Эта работа очень трудна, поскольку нужно учесть различный уровень подготовки у школьников из развитых стран и из молодых стран Азии, Африки и Латинской Америки. При этом надо было отобрать и очень сложные задачи, чтобы можно было выявить победителей.

Жюри, возглавляемое профессором Ф. Зитеком, отлично справилось со своими обязанностями. Об этом можно судить как по результатам олимпиады, так и по результатам опроса, проведенного корреспондентом журнала «Квант»: каждому члену жюри было предложено расположить отобранные задачи в порядке возрастания трудности. Хотя мнения отдельных членов жюри сильно расходились, усредненный порядок задач по их трудности совпал с порядком, полученным из анализа работ участников.

Каждую задачу было решено оценивать в 7 очков и по установившейся традиции провести соревнования в два дня, предлагая в каждый из дней по 3 задачи на 4,55 часа работы. Таким образом, максимальная сумма очков, которую мог набрать участник, составила 42 очка, как и было в последние 5 лет.

Задачи, по которым проводились соревнования, были таковы.

Первый день

1 (ФРГ). Пусть x, y, z — неотрицательные действительные числа такие, что $x+y+z=1$. Докажите, что

$$0\leqslant xy+yz+xz-2xyz\leqslant\frac{7}{27}.$$

2 (Нидерланды). Укажите какую-либо пару натуральных чисел (a, b) такую, что:

1) число $ab(a+b)$ не делится на 7,
2) $(a+b)^7-a^7-b^7$ делится на 7^7.

Ответ обосновать.

Слева направо: Ф. Назаров, Л. Оридорога, С. Струков, К. Игнатьев, А. Астрелин, Е. Абакумов, педагогический руководитель команды Т. А. Сарычева, научный руководитель команды А. А. Фомин, корреспондент журнала «Квант» А. П. Савин.

3 (СРР). На плоскости даны две различные точки O и A. Для каждой точки X этой плоскости, отличной от точки O, обозначим через $a(X)$ величину угла AOX, выраженную в радианах ($0\leqslant a(x)<2\pi$), где угол $a(x)$ отсчитывается против часовой стрелки от луча OA, и через $C(X)$ — окружность с центром O и радиусом $OX+a(X)/OX$.

Пусть задан конечный набор цветов, и каждая точка плоскости окрашена в один из них. Докажите, что существует точка Y такая, что $a(Y)>0$ и на окружности $C(Y)$ имеется хотя бы одна точка того же цвета, что и точка Y.

Второй день

4 (СРР). Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ прямая CD касается окружности с диаметром AB. Докажите, что прямая AB касается окружности с диаметром CD тогда и только тогда, когда прямые BC и AD параллельны.

5 (МНР). Пусть d — сумма длин всех диагоналей, а p — периметр плоского выпуклого n-угольника ($n>3$). Докажите, что

$$n-3<\frac{2d}{p}<\left[\frac{n}{2}\right]\ \left[\frac{n+1}{2}\right]-2$$

($[x]$ — целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x).

6 (ПНР). Пусть a, b, c, d — нечетные целые числа, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $0<a<b<c<d$;

2) $ad=bc$;

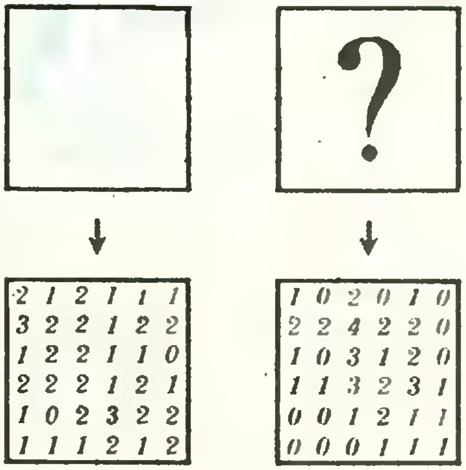
3) $a+d=2^k$, $b+c=2^m$ для некоторых целых чисел k и m. Докажите, что $a=1$.

(В скобках после номера задачи указана страна, предложившая эту задачу.)

Олимпиада ознаменовалась крупным успехом команды СССР и команд других социалистических стран. Наша команда набрала 235 очков из 252 возможных, на втором месте команда Болгарии (203 очка), на третьем — Румынии (199), четвертое и пятое места поделили команды Венгрии и США (195), далее следуют команды Великобритании (165), Вьетнама (163), ГДР (161), ФРГ (150) и Монголии (146).

Из шести участников нашей команды пятеро получили первые премии: А. Астрелин (42 очка), К. Игнатьев (42 очка), Л. Оридорога (42 очка), Ф. Назаров (41 очко), Е. Абакумов (40 очков). Всего получили первые премии 14 участников, набравших не менее 40 очков. Кроме наших ребят первые премии получили по два участника из команд Болгарии и Румынии и по одному из команд Великобритании, Венгрии, Вьетнама, США и ФРГ.

Вторые премии получили участники, набравшие не менее 26 очков, в том



2	1	2	1	1	1
3	2	2	1	2	2
1	2	2	1	1	0
2	2	2	1	2	1
1	0	2	3	2	2
1	1	1	2	1	2

1	0	2	0	1	0
2	2	4	2	2	0
1	0	3	1	2	0
1	1	3	2	3	1
0	0	1	2	1	1
0	0	0	1	1	1

числе и С. Струков (28 очков), а третьими премиями были награждены участники, набравшие не менее 18 очков. Всего было награждено 98 из 192 участников, то есть половина всех школьников.

Несмотря на небывалый успех команды СССР, самой большой сенсацией явилось прекрасное выступление команды Монголии, ранее находившейся в числе аутсайдеров, а в этом году занявшей 10 место, впереди команд таких стран, как Франция, Австрия, Швеция. Монгольские школьники завоевали 3 вторых премии.

Жюри присудило один специальный приз. Им был награжден Федя Назаров за оригинальное решение 5-й задачи.

Во время проверки и оценки работ для участников были проведены соревнования, носившие веселый и занимательный характер, по задачам чехословацких конкурсов для шести- и семиклассников. Одна из этих задач изображена на рисунке на с. 45. Несколько задач этих конкурсов приводится также в Задачнике раздела «Квант» для младших школьников» этого номера.

Олимпиада была прекрасно организована. Надолго запомнятся участникам торжественные церемонии открытия и закрытия олимпиады в актовом зале Карлова университета в Праге, экскурсии и прогулки по «златой Праге», посещение замка-резиденции чешских королей в Карлштейне и очень интересной и обширной системы пещер недалеко от Праги, дружеские беседы со сверстниками из многих стран.

Следующая, XXVI Международная математическая олимпиада состоится в 1985 году в Финляндии.

XV
Международная физическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

XV Международная физическая олимпиада проходила в Швеции с 24 июня по 1 июля. В качестве места непосредственного проведения олимпиады была выбрана Гуманитарная школа в небольшом курортном городке Сигтуна, в сорока семи километрах от Стокгольма.

Сигтунская гуманитарная школа — самая большая и известная школа-интернат Швеции. В настоящее время в школе занимается 540 учеников-старшеклассников, в том числе на полном пансионе — 335 человек. (Из числа выпускников этого года были сформированы бригады гидов-переводчиков, которые работали с командами всех стран.) Наряду со стандартными для Швеции курсами обучения в этой школе существует особый, «международный» курс, где обучение проводится на английском языке. Среди учеников школы — дети из разных стран Европы. Успешная сдача экзаменов в этой школе дает право ее выпускникам поступать в университеты пятидесяти стран мира. Школа была основана в 1925 году. Среди окончивших школу — нынешний король Швеции Карл XVI Густав и нынешний премьер-министр Улоф Пальме.

Для участия в олимпиаде съехались команды из 18 стран: Австрии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, Вьетнама, ГДР, Голландии, Исландии, Кубы, Норвегии, Польши, Румынии, Советского Союза, Финляндии, ФРГ, Чехословакии, Швеции, Югославии. Впер-

Команда Советского Союза на XV Международной физической олимпиаде. Слева направо: Л. Закревский, И. Потеряйко, А. Дешковский, А. Алексеев, С. Орлов.

вые в олимпиаде приняли участие Великобритания, Исландия и Норвегия. Из традиционных участников не приехала команда Франции.

По существующему международному статусу физической олимпиады каждая страна может послать команду из пяти школьников. Кандидатами в команду СССР были названы победители XVII Всесоюзной олимпиады, хорошо проявившие себя на зимних сборах в 1983 году и успешно выступившие на XVIII Всесоюзной олимпиаде. Таким образом, на заключительные летние сборы были приглашены семь школьников, выпускников средней школы:

Александр Абанов — с. ш. № 170 г. Краснодара,

Антон Алексеев — с. ш. № 239 г. Ленинграда,

Александр Дешковский — с. ш. № 11 г. Барановичи,

Лев Закревский — с. ш. № 50 г. Минска,

Игорь Курников — с. ш. № 1 г. Гатчины,

Сергей Орлов — с. ш. № 842 г. Москвы,

Игорь Потеряйко — ФМШ № 2 г. Киева.

По установившейся традиции все школьники, приглашенные на сборы, освобождаются от выпускных школьных экзаменов и получают право поступать в любой вуз СССР без вступительных экзаменов.

Заключительные тренировочные сборы включали теоретические занятия, выполнение лабораторных работ, проведение четырех внутренних олимпиад. По итогам этих сборов в команду Советского Союза на XV Международную физическую олимпиаду вошли: А. Алексеев, А. Дешковский, Л. Закревский, С. Орлов и И. Потеряйко. Руководителем делегации был старший научный сотрудник Научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии педагогических наук СССР О. Ф. Кабардин, педагогическим руководителем команды — старший научный сотрудник того же института В. А. Орлов.

Организация и проведение XV Международной физической олимпиады были поручены Шведскому физическому обществу и Министерству образования Швеции. Председателем оргкомитета был назначен Президент Шведского физического общества профессор Бендт Свенссон, специалист в области физики элементарных частиц и космологии. Генеральным секретарем олимпиады был назначен Ларс Сильверберг, специалист в области ядерной физики.

Для подготовки задач и проведения теоретического тура были привлечены ученые Стокгольмского университета. Подготовка и проведение экспериментального тура были возложены на Национальную высшую политехническую школу Стокгольма. Утверждение всех результатов олимпиады, изменение правил ее проведения осуществлялись Международной комиссией, в которую наряду с председателем оргкомитета и генеральным секретарем входили представители от каждой страны-участницы — руководитель делегации и педагогический руководитель команды. Во всех обсуждениях принимали участие также (без права голосования) наблюдатели из Великобритании, Венгрии, Канады, Китая, Советского Союза и Югославии.

Официальными языками олимпиады были английский и русский. На выполнение заданий теоретического тура школьникам отводилось 5 часов, а экспериментального — 4 часа. В качестве вспомогательных вычислительных средств разрешалось пользоваться непрограммируемым калькулятором и логарифмической линейкой.

Участникам были предложены следующие задачи:*)

Теоретический тур

Задача 1

а) Представьте себе плоскопараллельную прозрачную пластинку, показатель преломления которой меняется с расстоянием z от нижней поверхности пластинки (рис. 1). Покажите, что $n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta$.

б) Представьте себе, что вы стоите посередине широкой плоской пустыни. На расстоянии вы видите нечто похожее на водную поверхность. Когда вы приближаетесь к «воде», она постепенно удаляется от вас, так что расстояние до «воды» все время остается равным 250 м. Объясните этот феномен!

в) Вычислите температуру у поверхности Земли для случая б), предположив, что ваши глаза находятся на высоте 1,6 м от поверхности. Показатель преломления воздуха при температуре $t_1 = 15\ ^\circ\mathrm{C}$ и нормальном атмосферном давлении $p = 0{,}1013$ МПа равен $n_1 = 1{,}000276$. Температуру воздуха на высоте, большей 1 м от поверхности Земли, можно считать постоянной и равной $t_2 = 30\ ^\circ\mathrm{C}$. Можно считать, что $(n-1)$ пропорционально плотности частиц в газе.

Задача 2

На некоторых озерах можно иногда наблюдать довольно необычное явление — так называемые сейши*). Озера, на которых наблюдается это явление, обычно протяженные и узкие. Мы привыкли видеть волны на озере, но иногда вода в озере колеблется как чай в стакане, который вы несете своему гостю, находящемуся в другом конце комнаты.

Для создания моделей сейшей используется прямоугольная ванночка. Толщина водяного слоя в ванне h, горизонтальная длина ванны L. Предположим, что поверхность воды вначале составляет небольшой угол с горизонтальной поверхностью. Тогда вода начнет качаться, то есть поверхность воды остается ровной, но колеблется относительно горизонтальной поверхности. Постройте модель движения жидкости и выведите выражение для периода колебаний T сейшей. Начальные условия даны на рисунке 2,*а*. Предполагается, что $\delta \ll h$.

В приведенной на рисунке 2,*б* таблице даны периоды колебаний при разных глубинах воды в двух ванночках с разными длинами. Проконтролируйте каким-нибудь подходящим образом, что выведенная вами формула соответствует экспериментальным данным, и оцените применимость вашей модели.

На рисунке 2, *в* дана диаграмма изменений уровня водной поверхности в озере Веттерн (в Швеции) у его северного и южного концов. Длина озера 123 км, средняя глубина 50 м. Обозначьте шкалу времени на диаграмме.

Задача 3

Электрический фильтр состоит из четырех компонентов так, как показано на рисунке 3,*а*. Импедансом (сопротивлением) источника напряжения можно пренебречь, а нагрузочное сопротивление считать бесконечно большим. Фильтр должен быть таким, чтобы отношение $U_{\text{вых}}/U_{\text{вх}}$ зависело от частоты так, как показано на рисунке 3, *б*. При частоте f_0 разность фаз между $U_{\text{вых}}$ и $U_{\text{вх}}$ равна нулю.

Для построения фильтра вы можете выбрать какие-нибудь из следующих компонентов: два резистора с сопротивлениями по 10 кОм; два конденсатора с емкостями по 10 нФ; две катушки с индуктивностями по 160 мГн (катушки не содержат железа и их активным сопротивлением можно пренебречь).

В результате комбинации четырех компонентов, указанных выше, вы можете сделать фильтр, удовлетворяющий условиям, показанным на рисунке 3, *б*. Определите частоту f_0 и отношение $U_{\text{вых}}/U_{\text{вх}}$ при этой частоте для всех возможных комбинаций компонентов.

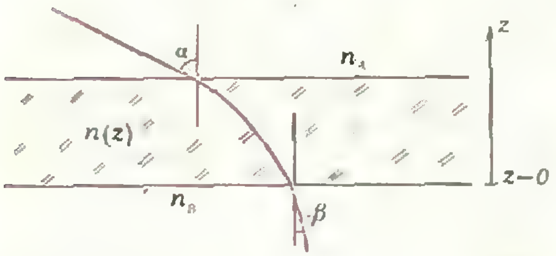
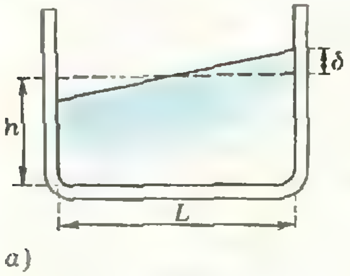


Рис. 1.



а)

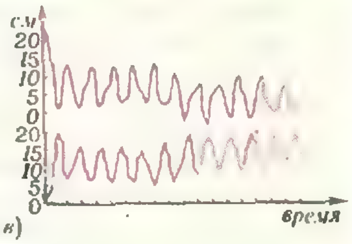
$L = 479$ мм

h, мм	T, с
30	1,78
50	1,40
69	1,18
88	1,08
107	1,00
124	0,91
142	0,82

$L = 143$ мм

h, мм	T, с
31	0,52
38	0,48
58	0,43
67	0,35
124	0,28

б)



в)

Рис. 2.

---

*) Решения этих задач, приведенные на с. 57, подготовлены участником олимпиады А. Дешковским.

*) Сейши — это стоячие волны, возникающие на закрытых водоемах. При сейшах происходят колебания всей массы воды, причем поверхность водоема наклоняется то в одну, то в другую сторону. (*Прим. автора.*)

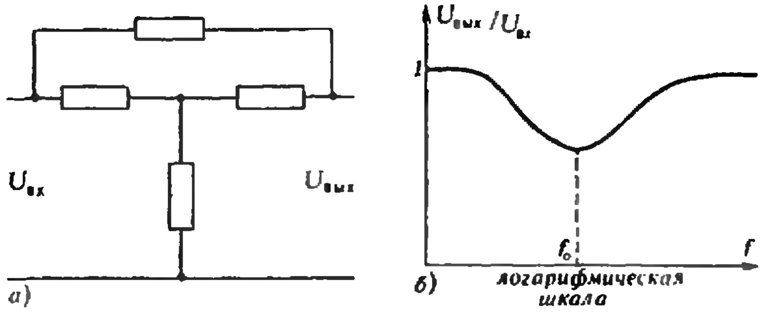


Рис. 3.

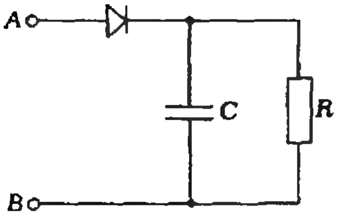


Рис. 4.

Экспериментальный тур

Опишите ваш способ решения экспериментального задания. Для читающего должно быть ясно из вашего описания, почему и каким образом вы решаете различные моменты задания, а также последовательность исполнения этих моментов. Формальное математическое вычисление погрешностей необязательно, достаточно просто оценить ошибку.

Задача 1

Материалы: генератор синусоидальных колебаний частотой 0,20 кГц; осциллограф с двумя каналами (двухлучевой); миллиметровая бумага; диод; конденсатор емкостью 0,10 мкФ (черный, квадратный); резистор с неизвестным сопротивлением (красный); коммутационная доска; соединительные провода.

Постройте цепь, показанную на рисунке 4; определите экспериментальным путем среднее значение мощности, выделяющейся в резисторе *R* при соединении точек *A* и *B* с генератором переменного тока с частотой 0,20 кГц и амплитудой напряжения 2,0 В (то есть между минимумами и максимумами 4,0 В).

Задача 2

В спектре неоновой лампы видны несколько спектральных линий в желто-оранжево-красной области. Одна из желтых линий (на коротковолновом конце этой группы спектральных линий) наиболее яркая. Определите длину волны этой линии. Оцените точность в ваших вычислениях длины волны.

Принадлежности: неоновая лампа, подключенная к источнику переменного напряжения в 220 В; лазер (длина волны его неизвестна); дифракционная решетка с неизвестной постоянной; объект-микрометр (стеклянная пластинка, в центре которой имеется шкала длиной 1 мм, содержащая 100 делений); деревянная метровая линейка; штатив; зажимы.

Примечание. Даже если вы знаете длину волны лазера, вам не разрешается использовать эти данные.

Осторожно!

1. При выполнении задания не допускайте попадания лазерного луча в глаз!

2. Не касайтесь пальцами поверхности дифракционной решетки и объект-микрометра!

Каждая задача и теоретического и экспериментального туров оценивалась в 10 баллов.

Первую задачу теоретического тура полностью решили 5 участников, вторую — 10 (3 — из СССР), третью — 7 (1 — из СССР). Абсолютно лучший результат после теоретического тура был у голландского школьника Яна де Боэра — 30 баллов. У А. Алексеева был второй результат — 29 баллов. Лучшие командные результаты были у команд Румынии и СССР — по 115 баллов. У остальных участников советской команды были следующие результаты: С. Орлов — 25, А. Дешковский — 23, Л. Закревский и И. Потеряйко — по 19 баллов.

Максимальное количество баллов за эксперимент получил школьник из Румынии Мариус Василиу — 17,5. Участники советской команды получили: А. Дешковский и С. Орлов — по 17 баллов, Л. Закревский — 16, И. Потеряйко — 14, А. Алексеев — 10,5. Лучший командный результат за эксперимент был у команды ФРГ — 76,5 баллов, наша команда имела второй результат — 75 баллов.

После подведения итогов лучшие общие результаты оказались у двух школьников — Яна де Боэра из Голландии и Сорина Спаноща из Румынии (по 43 балла). Они были названы абсолютными победителями олимпиады. Трем нашим участникам были присуждены первые премии (как набравшим не менее 90 % от максимального результата) — С. Орлову, А. Дешковскому и А. Алексееву. Л. Закревскому и И. Потеряйко были вручены вторые премии (как набравшим не менее 78 % от максимального результата). Общее число первых премий — 9, вторых — 5, третьих — 16, почетных грамот — 15.

Команда СССР в неофициальном командном зачете заняла первое место (190 баллов), дальше идет команда Румынии (181,5 баллов). Остальные места были распределены следующим образом: Венгрия (153), ФРГ (151,5), Чехословакия (143), Голландия (139,5), Болгария (134), ГДР (122), Польша (111), Великобритания (97 — 4 участника), Швеция (94), Югославия (92), Австрия (87,5), Норвегия (75,5), Финляндия (62,5), Вьетнам (44,5 — 3 участника), Куба (42,5 — 4 участника), Исландия (34 — 2 участника).

А. Алексеев получил специальный приз за исчерпывающее решение задачи № 3 теоретического тура. В процессе проверки работ выяснилось, что официальное решение задачи включало не все возможные варианты. А. Алексеев рассмотрел все принципиальные возможности, и его работа служила жюри в качестве справочника всех возможных ответов. Л. Закревский получил специальный приз как самый юный участник олимпиады.

Во время проведения олимпиады особое место занимала четко спланированная культурная программа. Школьники познакомились с достопримечательностями г. Сигтуны, основанного около 1000 года и имеющего богатое историческое прошлое. Школьники побывали на экскурсии в старой части города Стокгольма, у Королевского дворца наблюдали смену караула, посетили музеи, зоопарк, парк аттракционов, совершили прогулку на пароходе на один из островов, побывали в парке летней резиденции короля Швеции — Дротингхольме. Председатель Совета Стокгольма устроил для участников олимпиады прием в городской ратуше. Встреча проходила в зале, в котором вручаются Нобелевские премии. В день закрытия олимпиады участники побывали в университетском городе Упсала, где посетили строящийся ускоритель.

Закрытие олимпиады проходило в актовом зале Сигтунской гуманитарной школы. В церемонии закрытия принял участие лауреат Нобелевской премии 1981 года за работы в области электронной спектроскопии К. Сигбан. Он тепло поздравил участников с успешным окончанием олимпиады, пожелал дальнейших успехов в овладении физическими знаниями. Он сказал, что участники прошедшей олимпиады в будущем наверняка внесут свой вклад в науку и научно-технический прогресс. Он призвал школьников не забывать о том, что главное завоевание человечества — это мир, обратил внимание на необходимость бережного отношения к окружающей природе. Он подчеркнул, что Международные физические олимпиады проводятся с целью расширения международных контактов в области школьной физики, что они должны способствовать развитию внешкольных занятий, повышению интереса к физике как науке. Школьные олимпиады должны способствовать также установлению дружественных взаимоотношений между молодежью разных стран, помогать укреплению сотрудничества и взаимопонимания между различными народами.

Заключительное слово на закрытии было предоставлено профессору из Югославии Груичу Дражка. От имени всех участников и руководителей команд он поблагодарил оргкомитет за высокий уровень проведения олимпиады, за гостеприимство и теплый прием. Он подтвердил решение югославского правительства о проведении XVI Международной физической олимпиады летом 1985 года в Югославии.

Во время проведения олимпиады проходили многочисленные беседы между представителями разных стран. Было отмечено, что олимпиадное движение становится все более популярным в разных странах. В качестве примера достаточно сказать, что с целью участия в прошедшей олимпиаде команды Великобритании ценой больших усилий со стороны Европейского физического общества были перенесены сроки проведения экзаменов в Кембриджском и Оксфордском университетах.

Представители большинства стран выразили надежду на дальнейшее расширение сотрудничества в области популяризации и пропаганды физико-математических знаний. В этом смысле журналу «Квант» было выделено особое место, поскольку во многих странах «Квант» пользуется большой популярностью.

От имени всей советской делегации хотелось бы еще раз поблагодарить шведскую сторону за гостеприимство, доброжелательность и высокий уровень организации олимпиады, а также сотрудников советского посольства в Стокгольме за большую помощь и поддержку.

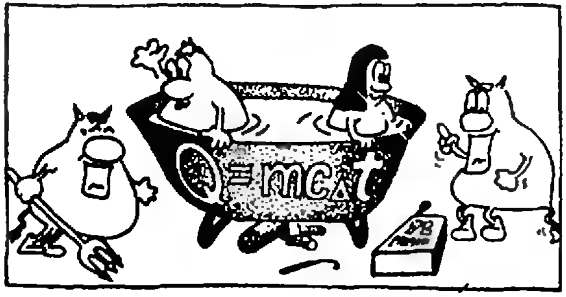
Редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» поздравляют советскую команду и ее руководителей с большой победой и желают им дальнейших творческих успехов.

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

«Квант» в гостях у «Кванта»

Пятнадцать лет на физическом факультете Новосибирского государственного университета шутя работает студенческий клуб «Квант». В этом году шутки членов клуба дошли до нашего журнала, и мы предлагаем читателям совершить вместе с клубом «Квант» традиционную прогулку по ε-окрестности НГУ — Новосибирскому научному центру.

КАПУСТНИК 1983 ДЕНЬ ФИЗИКА
КВАНТ
КЛУБ 3 АПРЕЛЯ КВАНТ



Наше путешествие начинается в главном корпусе НГУ. Вот идет студент Иванов, насвистывая третий закон Ньютона. Совсем недавно Иванов приумножил славу факультета на нуль. Чего он только не знает! Алгебры не знает, анализа не знает, квантовой механики не знает...

На третьем этаже темнеет дверь деканата. Здесь отражают интересы студентов. Напротив двери доска объявлений. «В деканате начинается чтение спецкурса «Методы отчисления». Первое занятие: «Метод последовательного исключения». Из-за двери слышен добродушный разговор: «Захожу на экзамен, а там студентов — режь, не хочу!» Вывешиваются первые итоги. Подсчитано, что студенты физфака уже взяли на 30 % билетов больше, чем их было на столах!

Общежитие. Здесь живут студенты-физики. До сих пор студенты знали свое общежитие, как облупленное. Теперь оно сверкает свежей краской. Из окон доносится грохот — это физики выкидывают свои шутки.

Повернем к студенческой столовой. Шутки в ней не истощаются так же, как работники столовой. Тем не менее повара недовольны: «Как студента ни корми, все равно есть приходит!» Заглянем в меню. Приятная новость: в столовой подготовлено новое блюдо — котлеты «Дожуем до понедельника».

Наш путь ведет к спорткомплексу НГУ. По трассе слалома только что спустился с горы студент Залетаев. Потрясающе! Его время на целых 10 секунд меньше времени свободного падения с той же высоты!

Выходим на проспект, где расположены многочисленные научно-исследовательские институты. Направо по курсу — вычислительный центр. По заказу работников торгового центра тут разрабатывается новая обсчетно-вычислительная машина.

Вдали высится корпус института ядерной физики. Здесь тоже происходит много интересного. Читаем объявления у входа. «Для поломки дорогостоящего прибора в лабораторию № 8 срочно требуется студент». «Вниманию стажеров: установка № 5 в положении переключателя НАЛЕВО — выключена, НАПРАВО — сломана».

На двери в подвал надпись: «Лаборатория фундаментальных исследований». Под ней выведена новая формула для основания натуральных логарифмов: $e=mc^2$. Важнейшим достижением лаборатории стал выдвинутый ею принцип эквивалентности времени и энергии: масса покоя бывает тогда и только тогда, когда есть масса свободного времени. Мы выходим из ИЯФа. Пахнет паленым. Это студенты-практиканты жгут за собой мосты...

Налево — институт автоматики. Учеными этого института создана модель робота-тунеядца. Работа увенчалась успехом — модель не работает.

Институт полупроводников. Предложенный здесь лазерный эталон времени позволяет определить количество секунд в минуте с точностью до седьмого знака.

Выходим на Морской проспект. Институт экономики. В связи с инфляцией на Западе здешние экономисты предложили понизить курс мировых констант на 15—20 %.

В доме культуры «Академия» большая культурная программа. Недавно здесь прошел сеанс телепатии. Телепат Нагорный в течение трех с половиной часов пытался прочесть хоть одну мысль на лице студента Васькина. Не удалось. Знай наших!

Приближаемся к концу нашего путешествия. Слева почта и телеграф. Вот выходит студент Сидоров. Он только что сообщил своим родителям: «Учиться на физфаке трудно. Но мы не сдаем!»

Возвращаемся в НГУ. За время нашего отсутствия пришла телеграмма: «В связи с днем физика в НГУ из МГУ вылетели восемь студентов».

Из репродуктора доносятся последние известия. «По сведениям гидрометцентра СССР, в Академгородке ночью легкое похолодание, до 2—3 градусов ниже абсолютного нуля. Спокойной ночи, дорогие товарищи, мы прощаемся с вами...»

Экскурсию по материалам клуба «Квант» вели В. Матизен и О. Трезубов

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском Ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1985/86 учебный год.

Цель этой школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях по углублению своих знаний по физике и математике. Вот почему при приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно необходима.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе двумя преподавателями — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка (по классам, с указанием итоговых оценок за вступительное задание ЗФТШ). Все материалы по организации кружка следует выслать в адрес ЗФТШ до *25 мая 1985 года.*

Учащиеся ЗФТШ и руководители физико-технических кружков будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а работы членов кружка проверяют его руководители.

С учащимися Москвы проводятся очные занятия по физике и математике (по программе ЗФТШ) два раза в неделю в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ). Набор в эти группы производится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике (справки по телефону 408-51-45).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо аккуратно переписать (на русском языке) в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетрадной обложки наклейте лист бумаги, заполненный по образцу:

1. Область (край или АССР)	*Курская обл.*
2. Фамилия, имя, отчество	*Гончаров Олег Витальевич*
3. Класс	*восьмой*
4. Номер и адрес школы	*Курчатовская средняя школа № 2*
5. Профессия родителей и занимаемая должность:	
отец	*слесарь*
мать	*машинист котельных установок*
6. Подробный домашний адрес	*307239, Курская обл., г. Курчатов, ул. Космонавтов, д. 10, кв. 76.*

Внизу начертите таблицу для оценок за вступительное задание:

№								
Ф								
М								

В тетрадь вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (с указанием класса). В этом конверте вы получите ответ из ЗФТШ

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1985 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1985 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Калининградской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областей, Карельской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Сахалинской и Читинской областей, Красноярского, Приморского и Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки высылают работы по адресу: 660062, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании по физике задачи 1—6 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 3—8 — для учащихся восьмых классов, задачи 5—12 — для учащихся девятых классов.

В задании по математике задачи 1—5 — для седьмых классов, 4—10 — для восьмых классов, 7—13 — для девятых классов.

Вступительное задание

Физика

1 Судно пришвартовано за нос и корму к берегу двумя одинаковыми тросами, образующими угол 60° с линией берега. Под действием ветра, дующего с берега, тросы натянулись так, что сила натяжения каждого троса составляет 10^5 Н. Определите силу, с которой ветер давит на судно.

2. Заканчивая сотый круг, лидер велогонки обогнал основную группу на 3 круга. Определите среднюю скорость лидера, если средняя скорость группы $v=45$ км/ч.

3. Какой массы груз из алюминия нужно привязать к пробке массы $m=20$ г и плотности $\rho_1=0{,}25$ г/см^3, чтобы опущенная в воду пробка находилась в безразличном равновесии? Плотность алюминия $\rho_2=2{,}72$ г/см^3.

4. Теплоизолированный сосуд охлаждается водой, протекающей внутри него по змеевику. Температура воды на входе T_0. Если вода течет по змеевику со скоростью v_1, ее температура на выходе равна T_1. Оказалось, что скорость охлаждения сосуда не изменилась, когда скорость воды стала равной v_2. Определите температуру воды на выходе во втором случае.

5. В плавающем в океане айсберге пробурили сквозной колодец глубиной 200 м. Какую минимальную работу надо затратить для подъема из колодца пробы воды массы $m=0{,}5$ кг? Плотность льда составляет 0,9 плотности воды.

6. Два одинаковых калориметра заполнены до высоты $h=25$ см: первый — льдом, второй — водой при температуре $t_1=10$ °С. Воду выливают на лед. После установления теплового равновесия уровень повысился еще на $\Delta h=0{,}5$ см. Какова была начальная температура льда? Плотность льда $\rho_1=0{,}9\rho$ (ρ — плотность воды). Теплоемкость льда вдвое меньше теплоемкости воды: $c_1=c/2=2100$ Дж/(кг·К). Удельная теплота плавления льда $\lambda=340$ кДж/кг.

7. Определите максимальное число оборотов, которое может сделать за сутки спутник, вращаясь вокруг Земли. Радиус Земли $R=6400$ км.

8. Гладкий диск радиуса R вращается в горизонтальной плоскости вокруг своей оси со скоростью $n=0{,}25$ об/с. От поверхности диска на расстоянии $R/3$ от оси отрывается небольшое тело, которое без трения скользит по диску. Через какое время тело соскользнет с диска?

9. Собрана последовательная цепь из резистора с сопротивлением $R=15$ Ом и двух батареек с параметрами $\mathcal{E}_1=5$ В, $r_1=2$ Ом и $\mathcal{E}_2=10$ В, $r_2=3$ Ом. Что покажут вольтметры, подключенные к каждой из батареек, если батарейки включены навстречу друг другу?

10. В задаче № 5 определите время, через которое можно услышать всплеск воды от камня, брошенного в колодец без начальной скорости. Скорость звука в воздухе $c=330$ м/с.

11. Заряженный конденсатор емкости C соединяют с батареей с электродвижущей силой $\mathcal{E}$. В процессе перезарядки выделилось количество теплоты, равное $5C\mathcal{E}$. Определите первоначальный заряд на конденсаторе.

12. Тонкостенный цилиндр радиуса R раскрутили вокруг его оси симметрии до угловой скорости ω и поставили на пол к стене так, что ось цилиндра параллельна ребру двугранного угла. Сколько оборотов сделает цилиндр до полной остановки, если коэффициент трения между цилиндром и стеной μ, а между цилиндром и полом — 2μ?

Математика

1. Какое из двух чисел больше:

$$\sqrt{1983}+\sqrt{1985} \text{ или } 2\sqrt{1984}?$$

2. Основания трапеции равны 30 см и 40 см, а углы при меньшем основании — 130° и 140°. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

3. Найдите все натуральные числа m и n, удовлетворяющие уравнению $n^2-m^2=117$.

4. Зарплата рабочего составляла 200 рублей. В результате двух последовательных повышений на одинаковое число процентов она возросла до 233 руб. 28 коп. Определите, на сколько процентов повышалась зарплата.

5. Все натуральные числа, начиная с единицы, выписаны подряд. Какая цифра стоит на 1985-м месте?

6. При каких натуральных значениях n число $n^6+2n^5-n^2-2n$ делится на 120?

7. В окружность вписан треугольник ABC. В точке B проведена касательная к окружности. Расстояния от точек A и C до касательной равны 3,2 см и 0,8 см. Найдите длину высоты треугольника ABC, проведенную из вершины B.

8. Четвертый член арифметической прогрессии равен 4. При каком значении разности этой прогрессии сумма попарных произведений ее первых трех членов будет наименьшей?

9. Длины двух сторон треугольника равны 6 см и 8 см, а две его медианы пересекаются под прямым углом. Найдите длину третьей стороны треугольника.

10. В реку впадает приток. Теплоход отходит от пристани A на притоке и идет вниз по течению 80 км до реки, далее — по реке против течения до пристани B, затратив 18 часов на весь путь от A до B. На обратный путь от B до A теплоход затратил менее 15 часов. Какой была скорость течения в притоке, если скорость теплохода в стоячей воде 18 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч?

11. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. На ребрах AD и B_1C_1 взяты соответственно точки M и Q, а на ребре CD — точки P и N так, что

$$|AM|=|C_1Q|=|CP|=|PN|=\frac{a}{3}.$$

Найдите тангенс угла между прямыми (MP) и (QN).

12. Решите уравнение

$$x+\sqrt{x^2(1+x\sqrt{x^2-4x+4})}=x^2.$$

13. Определите, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} axy+x+y=2, \\ yz+y-2z=1, \\ xz-2z+x=-1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Рэндзю — итоги конкурса

Тщательно проверив почти семьсот писем с ответами на задачи по шашкам рэндзю, жюри конкурса определило победителя, нашедшего верные и наиболее короткие выигрышные варианты в большинстве задач. Им стал ученик 10 класса с. ш. № 842 г. Москвы Леонид Глуховский. Ему был вручен приз конкурса, учрежденный редакцией журнала «Квант» и президиумом ПКФР (подготовительный комитет по созданию Федерации шашек рэндзю СССР) — турнирный комплект рэндзю. В числе лучших участников конкурса оказались также: Г. Гребенюк (Уфа), М. Гуляев (Новоалтайск), А. Берсенев (Славянск), О. Большов (Московская обл.), В. Соколовский (Москва), Г. Тютюма (Киев), С. Филиппов (Москва). По результатам конкурса всем участникам был присвоен соответствующий разряд, о котором они узнают из разосланных жюри писем.

В заключение проинформируем читателей, что редакция журнала по Вашей просьбе поможет Вам связаться с одной из ближайших секций рэндзю, которые существуют уже более чем в 70 городах нашей страны.

По многочисленным просьбам читателей приведем с краткими комментариями решения задач конкурса (см. «Квант», 1983, №№ 8, 10).

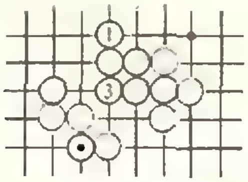


Рис. 1.

1. Самая легкая из конкурсных задач; с ней справились практически все участники.

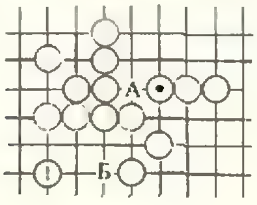


Рис. 2.

2. Приведенное на диаграмме 2 кратчайшее решение не очевидно: большинство присланных решений длиннее. Ход 1 — простейший пример одного из основных тактических приемов эндшпиля — двойное обозначение. Зачастую только таким путем можно выиграть партию. Третий ход, в зависимости от второго хода белых, черные делают в пункты А или Б.

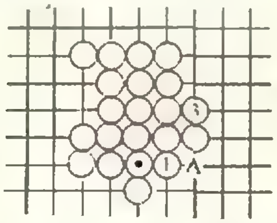


Рис. 3.

3. Черные ходом 1 создают угрозу вилки 3×3. Пятый ход — в пункт А.

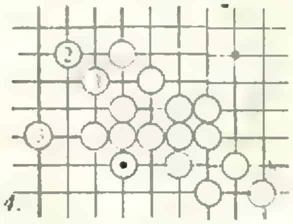


Рис. 4.

4. Исходная позиция черных в этой простой задаче служит иллюстрацией одной из заповедей рэндзиста: нельзя увлекаться атакой, а то это может привести к плачевному финалу.

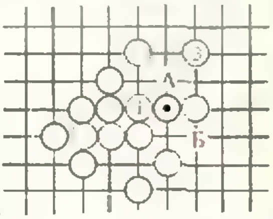


Рис. 5.

5. В атаке важен порядок наступательных ходов. Если первым ходом белые пойдут не в пункт 1, а в пункты А или 3, то черные смогут защититься, *отыграв горизонтальную четверку.*

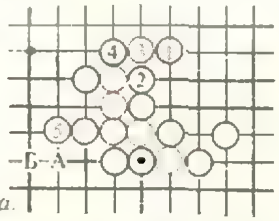


Рис. 6а.

6. Большинство участников конкурса прислали ответы, показанные на диаграмме 6а. Однако первый пришедший в голову маневр часто оказывается ложным, а хорошая позиция безнадежно испорченной. Если здесь черные вторым ходом пойдут в пункт А, а четвертым — в пункт Б, то они успевают перекрыть угрозу белых в пункте 3. Верное кратчайшее решение приведено на диаграмме 6б (если 8 — А, то 9 — В, 11 — Г).

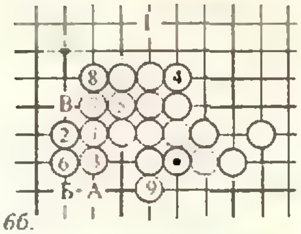


Рис. 6б.

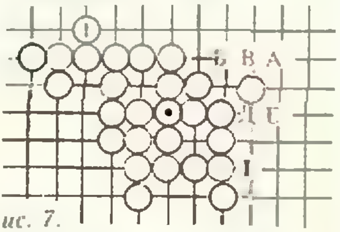


Рис. 7.

7. У белых есть выигрыш на шахах: ходы А — Е. Для защиты (а также для начала выигрышной атаки) у черных есть лишь ход 1.

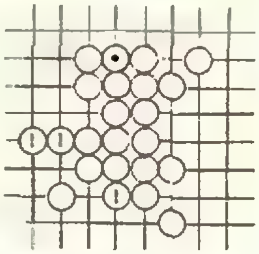


Рис. 8.

8. Неоднозначность решения безусловно сделала задачу менее привлекательной (при игре по правилам классического рэндзю, откуда заимствованы все задачи, решение — единственное). Однако и здесь для нахождения любого из показанных на диаграмме 8 выигрышных ходов нужно было продемонстрировать довольно высокий уровень понимания рэндзю.

9. Попытки выиграть «в лоб» пресекаются контригрой бе-

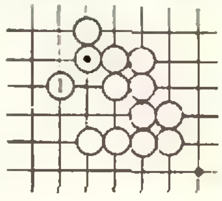


Рис. 9.

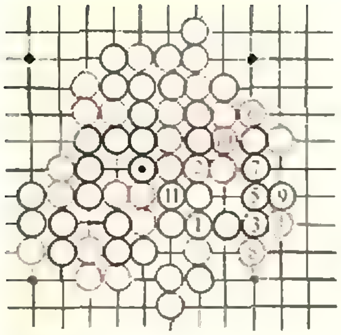


Рис. 10.

лых. К победе приводит лишь обозначение (создание угрозы 4×3) в пункте 1.

10. Самая легкая из задач второго тура.

11. Бросающийся в глаза выигрыш созданием двойного обозначения в пункт 2 (вилки 4×3 в пунктах Б и В) не проходит из-за защиты белых в пункт А. Этот красивый, и

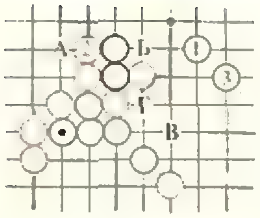


Рис. 11.

порой единственный, способ защиты называется контршахом. Его надо иметь в виду и при атаке. Здесь кратчайший выигрыш достигается последовательными обозначениями 1 и 3. Если же белые делают второй ход в пункт Б, то черные выигрывают ходами Г и В.

12. Очень сложная задача. В этой позиции практически невозможно проследить развитие атаки до конца, и лишь хорошая интуиция, основанная на большом опыте игры, может

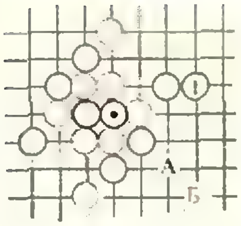


Рис. 12.

подсказать сильный ход. Подмеченная многими участниками конкурса симметрия не является полной из-за разной удаленности краев доски. Поэтому ход 1 является единственным, который не только значительно усиливает позицию черных, но и обеспечивает им пространство для дальнейшего развития атаки. Популярный среди участников конкурса ход в пункт А опровергается защитой в пункт Б.

Н. Н. Александров,
А. Г. Сокольский

Ответы, указания, решения

Сколько площадей у многоугольника?

1. Примените подобие треугольников.

2. Предложение профессора Нонсенса не годится, так как написанные равенства, вообще говоря, не верны. Достаточно проверить их ложность для одного какого-нибудь треугольника (например, для треугольника со сторонами 3, 4 и 5).

3. Примените теорему о равенстве углов с соответственно параллельными сторонами.

4. Нужно проверить, что величина полученного угла не зависит от выбора точки, через которую проводятся прямые, параллельные данным. Проверка основана на той же теореме, что и 3.

5. Прямоугольник со сторонами 34 и 13 закрыт не полностью: между фигурами остаются щели.

6. Пусть проведены оба разрезания (показанные на рисунке 1 синим и красным). Тогда многоугольник разрезан на кусочки, из которых можно сложить треугольники как первого, так и второго способа. Сумма площадей этих кусочков равна каждой из сумм, о которых шла речь. Поэтому эти суммы равны.

7. Формулу (1) можно доказать индукцией по числу самопересечений контура. Совершая индукционный шаг, мы берем одно самопересечение, разрезаем в этой точке провода и соединяем их иначе, так что получится два многоугольника (рис. 2). Из физических соображений ясно, что и сумма потоков вектора $\vec{B}$ через эти два многоугольника равна потоку через прежний многоугольник.

8. Можно применить тот же прием, что в 7.

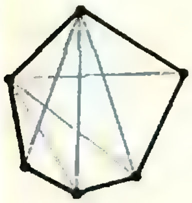


Рис. 1.

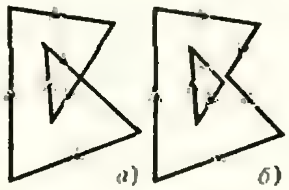


Рис. 2.

Теорема Виета и вспомогательный многочлен

Задачи

5. $u^8+\frac{1}{u^8}=1154$. Указание: число $u=1+\sqrt{2}$ является корнем квадратного трехчлена t^2-2t-1, поэтому $u-\frac{1}{u}=2$; $u^2+\frac{1}{u^2}=6$, $u^4+\frac{1}{u^4}=34$, $u^8+\frac{1}{u^8}=1154$.

10. $\left(1,\ 2,\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{2},\ 2\right)$, $\left(2,\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(2,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 2\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ 2,\ 1\right)$. Указание: полагая $x+y+z=a$, получим:

$$P(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-at^2+at-1=$$
$$=(t-1)(t^2+t+1-at),$$

поэтому один из корней равен 1.

13. $x_1=x_2=\ldots=1$. Указание: положим $P(t)=(t-x_1)(t-x_2)\ldots(t-x_n)=t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n$; тогда $0=P(x_1)+P(x_2)+\ldots+P(x_n)=n+na_1+na_2+\ldots+na_n=nP(1)$, значит, одно из чисел $x_1, \ldots, x_n$ (скажем, x_1) равно 1. Теперь для $x_2, x_3, \ldots, x_n$ получаем аналогичную систему, и т. д.

Упражнения

1. Указание: $\varphi^2+\varphi-1=0$, $\varphi^4=(1-\varphi)^2=1-2\varphi+(1-\varphi)=2-3\varphi$, $\varphi^8=4-12\varphi+9\varphi^2=4-12\varphi+9(1-\varphi)=13-21\varphi$.

2. 1 см, 8 см, 15 см. Указание: три измерения x, y, z параллелепипеда удовлетворяют системе уравнений $4(x+y+z)=96$, $2(xy+yz+zx)=286$, $xyz=120$, то есть являются корнями уравнения $t^3-24t^2+143t-120=0$.

3. $(1,\ 1,\ -1)$, $(1,\ -1,\ 1)$, $(-1,\ 1,\ 1)$. **Указание:** из двух первых уравнений и формул

Виета следует, что числа x, y, z являются корнями многочлена вида $t^3-t^2-t+r=0$ $(xy+yz+zx=((x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2)/2=-1)$. Отсюда, аналогично решениям задач 3 и 4, получаем, что $t^5=(3-r)t^2-(2-r)t-2r$ при $t=x, y, z$. Складывая эти три равенства и используя третье уравнение исходной системы, найдем, что $r=1$, то есть числа x, y и z — корни многочлена $t^3-t^2-t+1=(t-1)^2(t+1)$.

4. $5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$. Указание: рассмотрите многочлен с корнями $u=x-y$, $v=y-z$, $w=z-x$ и, используя соотношение $u+v+w=0$, действуйте аналогично решению задачи 8.

5. Указание: если $P(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3+pt^2+qt+r$, то $-r>1$, $-p<q/(-r)$. Подставляя $t=1$, получим: $P(1)=1+p+q+r>1+p+pr+r=(1+p)(1+r)>0$, то есть $(1-x)(1-y)(1-z)>0$.

Где ошиблись Петя и Вова?

Оба ученика не правы. Пусть имеется система уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y)=g_1(x, y), \\ f_2(x, y)=g_2(x, y). \end{cases} \qquad (1)$$

Петя получил систему

$$\begin{cases} f_1(x, y)=g_1(x, y), \\ f_1(x, y)\,f_2(x, y)=g_1(x, y)\,g_2(x, y). \end{cases} \qquad (2)$$

Системы уравнений (1) и (2), вообще говоря, неравносильны. Ясно, что любое решение системы (1) является решением системы (2). Обратное в общем случае неверно: любое решение системы $f_1(x, y)=g_1(x, y)=0$ — решение системы (2), но может не быть решением уравнения $f_2(x, y)=g_2(x, y)$, а, следовательно, и решением системы (1).

Аналогичную ошибку сделал и Вова. Если бы ребята сделали проверку, то получили бы верный ответ: $(1; 0)$.

Двугранные и трехгранные углы

1. Рассмотрите сечение двугранного угла любой плоскостью, перпендикулярной его ребру и примените соответствующее свойство биссектрисы угла на плоскости.

2. а) Поверните двугранный угол на 180° вокруг оси l.

б) Ответ: в случае, когда прямая l лежит в биссекторной плоскости; при этом рассматриваемых в п. а) плоскостей бесконечно много. См. указание к п. а).

3. а) Докажите, что (любые) две биссекторные плоскости пересекаются и что любая точка линии их пересечения равноудалена от всех трех граней угла и потому лежит на третьей биссекторной плоскости. б) Пусть A, B, C — такие точки на ребрах трехгранного угла, что $|SA|=|SB|=|SC|$, тогда линии пересечения рассматриваемых плоскостей с треугольником ABC — медианы этого треугольника. в) Каждая из рассматриваемых плоскостей есть множество точек, равноудаленных от каких-то двух вершин треугольника ABC из указания к п. б).

4. Ответ: нет. Решение. Рассмотрим трехгранный угол $SABC$, у которого плоские углы BSA и CSA — прямые, а $\widehat{BSC}<60°$, и предположим, что треугольник ABC — правильный (рис. 3). Тогда $|AB|=|AC|$, поэтому $|BS|=|CS|$. Далее, $|BC|<|CS|$, поскольку $\widehat{BSC}<60°$, и $|CS|<|CA|$ (катет меньше гипотенузы). Получили противоречие: $|BC|<|AC|$ в правильном треугольнике ABC.

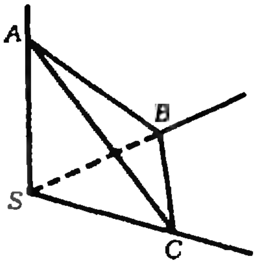


Рис. 3.

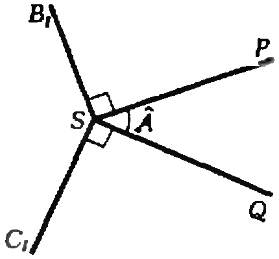


Рис. 4.

5. 1) Пусть $SA_1B_1C_1$ — полярный угол к углу $SABC$, тогда ребро SA перпендикулярно к плоскости SB_1C_1, так как SB_1 и SC_1 по определению полярного угла перпендикулярны к плоскостям SAC и SAB. 2) В сечении двугранного угла при ребре SA, проходящем через S и перпендикулярном к этому ребру, получится картина, показанная на рисунке 4: ребра SB_1 и SC_1 лежат в плоскости сечения и соответственно перпендикулярны сторонам угла PSQ — линейного угла двугранного угла при ребре SA, причем углы B_1SQ и C_1SP — тупые. Отсюда следует, что $\alpha+\widehat{A}=\widehat{B_1SC_1}+\widehat{PSQ}=\pi$. Соотношения (5) следуют из (4) и свойства 1).

6. Ответ: а) $]0; 2\pi[$; б) $]\pi; 3\pi[$. Указания: а) неравенство $\alpha+\beta+\gamma<2\pi$ доказано в статье; то, что любое значение суммы от 0 до 2π возможно, видно из рассмотрения угла при вершине правильной треугольной пирамиды; б) примените свойство 2) полярного трехгранного угла и п. а).

7. а) Воспользуйтесь второй теоремой косинусов. б) Ответ: нет.

8. а) Воспользуйтесь второй теоремой косинусов или рассмотрите «смежный» трехгранный угол, продолжив одно из ребер данного — этот угол будет «равнобедренным» (см. упражнение 11, а). б) Ответ: да.

9. Найдите $\sin^2\widehat{A}$ из равенства $\sin^2\widehat{A}=1-\cos^2\widehat{A}$ и первой теоремы косинусов; покажите, что $\sin^2\widehat{A}/\sin^2\alpha=(1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)/\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$.

10. Все эти прямые перпендикулярны прямой SH из решения задачи 3 в статье.

11. а) Воспользуйтесь второй теоремой косинусов. б) Ответ: нет.

XXV Международная математическая олимпиада

1. Из того, что числа x, y, z положительны, а их сумма равна 1, следует, что каждое из них не превосходит 1. Поэтому $xy+xz+yz-2xyz=xy(1-z)+xz(1-y)+yz\geqslant 0$. Можно считать, что $x\leqslant y\leqslant z$; тогда нетрудно показать, что $x\leqslant\frac{1}{3}$, $y\leqslant\frac{1}{2}$, $z\geqslant\frac{1}{3}$. Из очевидного тождества

$$xz=\frac{1}{3}\left(x+z-\frac{1}{3}\right)+\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)$$

вытекает, что $xz\leqslant\frac{1}{3}\left(x+z-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}-y\right)$, так как $x-\frac{1}{3}\leqslant 0$, и $z-\frac{1}{3}\geqslant 0$. Используя это неравенство и неравенство $y\leqslant\frac{1}{2}$, получаем

$$xy+xz+yz-2xyz=(x+z)y+xz(1-2y)\leqslant$$
$$\leqslant(1-y)y+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}-y\right)(1-2y)=\frac{2}{9}-\frac{2}{9}y-$$

$$-\frac{y^2}{3}=\frac{7}{27}-\frac{1}{3}\left(y-\frac{1}{3}\right)^2\leqslant\frac{7}{27}.$$

2. Решение задачи М897 см. в одном из следующих номеров «Кванта».

3. Рассмотрим все окружности радиуса меньше 1 с центром O. Поскольку их бесконечно много, а число цветов, в которые они раскрашены — конечно, среди них найдутся две окружности, радиусов r и s $(0<r<s<1)$, окрашенные одинаковыми наборами цветов (наборов цветов — тоже конечное число). Возьмем на окружности радиуса r точку Y, для которой $a(Y)=r(s-r)$ (очевидно, $0<a(Y)<1$), тогда $C(Y)$ — это вторая из наших окружностей $(r+r(s-r)/r=s)$. Следовательно, Y — искомая точка (в набор цветов окружности $C(Y)$ входит и цвет точки Y).

4. Решение задачи М896 см. в одном из следующих номеров «Кванта».

5. Левая часть неравенства может быть переписана в виде:

$$\frac{p}{n}<\frac{d}{n(n-3)/2}.$$

Это утверждение можно прочесть следующим образом: среднее арифметическое длин сторон выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин его диагоналей, что повторяет формулировку задачи М846, решение которой помещено в «Кванте» № 7 за 1984 год на с. 53.

Докажем вторую часть неравенства. Сначала рассмотрим случай нечетного числа сторон: $n=2k+1$. Заметим, что длина диагонали, стягивающей две вершины, стоящие через одну, меньше суммы длин сторон с концами в этих трех вершинах. Отсюда d_2 — сумма длин всех таких диагоналей,— меньше, чем $2p$, d_3 — сумма длин диагоналей, стягивающих вершины, лежащие на периметре многоугольника через две,— меньше $3p$, ..., $d_k<kp$. Но сумма $d_2+d_3+...+d_k=d$, а сумма $2p+3p+...+kp=(k+2)(k-1)p/2$. Учитывая, что $n=2k+1$, получаем $(k+2)(k-1)p/2=\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2\right)p/2$. Тем самым неравенство доказано.

В случае $n=2k$ возникают «диаметральные» диагонали, по одну и другую сторону от которых находится по $k-1$ вершин. Нужно заметить, что длина каждой из них меньше $p/2$ и поэтому $d_k<kp/2$. В то же время $d_2+d_3+...+d_{k-1}<p(2+3+...+(k-1))=(k-2)\times(k+1)p/2$.

Окончательно получаем

$$d<\frac{kp}{2}+\frac{(k-2)(k+1)p}{2}=\frac{p}{2}(k^2-2)=$$
$$=\frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2\right).$$

Решение Ф. Назарова, за которое он получил специальный приз жюри, основано на легко устанавливаемом неравенстве для проекций сторон диагоналей на прямую заданного направления и последующего интегрирования этих неравенств по всем направлениям. Известно, что соответствующий интеграл для одного отрезка равен удвоенной длине этого отрезка. Тем самым неравенство для проекций переносится на неравенство для самих отрезков.

6. Решение задачи М898 см. в одном из следующих номеров «Кванта».

XV Международная физическая олимпиада

Теоретический тур

Задача 1

а) Разобьем пластинку на тонкие плоскопараллельные слои с показателями преломления n_1, n_2, ..., n_n (рис. 5). Тогда можно записать:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1}=\frac{n_1}{n_A}, \text{ или } n_A\sin\alpha=n_1\sin\gamma_1,$$

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{n_2}{n_1}, \text{ или } n_1\sin\gamma_1=n_2\sin\gamma_2,$$

. . . .

$$\frac{\sin\gamma_n}{\sin\beta}=\frac{n_B}{n_n}, \text{ или } n_n\sin\gamma_n=n_B\sin\beta.$$

Отсюда получаем

$$n_A\sin\alpha=n_1\sin\gamma_1=n_2\sin\gamma_2=...=n_n\sin\gamma_n=$$
$$=n_B\sin\beta,$$

или

$$n_A\sin\alpha=n_B\sin\beta.$$

б) Пусть наблюдатель смотрит под углом α, а глаз находится в среде с показателем преломления n. Тогда для любой точки с показателем преломления n_x выполняется соотношение (см. пункт а)) $n\sin\alpha=n_x\sin\alpha_x$. Так как $\sin\alpha_x$ не может быть больше 1, луч не войдет в среду с показателем $n_x\leqslant n\sin\alpha$. Обозначим через n_0 показатель преломления у поверхности Земли. Пока угол α мал, $n_0>n\sin\alpha$, и наблюдатель видит песок (рис. 6). При критическом угле $\alpha_{крит}=\operatorname{arcctg} h/L$ $n_0=n\sin\alpha_{крит}$, и в глаз наблюдателя попадает луч, скользящий по поверхности Земли. Наконец, когда $\alpha>\alpha_{крит}$ наблюдатель видит небо, а создается ощущение видения водной глади.

в) Так как $(n-1)$ пропорционально плотности частиц в газе, а плотность частиц обратно пропорциональна температуре газа, можно записать:

$$(n_0-1)T_0=(n_1-1)T_1=(n_2-1)T_2.$$

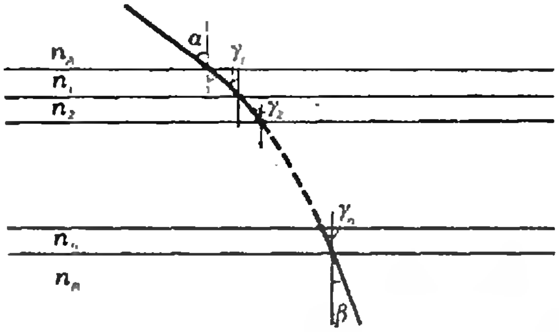


Рис. 5.

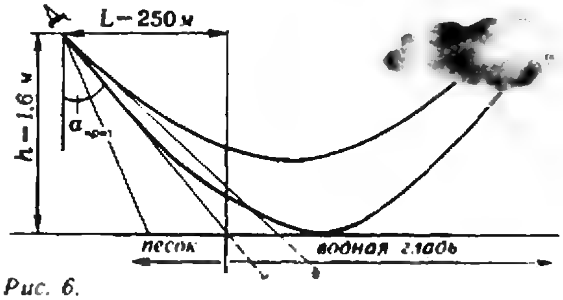


Рис. 6.

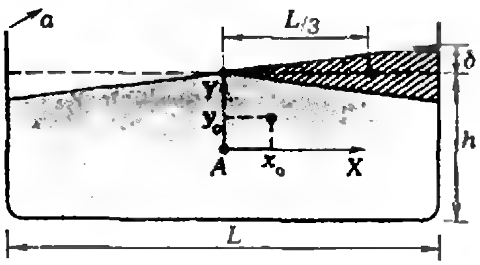


Рис. 7.

где индекс «0» относится к поверхности Земли, индекс «1» соответствует температуре T_1, и «2» — T_2. Как следует из пункта б),

$$n_0 = n_1 \sin \alpha_{\text{крит}} = n_1 L/\sqrt{L^2+h^2},$$

тогда

$$T_0 = T_1 \frac{n_1-1}{n_0-1} =$$

$$= T_1 \frac{n_1-1}{((n_1-1)T_1/T_2+1)L/\sqrt{L^2+h^2}-1} \approx$$

$$\approx 329\ \text{К, или}\ t_0 \approx 56\ {}^\circ\text{C}.$$

Задача 2

Пусть A — центр масс водоема в невозмущенном состоянии (рис. 7). Найдем его координаты x_0 и y_0 в начальный момент колебаний, которые равны амплитудным значениям:

$$x_0 = \frac{\varrho a(\delta L/2)(L/3)}{\varrho aLh} = \frac{\delta L}{6h},$$

$$y_0 = \frac{\varrho a(2/3\delta)(\delta L/4)}{\varrho aLh} = \frac{\delta^2}{6h}.$$

(Отсюда видно, что $x_0 \gg y_0$.) В процессе колебаний координаты центра масс изменяются по законам $x = x_0 \cos \omega t$, $y = y_0 \cos \omega t$, где ω — частота колебаний.

Согласно закону сохранения энергии, начальный запас потенциальной энергии системы равен запасу критической энергии при прохождении системой положения равновесия:

$$\varrho g a \frac{\delta^2 L}{6} = \frac{\varrho aLh}{2}\left((x'(t))^2+(y'(t))^2\right),$$

или

$$\frac{g\delta^2}{3h} = \omega^2\left(\frac{\delta^2L^2}{36h^2}+\frac{\delta^4}{36h^2}\right).$$

Пренебрегая вторым слагаемым по сравнению с первым в правой части равенства, получим

$$\omega = 2\frac{\sqrt{3gh}}{L},$$

откуда период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}.$$

Эту формулу можно проверить, сравнивая значения $T_{\text{выч}}$, вычисленные из нее, со значениями $T_{\text{экс}}$, данными в таблице. Легко заметить, что $T_{\text{экс}} = 1{,}1\,T_{\text{выч}}$. Для озера Веттерн $T_{\text{выч}} \approx 3$ часа, следовательно, единица масштаба на диаграмме соответствует приблизительно 2 часам. Были предложены и другие решения этой задачи. Например, предположив, что образовалась стоячая волна, и зная скорость распространения волн $v=\sqrt{gh}$, получаем $T=2L/\sqrt{gh}$. Можно было также весь водоем представить как большое число сообщающихся сосудов, в каждом из которых происходят колебания с периодом $T=2L/\sqrt{gh}$. Эти решения, предложенные советскими участниками олимпиады, оценивались одинаково с официальным решением.

Задача 3

Полное решение содержит 12 схем электрического фильтра (рис. 8), тогда как в официальное решение входило только 4 первых. Рассмотрим одну из возможных схем (рис. 9) и построим для нее векторную диаграмму (заметим, что метод векторных диаграмм в наших школах не изучается). Из диаграммы найдем

$$U_1 = I_1 R,\quad U_2 = I_1 \omega L,$$

$$I_4 = \frac{\sqrt{U_1^2+U_2^2}}{R} = I_1\frac{\sqrt{R+\omega^2L^2}}{R},$$

$$U_4 \cos\beta = -U_2,\quad U_4 \sin\beta = U_{\text{вых}},$$
$$U_{\text{вх}} = U_1 + U_{\text{вых}},$$

$$\frac{I_1}{\omega C} + \frac{I_2}{\omega C}\cos\alpha = U_2 = I_1\omega L,$$

$$\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}},$$

откуда

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{LC}} = 5{,}6\cdot 10^{4}\ \text{Гц},$$

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{L}{R^2C+L} = 0{,}138.$$

Аналогичные рассуждения можно привести и для всех остальных схем. Можно было решать задачу в общем виде (что и было сделано советскими участниками олимпиады). Обозначим сопротивления каждого элемента через z_1, z_2, z_3 и z_4, найдем искомое отношение напряжений:

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} =$$

$$= 1 - \frac{z_1 z_2}{z_1(z_2+z_3)+z_4(z_1+z_2+z_3)}$$

и представим его в виде

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \delta = 1 - \frac{1}{A+iB}.$$

Сдвига фаз между напряжениями не будет, если $B=0$ и $\delta>0$. Если же $\delta<0$, $\varphi=\pi$. Преобразуем выражение для δ:

$$\delta = 1 - \frac{1}{A+iB} = 1 - \frac{A-iB}{A^2+B^2} =$$

$$= 1 - \frac{A}{A^2+B^2} + \frac{iB}{A^2+B^2},$$

$$\delta^2 = \left(1-\frac{A}{A^2+B^2}\right)^2 + \left(\frac{B}{A^2+B^2}\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{2A-1}{A^2+B^2},$$

откуда следует, что δ минимально при $B=0$, поэтому

$$\delta = 1 - \frac{1}{A}.$$

При $f\to 0$ или $f\to\infty$ $\delta\to 1$ и $A\to\infty$. Это возможно, если: а) $z_1\to 0$; б) $z_2\to 0$; в) $z_3\to\infty$, и

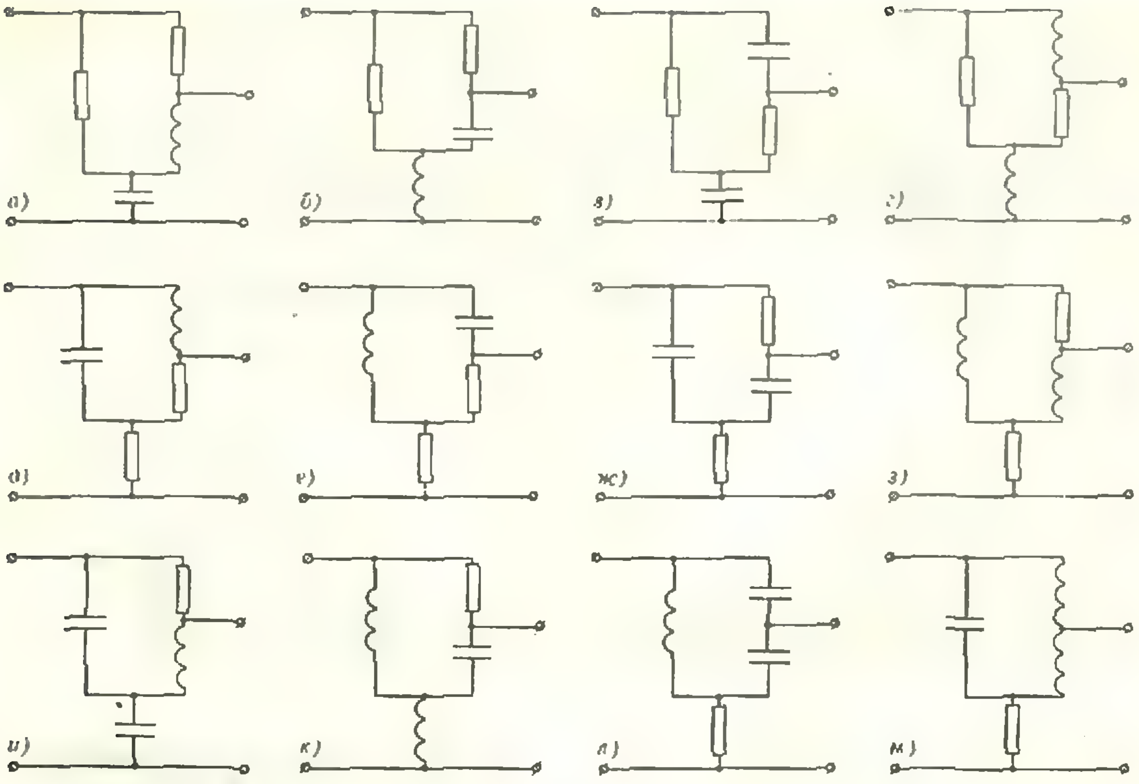


Рис. 8.

$z_2 \not\to \infty$; г) $z_4 \to \infty$, а z_1 и $z_2 \not\to \infty$. Учитывая еще, что δ должно быть больше 0, можно найти значения f и δ для всех приведенных схем.

Экспериментальный тур

Задача 1

Собираем схему, указанную в условии задачи. К выводам схемы и к конденсатору подключаем осциллограф и получаем две осциллограммы, изображенные на рисунке 10. От момента времени t_1 до t_2 конденсатор заряжается от сети, а от t_2 до t_3 — разряжается через резистор. Согласно закону Ома для цепи, содержащей заряженный конденсатор и резистор,

$$\frac{q}{c}+q'(t)R=0,$$

откуда

$$\ln\frac{q}{q_0}=-\frac{t}{RC},\ q=q_0e^{-t/(RC)},$$

$$\text{или } U=U_0e^{-t/(RC)}.$$

Обозначим произведение RC через τ и найдем его значение из осциллограммы:

$$u_{t_2}=0{,}3\ \text{В},\ u_{t_3}=0{,}1\ \text{В},\ t_3-t_2\approx1{,}8\cdot10^{-3}\ \text{с},$$

$$\tau_1\approx1{,}65\cdot10^{-3}\ \text{с}.$$

Нарисуем график зависимости $u=u(t)$ в полулогарифмическом масштабе (рис. 11), из которого видно, что от 3 до 5 мс график представляет собой прямую линию (значит, зависимость действительно экспоненциальная). Из графика найдем

$$\tau_2=\frac{1}{tg\,\alpha}\approx1{,}55\cdot10^{-3}\ \text{с}.$$

Можно считать, что

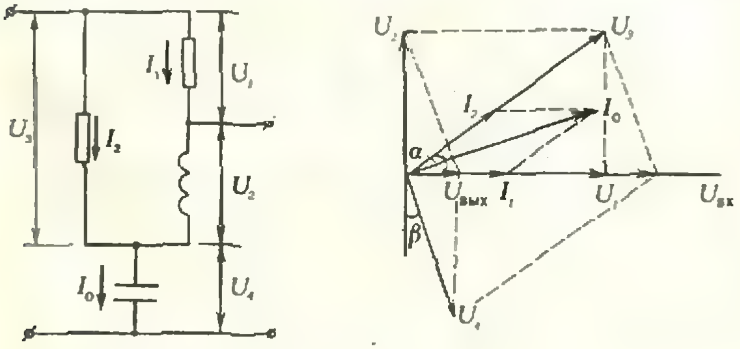


Рис. 9.

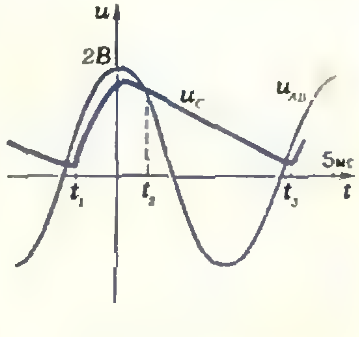


Рис. 10.

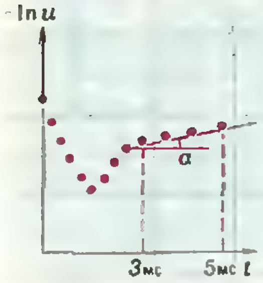


Рис. 11.

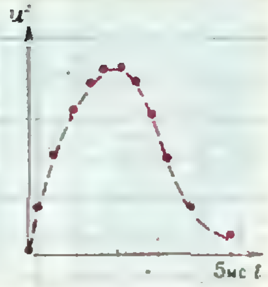


Рис. 12.

$$\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-1}\ \text{с}.$$

Тогда

$$R = \frac{\tau}{C} \approx 16\ \text{кОм}.$$

Теперь построим график зависимости u^2 от t (рис. 12), с помощью которого найдем искомое значение средней мощности, выделяющейся в резисторе:

$$dQ = \frac{u^2}{R}\,dt, \quad P = \frac{\int_0^T dQ}{T}.$$

Здесь $\int_0^T dQ$ — количество теплоты, которое выделяется за период T. Оно равно численно площади под графиком зависимости $u^2(t)$. Полагая $T=5$ мс, получаем

$$P = (50 \pm 2{,}5)\ \text{мкВт}.$$

Задача 2

Для определения длины волны лазера воспользуемся объект-микрометром как дифракционной решеткой:

$$d_0 \sin \alpha_0 = n_0 \lambda_0.$$

Здесь $d_0 = 10^{-5}$ м — постоянная объект-микрометра, α_0 — угол, под которым наблюдается *максимум n_0 порядка*, λ_0 — длина волны лазера. Отсюда

$$\lambda_0 = \frac{d_0 \sin \alpha_0}{n_0}.$$

Проделаем то же самое для дифракционной решетки и найдем ее постоянную:

$$\lambda_0 = \frac{d_1 \sin \alpha_1}{n_1}, \text{ и } d_1 = d_0 \frac{n_1 \sin \alpha_0}{n_0 \sin \alpha_1}.$$

Теперь вычислим длину волны $\lambda_ж$ желтой линии неона. Для этого закрепим лампу в зажиме, закроем ее линейкой, оставив только тонкую полоску, и будем смотреть на нее через дифракционную решетку. Мы увидим несколько ее изображений. Для любого из них можно записать

$$\lambda_ж = \frac{d_1 \sin \alpha_2}{n_2}.$$

Проведя соответствующие измерения и вычисления, для искомой длины волны было получено значение

$$\lambda_ж = (5{,}9 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-7}\ \text{м}.$$

«Квант» для младших школьников

(см. с. 27)

1. Еще 4 стаканчика.
2. Из рисунка 13 легко установить, что каждый из треугольников MNL и LKP равен треугольнику ABD. Отсюда следует, что AL — ось симметрии угла BAD, то есть его биссектриса.
3. Ответ изображен на рисунке 14.
4. На рисунке 15 приведены два возможных решения.
5. При нажатии кнопки звонит звонок и зажигается лампочка над этой кнопкой.

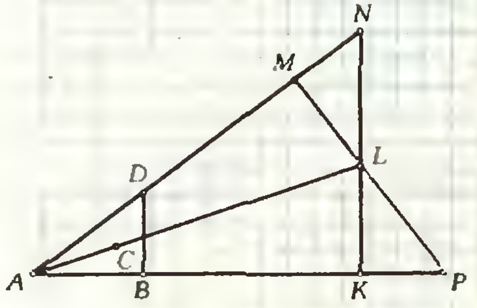


Рис. 13.

	$6^а$	$6^б$	$6^в$	$6^г$	Очки	Счет	Место
$6^а$	▨	1:1	0:1	5:1	3	6:3	2
$6^б$	1:1	▨	0:1	1:2	1	2:4	4
$6^в$	1:0	1:0	▨	1:1	5	3:1	1
$6^г$	1:5	2:1	1:1	▨	3	4:7	3

Рис. 14.

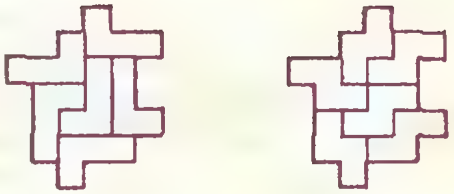


Рис. 15.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 10)

1. *Имеется всего 6 двузначных чисел*, являющихся точными квадратами: 16, 25, 36, 49, 64 и 81, но лишь одно из них — 16 после перестановки цифр образует простое число — 61. Таким образом, есть 4 номера телефона, удовлетворяющие условию: 2-61-16; 3-61-16; 5-61-16; 7-61-16.

2. Если S — площадь треугольника, то его высоты связаны со сторонами соотношениями: $h_a = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$, $h_c = \frac{2S}{c}$. Подставляя эти выражения в заданное соотношение для высот, получаем, что $\frac{2S}{c} = \sqrt{\frac{2S \cdot 2S}{ab}}$, откуда $c = \sqrt{ab}$. В нашем случае $c = \sqrt{7 \cdot 2} = \sqrt{14}$, но $c > a - b$ и то

1	6	9	5
3	4	2	7
8	0	5	4
1	0	0	6

Рис. 16.

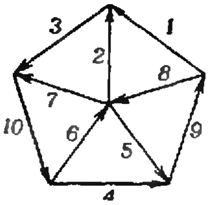


Рис. 17.

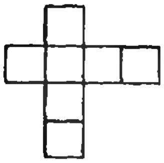


Рис. 18.

время как $\sqrt{14}<7-2=5$. Следовательно, такого треугольника не может быть.

3. Соедините две стеклянные трубки шлангом и приложите их к краю стены. Затем наливвйте в одну из трубок воду, пока уровень воды в ней не сравняется с краем стены. Если кладка не горизонтальна, уровень воды во второй трубе будет ниже или выше края кладки.

4. Заметим, что количество литров масла, содержащегося в семнадцати литровых бидонах должно оканчиваться на 3. Это возможно лишь в том случае, если таких бидонов 9. Отсюда следует, что десятилитровых бидонов — 7, а всего 16 бидонов.

5. См. рис. 16.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 11)

1. Ответ: 73 и 37. Решение. Легко понять, что цифры a и b, из которых составлены эти числа, обе нечетны и ни одна из них не равна 5. Кроме того, они различны. Пусть $a>b$, тогда разность $(10a+b)-(10b+a)=9(a-b)$ должна быть полным квадратом, что возможно лишь при $a-b=4$. Отсюда получаем, что $a=7$, $b=3$.

2. См. рис. 17.

3. При охлаждении жидкости, находящейся в сосуде, основную роль играет испарение со свободной поверхности. На остывающем киселе образуется пленка, которая «закрывает» эту поверхность. Кроме того, кисель очень вязок, в нем практически отсутствует конвекция. По всему по этому кисель охлаждается медленнее компота.

4. Ответ: 27, 2710027, 271002710027 и т. д.

Решение. Число $\overline{100ab...x}$ в 37 раз больше числа $\overline{ab...x1}$. Начнем делить первое число на 37. Первая цифра частного — 2, то есть $a=2$. Учитывая это, делим дальше и получаем, что вторая цифра частного — 7, следовательно, $b=7$. Следующая цифра частного — 1, причем деление произведено нацело. Здесь можно остановиться и получить ответ 27, а можно и продолжить деление и получить остальные ответы.

5. Перебором нетрудно показать, что искомая фигура не может состоять меньше, чем из 7 клеток. На доске, показанной на рисунке 18, начинающий выигрывает, поставив первым ходом крестик в «центральную» клетку.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 8, 9)

Задание 15 (Кин — Мортенсен, Орхус, 1983 г.). **1. b4! cb 2. f4!** Белые создали страшную угрозу Ла1—d1—d4×. **2...Лc6** (2...Л:g3 3. Л:e7×, 2...Лh7 3. Л:e7+! Л:e7 4. Лd1). **3. Лd1 Л:c4 4. Лc7!** Черные сдались.

Задание 16 (Хазан — Сабо, Будапешт, 1983 г.). **1. Kg6!! Л:d4** На 1...fg решает 2. Фd3, а на 1...Лg8 — 2. Фf3. **2. Л:d4 fg 3. Фe4! Фe7** (3...Лf8 4. Ф:g6+ Крe7 5. Ф:g7+ Крe8 6. Л:f8+ С:f8 7. Фg6+ Крe7 8. Лf4 и т. д.) **4. Л:d7! Ф:d7 5. Фa8+** Фd8 6. Фc6+ Фd7 7. Ф:c5 Фb7 8. Фd6 Фc8 9. Ф:b4 g5 10. a3. Черные сдались.

Задание 17 (А. Карпов — Б. Спасский, Москва, 1973 г.). Компенсация за качество у белых достаточная, но можно ли было предположить, что партия продлится всего два хода? Ведь 30.Фd2 не годится — 30...Лad8 31. Ф:d6? Kf8! и верх берут черные.

32.Фg5!f6. Размен ферзей приводил к потере коня. **33.Фg4 Kph7.** Отражая угрозу 34. Л:d6 и Kf5+, но теперь в бой энергично вступает второй конь белых. **34. Kh4!** Черные сдались, убедившись, что в варианте 34...Лg8 (34...Kf8 35.K:g6 с дальнейшим 36.Фh5+ и 37.Л:d6) 35.С:c4 Лg7 36.Л:d6 Ф:d6 37.Khf5 спастись от мата можно только ценой ферзя — 37...Фd1+.

Задание 18 (С. Татаи — А. Карпов, Лас—Пальмас, 1977 г.). Партия получилась эффектной благодаря ходу **23...Фd3!** Не часто ферзь так просто встает под удар неприятельской пешки. **24.ed.** Допускает изящное развитие атаки, но и лучшее 24.Фd2 (24.Ke3 Ф:c2 и С:b2) вряд ли оставляло белым шансы на спасение: 24... Ф:d2+ 25.Кр:d2 Лad8+ 26. Крe1 Лc8 с угрозой Лc2. **24...ed+ 25.Крd2 Лe2+! 26.Кр:d3 Лd8+ 27.Крc4 Л:c2+ 28.Кр:b4 Лcd2! 29.f3 Сf8+ 30.Крa5 Сd7! Белые сдались.**

Чайнворд
(см. с. 26)

1. Эллипс; 2. Стеклов; 3. Высота; 4. Апофема; 5. Арифметика; 6. Ампер; 7. Радиус; 8. Скобки; 9. Интеграл; 10. Лаплас; 11. Синус; 12. Сегмент. На нечетных номерах стоят буквы имени французского математика Эвариста Галуа.

Напечатано в 1984 году

Беседа с академиком А. А. Логуновым 6 2
Беседа с академиком С. П. Новиковым 10 2
День знаний 9 2
Исследования космоса продолжаются 4 2

* * *

Гинзбург В. Л. О ключевых проблемах физики и астрофизики 1 2
Гнеденко Б. В. Математическое творчество и общественный прогресс 2 2
Зельдович Я. Б. Вселенная 3 2
Кикоин И. К. Философские идеи В. И. Ленина и развитие современной физики 5 3

Мигдал А. Б. Как создавалась квантовая теория 8 2

Статьи по математике

Веселов А. П. Классификация пленок 2 16
Веселов А. П., Гиндикин С. Г. Элементарные функции 9 9
Воронин С. М., Кулагин А. Г. Метод производящих функций 5 11
Гиндикин С. Г. Высокой геометрии начала... 11 10
Гончаров А. Б. Решетки и зоны Бриллюэна 6 19
Ершов А. П. На родине великого ученого 8 29
Комиссарчик Э. А., Футер А. Л. Человек, ЭВМ и шахматный эндшпиль 7 9
Матулис А. Ю., Савукинас А. Ю. «Ферзя — в угол», «цзяньшицзы» и числа Фибоначчи 7 18
Понтрягин Л. С. Кубическая парабола 3 10
Приходько Б. К. Решение уравнений на микрокалькуляторе 10 14
Прохоров А. И. Золотая спираль 9 15
Рождественский В. В. Умеете ли вы считать? 4 11
Садовский Л. Е., Садовский А. Л., Садовская О. Л. Пять сетов 8 14
Самаров К. Л., Уроев В. М. Модель Пуанкаре 6 5
Тоом А. Л. Сколько площадей у многоугольника? 12 9
Усманов З. Д., Ходжиев И. Ал-Хорезми 8 27
Яглом И. М. Итальянский купец Леонардо Фибоначчи и его кролики 7 15

Статьи по физике

Артеменко С. Н., Волков А. Ф. Синтетические металлы — новый тип проводников 5 16
Асламазов Л. Г. Сверхпроводящие магниты 9 3
Ашкинази Л. А. Что такое электрический пробой 8 9
Бернштейн П. Б. От Солнца до Земли 6 12
Боровой А. А. Искуственная радиоактивность 1 8
Воинов Е. М. О гидравлическом ударе 7 26
Гринева Г. И., Розенберг Г. В. Дела и проделки феи Морганы 8 20
Займовский В. А. Трещина — враг металла 2 6
Кикоин И. К. Как вводятся физические величины 10 7
Кожушнер М. А. Периодическая система элементов 7 2
Коротихин В. П. Зримая прочность 2 13
Крутогин Д. Г., Летюк Л. М., Морченко А. Т. Магнитная память ЭВМ 11 2
Рузмайкин А. А. О природе космического магнетизма 4 4
Рытов С. М. Из предыстории радио 3 15
Сандлер Ю. М. Если бы Следопыт знал физику ... 7 23
Франк-Каменецкий Д. А. Электрическое сопротивление — квантовое явление 12 2

Новости науки

Волны кристаллизации 4 16
Гало и лед 11 9
Доказательство гипотезы Морделла 3 19
Еще один шаг на пути к абсолютному нулю 7 22
Зачем может понадобиться нейтрино? 6 11
Кольца вокруг Солнца 10 6
Наука-83 4 17
Нейтронная звезда, черная дыра или ...? 5 10
Новый вид радиоактивного распада 8 38
Стабилизированный одноатомный водород 1 7
Существуют ли планетные системы у других звезд? 9 18

Лаборатория «Кванта»

Боровой А. А. Цвета рассеянного света 3 20
Бутиков Е. И. Связанные маятники 5 23
Варламов А. А. Из старых опытов 8 32
Гаврилов С. Л. Фонтаны в парках и дома 6 24
Дозоров А. А. Принцип относительности 10 18
Лапидес А. А. Несколько опытов с объективом 11 19
Медков И. А. Удивительная жидкость 1 21
Пальчиков Е. И. Почему «поет» водопровод? 7 30

Математический кружок

Балк М. Б., Болтянский В. Г. Центр тяжести облегчает решение 4 18
Болтянский В. Г. Экспонента 10 20
Гутенмахер В. Л. Системы линейных уравнений 1 24
Дубровский В. Н. Момент инерции и геометрии 7 33
Ионин Ю. И., Плоткин А. И. Выбор модуля 6 28
Курляндчик Л. Д., Фомин С. В. Теорема Виета и вспомогательный многочлен 12 14
Табачников С. Л. Ошибки в геометрических доказательствах 3 23
Уроев В. М. Инверсия 5 26
Чан Куанг. Если массы заменить на площади ... 8 35

Школа в «Кванте»

Физика 8, 9, 10

Аннигиляция и рождение пар 5 35
Вращение Земли и ускорение свободного падения 1 32
Газ превращается в жидкость 11 25
Гармонические колебания. Сложение колебаний 9 21
Два вида электричества 1 34
Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях 4 24
Диэлектрики, полупроводники, полуметаллы, металлы 2 25
Закон Бернулли 5 33
«Закон нечетных чисел» для свободного падения тел 12 17
Заряд атомного ядра и периодическая система элементов Менделеева 3 31
Как «открыть» второй закон Ньютона? 11 24
Как решается основная задача механики? 2 24

Масса и количество вещества, или Об одной «ошибке» Ньютона 10 26
Об агрегатных состояниях вещества 9 20
Об одном стихотворении А. С. Пушкина 10 25
Постоянный и переменный электрический ток 10 28
Принцип Ферма 1 36
Работа, энергия и архимедова сила 3 27
Рентгеновские лучи 4 25
Столкновения тел 4 23
Теорема, позволяющая решать основные задачи электростатики 12 18
Токи смещения 5 34
Траектория, путь, перемещение 9 19
Уравнение волны 11 27
Фотоэлектрический эффект и кванты 2 29
Что такое радуга? 12 20
Электрическое и магнитное поля 3 28

Математика 8, 9, 10

Где ошибка? 10 30
Где ошиблись Петя и Вова? 12 22
Геометрия помогает решать уравнения 12 22
Двугранные и трехгранные углы 12 23
Еще один прием самоконтроля 10 30
Кто же прав? 9 27
Надо ли делать проверку? 10 31
Об одном способе решения некоторых уравнений 11 29
Простой прием в непростых задачах 9 25
Таблица составных чисел 9 24
Три решения одной задачи 11 29

* * *

Избранные школьные задачи 4—6, 9—11
Дифференцирование сложной функции 4 26
Задачи-матрешки 3 33
Непослушные задачи 5 36
Школа без доски и мела 2 31

Наш календарь

Космологические взгляды Джордано Бруно 6 18
Лев Андреевич Арцимович 2 22
Мои встречи с Дебаем 12 43
Пьер Кюри 5 22
Спектральный анализ 11 23
Эффект Эдисона 9 47
Яков Ильич Френкель 2 23

«Квант» для младших школьников»

Задачи 1—12
Задача в картинках 5, 6, 10, 11
Колмогоров А. Н. Решето Эратосфена 3 35
Кэрролл Л. Вниз по кроличьей норе 7 39
Кэрролл Л. Море слез 8 40
Родина Н. А. Как мы пьем чай 12 28
Родина Н. А. Такая знакомая и такая удивительная вода! 2 34
Розенфельд Б. А. Откуда произошли названия геометрических фигур? 4 30
Розенфельд Б. А. Откуда произошли названия звезд и созвездий 10 36
Савин А. П. В уме и на пальцах 1 40
Стасенко А. Л. Закон Архимеда 9 30

Задачник «Кванта»

Задачи М841—М900; Ф853—Ф912 1—12
Решения задач М826—М883; Ф837—Ф893 1—12
Победители конкурса «Квант» 3 36
Список правильно решивших 3, 6, 9, 12
Энфиаджян Р. Л. Электроемкость — свойство проводника 12 40
Из писем читателей 3 47

Геометрическая страничка

Видимые контуры 1 30
Перспектива 2 38
Эволюта 5 38
Эвольвенты 6 46

Практикум абитуриента

Горкуша П. П. Сведем неравенство к известному 9 49
Данилин В. А. Передача электроэнергии на расстояние 10 53
Козел С. М., Шеронов А. А. Теплоемкость идеального газа 4 46
Можаев В. В. Магнитное поле и магнитные силы 3 51
Самарский Ю. А. Движение по окружности 6 48

Варианты вступительных экзаменов

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1983 году 6 54
Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена 4 56
Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова 4 53
Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина 4 55
Московский архитектурный институт 5 57
Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана 5 56
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина 1 59
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 2 53
Московский инженерно-физический институт 3 55
Московский институт стали и сплавов 3 56
Московский институт электронного машиностроения 1 57
Московский физико-технический институт 1 56
Московский энергетический институт 3 57
Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола 5 54

Олимпиады

XXV Международная математическая олимпиада 12 44
XV Международная физическая олимпиада 12 46
XVIII Всесоюзная олимпиада:
Олимпиада по математике 11 45
Олимпиада по физике 11 49
Экспериментальный тур олимпиады по физике 11 52
X Всероссийская олимпиада школьников 10 56
Задачи Московской городской математической олимпиады школьников 10 60
Избранные задачи 50-й ленинградской городской олимпиады по математике 9 54
Ленинградская городская олимпиада по физике 9 55
Ленинградским олимпиадам — 50 лет 8 56
Первая математическая олимпиада 9 52

Информация

Вечерняя физическая школа при МГУ	8	60
Заочная физическая школа при МГУ	4	52
Заочная физико-техническая школа при МИСиСе	1	54
Заочная школа при НГУ	8	59
Ижевскому НОУ — 5 лет	5	53
МАН «Искатель»	6	52
VI Московский турнир юных физиков	9	57
Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу	1	53
Новый прием на заочное отделение Малого мехмата	1	54
Игры и головоломки	2	4-я с. обл.
	11	»
Бялко А. В. Цепочка с бегущим кольцом	4	42
Климанов А. И. Оригами	8	61
Климанов А. И. Стереоскопические чертежи	7	45
Рэндзю — итоги конкурса	12	54
Спрашивайте — отвечаем	3	22
Уголок коллекционера	5	4-я с.обл.
День космонавтики	4	»
Марки, посвященные Д. И. Менделееву	7	8
Наша обложка	4,8	
Кроссворды	1,9,12	
«Квант» улыбается	2	52
Вот такие мысли	4	45
Гидропаника кисинуса	9	48
Из вступительных работ в ВЗМШ	11	44
«За науку» в гостях у «Кванта»	10	34
«Квант» в гостях у «Кванта»	12	51
Комментарии излишни	7	49
Микроистории	6	45
Оценка за полугодие	3	50

Смесь

Гармонический ряд	7	32
Две задачи о числах Фибоначчи	7	14
Задачи для исследования	2,4,5,10	
Задачи наших читателей	8	34
Из старых задач ВЗМШ	2	32
Катастрофа на экваторе	1	13
Об одном свойстве параболы	4	50
Сколько воды в колбах?	3	35
Спичечный коробок и экстремум	4	51
Турнир памяти Ф. А. Бартенева	8	58

Шахматная страничка

«Бермудский треугольник» в центре доски	5	3-я с.обл.
Каспаров — победитель матчей претендентов	8	»
Перегрузка фигур	2	»
Перекрытие	3	»
Последняя тренировка	9	»
Рентген	1	»
Ученые — гроссмейстеры по композиции	7	»
Четвертый чемпионат среди ЭВМ	4	»
ЭВМ против гроссмейстера	10	»
ЭВМ против чемпиона мира	6	»
Этюды Каспаряна	11	»
Матч века	12	»

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, А. И. Климанов, А. Я. Коршунов, И. Б. Смирнов, Е. К. Тенчурина, П. Э. Чудновский, Е. С. Шабельник
Фото представили:
Л. Д. Шварц

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 18.10.84
Подписано к печати 22.11.84
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Усл. кр.-отт. 23,80
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,77 Т-21369
Цена 40 коп. Заказ 2807 Тираж 172 768 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

МАТЧ ВЕКА

Свои последние партии перед поединком Карпов и Каспаров провели в «матче века»: сборная СССР — сборная шахматистов «остальных стран». В этом увлекательном состязании, которое проходило на десяти досках в четыре круга, верх взяли наши гроссмейстеры со счетом 22:18, несколько улучшив результат (20,5:19,5) почти 15-летней давности. На первых двух досках Карпов и Каспаров выиграли свои матчи с одинаковым счетом 2,5:1,5 (победа и три ничьи) соответственно у Андерссона и Тиммана после упорной борьбы.

А. Карпов — У. Андерссон

Новоиндийская защита

1.d4 Кf6 2.c4 e6 3.Кf3 Сb4+ 4.Сd2 С:d2+ 5.Ф:d2 0—0 6.Кc3 d5 7. e3 Кbd7 8.cd ed 9. Сd3 Лe8 10.0—0 Кe4 11.Фc2 Кdf6 12.b4. Не будем слишком подробно останавливаться на дебютных тонкостях. Ход пешкой типичен для подобных позиций, он определяет так называемую атаку пешечного меньшинства на ферзевом фланге. Некоторая инициатива принадлежит белым, однако в нечто реальное она превратится только через ...70 ходов. **12...c6 13.Кe5 Сf5 14.Кa4! g6 15.Фb2 a6 16.Лfc1 Лe7 17.Кc5 К:c5 18.bc С:d3 19.К:d3 Лc8 20.Лc3 Лcc7 21. Лb3 Кe8 22. Фe2 f6 23. Фf3 Лf7 24. Крf1 Кg7 25. Крe2 Лce7 26. Крd1! Фc8 27.Лab1 h5 28.H3 Кe6 29. h4 Крh7 30. Фh3 Фe8 31. Крc2 Лd7 32. Крb2 Кg7 33. Кf4 Лfe7 34. Крa1 Фf7 35. Лg1 Кe6 36. Кd3 Кg7 37. g4 hg 38. Л:g4 Кh5 39.Лb1. Фe6 40.Фf3 Лg7 41.Лbg1.** В этом положении партия была отложена. Специалисты полагали, что у черных больше шансов на ничью, чем у белых на победу. Однако Карпов придерживается иного мнения. **41...Лde7 42.Крb2!** Задача белых поменять коней и использовать уязвимость неприятельских пешек, но сразу 42.Кf4 не опасно из-за ответа 42...Фf5. Кажется, что сейчас черные могут проявить активность — 42...f5. После 43.Лg5 Фe4 44. Фd1 (44. Ф:e4 Л:e4 45. Кe5 Л:h4 46.К:g6 Лg4 с равенством) 44...Ф:h4 у белых ничего нет. Однако сильнее 43.Л4g2!, и если теперь 43...Фe4 44.Фd1 Ф:h4, то 45. Лh1 Фe4 46. Л:g6! (46. Кf4 Крg8) 46... Кр:g6 (46... Л:g6 47. Ф:h5+ Крg7 48. Фh8+ Крf7 49. Лh7+) 47. Ф:h5+ Крf6 48. Кf4, и черные на краю пропасти; забавна угроза 49. Лe1 и 50. f3.

42...Крh6 43.Крc3 Фf7 44.Кf4 К:f4 45.Л:f4 Лe6 46.Крd2 Фe7 47.Крe2 Крh7 48.Крf1 Крh6 49.Лg3 Крh7 50.Лfg4 Фf7 51.Лf4. На сей раз жертва ладьи не проходит: 51.Л:g6 Л:g6 52.Фf5 Крh6 53.Л:g6+ Ф:g6 54.Ф:e6 Крh5!

51...Крh6 52.Крg1 Крh7 53.Крh2 Крh6 54.Фg2 Крh7 55.Крg1 Лe8 56.Фf3 Лf8 57.Крf1 Фe7 58.Фd1 Фe8 59.Фb1 Крh6 60.Крe2 Фd8 61.Лfg4 Лfg8 62.Крf1 Фe8 63.Фd1 Фe6 64.Фf3 Лf7 65.Крg1 Лfg7 66.a3 Лe7 67.Крh2 Лf7 68.Лf4 Крh7 69.Фd1 Крh6 70.Фd3 Фe8 71.e4! de 72.Л:e4 Фd7 73.Фe3+ Крh7 74.Лe6 Лgg7 75.Лf3 f5 76.h5! gh 77.Фh6+ Крg8 78.Лfe3.

Вся партия протекала в позиционных маневрах, но сейчас могла завершиться тактическим путем — 78...Ф:d4 79.Лe8+ Лf8 80.Л:f8+ Кр:f8 81.Фh8+ Крf7 82.Фe8+ Крf6 83.Фe6+ Крg5 84.Лg3+ Крh4 (84...Крf4 85.Фe3+ с выигрышем ладьи) 85.Ф:f5. Тихий ход, решающий дело. Грозит мат ферзем или ладьей на h3, а на 85...Л:g3 — 86.fg×.

78...Фc7+. Также ведет к быстрой гибели, значительно упорнее было 78...Лe7. **79.Крh3 Лe7 80.Л:e7 Л:e7 81.Фg6+ Крf8 82.Фf6+ Крe8 83.Фh8+ Крd7 84.Л:e7+ Кр:e7 85.Фg7+. Черные сдались.**

Г. Каспаров — Я. Тимман

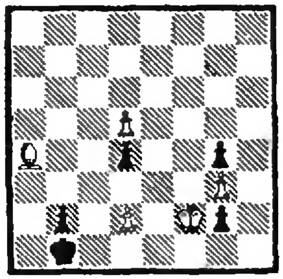
Ферзевый гамбит

1.d4 Кf6 2.c4 e6 3.Кf3 d5 4.Кc3 Сe7 5.Сg5 0—0 6.e3 h6 7.С:f6 С:f6 8.Фc2 c5 9.dc Фa5 10.cd ed 11.0—0—0. Неожиданное решение. Впрочем, белые забирают пешку d5, не слишком оголяя своего короля. **11...Сe6 12.К:d5 Лc8.** После 12...С:d5 13.Л:d5 Ф:a2 14.Сc4 Фa1+ 15.Фb1 С:b2+ 16.Крc2 Ф:b1+ 17. Л:b1 у белых несомненный перевес. **13.Крb1 С:d5.** Если 13...Л:c5, то 14.b4! Л:c2 15. К:f6+ gf 16.ba Л:f2 17.Лd8+, и черным не развязаться. **14.Л:d5 Кc6 15.Сc4 Кb4 16.Фd2 Л:c5 17.Л:c5 Ф:c5 18.Лc1 Фb6 19.Фd7! Лf8.**

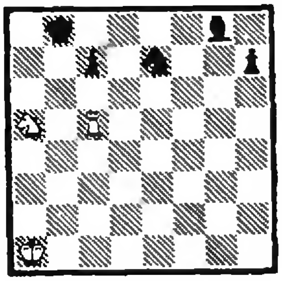
Пассивный ход. Любопытные варианты могли возникнуть после 19...К:a2!? 20.С:f7+ Крf8 (20...Крh7 21.Фf5+ Крh8 22.Лc8+ Л:c8 23.Ф:c8+ Сd8 24.Кр:a2) 21.Кd4 (21.Лc8+ Л:c8 22.Ф:c8+ Кр:f7 23.Фc4+ Крg6 24.Ф:a2 Фb5! с полноценной компенсацией за пешку) 21...С:d4 22.ed. Теперь нельзя 22...К:c1 из-за 23.Сe6 и надо отдавать ферзя. Но 22...Лd8! 23.Лc8 Л:c8 24.Ф:c8+ (24.С:a2 Фg6+!) 24...Кр:f7 25.Фc4+ Фe6! 26.d5 (26.Ф:a2 Ф:a2+ 27.Кр:a2 Крe6 28.Крb3 Крd5 29.Крc3 a5!, создавая отдаленную проходную) 26...Кc3+!! 27.bc Фe1+ и 28...Ф:f2+ с равным ферзевым эндшпилем. Однако Каспаров собирался действовать хладнокровно — 20.Лc2! Кc3+ 21.Крc1 Кe4 22.С:f7+ (22.Ф:f7+ Крh8 23.Фe6 Кd6 с неясной игрой) 22...Крh8 23.Кe5!, но после 23...Фa5 игра продолжалась.

20.Фb5 Фd6 21.e4 Кc6 22.Сd5 a6 23.Ф:b7 Кe5 24.Лc8 Л:c8 25.Ф:c8+ Крh7 26.Фc2 Крg8 27. Кd2 g5 28. a3 Крg7 29. Кf1 Фb6 30. Кg3 Крg6 31.Крa2 h5 32.Фc8 h4 33. Фg8+ Сg7 34.Кh5! Черные сдались.

Конкурсные задания

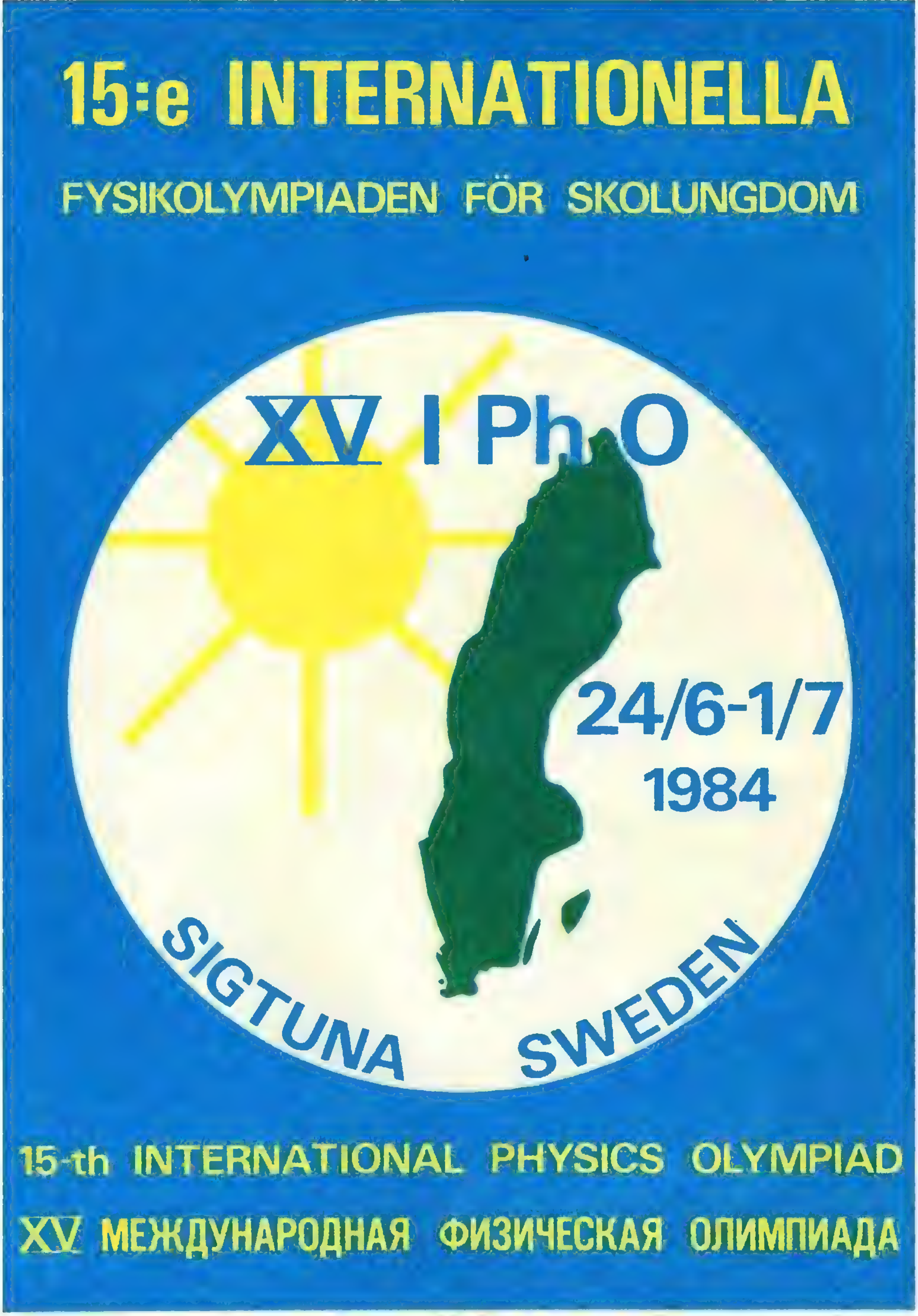


23. Белые начинают и выигрывают.



24. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 февраля 1985 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 23, 24).

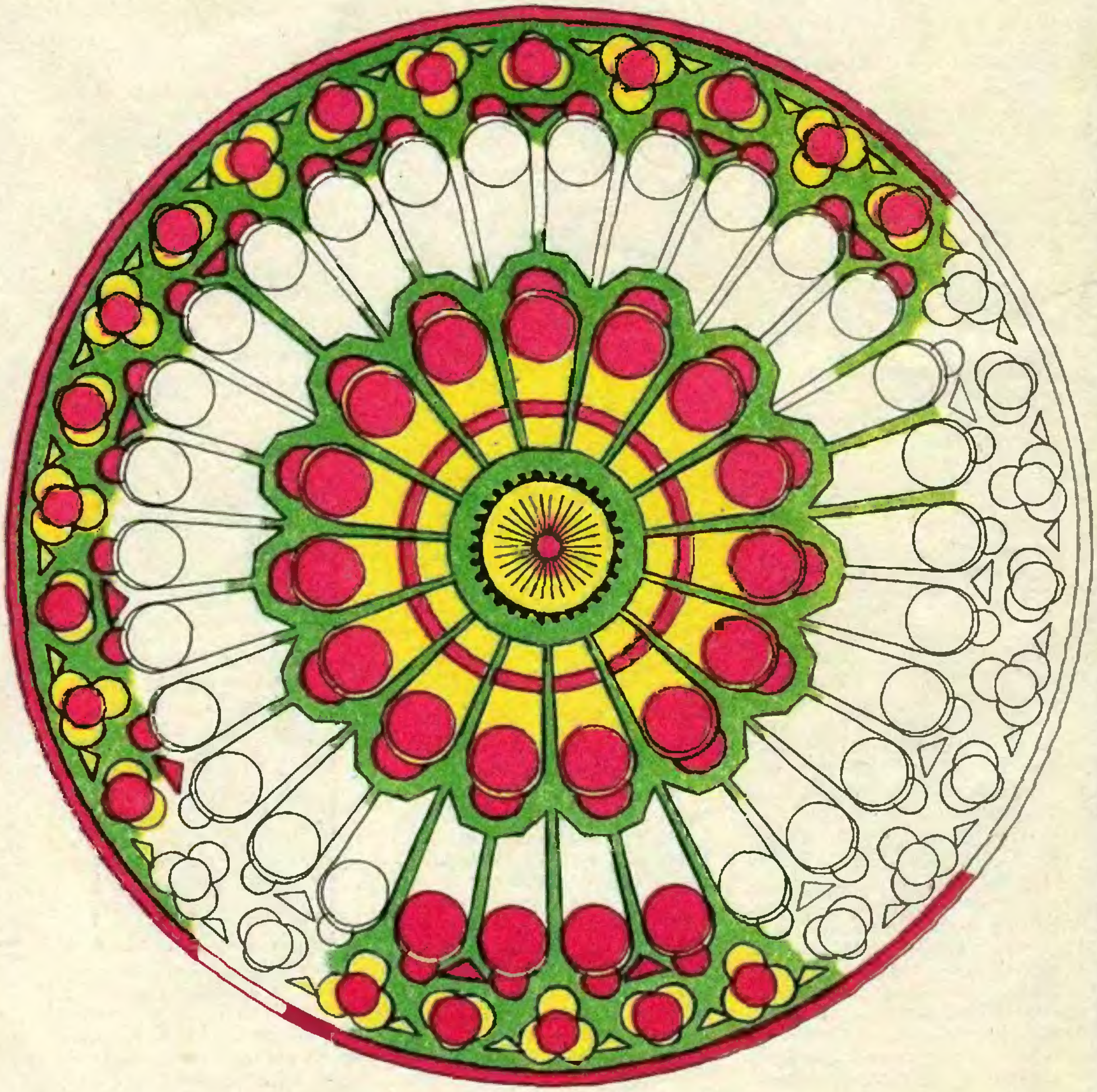
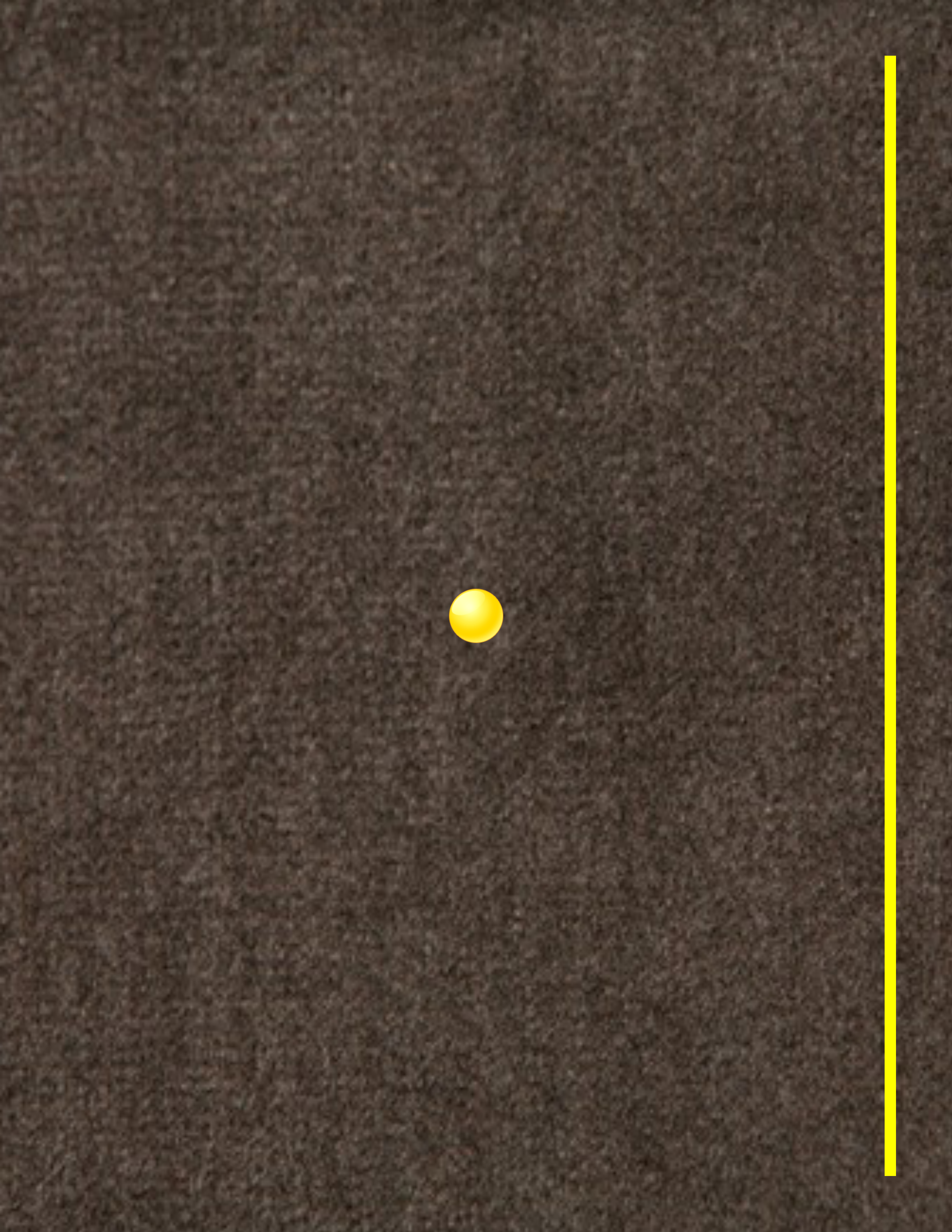

15:e INTERNATIONELLA
FYSIKOLYMPIADEN FÖR SKOLUNGDOM
XV I Ph O
24/6-1/7
1984
SIGTUNA
SWEDEN
15-th INTERNATIONAL PHYSICS OLYMPIAD
XV МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Художники, нарисовавшие эту афишу, позволили себе небольшую смелость. Они символически намекнули на тематику задач, которые предстояло решать участникам олимпиады.

Оргкомитет, заботясь о «неразглашении олимпийской тайны», решил распространить афишу лишь после окончания официальных состязаний. Ее получили все участники и гости олимпиады в качестве сувенира. Справедливы ли были опасения оргкомитета? Ответ на этот вопрос вы можете найти в статье «XV Международная физическая олимпиада».

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Перед вами геометрическая схема большого южного витража собора Парижской богоматери, раскрашенная случайными красками. Схему начертил графопостроитель ЭВМ БЭСМ-6 по программе, созданной в 1983 году московской десятиклассницей Аней Сосинской на VII летней школе юных программистов в г. Новосибирске.